Paolo Paruolo

Analisi di multicointegrazione in sistemi VAR: alcune prospettive.

Serie Ricerche 1993, n.1

Dipartimento di Scienze Statistiche "Paolo Fortunati"
Università degli studi di Bologna

* Lavoro presentato all'incontro di studio organizzato dal Centro Interuniversitario di Econometria (CIDE) su "Modelli dinamici di breve e lungo periodo", Firenze 5-6 novembre 1992, e parzialmente finanziato con fondi MURST 40% e 60%, 1992.

Finito di stampare nel mese di Gennaio 1993
presso le Officine Grafiche Tecnoprint
Via del Legatore 3, Bologna

Indice

1 Introduzione

A circa dieci anni dalla sua introduzione ad opera di C. W. J. Granger all'inizio degli anni ottanta, il concetto di cointegrazione pare rappresentare una nozione ormai centrale nella letteratura internazionale per più di una ispirazione metodologica. Sono testimoni di questa tendenza i numeri monografici recenti del *Journal of Policy Modelling* e dell'*Oxford* Bullettin of *Economics and Statistics*[1], e alcuni volumi pubblicati (Engle e Granger (1991)) o annunciati (Hendry (1992), Banerjee et al. (1992))sul tema.

Mentre le caratteristiche di non-stazionarietà presenti nelle serie storiche macroeconomiche costituiscono essenzialmente proprietà di tipo statistico dei dati, la nozione di cointegrazione è strettamente collegata all'interpretazione economica dei fenomeni considerati. Come ormai evidenziato da numerosi autori[2], il concetto di cointegrazione mette in relazione numerosi aspetti apparentemente non collegati fra loro. Innanzitutto i) esso collega la nozione economica di relazione di lungo periodo fra variabili economiche al modello statistico ad esse relativo. Inoltre ii) permette di derivare, all'interno del modello statistico, procedure inferenziali coerenti con la natura non-stazionaria delle variabili economiche osservate.

Tale concetto, inoltre, iii) è in corrispondenza biunivoca con una rappresentazione a correzione dell'errore del modello per variabili integrate. Pertanto, la proprietà di cointegrazione costituisce un prerequisito statisticamente testabile per la stima di modelli a correzione dell'errore. Attraverso il modello a correzione dell'errore, inoltre, iv) il concetto di cointegrazione collega informazioni empiriche sulla dinamica di breve e di lungo periodo del sistema, ossia sui livelli e sulle differenze successive delle variabili, fornendo così una risposta globale (ossia comprensiva di entrambi gli aspetti) al dibattito sull'uso di modelli di breve (relativi alle variabili in differenze) e quelli di lungo periodo (relativi ai livelli).

Tale concetto v) dà inoltre ragione dei fenomeni di "correlazione spuria" (e di tanti riferimenti al problema della multicollinearità) nella stima di equazioni di regressione con variabili temporali. Infine, *vi)* grazie alla valenza statistica del concetto di cointegrazione, esso si inserisce facilmente nella trattazione recente dei vari concetti di eso-

1 Si vedano Ericsson (19926) e Banerjee ed Hendry (19926).

2 Si veda ad esempio Ericsson (1992*b*), di cui si segue qui la tassonomia.

genità, collegati alle proprietà di ancillarità e sufficienza, nella costruzione appropriata di un modello statistico per le variabili di interesse, cfr. Engle, Hendry e Richard (1983).
Mentre per una discussione generale di questi temi si rimanda alla letteratura[3], in questa sede si intende illustrare alcuni di questi aspetti, assieme ai numerosi temi aperti di ricerca, nel contesto di sistemi integrati di ordine due.
Il presente lavoro è organizzato come segue. Nella sezione 2, una volta illustrata la notazione, si definisce la nozione di cointegrazione in sistemi integrati di ordine superiore al primo. In tali sistemi possono esistere combinazioni stazionarie (relazioni di cointegrazione) fra livelli e le differenze prime del processo, o in generale fra vari ritardi delle medesime variabili; tale proprietà è chiamata *multicointegrazione* e costituisce un caso particolare di *cointegrazione polinomiale* del sistema. Nella sezione 3 si considerano alcuni schemi economici di riferimento; in particolare funzioni quadratiche di costo portano a formulazioni a correzione dell'errore, che, in generale, implicano relazioni di cointegrazione di tipo polinomiale; i parametri di tali relazioni, inoltrè, sono funzioni dei parametri di interesse del modello economico, e permettono pertanto di fare inferenza su di essi. Nella sezione 4 si riportano due esempi, mentre nella sezione successiva si considerano modelli statistici di tipo autoregressivo vettoriale (VAR). Restrizioni parametriche all'interno di tali modelli generano sistemi con vari tipi di nonstazionarietà; tali restrizioni sono relative al rango di alcune trasformate delle matrici del polinomio autoregressivo, e permettono pertanto la derivazione di test statistici sui vari ordini di non-stazionarietà. Alcuni dei recenti risultati di rappresentazione e di inferenza all'interno di tali modelli sono presentati e discussi nella sezione 6; alcune considerazioni conclusive sono infine raccolte, nella sezione 7.

2 Notazione e definizioni

In questa sezione si intendono richiamare solo alcune definizioni relative alle nozioni di integrazione e di cointegrazione. Si consideri un processo aleatorio discreto p-dimensionale $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$,

3 Si veda ad esempio il numero speciale del *Journal of Policy Modelling* (Ericsson 1992*a*) dedicato alla relazione fra cointegrazione, esogeneità e politica economica e alcuni dei lavori del numero monografico dell'*Oxford Bulletin of Economics and Statistics* (Banerjee ed Hendry 1992*a*).

$X_t = (X_{1t}, \dots, X_{pt})'$. Va ricordato che esiste un certo dibattito sulle definizioni di integrazione e cointegrazione, ad esempio in riferimento alle condizioni iniziali e alle componenti deterministiche del processo; per gli scopi di questo lavoro è tuttavia sufficiente ipotizzare che X_t sia generato da un processo ARMA multivariato

$$A(L)X_t = B(L)\varepsilon_t \tag{2.1}$$

dove $A(L) = I - A_1 L - \dots - A_k L^k$ è un polinomio finito dell'operatore ritardo L, $LX_t = X_{t-1}$ e $B(L)$ è un polinomio asintoticamente stabile, ossia per il quale le radici di $det(B(z)) = 0$ sono tutte esterne al cerchio unitario, ε_t è un processo stazionario incorrelato p-dimensionale, $E(\varepsilon_t) = 0$ $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}') = 0$ $s \neq 0$ $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega$, dove Ω è assunta definita positiva; il processo $v_t = B(L)\varepsilon_t$ risulta stazionario e si assume che abbia anche varianza finita[4].
La restrizione dei processi ammissibili alla classe ARMA, sia pure non necessaria, rende più semplice la trattazione seguente. In particolare l'assunzione di processi del tipo (2.1) restringe l'attenzione alle componenti non-deterministiche; tale limitazione è solamente adottata per semplicità espositiva, e deve essere abbandonata in qualsiasi contesto empirico. Nella sezione 5 si fa peraltro riferimento a un processo con alcune componenti deterministiche[5].
Si noti che la classe di processi (2.1) comprende come casi particolari i processi autoregressivi vettoriali (VAR) e i modelli dinamici ad equazioni simultanee.

2.1 Integrazione e *cointegrazione*

Nelle definizioni che seguono si fa spesso riferimento a sottoprocessi del processo multivariato p-dimensionale X_t; per *sottoprocesso* si intende un insieme di $s \geq 1$ combinazioni lineari $\tau' X_t$ linearmente indipendenti di X_t, con τ matrice $p \times s$, di rango $s < p$.
Ogni un singolo processo componente univariato X_{it} costituisce un caso particolare di sottoprocesso, in quanto risulta ottenibile come combi-

4 Tale ipotesi corrisponde alla condizione $\sum_{i=0}^{\infty} \| B_i \| < \infty$, dove $\| A \|^2 = tr(AA')$.

5 Sull'introduzione di componenti deterministiche si veda la discussione ad esempio in Johansen (1992*c*).

nazione lineare $\tau_i' X_t$, per τ_i posto pari ad un vettore unitario con tutti elementi nulli e un elemento unitario nell'i-esima posizione. Nel seguito, dove altrimenti non meglio specificato, ci si riferisce genericamente a singoli processi componenti X_{it} o a sottovettori di X_t come **sot**toprocessi di X_t.

La classe di processi analizzata (2.1) è chiusa rispetto a **pre-moltiplicazione** per una matrice quadrata nonsingolare D (ossia a trasformazioni lineari delle variabili), in quanto moltiplicando la (2.1) per D si ha $(DA(L)D^{-1})DX_t = (DB(L)D^{-1})D\varepsilon_t$ che può essere riscritta ancora come processo del tipo (2.1) $A^*(L)X^*_t = B^*(L)\varepsilon^*_t$ con $A^*(L) = DA(L)D^{-1}$, $B^*(L) = DB(L)D^{-1}$, $\Omega^* = D\Omega D'$ e $X^*_t = DX_t$, $\varepsilon^*_t = D\varepsilon_t$. Pertanto nel seguito ci si riferisce a X_t e $X^*_t = DX_t$ come rappresentazioni equivalenti del medesimo processo multivariato.

DEFINIZIONE D1: INTEGRAZIONE

Ciascun sottoprocesso univariato X_{it} in (2.1) è detto integrato di ordine d se ammette rappresentazione $\Delta^d X_{it} = u_t$, dove $u_t = c_i(L)\varepsilon_t$ è un processo univariato stazionario e $c_i(L)$ è un polinomio asintoticamente stabile, $\Delta = 1 - L$, $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

Si noti che, date le assunzioni sul processo **(2.1)**, l'ordine di integrazione d delle componenti del processo è limitato dalla dimensione p e dall'ordine del polinomio autoregressivo k; in particolare $d \le pk$.
Nelle prime definizioni di cointegrazione, ad esempio Engle e Granger **(1987)**, si consideravano unicamente componenti integrate del medesimo ordine, ossia:

DEFINIZIONE D2: COINTEGRAZIONE

Dato un sistema X_t di processi X_{it} tutti integrati del medesimo ordine $I(d)$, $d \ge 1$, se esiste almeno una combinazione lineare β (detta vettore di *cointegrazione*) tale che $z_t = \beta' X_t$ risulta integrato di ordine $d-1$ o di grado inferiore, allora il sistema è detto *cointegrato*.

É immediato notare, tuttavia, che, per un dato vettore di variabili economiche d'interesse, i processi componenti X_{it} del vettore X_t possono risultare integrati di diverso ordine. Ad esempio nel sistema

$$\begin{pmatrix} \Delta X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{1t-1} \\ X_{2t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

i due sottoprocessi X_{1t} e X_{2t} sono rispettivamente **I(1)** e **I(0)**. Tale caso non ricade nella definizione D2, in quanto questa considera unicamente vettori X_t con componenti tutte integrate del medesimo ordine. Si noti altresì che, considerando la rappresentazione del processo $y_t = (y_{1t}, y_{2t})' = (X_{1t} + X_{2t}, X_{1t} - X_{2t})'$ ottenuta ricombinandone i **sottoproces**si, le componenti del vettore y_t risultano integrate del medesimo ordine, **I(1)**, ed esiste una loro combinazione, e precisamente $y_{1t} - y_{2t} = 2X_{2t}$ che risulta stazionaria. Pertanto, adottando la definizione D2, il vettore y_t risulta cointegrato, a differenza del vettore X_t che non ricade all'interno della definizione in quanto le sue componenti sono integrate di diverso ordine, sia pure X_t e y_t siano rappresentazioni equivalenti del sistema.
La seguente definizione di cointegrazione risulta invece indipendente dalla rappresentazione del sistema.

DEFINIZIONE D2': COINTEGRAZIONE, INTEGRAZIONE MULTIVARIATA

Dato un sistema $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{pt})'$ di processi X_{it} integrati di ordine d_i, $i=1,..,p$, si adotti la notazione $d = \max_i d_i$, e sia $d \ge 1$, $\min d_i \ge 0$; tale sistema è definito integrato di ordine d, $I(d)$ [6]. Se esiste in tale sistema almeno una combinazione lineare β (detta uettore di cointegrazione) tale che il sottoprocesso $z_t = \beta' X_t$ risulta integrato di ordine $d-1$ o di grado inferiore, allora il sistema è detto cointegrato.

6 In altre parole il sistema è detto integrato dell'ordine massimo dei singoli sottoprocessi componenti.

La definizione D2' è invariante rispetto a rappresentazioni equivalenti del processo; il sistema (2.2), infatti, ricade nella definizione D2' anche in termini di X_t, e risulta quindi cointegrato per qualsiasi rappresentazione. Si noti che se si considera la formulazione in termini di X_t nella (2.2), il vettore di cointegrazione è dato da $\beta' = (0, 1)$, ossia da una combinazione lineare "impropria".

2.2 *Indici di integrazione, cointegrazione multipla e multicointegrazione*

Si noti, ancora con riferimento all'esempio (2.2) che anche il numero di possibili vettori di cointegrazione, in questo caso pari ad uno, non dipende dalla rappresentazione del sistema. In un sistema possono esistere più vettori di cointegrazione; in tal caso si parla di *cointegrazione multipla*. In generale l'insieme dei vettori di cointegrazione forma uno spazio lineare. Ad esempio se $\xi_1' = (1, 0, -1)$ e $\xi_2' = (1, -1, 0)$ sono vettori di cointegrazione, anche $\xi_3' = (0, 1, -1) = \xi_1' - \xi_2'$, $\xi_4' = (2, -1, -1) = \xi_1' + \xi_2'$ e $\xi_5' = (3/2, -1/2, -1) = \xi_1' + \xi_2'/2$ sono vettori di cointegrazione. Infatti se X_t è $\mathrm{I}(d)$ e $z_{1t} = \xi_1' X_t$ e $z_{2t} = \xi_2' X_t$ sono al più $\mathrm{I}(d-1)$, anche $\xi_3' X_t = z_{1t} - z_{2t}$ è al più $\mathrm{I}(d-1)$, come anche $\xi_4' X_t = z_{1t} + z_{2t}$ e $\xi_5' X_t = z_{1t} + z_{2t}/2$.

Al fine pertanto di rappresentare lo spazio r-dimensionale di cointegrazione è sufficiente sceglierne una base, ossia un insieme di r vettori di cointegrazione linearmente indipendenti, dove r è la dimensione dello spazio. Nell'esempio precedente è sufficiente scegliere (ξ_1, ξ_2) oppure una qualsiasi coppia di vettori linearmente indipendenti (ξ_i, ξ_j), per $i \neq j$, in quanto ogni altra combinazione lineare ξ_h cointegrata del processo può essere ottenuta come combinazione lineare dei vettori della base.

La dimensione dello spazio di cointegrazione è chiamata in letteratura *rango di cointegrazione*. Tale concetto è tuttavia legato al caso I(1), dove il numero di vettori di cointegrazione linearmente indipendenti è complementare al numero di componenti I(1) non cointegrate. Più in generale è necessario definire un insieme di indici, ciascuno associato alla sottodimensione del processo dominata da una componente integrata di un certo ordine[7]. Ad esempio in un processo I(2) di dimensione p, possono coesistere tre sottoprocessi di dimensioni p_0, p_1, p_2, $\sum_{i=0}^{2} p_i = p$, $p_i \geq 0$, ognuno dominato da componenti integrate di ordine $d = 0, 1, 2$ rispettivamente, non riducibili a processi integrati di ordine inferiore mediante combinazioni lineari, ossia non cointegrate al loro interno. Secondo la definizione D2', le combinazioni lineari che definiscono i sottoprocessi integrati di ordine 1 e 0 costituiscono vettori di cointegrazione. Gli indici di integrazione associati a ciascun sottoprocesso esprimono pertanto la dimensione delle componenti di vario ordine presenti nel processo.

DEFINIZIONE D3: INDICI DI INTEGRAZIONE, RANGO DI COINTEGRAZIONE
Dato un processo p-dimensionale X_t integrato di ordine d, $\mathrm{I}(d)$, si definiscono $d+1$ indici $p_0, p_1, \ldots, p_d$ tali che $\sum_{i=0}^{d} p_i = p$, $p_i \geq 0$, dove ciascun p_j (detto *indice di integrazione*) esprime la dimensione del sottoprocesso integrato di ordine $\mathrm{I}(j)$ e non cointegrato al suo interno. Se il sistema nel suo complesso non è cointegrato, $p_0 = p_1 = \ldots = p_{d-1} = 0$, $p_d = p$. Nel caso $d = 1$, p_0 è detto *rango di cointegrazione*[8].

La definizione precedente, pur generalizzando il caso I(1), *non* descrive completamente le possibili relazioni di cointegrazione all'interno di un sistema. Si consideri infatti un processo X_t integrato di ordine

7 O anche da componenti deterministiche. Un trend lineare, ad esempio, domina asintoticamente componenti I(1), così come un trend quadratico domina componenti I(2), etc. In generale un trend polinomiale di ordine d domina una componente integrata $\mathrm{I}(d)$ di ordine corrispondente.

8 Tale definizione andrebbe completata prevedendo la possibilità di trend deterministici nel sistema. In questo caso occorrerebbe modificare la definizione precedente come segue:

DEFINIZIONE D3': INDICI DI INTEGRAZIONE E DI TREND POLINOMIALI
Dato un processo p-dimensionale X_t integrato di ordine d, $\mathrm{I}(d)$, si definiscono $2d$ indici $p_0, p_1, \ldots, p_d$, $q_1, \ldots, q_{d-1}$ tali che $\sum_{i=0}^{d} p_i + \sum_{i=1}^{d-1} q_i = p$, $p_i \geq 0$, $q_i = 0, 1$ dove ciascun p_j (detto *indice di integrazione*) esprime la dimensione del sottoprocesso integrato di dimensione $\mathrm{I}(j)$ e non cointegrato al suo interno e dove ciascun indice q_j (detto *indice di trend polinomiale*) esprime se esiste $(q_j = 1)$ o meno $(q_j = 0)$ un sottoprocesso di dimensione uno dominato da un trend polinomiale di ordine j.

due, I(2); se tale sistema è cointegrato, esiste (almeno) un vettore β tale che $\beta' X_t$ risulta integrato di ordine inferiore, ossia I(1) o I(0). Le differenze prime del processo X_t sono I(1) per definizione, e se $\beta' X_t$ è I(1) è possibile che X_t e $\beta' X_t$ risultino fra loro cointegrati, ossia che esista una combinazione lineare

(2.3) $$\beta' X_t + \delta^* \Delta X_t$$

che risulti stazionaria. In questo caso si parla di *relazione di multi-cointegrazione*. In altre parole possono esistere delle combinazioni lineari del processo e delle sue differenze prime che risultano stazionarie.

Va notato che, adottata la definizione D2' di cointegrazione, alcune componenti di X_t potrebbero risultare solo integrate di ordine uno I(1), e quindi il vettore differenza ΔX_t potrebbe contenere già delle componenti stazionarie; in questo caso si potrebbe individuare una combinazione stazionaria semplicemente scegliendo un elemento stazionario di ΔX_t, ottenendo quindi un caso banale di multicointegrazione. Al fine di escludere tale eventualità occorre scegliere il sottoprocesso integrato di ordine 2 associato all'indice p_2. Chiamato infatti $\beta_2' X_t$ tale sottoprocesso, le relative differenze prime $\beta_2' \Delta X_t$ sono puramente I(1)[9], e si esclude così il caso banale precedente. In generale pertanto per processi di ordine 2 si ha:

DEFINIZIONE D4: **MULTICOINTEGRAZIONE**[10]

Sia X_t un processo I(2) cointegrato e sia $\beta_2' X_t$ il sottoprocesso associato all'indice di integrazione p_2; se esiste almeno una combinazione lineare stazionaria del tipo

(2.4) $$\beta' X_t + \delta \beta_2' \Delta X_t$$

allora il processo X_t è detto *multicointegrato*.

Le relazioni di multicointegrazione all'interno di un sistema, possono essere considerate come caso particolare di relazioni di cointegrazione polinomiali:

9 Ossia non sono cointegrate al loro interno.

10 Il termine multicointegrazione è dovuto a Granger e Lee (1989, 1991).

DEFINIZIONE D5: COINTEGRAZIONE **POLINOMIALE**[11]

Sia X_t un processo I(d); se esiste un polinomio (matriciale) $\gamma(L) = \gamma_0 + \gamma_1 L + \ldots + \gamma_s L^s$ dell'operatore ritardo, al più di ordine s, $s < d$, $s <$ k, tale che il processo

(2.5) $$\gamma(L) X_t$$

risulta stazionario, allora si dice che esiste *cointegrazione **polinomiale*** nel sistema.

Si noti che, dall'assunzione (2.1), esiste sempre un polinomio di ordine k (e cioè $A(L)$) che soddisfa la condizione (2.5); la condizione che l'ordine del polinomio sia minore o uguale a k − 1 esclude tale caso banale. Inoltre, dalla definizione di integrazione D1 segue che se il polinomio $\gamma(L)$ fosse di ordine d, esso potrebbe riprodurre la d-esima potenza dell'operatore differenza Δ^d $(1-L)^d$, che induce stazionarietà per definizione su X_t. Ancora una volta la condizione sull'ordine di $\gamma(L)$ esclude tale eventualità.

Si noti infine che relazioni del tipo (2.4) sono casi particolari della (2.5), in quanto

$$\beta' X_t + \delta \beta_2' \Delta X_t = (\beta' + \delta \beta_2') X_t - \delta \beta_2' X_{t-1} = (\gamma_0 + \gamma_1 L) X_t$$

con $\gamma_0 = (\beta' + \delta \beta_2')$, $\gamma_1 = -\delta \beta_2'$.

2.3 *Multicointegrazione e sfasamenti temporali di misura*

É interessante notare, inoltre, la non generalizzabilità al caso I(2) (e ad ordini di integrazione superiori) dell'irrilevanza di sfasamenti temporali nella misurazione delle variabili cointegrate. Se infatti x_t e y_t sono I(1) e cointegrate, $z_t = x_t + a y_t \sim I(0)$, allora anche x_t e y_{t-s} risultano cointegrate poichè $w_{st} = x_t + a y_{t-s}$ è stazionaria per qualsiasi ritardo s. Infatti $z_t = w_{st} + a \Delta_s y_t$, ed il termine $\Delta_s y_t = y_t - y_{t-s}$, $\Delta_s = (1 - L^s)$ a secondo membro risulta stazionario[12].

11 Si veda Yoo (1986).

12 Si noti infatti che l'operatore Δ_s ammette scomposizione $\Delta_s = \Delta(1 + L + \ldots + L^{s-1})$; il primo fattore Δ induce stazionarietà quando applicato a y, per ipotesi, mentre il secondo fattore (media mobile) non ne modifica le caratteristiche di stazionarietà, pur generando in generale componenti non invertibili.

Tale proprietà non è generalizzabile al caso I(2). Si considerino ancora ad esempio due processi univariati x_t e y_t integrati di ordine 2, I(2), tali che $z_t = x_t + a y_t \sim I(0)$. Considerando ora la medesima combinazione lineare di x_t e y_{t-1}, $w_{1t} = x_t + a y_{t-1}$, quest'ultima non risulta I(0), in quanto $w_{1t} = x_t + a y_{t-1} = z_t - a \Delta y_t$, e l'ultimo termine a secondo membro è integrato di ordine uno, I(1). Pertanto, nel caso generale, se esiste una combinazione lineare stazionaria dei livelli del processo, mutando la numerazione temporale di alcune delle variabili, si otterranno in generale relazioni di multicointegrazione. Si noti, tuttavia, che tali tipi di fenomeni generano restrizioni sui parametri di multicointegrazione, in quanto il parametro a nell'esempio appare sia come coefficiente del termine dei livelli sia (con segno opposto) come coefficiente del termine in differenza. Pertanto effetti derivati da sfasamenti temporali possono essere sottoposti a verifica sulla base di tali restrizioni. Si noti, infine, che non importa con quale sfasamento vengono misurati i termini in livelli e nelle differenze, in quanto $\beta' X_t$ e $\beta_2' \Delta X_t$ sono entrambi I(1), e quindi per tali termini non sussiste il problema precedente.

3 Alcuni schemi economici di riferimento

Come già ricordato, la nozione di cointegrazione è strettamente collegata alla nozione economica di relazione di lungo periodo. Al fine di illustrare tale tipo di connessione con particolare riferimento a modelli I(2) e alla definizione di multicointegrazione, in questa sezione si fa cenno ai modelli economici collegati alle nozioni di aggiustamento rispetto a relazioni di lungo periodo.

3.1 Modelli a correzione dell'errore

L'introduzione di modelli di correzione dell'errore in economia, parallelo allo sviluppo ingegneristico della teoria del controllo, è attribuita ai contributi di Phillips (1954, 1957) e Sargan (1964). Chiamata y_t una variabile di controllo, si indichi con y^*_t il corrispondente valore desiderato di lungo periodo. Possibili assunzioni su y^*_t sono, ad esempio, quelle di proporzionalità rispetto ad una variabile strettamente esogena x_t, $y^*_t = \beta x_t$ o rispetto a una variabile deterministica, quale un trend di tipo lineare, $y^*_t = \beta t$, ottenuto ad esempio come valore atteso

condizionato della variabile obiettivo w_t, $E_s(w_{s+t}) - w_s = \beta t$ se w_t segue un processo random *walk* con drift [13] $w_t = \beta + w_{t-1} + e_t$.

Modelli di correzione dell'errore $y_t - y^*_t$ sono formalizzabili come segue

$$y_t = D(L)(y_t - y^*_t) \tag{3.1}$$

dove $D(L)$ è un polinomio razionale dell'operatore ritardo. Il modello di aggiustamento parziale corrisponde alla posizione $D(L) = -\gamma/((1-\gamma)(1-L))$. Il modello (3.1) può essere studiato con riferimento alle condizioni necessarie a che il meccanismo di correzione dell'errore produca un processo y_t convergente al valore di lungo periodo y^*_t. Salmon (1982) in riferimento a tali proprietà ha proposto di classificare i tipi di modello a seconda del numero di radici unitarie presenti al denominatore di $D(L)$. Ipotizzato infatti

$$D(L) = \frac{D_1(L)}{(1-L)^j D_2(L)} = \frac{L^j}{\Delta^j} D^*(L) \tag{3.2}$$

dove $D_1(L)$ e $D_2(L)$ sono polinomi finiti e stabili dell'operatore ritardo, si ottengono i seguenti casi particolari dalla (3.1)

tipo 0 $\quad y_t = D^*(L)(y_t - y^*_t)$

tipo 1 $\quad \Delta y_t = D^*(L)(y_{t-1} - y^*_{t-1})$

tipo 2 $\quad \Delta^2 y_t = D^*(L)(y_{t-2} - y^*_{t-2})$

Ciascun tipo di modello garantisce un diverso meccanismo di aggiustamento rispetto all'evoluzione del valore di lungo periodo y^*_t. In particolare si mostra che modelli di tipo j, $j > 0$, assicurano un errore asintotico nullo rispetto all'obiettivo per valori di lungo periodo che si evolvono secondo un polinomio di grado $j-1$, un errore asintotico costante per polinomi di pari grado j ed un errore divergente per polinomi di gradi superiori. Se ad esempio l'obiettivo cresce linearmente, modelli di correzione dell'errore di tipo 1 hanno un errore asintotico finito ma

13 $E_j(\cdot)$ indica l'operatore speranza matematica condizionata all'informazione disponibile al tempo j, $E_j(\cdot) = E(\cdot \mid w_j, w_{j-1}, \ldots)$.

non nullo[14].

In analogia con modelli di controllo, **Phillips** (1954, 1957) propose schemi con controllo dell'errore integrale e derivato, oltre che proporzionale, ossia modelli del tipo:

$$y_t = k_p(y_t - y^*_t) + k_i \sum_{j=0}^{t}(y_j - y^*_j) + k_d\Delta(y_t - y^*_t) \tag{3.3}$$

dove il secondo ed il terzo addendo a secondo membro costituiscono rispettivamente gli elementi di correzione integrale e derivato. Tali modelli considerano non solo la correzione dello scostamento dall'obiettivo corrente ma anche dell'effetto cumulato degli scostamenti, che include pertanto anche la persistenza dei segni e l'entità combinata dei termini di errore passati.

Data l'assenza nel modello di errori di misura, il modello può essere riscritto applicando l'operatore differenza ad ambo i membri, ottenendo

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= k_p\Delta(y_t - y^*_t) + k_i(y_t - y^*_t) + k_d\Delta^2(y_t - Y^*_t) \\ &= \bar{D}(L)(y_t - y^*_t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

che appartiene ai modelli di correzione dell'errore di tipo 1. Pertanto sia schemi di questo tipo (con elementi di correzione integrale e/o derivata) sia generici modelli di correzione dell'errore presentano a secondo membro delle espressioni **polinomiali** nei termini di errore.

Al fine di evidenziare il problema di misura associato ai modelli a correzione dell'errore si consideri ad esempio

$$y_t = \frac{\gamma_1 L}{\Delta^2(1 - \delta_1 L)}(y_t - y^*_t) \tag{3.5}$$

da cui si ottiene

$$\Delta^2 y_t = ((\gamma_1 + \delta_1)L - 2\delta_1 L^2 + \delta_1 L^3)y_t - \gamma_1 y^*_{t-1}$$

e sostituendo ad esempio $y^*_t = \beta x_t$

$$\Delta^2 y_t = \beta_1(L)y_t + \beta_2(L)x_t \tag{3.6}$$

Se **all'ultima** espressione si aggiunge un errore di misura (ad esempio white *noise*) di tipo additivo, si potrebbe concludere di aver ottenuto un modello "di cointegrazione polinomiale". É immediato tuttavia rendersi conto dell'arbitrarietà del livello a cui si è scelto di aggiungere un errore di misura. Ipotizzare, ad esempio un errore di misura nella relazione (3.5) o nella (3.6) ha infatti conseguenze molto importanti, così come l'inclusione di un errore di misura all'equazione (3.3) o alla (3.4). Da queste considerazioni emerge l'importanza delle assunzioni sul modello di misura, rispetto alle quali il modello a correzione dell'errore non dà indicazioni. **Assunzioni** sugli errori di misura coerenti con i fenomeni analizzati porta spesso all'individuazione di un modello, e di un meccanismo di correzione dell'errore, **adeguato**[15].

La natura del processo evolutivo per il valore di lungo periodo y_t è collegata al sentiero di crescita di lungo periodo del modello economico; indicazioni da parte della teoria vanno pertanto ricercate nel modello di riferimento. Inoltre, la plausibilità di meccanismi di correzione dell'errore di tipo j per j maggiore del grado del polinomio dell'obiettivo, al fine di ottenere un errore asintotico nullo, è stata criticata da Nickell **(1985)**, sulla base di considerazioni legate alla funzione di costo, rispetto alla quale risulterebbe più conveniente per gli agenti economici non colmare completamente il divario con il valore di lungo periodo. Pertanto, per tali aspetti pare rilevante analizzare brevemente i modelli di ottimo usualmente considerati.

3.2 Modelli di controllo ottimo

Sia nella letteratura ingegneristica che in quella economica è comune l'assunzione di funzioni di costo di tipo quadratico in problemi di controllo ottimo, in quanto permettono la derivazione di regole di controllo esplicite (e lineari). In ambito economico l'assunzione di costi simmetrici e proporzionali al quadrato degli scostamenti non sono sempre giustificabili; tuttavia le regole di aggiustamento così derivate sono in genere assunte come un'approssimazione, sia pure a volte imprecisa, dei comportamenti degli agenti economici.

Si consideri ad esempio il problema di minimizzazione della seguente funzione di costo quadratica con un orizzonte temporale di un periodo

$$J_t = \gamma_1(y_t - y^*_t)^2 + \gamma_2\Delta y_t^2 \tag{3.7}$$

dove il primo termine quantifica la disutilità associata allo scostamento dal valore obiettivo e il secondo termine esprime il costo dell'aggiustamento. É semplice verificare che le condizioni di minimo implicano

14 Si veda Salmon (1982). Tali fenomeni sono giustificati da Nickell (1985) sulla base della funzione di costo associata.

15 Si veda ad esempio Davidson, Hendry, Sbra e Yeo (1978).

$\Delta y_t = (-\gamma_1/\gamma_2)(y_t - y^*_t)$ ossia un modello di aggiustamento **parziale**[16]. L'introduzione nella funzione di costo di un termine che mitiga la disutilità quando l'aggiustamento della variabile di controllo e la variazione dell'obiettivo sono dello stesso segno porta a meccanismi di correzione dell'errore; infatti se si considera

$$J_2 = \gamma_1(y_t - y^*_t)^2 + \gamma_2 \Delta y_t^2 - \gamma_3 \Delta y_t \Delta y^*_t$$

si ottiene un meccanismo di correzione dell'errore del tipo $\Delta y_t = (-\gamma_1/\gamma_2)(y_t - y^*_t) + \gamma_3/\gamma_2 \Delta y^*_t$. Al fine di ottenere un termine di correzione dell'errore integrale si può introdurre la cumulata degli errori nella funzione obiettivo

$$J_3 = \gamma_1(y_t - y^*_t)^2 + \gamma_2 \Delta y_t^2 + \gamma_4\left(\sum_{i=0}^{t}(y_i - y^*_i)\right)^2$$

ottenendo una regola di correzione dell'errore con un termine integrale

(3.8) $$\Delta y_t = (-\gamma_1/\gamma_2)(y_t - Y^*_t) - (\gamma_4/\gamma_2)\sum_{i=0}^{t}(y_i - Y^*_i)$$

Le funzioni di costo precedenti sono sufficienti a generare meccanismi di correzione dell'errore anche di tipo integrale.
Dal punto di vista economico funzioni di ottimo intertemporale risultano più coerenti con assunzioni di comportamento razionale da parte degli agenti economici. Ipotizzate ad esempio funzioni di costo

$$J_4 = \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \{\gamma_1(y_{t+s} - y^*_{t+s})^2 + \gamma_2(\Delta y_{t+s})^2\}$$

$$J_5 = \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \{\gamma_1(y_{t+s} - y^*_{t+s})^2 + \gamma_2(\Delta y_{t+s})^2 - \gamma_3 \Delta y_{t+s} \Delta y^*_{t+s}\}$$

dove ϕ rappresenta il fattore di sconto intertemporale, la soluzione ottima di tali problemi porta ancora a regole di correzione dell'errore simili alle precedenti, cfr. Nickell (1985).
L'invito di Salmon (1982) di utilizzare modelli intertemporali del tipo J_4 e J_5 per ottenere soluzioni di comportamento ottimo degli agenti sia rispetto alle dinamiche di breve che di lungo periodo sembra non essere stato raccolto in ambito teorico.

16 Data la possibilità di normalizzare i coefficienti γ_i, si può porre la loro somma pari ad **uno**, ossia definire $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$, che dà la usuale formulazione dell'aggiustamento parziale.

Dal punto di vista di misura, tutti i problemi di ottimo precedenti sono formulabili in modo equivalente in situazioni di incertezza; inoltre per il principio di equivalenza certo[17], le soluzioni di controllo dei problemi $J_1, \ldots, J_5$ coincidono nel caso deterministico e stocastico. Si è voluto far qui rifermento alla situazione certa per evidenziare come assunzioni *adeguate* (o ad hoc) sui modelli di misura possano generare una moltitudine di meccanismi di correzione dell'errore o di strutture di cointegrazione, al variare delle assunzioni sulle relazioni di lungo periodo (y^*_t), sulla loro misura, e sul grado di integrazione delle singole variabili osservabili.
Dolado, Gailbraith e Banerjee (1991) hanno analizzato una funzione di costo intertemporale del tipo J_4 congiuntamente ad un modello di misura di lungo periodo $y^*_t = \beta x_t + e_t$, dove e_t è l'errore di misura (assunto stazionario) e x_t è un processo autoregressivo $\rho(L)x_t = \varepsilon_t$ incorrelato con l'errore di misura per ogni sfasamento temporale. La soluzione del problema di ottimo intertemporale porta ad un meccanismo di correzione dell'errore del tipo (3.1) con un termine stocastico derivato da e_t; il processo di y_t può essere espresso come segue

(3.9) $$y_t = F(L)x_t + G(L)e_t$$

dove $F(z)|_{z=1} \neq 0$. La relazione (3.9) permette agli autori di concludere che:
i) se x_t è $I(d)$, anche y_t è $I(d)$
ii) definito $z_t = y_t - \beta x_t$, z_t è in generale $I(d-1)$
iii) la combinazione lineare $z_t - \beta \sum_{i=1}^{d-1} f_i \Delta^i x_t$ è stazionaria, dove $f_i = F^{(i)}(1)(-1)^i/(i!)$ e $F^{(i)}(z)$ indica la derivata (i-esima) del polinomio $F(z)$.
In particolare per $d = 2$ si ottiene un caso di multicointegrazione $z_t - f_1 \Delta x_t \sim I(0)$.
Un diverso modello di misura è illustrato nella sezione 4.1 con riferimento all'esempio di variabili di flusso e stock.
Va sottolineato, pertanto, come le assunzioni sui modelli di misura siano cruciali nella definizione delle caratteristiche osservabili delle serie storiche economiche sotto ipotesi di razionalità degli agenti economici.

17 Si veda ad esempio Caines (1988) p. 678.

4 Alcuni esempi

I due esempi riportati in questa sezione intendono illustrare alcune delle possibili aree di applicazione dei concetti introdotti nelle sezioni precedenti.

4.1 Variabili di flusso e di stock

L'introduzione del **termine** "multicointegrazione", è dovuta a Granger e Lee (1989, **1991**), ed è **avvenuta** in collegamento allo studio di relazioni fra variabili di flusso e di stock. Si consideri ad esempio la produzione y_t, le vendite w_t e le variazioni nelle scorte z_t di una unità produttiva. Per definizione

$$y_t - w_t = z_t$$

Se le vendite e la produzione sono integrate di ordine uno I(1) e le variazioni delle scorte sono stazionarie, I(0), allora produzione e vendite sono cointegrate con vettore di cointegrazione $\beta' = (1, -1)$. In altri termini è ipotizzabile che vendite e produzione presentino lo stesso trend **(stocastico)**. Le scorte, a meno del valore iniziale, sono costituite dalla cumulata delle relative variazioni, ossia da $Z_t = Z_0 + \sum_{i=1}^{t} z_i$. Se z_t è I(0), allora Z_t è I(1), in quanto $z_t = \Delta Z_t$.

Considerando inoltre le scorte Z_t e le vendite w_t, anche tali due variabili dovrebbero condividere il medesimo trend al fine di mantenere sotto controllo la gestione dello stoccaggio; in altri **termini** Z_t e w_t devono risultare cointegrate; ad esempio $Z_t + aw_t \sim I(0)$. Indicando pertanto con $Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} y_i$ e con $W_t = W_0 + \sum_{i=1}^{t} w_i$ le cumulate dei processi di produzione e di vendita (Y_t e W_t produzione e vendite dall'inizio del campione, $Z_t = Y_t - W_t$), si ha

$$(4.1) \qquad (1 \quad -1)\begin{pmatrix} Y_t \\ W_t \end{pmatrix} + (0 \quad a)\begin{pmatrix} \Delta Y_t \\ \Delta W_t \end{pmatrix} = Z_t + aw_t \quad \sim \quad I(0)$$

ossia un esempio di multicointegrazione $\beta' X_t + \delta\beta_2' \Delta X_t \sim I(0)$ per $X_t = (Y_t, W_t)'$. L'applicazione di tali principi (sfruttando le conoscenze a priori sul vettore $\beta' = (1, -1)$) a dati settoriali statunitensi ha inoltre dato risultati incoraggianti, cfr. Granger e Lee (1989). Ragionamenti analoghi possono probabilmente essere proposti in altri contesti con variabili di flusso e di stock.

Il modello di multicointegrazione precedente può essere ottenuto come soluzione di un problema di ottimo uniperiodale del tipo J_3 della sezione precedente, che dà come regola di correzione dell'errore equazioni del tipo (3.8). Granger e **Lee** definiscono esplicitamente un particolare problema di controllo di tipo stocastico. Detta y_t la variabile rispetto alla quale si formano gli obiettivi y^*_t, c_t la serie di controllo, $z_t = y_t - y^*_t$, $Z_t = \sum_{i=0}^{t} z_i$, la quantità da minimizzare diviene $J = E_{t-1}(\gamma_1 z_t^2 + \gamma_2 (Z_t - Z^*_t)^2 + \gamma_3 (c_t - c_{t-1})^2)$. Il modello di misura adottato dagli autori è $y_t = c_{t-1} + x_{t-1} + \varepsilon_t$, con un risultante meccanismo di correzione dell'errore del tipo

$$\Delta y_t = k_p (y_{t-1} - y^*_{t-1}) + k_i (Z_{t-1} - Z^*_{t-1}) + a_1 \Delta x_{t-1} + a_2(L)\varepsilon_t$$

Le assunzioni sul grado di integrazione delle singole serie nell'espressione precedente possono portare alla definizione di una relazione di multicointegrazione, cfr. Granger e Lee (1991), pur essendo compatibili con diverse assunzioni di questo tipo[18].

4.2 Aggregati nominali

Molti aggregati nominali presentano elevata persistenza temporale; in particolare anche le differenze prime di molti aggregati paiono spesso non stazionarie. Un esempio spesso citato è quello del livello generale dei prezzi, le cui differenze logaritmiche (il tasso di inflazione), paiono integrate di ordine 1, I(1). Di conseguenza il logaritmo del livello dei prezzi sarebbe integrato di ordine due, I(2).

18 Va notato che un modello di misura ARMA del tipo (2.1) può valere alternativamente per X_t o M_t. Assumendo ad esempio una formulazione VAR per X_t si ottiene una rappresentazione di ΔX_t con radici unitarie nella parte a media mobile. Tali considerazioni consigliano cautela, ad esempio, nell'utilizzo di tecniche a due stadi **applicate** in un primo passo alle differenze prime e in secondo tempo ai livelli delle variabili, cfr. Granger e **Lee** (1989, 1991).

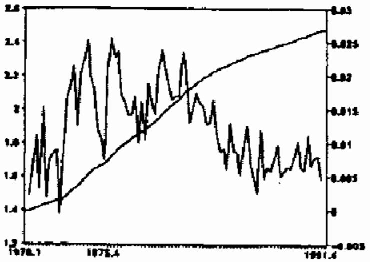

Fig 1. p, logaritmo del deflattore del PIL (scala di sinistra) e sue differenze prime (scala di destra)

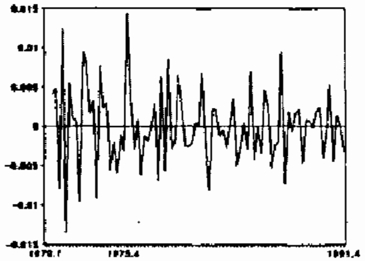

Fig 2. **Differenze** seconde di p

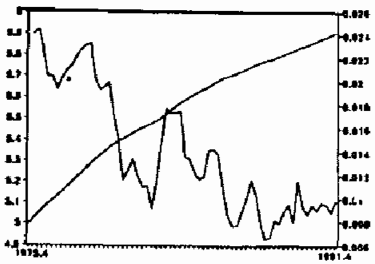

Fig 3. m, logaritmo di M2 (scala di sinistra) e sue differenze prime (scala di destra)

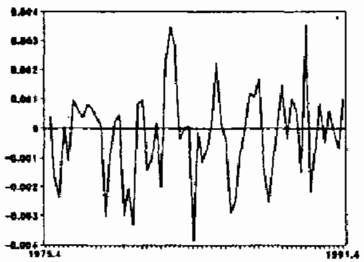

Fig 4. Differenze seconde di m

Molte altre grandezze rilevanti per la politica monetaria sono espresse in genere in termini nominali, e potrebbero pertanto comprendere una componente di prezzo di tipo **I(2)**. Nelle figure 1-6 sono riportate le evoluzioni temporali **per l'Italia** del logaritmo dei prezzi (*p*), di M2 (m), e del prodotto interno lordo a prezzi correnti (*y*) **nell'ar**co degli ultimi 20 **anni**[19]. Al fine di semplificare la notazione, nel seguito di questa sezione si tralascia l'indice **t** associato alle variabili quando tale semplificazione non causa problemi di interpretazione.

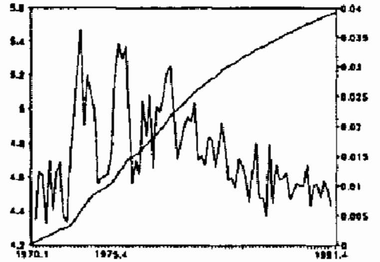

Fig 5. y, logaritmo del PIL (scala di sinistra) e sue differenze prime (scala di destra)

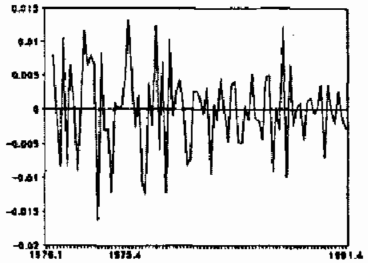

Fig 6. Differenze seconde di y

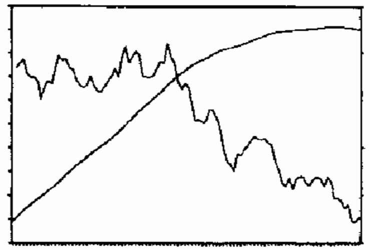

Fig 7. Processo integrato di ordine due (cumulata di un random walk, scala di sinistra) e sue differenze prime (scala di destra)

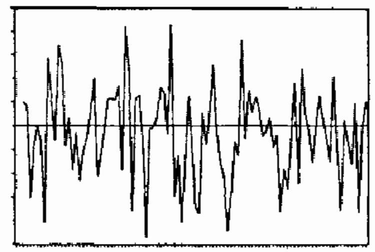

Fig 8. Differenze seconde del processo in figura 7.

19 Un ulteriore possibile ambito di applicazione è ad esempio costituito da modelli sui sistemi dei prezzi in diversi paesi, **come** quelli utilizzati nelle analisi delle parità dei poteri d'acquisto.

Dalla semplice analisi grafica non pare infondato supporre che (m, y, p) siano integrate di ordine due **I(2)**, cfr. **fig.** 7 e 8; tuttavia il rapporto **M2/Y**, $(m-p)-(y-p)=m-y$ potrebbe risultare integrato di ordine inferiore. La fig. 9 sembra confermare tale possibilità. Inoltre sia la moneta che il prodotto, quando espressi in termini reali, ossia quando si considerino $m-p$ e $y-p$, paiono integrate di ordine uno, **I(1)**.

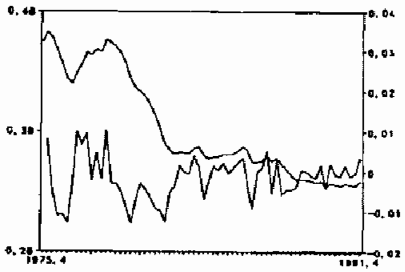

Fig. 9 $m-y$, logaritmo del rapporto **M2/PIL** (scala di sinistra) e sue differenze prime (scala di destra)

Si noti tuttavia che le tre combinazioni lineari **(0, 1, −1)**, **(1, 0, −1)** e **(1, −1, 0)** di $W_t=(m, y, p)'$ sono linearmente dipendenti, in quanto qualsiasi coppia dei vettori considerati può essere combinata per ottenere il terzo. È questo pertanto un caso di cointegrazione multipla, con uno spazio di cointegrazione di dimensione due; si può pertanto scegliere come base di tale spazio ad esempio $\beta^{*\prime}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, che riduce l'ordine di integrazione da I(2) a **I(1)**. Non è escluso, tuttavia, che le variabili $\beta^{*\prime}X_t=(m-p, m-y)'$ siano a loro volta cointegrate con le differenze del processo, che, si ricorda, comprendono il tasso di inflazione Δp.

Più in generale, in numerosi studi sulla domanda di moneta[20] si sono considerati insiemi di variabili del tipo $X_t=(m, y, p, r^d, r^b)'$ dove r^d indica il tasso di interesse proprio e r^b il tasso di interesse sulle

20 Si veda ad esempio Bagliano, **Favero** e Muscatelli (1991) e riferimenti **ivi** contenuti.

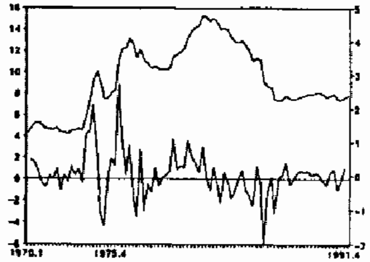

Fig 10. r^d, tasso di interesse sui depositi bancari (scala di sinistra) e sue differenze prime (**scala** di destra)

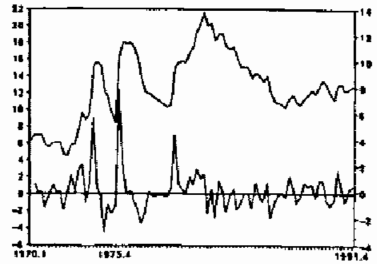

Fig 11. r^b, tasso sui titoli pubblici (scala di sinistra) e sue differenze prime (scala di destra)

attività alternative. I tassi di interesse sono in genere classificati come variabili **I(1)**, come anche le fig. 9 e 10 relative al tasso sui depositi e al rendimento dei titoli pubblici sembrano suggerire[21]. Per il processo congiunto $X_t=(m, y, p, r^d, r^b)'$ si può ipotizzare una matrice di vettori di cointegrazione linearmente indipendenti

$$\bar{\beta}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Infatti ciascuna riga di $\bar{\beta}'$ riduce l'ordine di integrazione da **I(2)** a **I(1)**. **Un'ulteriore** combinazione lineare delle variabili così ottenute potrebbe risultare stazionaria o cointegrata con le differenze del processo, $\Delta X_t=(\Delta m, \Delta y, \Delta p, \Delta r^d, \Delta r^b)'$, dove si noti che le due ultime componenti di ΔX_t sono già stazionarie, e pertanto non sono rilevanti nella definizio-

21 Sulla non-stazionarietà dei tassi di interesse si veda ad esempio Fornasari, **Ansuini**, Paruolo (1992); sull'analisi della serie del prodotto interno lordo e **su** altri **aggregati macroeconomici** si veda **Ardeni** e Paruolo (1992) e **Onofri**, Salituro e **Paruolo** (1992).

ne di relazioni di cointegrazione. In altre parole ci si attende, se esiste una domanda di **moneta** di lungo **periodo, che** abbia forma

$$m_t - y_t + \gamma_1 r_t^d + \gamma_2 r_t^b + \gamma_3 \Delta p_t \tag{4.2}$$

ottenibile come

$$\xi'\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ y\\ p\\ r^d\\ r^b\end{pmatrix}_t + \xi'\bar{\delta}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta m\\ \Delta y\\ \Delta p\\ \Delta r^d\\ \Delta r^b\end{pmatrix}_t$$

Riesprimendo tale combinazione in termini generali come la prima relazione di un insieme di relazioni di multicointegrazione, si ottiene

$$\beta'\begin{pmatrix}m\\ y\\ p\\ r^d\\ r^b\end{pmatrix}_t + \delta\beta_2'\begin{pmatrix}\Delta m\\ \Delta y\\ \Delta p\\ \Delta r^d\\ \Delta r^b\end{pmatrix}_t \tag{4.3}$$

dove **la** prima riga di β' ha forma $(1, -1, 0, *, *)$, e un asterisco * indica un **coefficiente** non **vincolato**[22].

Si è pertanto di fronte ad un problema di identificazione delle colonne di β, **la cui** soluzione, per restrizioni lineari omogenee del tipo

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \qquad \beta_i = h_i + H_i\psi_i \qquad i = 1, \ldots, r \tag{4.4}$$

(dove la matrice h, sono vettori noti di normalizzazione, H_i sono matrici note di restrizioni in forma esplicita e ψ_i contengono i parametri incogniti), è stato affrontato in Johansen (1992*d*)[23]. Tali tipi di restizioni sono quelle maggiormente utilizzate nella specificazione di sistemi di equazioni **simultanee**[24]. Risulta pertanto di interesse sviluppare in modo analogo l'identificazione delle relazioni contenute nelle colonne della matrice β.

E interessante notare che la componente $\beta_2'X_t = (m_t + y_t + p_t)$ rappresenta la componente strettamente I(2) del processo, e pertanto al secondo

22 In questo caso $\beta' = (\xi, \xi_\perp)'\bar{\beta}'$, $\delta = (\xi, \xi_\perp)'\bar{\delta}$, dove $a_\perp$ è una matrice composta da **una** base del complemento ortogonale dello spazio delle colonne di a.

23 Si veda anche Giannini (1992).

24 Tuttavia esse non comprendono il caso di restrizioni **fra** diverse equazioni.

termine della *(4.3)* **compare** $\Delta\beta_2'X_t = \Delta(m_t + y_t + p_t)$ invece di Ap, come indicato dalla teoria, cfr. *(4.2)*. Potrebbe tuttavia risultare desiderabile da un punto di vista economico rappresentare quest'ultimo **termine** unicamente in funzione della variabile prezzi p. Si noti, a tal fine, che le variabili $\Delta(m_t - y_t)$ e $\Delta(m_t - p_t)$ sono stazionarie, in quanto $(m_t - y_t)$ e $(m_t - p_t)$ sono integrate di ordine uno, I(1). Pertanto sommando alla *(4.2)* multipli di tali sottoprocessi si ottengono ancora combinazioni lineari stazionarie. In particolare sommando $\delta\Delta(m_t - y_t) - 2\delta\Delta(m_t - p_t)$ si ottiene

$$\beta'X_t + \delta\{\Delta(m_t + y_t + p_t) + \Delta(m_t - y_t) - 2\Delta(m_t - p_t)\} = \beta'X_t + \bar{\delta}\Delta p_t \tag{4.5}$$

dove $\bar{\delta} = 3\delta$. Si noti che $\bar{\delta}$ nella *(4.5)* è proporzionale a δ (4.2), e pertanto in generale ipotesi di esclusione rispetto a δ del tipo $K'\delta = 0$ sono equivalenti ad ipotesi di esclusione dello stesso tipo $K'\bar{\delta} = 0$ rispetto a $\bar{\delta}$. Esiste pertanto una relazione fra le rappresentazioni *(4.3)* e (4.5); **la** prima formulazione risponde al requisito statistico di inclusione nel termine in differenze solo componenti I(1), mentre la rappresentazione *(4.5)* risulta **più** facilmente interpretabile da un punto di vista economico. La relazione fra tali formulazioni permette pertanto di utilizzare la prima ai fini statistici e la seconda in termini interpretativi.

5 Processi VAR e condizioni di non-stazionarietà

L'analisi statistica di sistemi multicointegrati è affrontata **all'interno** del caso particolare di modelli VAR, appartenenti alla classe *(2.1)* dove $B_j = 0\ j > 0$, $B_0 = I$. Si ipotizza, inoltre, la presenza di un termine costante a secondo membro

$$A(L)X_t = \mu + \varepsilon_t \tag{5.1}$$

dove $A(L) = I - A_1L - \ldots - A_kL^k$, μ è un vettore di costanti ed ε_t è i.i.d. $N(0, Q)$. Si assume che le radici dell'equazione caratteristica $|A(z)| = 0$ siano tutte esterne al cerchio unitario o siano nel punto $z = 1$; radici $z = 1$ sono infatti collegate ai diversi gradi di integrazione nel sistema. Al fine di mettere in evidenza le caratteristiche di lungo periodo si può espandere il polinomio $A(z)$ attorno al punto $z = 1$, ottenendo la rappresentazione

$$A(z) = A - \dot{A}(1 - z) + \frac{1}{2}\ddot{A}(1 - z)^2 + A_3(z)(1 - z)^3 \tag{5.2}$$

dove $\dot{A}(z) \equiv dA(z)/dz$, $\ddot{A}(z) \equiv d^2A(z)/dz^2$ e $A \equiv A(1)$, $\dot{A} \equiv \dot{A}(1)$, $\ddot{A} \equiv \ddot{A}(1)$. Restrizioni sulle varie derivate (inclusa quella di ordine nullo) calcolate nel punto $z = 1$ $(A, \dot{A}, \ddot{A}, \ldots)$ caratterizzano i diversi ordini di integrazione del processo[25]. Nel seguito si è adottata la notazione $\bar{a} \equiv a(a'a)^{-1}$ per a di rango pieno e $A_{bc} \equiv \bar{b}'A\bar{c}$; inoltre $a_\perp$ indica una base del complemento ortogonale dello spazio delle colonne di a [26].

5.1 Il teorema di rappresentazione per processi I(2)

Specificatamente se A ha rango ridotto r, $A = -\alpha\beta'$ per α, β matrici $p \times r$ di rango pieno, e se $\alpha_\perp'\dot{A}\beta_\perp$ ha rango pieno $p - r$, il processo (5.1) è integrato di ordine uno, I(1). Se, invece l'ultima condizione non risulta soddisfatta, ossia se $\bar{\alpha}_\perp'\dot{A}\bar{\beta}_\perp$ presenta rango ridotto, $\bar{\alpha}_\perp'\dot{A}\bar{\beta}_\perp = \phi\eta'$ dove ϕ, η sono matrici $(p - r) \times s$ di rango pieno $s < p - r$, allora il processo (5.1) risulta integrato di ordine superiore. Si adotti la notazione $\beta_1 \equiv \beta_\perp\eta$, $\alpha_1 \equiv \alpha_\perp\phi$ e $\beta_2 \equiv (\beta, \beta_1)_\perp = \bar{\beta}_\perp\eta_\perp$, $\alpha_2 \equiv (\alpha, \alpha_1)_\perp = \bar{\alpha}_\perp\eta_\perp$, così da definire due matrici quadrate invertibili $(\beta, \beta_1, \beta_2)$ e $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ con blocchi ortogonali. Sia inoltre $\theta \equiv \frac{1}{2}\ddot{A} - \dot{A}_{\cdot\beta}A_{\alpha\beta}^{-1}\dot{A}_{\alpha\cdot}$ e si noti che β_2 e α_2 sono di dimensioni $p \times q$ dove $q = p - r - s$. Il processo (5.1) risulta integrato di ordine 2 se e solo se

$$(5.3) \qquad A = -\alpha\beta' \qquad \bar{\alpha}_\perp'\dot{A}\bar{\beta}_\perp = \phi\eta' \qquad rango(\theta_{\alpha_2\beta_2}) = q$$

Sotto tali condizioni Johansen (1992*a*, teorema 3) ha dimostrato che esiste la seguente rappresentazione per il processo

$$(5.4) \qquad X_t = C_2 \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_i + \mu) + C_1 \sum_{i=1}^{t} (\varepsilon_i + \mu) + C_3(L)\varepsilon_t + a + bt$$

dove $C_2 \equiv \bar{\beta}_2(\theta_{\alpha_2\beta_2}^{-1}\bar{\alpha}_2')$, $\quad C_1 = \bar{\beta}\dot{A}_{\alpha\beta_2}(\theta_{\alpha_2\beta_2}^{-1}\bar{\alpha}_2') - \bar{\beta}_1\dot{A}_{\alpha_1\beta_1}^{-1}\bar{\alpha}_1'(I - \theta C_2) + \bar{\beta}_2 d$,

$(\beta, \beta_1)'b = 0$ e $|C_3(z)| = 0$ ha tutte le radici esterne al cerchio unitario.

Si noti come la doppia sommatoria di μ generi una componente di trend quadratico con coefficiente $C_2\mu/2$. Scomponendo μ nelle direzioni $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, ossia definendo $\mu = \alpha\mu_0 + \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$, dove $\mu_i \equiv \bar{\alpha}_i'\mu$, non è difficile verificare che se $\mu_2 = 0$ la componente di trend quadratico scompare in quanto $C_2\mu = \bar{\beta}_2\theta_{\alpha_2\beta_2}^{-1}\bar{\alpha}_2'\mu = 0$. Nel seguito si suppone infatti che tale componente sia assente, sulla base dell'osservazione che, se esistesse un trend quadratico economicamente plausibile, questo risulterebbe evidente anche da un analisi grafica dei dati. Pertanto nella direzione β_2 il processo è dominato dalle componenti I(2), come si può evincere dalla rappresentazione (5.4).

Considerando le combinazioni $\beta'X_t$, si nota che $\beta'C_1 = \bar{\alpha}'\dot{A}C_2$ e $\beta'b = 0$, cosicché sotto l'ipotesi mantenuta $\mu_2 = 0$, $\beta'X_t$ non contiene trend lineari in quanto $\beta'C_1\mu = 0$, ed è quindi dominata dalla componente I(1). Infine, analizzando le direzioni β_1, si osserva che sebbene $\beta_1'b = 0$, $\beta_1'C_1 = -\dot{A}_{\alpha_1\beta_1}^{-1}\bar{\alpha}_1'(I - \theta C_2)$ cosicché sotto l'ipotesi $\mu_2 = 0$, $\beta_1'C_1\mu = -\dot{A}_{\alpha_1\beta_1}^{-1}\bar{\alpha}_1'\mu \neq 0$ a meno che $\mu_1 = 0$. Pertanto $\beta_1'X_t$ risulta in generale dominata dalla componente di trend lineare $\tau_1 t$ dove $\tau_1 \equiv -\bar{\beta}_1\dot{A}_{\alpha_1\beta_1}\bar{\alpha}_1'\mu$ mentre si comporta come una componente I(1) nella direzione γ_1, dove γ_1 è una matrice scelta in modo tale che (γ_1, τ_1) sia una base dello spazio delle colonne di β_1. Se, inoltre, anche $\mu_1 = 0$, non vi è alcun trend lineare in $\beta_1'X_t$, che si comporta quindi come un processo I(1) senza drift.

Infine si noti che le combinazioni $\beta'X_t - \dot{A}_{\alpha\beta_2}\beta_2'\Delta X_t$ sono stazionarie, in quanto le componenti I(1) di $\beta'X_t$ e $\beta_2'\Delta X_t$ si elidono vicendevolmente. Pertanto $\delta \equiv -\dot{A}_{\alpha\beta_2}$ nella notazione delle sezioni precedenti.

Il teorema di rappresentazione di Johansen continua a valere se il processo di generazione dei dati è assunto di tipo VARMA (2.1) anziché di tipo VAR (5.1), in quanto la componente $u_t = B(L)\varepsilon_t$ è stazionaria e il polinomio $B(L)$ non ha radici unitarie, cosicchè i risultati relativi alle restrizioni di integrazione e cointegrazione sono unicamente legati al polinomio autoregressivo.

6 Un'analisi statistica di modelli VAR integrati di ordine due

Varie analisi statistiche sono state proposte per sistemi integrati di ordine due. La soluzione di massima verosimiglianza risulta in questo

25 Si veda ad esempio Johansen (1992*a*) o La Cour (1992).

26 Per riferimenti di algebra lineare si veda ad esempio Strang (1981).

caso non esprimibile in forma esplicita, in quanto, a differenza del caso **I(1)**, **esistono** due matrici di rango ridotto, le cui espressioni solo altresì legate funzionalmente. Johansen (19926) ha proposto una procedura di stima a due stadi per tali sistemi I(2), che viene qui riproposta. **Ciascun** passo della procedura utilizza un modello di **regressione** a rango ridotto, crf. Anderson (1951). Per un'analisi alternativa si veda Stock e **Watson** (1990).

Si consideri la seguente riparametrizzazione del modello (5.1)

(6.1) $$\Delta^2 X_t = \Pi X_{t-1} + \Gamma \Delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-2} \Gamma_i \Delta^2 X_{t-i} + \mu + \varepsilon_t$$

dove $\Pi = -A$ e $\Gamma = \dot{A} + \Pi$. Si noti che i termini X_{t-j} e ΠX_{t-l} possono essere specificati per qualsiasi valore di j ed l all'interno dell'insieme dei valori ammissibili (minori di k e k − 1 rispettivamente), ossia j = 1, ..., k e $l = 1, \ldots, k-1$, con l'unica conseguenza di una diversa definizione delle matrici Γ_i[27].

Si noti che la condizione (5.3) può essere riespressa in termini delle matrici Π e Γ; in particolare le prime due condizioni ipotizzano $\Pi = \alpha\beta'$, dove a e β sono matrici $p \times r$, $r < p$ di rango colonna pieno, e che $\Gamma_{\alpha_\perp\beta_\perp} = \phi\eta'$ dove ϕ e η sono matrici $p - r \times s$, $s < p - r$ di rango **colonna** pieno. Si noti infatti che $\bar{\alpha}_\perp' \dot{A} \bar{\beta}_\perp = \bar{\alpha}_\perp'(\dot{A} + \Pi)\bar{\beta}_\perp = \Gamma_{\alpha_\perp\beta_\perp}$. Pertanto nell'analisi statistica dei sistemi I(2) si vogliono imporre restrizioni di rango relative sia a Π che a Γ

(6.2) $$\Pi = \alpha\beta' \qquad \Gamma_{\alpha_\perp\beta_\perp} = \phi\eta'$$

L'analisi a due stadi del modello (5.1) (6.1) proposto da Johansen (19926) può essere illustrata come segue. Nel primo stadio si deriva lo stimatore di massima verosimiglianza di $\Pi = \alpha\beta'$ per valori non vincolati di Γ. Fissati poi α e β ai loro valori stimati nel primo stadio & e $\hat{\beta}$, nel secondo stadio si considera lo stimatore di massima verosimiglianza di T sotto il vincolo $\Gamma_{\alpha_\perp\beta_\perp} = \phi\eta'$. Questa procedura può essere interpretata come i primi due stadi di una procedura iterativa che alterna **la** massimizzazione rispetto a Π a quella rispetto a Γ.

In entrambi gli stadi i parametri Γ_i, i = 1, ..., k − 2 e p possono essere

27 In Johansen (1992*b*), ad esempio, si misura ΠX_{t-j} in j = 2. Nell'analisi statistica l'intercetta μ è stimata **in** genere in modo non vincolato.

concentrati dalla funzione di verosimiglianza regredendo $\Delta^2 X_t$, ΔX_{t-1} e X_{t-1} su $\Delta^2 X_{t-1}, \ldots, \Delta^2 X_{t-k+2}$ e 1; si ottengono così i residui R_{0t}, R_{1t} e R_{2t} **ed** il sistema $R_{0t} = \Gamma R_{1t} + \Pi R_{2t} + \varepsilon_t$ o

(6.3) $$R_{0t} = \Gamma R_{1t} + \alpha\beta' R_{2t} + \varepsilon_t$$

Il primo stadio dell'analisi è effettuato sotto la restrizione $\Pi = \alpha\beta'$ per Γ non vincolata, e corrisponde ad una regressione a rango ridotto di R_{0t} su R_{2t} condizionata a R_{1t}; tale problema è risolto dal problema di **correlazioni** canoniche fra R_{0t} su R_{2t} per R_{1t} fissato

(6.4) $$|\lambda M_{22.1} - M_{20.1} M_{00.1}^{-1} M_{02.1}| = 0$$

con autovalori $\lambda_1 > \ldots > \lambda_p > 0$, e corrispondenti autovettori $(v_1, \ldots, v_p)$, dove $M_{ij.h} = M_{ij} - M_{ih} M_{hh}^{-1} M_{hj}$ e $M_{ij} = T^{-1} \sum_t R_{it} R_{jt}'$ i, j, h = 0, 1, 2 sono matrici di momenti secondi campionari rispettivamente condizionati e incondizionati. I risultanti stimatori sono dati da

(6.5) $$\hat{\beta} = (v_1, \ldots, v_r) \qquad \hat{\alpha} = M_{02.1}\hat{\beta}(\hat{\beta}' M_{22.1} \hat{\beta})^{-1}$$

Il primo stadio della procedura (6.3) (6.4) permette di valutare il rango r di Π, sulla base di test del rapporto di verosimiglianza

$$Q_r = -T \sum_{i=r+1}^{p} \ln(1 - \lambda_i)$$

del tutto analoghi a quelli utilizzati nel caso **I(1)**. **Pur** essendo la distribuzione asintotica del test Q, diversa dal caso **I(1)**, è ancora possibile utilizzare le tavole riferite a tale caso, cfr. Johansen **(1992b)**. Si noti inoltre che le ipotesi di identificazione di β del tipo (4.4) possono essere sottoposte a prova, **ed** imposte nella stima qualora non rifiutate. Nel secondo stadio **a** e $ vengono fissati ai valori stimati, individuando così anche una stima dei rispettivi complementi ortogonali $\alpha_\perp$ and $\beta_\perp$, **ossia** di quelle matrici di rango pieno tali che $(\alpha, \alpha_\perp)$ e $(\beta, \beta_\perp)$

coprono lo spazio $\Re^p$ [28]. Moltiplicando l'equazione (6.3) per $(\bar{\alpha},\bar{\alpha}_\perp)'$, si ottengono i seguenti sottosistemi (equivalenti al sistema generale)

(6.6) $$\bar{\alpha}'R_{0t} = \bar{\alpha}'\Gamma R_{1t} + \beta' R_{2t} + \bar{\alpha}'\varepsilon_t$$

(6.7) $$\bar{\alpha}_\perp' R_{0t} = \bar{\alpha}_\perp'\Gamma R_{1t} + \bar{\alpha}_\perp'\varepsilon_t$$

Definito $\omega = \bar{\alpha}'\Omega\bar{\alpha}_\perp(\bar{\alpha}_\perp'\Omega\bar{\alpha}_\perp)^{-1}$ e sottratto $\omega\bar{\alpha}_\perp' R_{0t}$ dalla (6.6) si ottiene

(6.8) $$\alpha' R_{0t} - \beta' R_{2t} = \omega\bar{\alpha}_\perp' R_{0t} + \Gamma_a R_{1t} + (\bar{\alpha}' - \omega\bar{\alpha}_\perp')\varepsilon_t$$

dove $\Gamma_a = (\bar{\alpha} - \omega\bar{\alpha}_\perp')\Gamma$. I termini di errore nelle (6.7) e (6.8) sono **incorrelati** e i parametri delle (6.7) e (6.8) variano liberamente nello spazio parametrico prodotto (*variation free*) anche sotto le ipotesi (6.2), cosicché le due equazioni possono essere analizzate separatamente. L'equazione (6.8) comprende unicamente matrici di parametri non vincolati, e pertanto l'analisi di massima verosimiglianza corrisponde ad una regressione di $\bar{\alpha}' R_{0t} - \beta' R_{2t}$ su $\bar{\alpha}_\perp' R_{0t}$ e R_{1t}, ottenendo gli **stimatori** $\hat{\omega}$ e

(6.9) $$\hat{\Gamma}_a = (\bar{\alpha}' M_{01.\alpha_\perp} - \beta' M_{21.\alpha_\perp}) M_{11.\alpha_\perp}$$

dove $M_{ij.\alpha_\perp} = M_{ij} - M_{i0}\alpha_\perp(\alpha_\perp' M_{00}\alpha_\perp)^{-1}\alpha_\perp' M_{0j}$, $i,j = 0,1,2$. L'equazione (6.7) può essere riscritta, utilizzando una scomposizione basata sulle proiezione sullo spazio colonna di β e del relativo complemento ortogonale $I = \bar{\beta}\beta' + \bar{\beta}_\perp\beta_\perp'$, come segue

(6.10) $$\begin{aligned}\bar{\alpha}_\perp' R_{0t} &= \bar{\alpha}_\perp'\Gamma(\bar{\beta}\beta' + \bar{\beta}_\perp\beta_\perp')R_{1t} + \bar{\alpha}_\perp'\varepsilon_t = \\ &= \Gamma_{\alpha_\perp\beta_\perp}(\beta_\perp' R_{1t}) + \Gamma_{\alpha_\perp\beta}(\beta' R_{1t}) + \bar{\alpha}_\perp'\varepsilon_t = \\ &= \phi\eta'(\beta_\perp' R_{1t}) + \Gamma_{\alpha_\perp\beta}(\beta' R_{1t}) + \bar{\alpha}_\perp'\varepsilon_t\end{aligned}$$

L'analisi dell'equazione (6.10) consiste nella regressione di rango ridotto di $\bar{\alpha}_\perp' R_{0t}$ su $\beta_\perp' R_{1t}$ per $\beta' R_{1t}$ fissato, che corrisponde al problema di correlazione canonica

(6.11) $$|\rho M_{\beta_\perp\beta_\perp.\beta} - M_{\beta_\perp\alpha_\perp.\beta} M^{-1}_{\alpha_\perp\alpha_\perp.\beta} M_{\alpha_\perp\beta_\perp.\beta}| = 0$$

28 Per il calcolo di una base del complemento ortogonale dello spazio delle colonne di una matrice si veda ad esempio Paruolo (1992).

con autovalori $\rho_1 > \ldots > \rho_{p-r} > 0$ e autovettori corrispondenti $w_1, \ldots, w_{p-r}$, dove gli indici $\beta_\perp$, β e $\alpha_\perp$ si riferiscono si riferiscono alle variabili $\beta_\perp' R_{1t}$, $\beta' R_{1t}$ e $\alpha_\perp' R_{0t}$ rispettivamente. I risultanti stimatori di ϕ e q sono pertanto

(6.12) $$\hat{\eta} = (w_1, \ldots, w_s) \qquad \hat{\phi} = M_{\alpha_\perp\beta_\perp.\beta}\hat{\eta}(\hat{\eta}' M_{\beta_\perp\beta_\perp.\beta}\hat{\eta})^{-1}$$

mentre lo stimatore di $\hat{\Gamma}_{\alpha_\perp\beta}$ è dato dallo stimatore di regressione per $\phi\eta'$ fissato. Gli stimatori di β_1 e β_2 sono ottenuti dalle equazioni

(6.13) $$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_\perp\hat{\eta} \qquad \hat{\beta}_2 = \bar{\hat{\beta}}_\perp\hat{\eta}_\perp$$

Nel secondo stadio è possibile fare inferenza sul secondo indice di integrazione s ancora mediante test di rapporto di verosimiglianza;

$$Q_{r,s} = -T\sum_{i=s+1}^{p-r}\ln(1-\rho_i)$$

Pertanto per ogni scelta di r si ottengono una sequenza di $p-r$ test sulla dimensione s; i risultati possono essere raccolti in una tabella, che è esemplificata per $p=4$ nella tab. 1.

		$Q_{r,s}$			Q_r	r	$p-r$
	...	...	...	...	...	0	4
	$s=0$	$s=1$	$s=2$	$s=3$			
		...	...	...	...	1	3
		$s=0$	$s=1$	$s=2$			
			...	...	...	2	2
			$s=0$	$s=1$			
				...	...	3	1
				$s=0$			
$q=p-r-s$	4	3	2	1	0		

Tab. 1

La distribuzione limite delle statistiche $Q_{r,s}$ è non-standard e dipende da entrambi gli indici r ed s, cfr. Johansen (1992*b*).
Il secondo stadio può inoltre essere utilizzato per fare inferenza su β_1 e

β_2. In particolare si possono sottoporre a prova ipotesi del tipo $\beta_2 = K_2$ per K_2 noto o del tipo (4.4) relative a β_1.
L'analisi statistica è completata mediante regressione per valori fissati di $\Pi = \hat{\Pi}$ e $\Gamma = \hat{\Gamma}$ dove $\hat{\Gamma} = (\hat{\alpha}_\perp + \hat{a}\hat{\omega})(\hat{\Gamma}_{\alpha_\perp\beta}\hat{\beta}' + \hat{\phi}\hat{\eta}'\hat{\beta}_\perp') + \hat{\alpha}\hat{\Gamma}_\alpha$. In particolare lo stimatore per $\delta = -\Gamma_{\alpha\beta_2}$ è ottenuto come segue

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta_2} = \hat{\Gamma}_\alpha\hat{\beta}_2 \tag{6.14}$$

poiché $\hat{\omega}\hat{\Gamma}_{\alpha_\perp\beta_\perp}\bar{\hat{\eta}}_\perp = \hat{\omega}\hat{\phi}\hat{\eta}\bar{\hat{\eta}}_\perp = 0$ [29].

La distribuzione asintotica di $\hat{\delta}$ è analizzata in Paruolo (1993). In particolare si mostra che tale distribuzione è rappresentabile come mistura di normali e permette di costruire test asintotici di tipo Wald con distribuzione limite χ^2. Tali strumenti rendono pertanto possibile giudizi inferenziali su δ e quindi, in generale, su ipotesi di multicointegrazione che, come posto in evidenza nel corso delle sezioni precedenti, sono spesso collegabili a precise ipotesi economiche.

7 Alcune considerazioni conclusive

In questo lavoro si è illustrata la nozione di multicointegrazione in modelli I(2). Da un lato sembrano esservi diversi campi di applicazione del concetto di multicointegrazione, ad esempio con riferimento a variabili di stock e di flusso e per modelli con grandezze nominali. Alla domanda, legittima, di quale sia il guadagno informativo ottenuto dal considerare un modello per le grandezze nominali non è possibile rispondere se non verificando se, ad esempio, la riduzione del modello a grandezze reali sia empiricamente coerente con i dati, ossia se la componente nominale sia debolmente esogena per i parametri di interesse della domanda di moneta.
L'assunzione di un modello VAR sulle variabili considerate nel loro insieme aiuta a formalizzare il modello di misura, in genere non specificato dal modello economico, e a sottoporlo a verifica mediante test di specificazione. Inoltre, esso assolve al compito di trasformare le ipotesi di interesse in restrizioni sui parametri. Nel caso della cointegrazione queste corrispondono a condizioni sul rango di particolari matrici; tali restrizioni possono essere sottoposte a verifica, permettendo pertanto di fare inferenza sugli indici di integrazione del

29 Si noti che la medesima relazione vale anche nella popolazione.

sistema.
Infine, al fine di fare inferenza sulle relazioni di multicointegrazione, è necessario affrontare il problema di identificazione delle varie combinazioni lineari del processo che riducono il grado di integrazione. Numerosi aspetti paiono ancora irrisolti, e pare possano costituire un rilevante ambito di ricerca negli anni a venire.

Bibliografia

Anderson T. W. (1951) Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate **normal** distributions, Annals of *Mathematical* Statistics, 22, pp. 327-351.

Ansuini A. - Fornasari C. - Paruolo P. (1992) Tassi di interesse monetari e bancari: un'analisi dei meccanismi di trasmissione, in: I mercati monetari e finanziari nel breve periodo: modelli **per** l'analisi e la previsione, a cura di Giovannini E., Finanza e Industria, Collana IMI-Il sole 24 ore, pp. 149-192.

Ardeni P.G. - Paruolo P. (1992) Seasonality and **persistence** in Italian GDP: relevance and policy implications, Atti della **XXXVI** Riunione Scientifica SIS, Pescara 21-24 aprile 1992, 2, pp. 281-288.

Bagliano F. - **Favero** C. - Muscatelli V. (1992) Cointegrazione, simultaneità ed errata specificazione - un'applicazione alla domanda di moneta in Italia, Quaderno **dell'Istituto** di Economia Politica, Università di Torino, n.2, gennaio 1992.

Banerjee A. - Hendry D. F. (a cura di) **(1992*a*)** Testing integration and cointegration, Oxford Bullettin of Economics ***and Statistics***, **Special** Issue, 54, n. 3.

Banerjee A. - Hendry D. F. (19926) Testing integration and **cointegration**: an overview, Oxford Bullettin of ***Economics*** and ***Statistics***, Special Issue, 54, n. 3, pp. 225-255.

Banerjee A. - **Dolado J.** - Galbraith J. J. - Hendry D. F. (1992) *Cointegration*, ***Error*** Correction and the Econometric Analysis of *Non-Stationary* Data, Oxford University Press, Oxford, in corso di stampa.

Caines P. (1988) ***Linear*** Stochastic Systems, Wiley

Davidson J. E. - Hendry D. F. - Sbra F. -Yeo S. **(1978)**, Econometric Modelling of the aggregate **time-series** relationship between consumer's expenditure and **income** in the United **Kingdom**, The *Economic* Journal, 88, pp. 661-692.

Dolado J. - Gailbraith W. - Benarjee A. (1991) Estimating **intertemporal** quadratic adjustment cost models with integrated series, *International* Economic Review, 32, pp. 919-936.

Engle, R. F. - C. W. J. Granger (a cura di) **(1991)**, Long run economie relationships - Readings in ***Cointegration***. Oxford University Press.

Engle R.- Hendry D. - Richard J. **(1983)**, Exogeneity, Econometrica, 51, 2, pp. 277-304.

Ericsson N. (a cura di) **(1992*a*)**, Cointegration, Exogeneity, and Policy Analisys, Journal of Policy Modelling, Special Issue, 14, n. 3 & 4.

Ericsson N. (19926) Cointegration, Exogeneity, and Policy **Analysis**: an overview, Journal of Policy Modelling, Special Issue, 14, n. 3, pp. 251-280.

Giannini C. (1992) Cointegrazione, manoscritto.

Granger, C. W. J. - T. Lee (1989) Investigation of production, sales and inventory relationships using multicointegration and **non-symmetric** **error** correction models, Journal of ***Applied Econometrics***, 4, pp.145-159.

Granger, C. W. J. - T. Lee, (1991) Multicointegration. Chapter 9 in Engle and Granger **(1991)**, ***Long run economic*** relationships - ***Readings*** in Cointegration. Oxford University Press.

Hendry D. F. (1992) ***Lecture*** notes in econometric ***methodology***, Oxford University Press, Oxford, in corso di stampa.

Johansen, S. **(1992*a*)** A representation of vector autoregressive **processes** integrated of order 2. Econometric Theory, 8, pp. 188-202.

Johansen, S. (19926) A statistical analysis of cointegration for 1(2) variables, Econometric Theory, in corso di stampa.

Johansen, S. **(1992*c*) The** role of the constant term in cointegration analysis of nonstationary variables, Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen, preprint 1992, 1.

Johansen, S. **(1992*d*)** Identifying restrictions of linear **equations**, Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen, **preprint** 1992, 4.

La Cour L. (1992) A note on the parametric representaton of **integrated** vector autoregressive **(VAR)** processes, **Research report** 104, Institute of Statistics, University of Copenhagen, 1992.

Nickell S. (1985) Error correction, **partial** adjustment and **all** that: an **expository** note, Oxford Bullettin of Economics ***and*** Statistics, 47, 2, pp. 119-129.

Onofri P. - Paruolo P. - **Salituro** B. (1992) Sulle fonti delle **fluttuazioni** dell'economia italiana: una analisi con sistemi VAR strutturali, Rivista di Politica Economica, 82, pp. 33-66.

Paruolo, P. (1992) Asymptotic inference on the moving average **impact** matrix in cointegrated 1(1) VAR systems, Discussion paper 1992, 2 Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen.

Paruolo, P. (1993) Testing for multicointegration in a **two-stage** analysis of **I(2)** systems, manoscritto.

Phillips A. W. (1954) Stabilization policy in the closed economy, Economic Journal, 64, pp. 290-323.

Phillips A. W. (1957) Stabilization policy and the time forms of lagged responses, Economic Journal, 67, pp. 265-277.

Salmon M. (1982) Error Correction Mechanisms, Economic Journal, 92, pp. 615-629.

Sargan J. D. (1964) Wages and prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology, in *Econometric Analysis* for *National Economic Planning*, a cura di Hart, Mills, Whitaker, London: Butterworths Scientific Publications.

Stock J. H. - Watson M. W. (1990) A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems, Discussion paper, University of California Berkeley.

Strang G. (1981) Algebra lineare e sue applicazioni, Liguori.

Yoo S. B. (1986) Multi-cointegrated Time Series and a Generalized Error Correction Model, UCSD discussion paper.