REP 47821

Cristina Bernini*

Osservazioni statistiche ed economiche sull'aggregazione.

Un'applicazione al modello dei valori attesi per il mercato finanziario

Serie Ricerche 1994, n.2

*Dottorato di Ricerca in Metodologia Statistica per la Ricerca Sperimentale

BIBL. DIP. DI SCIENZE STATISTICHE
Statistica
Q 21
14989
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BOLOGNA

BIBLIOTECA
UNIV. DEGLI STUDI DI BOLOGNA - DIP. DI SCIENZE STATISTICHE Paolo Fortunati

Dipartimento di Scienze Statistiche "Paolo Fortunati"
Università degli studi di Bologna

Finito di stampare nel mese di Luglio 1994
presso le Officine Grafiche Tecnoprint
Via del Legatore 3, 40138 Bologna

Introduzione

La teoria dell'aggregazione si pone l'obiettivo di individuare i legami esistenti tra la micro e la macroanalisi di fenomeni economici. La formalizzazione di tali relazioni, della procedura aggregativa e delle ipotesi economico-statistiche utilizzate, e l'analisi esplicita dell'aggregazione può dar luogo a modelli aggregati che differiscono sostanzialmente dai modelli individuali. L'ipotesi dell'agente rappresentativo, molto diffusa in letteratura, non risolve, ma nasconde il problema, e la teoria dell'aggregazione esatta impone particolari vincoli alle microfunzioni in modo da garantire l'identità tra la relazione valida per l'intera collettività e quella valida per ogni singolo individuo che la compone. Tuttavia l'introduzione di vincoli di identità sui parametri dei singoli individui può risultare inconsistente qualora venga saggiata empiricamente sulle unità che compongono il mercato (Attanasio-Weber, 1993). La costruzione di modelli aggregati basati su ipotesi di comportamento dei singoli agenti che riflettano la variabilità del fenomeno, consente invece la definizione di relazioni macroeconomiche, espressive del fenomeno economico reale. A questo scopo è necessario verificare che il modello ottenuto con l'aggregazione sia giustificabile all'interno della teoria economica e che allo stesso tempo ne garantisca l'utilizzo statistico, e fornisca elementi di valutazione della realtà indagata.

Nel seguito, cercheremo di affrontare questi tipi di problemi tramite l'applicazione delle metodologie aggregative ad un modello di equilibrio dei prezzi del mercato finanziario: il modello dei valori attesi.

Numerose analisi empiriche (LeRoy-Porter, 1981; Shiller, 1990) evidenziano infatti come il modello dei valori attesi (PVM), specificato rispetto ad un agente rappresentativo, non sia in grado di riprodurre la serie dei prezzi di equilibrio di beni finanziari. Ci siamo quindi chiesti se una riformulazione del modello, basata sull'utilizzo di valori ottenuti tramite procedure aggregative ne potesse migliorare la capacità di adattamento e di previsione.

Il presente lavoro risulta così strutturato. Nel paragrafo 1 vengono introdotti i problemi inerenti l'utilizzo di modelli macroeconomici ed aggregati in luogo dei micromodelli e nel paragrafo 2 viene messa in discussione l'ipotesi dell'agente rappresentativo nel modello dei valori attesi. L'aggregazione in ambito statico e dinamico viene rispettivamente sviluppata nei paragrafi 3 e 4. Le conclusioni sono presentate nel paragrafo 5.

1. Il problema dell'aggregazione

L'informazione empirica sui fenomeni economici è spesso costituita da dati relativi a gruppi di individui o di imprese: la disponibilità di dati aggregati comporta, di fatto, la specificazione di modelli di tipo macroeconomico spesso in contrasto con la teoria dei fenomeni formulata con riferimento ai singoli individui. I macromodelli possono quindi essere interpretati come approssimazione dei microcomportamenti e ne diventano una significativa sintesi se giustificati da una esplicita analisi dell'aggregazione. Se sia rigoroso l'utilizzo di modelli macroeconomici per l'analisi delle caratteristiche e dei comportamenti propri delle microunità, e dove ciò sia ragionevole, che relazione sussiste tra i microcomportamenti e il macrocomportamento, rappresentano i punti salienti trattati nella teoria dell'aggregazione. La metodologia aggregativa si propone quindi l'obiettivo di individuare un sistema di relazioni che fungano da collegamento tra microrelazioni e macrorelazioni. La soluzione del problema aggregativo è tuttavia complessa e certamente non univoca. Da un punto di vista teorico-economico il legame micro-macro non può essere ridotto ad una mera traslazione delle ipotesi che identificano il comportamento individuale nelle ipotesi che caratterizzano il comportamento aggregato, mentre da un punto di vista statistico-metodologico risulta che la forma funzionale di modelli ottenuti tramite aggregazione esplicita delle microfunzioni può risultare complessa rispetto al modello originario e diversa a seconda delle procedure utilizzate.

Di fronte a questi problemi la maggior parte della letteratura economica per molto tempo non ha dato risposta, risolvendo l'incongruenza tra micro e macro con l'ipotesi, più che

semplificatrice, dell'agente rappresentativo. Si suppone cioé che il comportamento del collettivo analizzato, possa essere ben rappresentato dal comportamento di un singolo individuo. In altre parole si ipotizza che tutte le unità di riferimento mostrino un identico comportamento, tale che l'analisi di una sola di queste sia sufficiente per inferire il comportamento dell'intero mercato. E' evidente che una tale generalizzazione, pur semplificando la trattazione dei modelli da un punto di vista metodologico ed applicativo, risulta una astrazione troppo forte della realtà indagata. A questo proposito basti pensare alla teoria economica del consumatore basata sulle ipotesi di ciclo di vita del consumo e del risparmio, seconda la quale i comportamenti economici dei soggetti risultano caratterizzati e differenziati tra loro rispetto date variabili demografiche, sociali ed economiche. Ciononostante l'ipotesi dell'agente rappresentativo continua ad essere utilizzata nella costruzione di modelli macroeconomici in quanto garantisce al modello stabilità e unicità di soluzione di equilibrio e, allo stesso tempo, assicura un semplice fondamento al modello aggregato.

Se si assume invece che ogni individuo sia un'entità a sè, caratterizzata dalla propria struttura di preferenze e disponibilità economiche, interagente con il mercato in cui opera, ne segue che eventuali variazioni o shock del mercato stesso si rifletteranno sulle decisioni e sui piani individuali in modo diverso per ogni unità. Esiste quindi una corrispondenza significativamente diversa tra ogni singolo consumatore e mercato che di fatto l'ipotesi dell'agente rappresentativo tende ad omogenizzare. Ciò assume particolare rilevanza se si opera in un contesto dinamico, in quanto equivale a supporre che il modello aggregato non solo rappresenti i comportamenti individuali, ma anche le connesse regolarità dinamiche.

La scelta di utilizzare l'agente rappresentativo può risultare giustificata se e solo se gli individui prendono le loro decisioni sulla base delle stesse variabili aggregate o se tutti gli individui mostrano identiche reazioni alle variabili fondamentali. Questi due casi limite sono riconducibili alla cosiddetta teoria dell'*aggregazione esatta*. In termini formali si assume che la microfunzione riferita all'individuo i-esimo (i:1,..,n) sia

$$y_i = a_i + b_i x_i + \varepsilon_i \qquad (1.1)$$

dove $y = (y_1,..,y_2)$ e $x = (x_1,..,x_n)$ sono rispettivamente la variabile endogena ed esplicativa osservate negli n soggetti, ed $\varepsilon = (\varepsilon_1,..,\varepsilon_n)$ gli errori supposti a media nulla e varianza finita. Con l'ipotesi dell'agente rappresentativo si assume che

$$a_1 = a_2 =..= a_n = a$$
$$b_1 = b_2 =..= b_n = b \qquad (1.2)$$

da cui la generica microfunzione risulta essere

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \qquad (1.3)$$

per i:1,..,n. L'aggregazione delle funzioni individuali viene ottenuta nella maggior parte dei casi come aggregazione semplice, ossia come media aritmetica delle variabili del modello. Posto

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{n}$$
$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} \qquad (1.4)$$

e poichè E(ε)=0, il modello aggregato risulta

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \qquad (1.5)$$

E' evidente che la (1.5) vale se e solo se sono soddisfatte le ipotesi (1.2) e gli errori sono a media nulla. In questo caso tutte le informazioni contenute nelle microrelazioni vengono utilizzate nella costruzione della macrorelazione, escludendo quindi la possibilità che si creino errori durante il processo di aggregazione. In particolare se gli errori della (1.3) sono indipendenti e identicamente distribuiti, risulta che la varianza del macromodello è pari alla varianza del micromodello. L'aggregazione esatta ci cautela quindi da possibili contraddizioni che possono insorgere tra il comportamento della variabile dipendente misurata direttamente tramite il modello aggregato e indirettamente, tramite le microfunzioni. Tuttavia si evidenzia che i vincoli imposti al comportamento individuale affinché si avveri l'aggregazione esatta, finiscono per limitare la capacità esplicativa del modello aggregato. Se uno degli scopi

dell'aggregazione è quello di utilizzare al meglio tutte le informazioni riguardanti le variabili del modello, risulta preferibile disporre di microfunzioni senza vincoli di uguaglianza sui parametri, purché ciò porti ad un errore nella funzione aggregata contenuto e valutabile. Quanto detto equivale di fatto a rimuovere l'ipotesi (1.2), permettendo ai microparametri di assumere valori diversi tra loro che rispecchiano l'effettivo comportamento dei consumatori presenti sul mercato. Tale scelta comporta tuttavia complicazioni inerenti sia la specificazione del modello aggregato che la sua testabilità, e quindi assume rilevanza la formalizzazione e l'interpretazione economica delle relazioni instaurabili tra micromodello e macromodello.

Il nostro scopo sarà quindi di specificare modelli aggregati ottenuti con espliciti procedimenti aggregativi che ammettono la variabilità dei comportamenti individuali, in contrapposizione ai cosidetti macromodelli esatti o ad agente rappresentativo, e di discutere la migliore capacità descrittiva dei primi rispetto a questi ultimi, nel rispetto delle ipotesi microeconomiche di base[1].

E' possibile distinguere le metodologie aggregative per contesti statici da quelle proposte per analisi dinamiche. Nel primo caso la relazione aggregata, ottenuta come somma delle microequazioni lineari, permette di esprimere i macroparametri come particolari medie dei microparametri (Theil, 1964), nell'ipotesi di costanza dei comportamenti individuali nel tempo. Qualora tale ipotesi risulti irrealistica, ed esistano nel reale modificazioni dei comportamenti legate all'evoluzione temporale, è conveniente specificare microfunzioni dinamiche.[2]

[1]L'utilizzo di procedimenti aggregativi può introdurre delle distorsioni, definite in termini di varianza degli errori, la cui valutazione è indispensabile per una corretta stima ed interpretazione del modello aggregato.

[2]L'introduzione di elementi di dinamicità nei micromodelli può trasformare i modelli aggregati, supposti statici in origine, in modelli aggregati dinamici aventi struttura diversa rispetto quella evidenziata a livello micro (Lippi, 1988).

Si è fino ad ora fatto implicitamente riferimento a modelli lineari. Se tale assunzione non viene rispettata occorre effettuare prima dell'applicazione di metodologie aggregative, trasformazioni dei modelli che riconducano al caso di linearità. Nel caso di trasformazioni logaritmiche i modelli aggregati log-lineari generalmente non risultano dall'aggregazione di micromodelli individuali log-lineari[3].

Nei prossimi paragrafi verranno riprese le osservazioni qui brevemente esposte tramite l'applicazione di procedure di aggregazione al modello dei valori attesi (PVM) per il mercato finanziario. A questo scopo verranno introdotte le problematiche connesse all'utilizzo del PVM ad agente rappresentativo e verranno discusse le ipotesi su cui si basa per individuare procedure di aggregazione adeguate al problema studiato.

2. Critiche all'utilizzo del PVM ad agente rappresentativo

Il modello dei valori attesi (PVM) viene considerato come uno dei più semplici modelli stocastico-dinamici dell'economia. La possibilità di derivarlo come soluzione a problemi di decisione dei consumatori permette di utilizzare ipotesi e metodologie proprie della teoria economica come strumenti per gli sviluppi teorici e le analisi applicative ad esso connessi. Ciò risulta molto utile per l'analisi successiva, in quanto ci permette di fare riferimento a teorie economiche consolidate sia per giustificare la scelta di particolari ipotesi di lavoro, sia per interpretare i risultati ottenuti.

Il PVM, ottenibile come massimizzazione della funzione di utilità intertemporale, soggetta ad un dato vincolo di bilancio, riferita ad un agente rappresentativo, permette di ricavare, ad un dato istante, il

[3] Si dimostra (Lewbell, 1992) che se le variabili esplicative del modello sono mean-scaled, l'errore di aggregazione nel macromodello log-lineare è pari a zero. Quanto più ci allontaniamo da tale situazione limite, tanto maggiore risulta la distorsione dovuta all'aggregazione.

prezzo di equilibrio di mercato per il bene finanziario come somma dei valori attesi, opportunamente scontati, dei dividendi futuri, condizionati ad un insieme di informazioni.

In termini formali si consideri un'economia a un solo bene, costituita da consumatori tra loro identici in termini di preferenze e avversione al rischio, le cui funzioni di utilità sono di di tipo CRRA[4]

$$U_t(C_t) = \frac{C_t^{1-A}}{1-A} \tag{2.1}$$

dove C_t è il consumo aggregato procapite al tempo t, A il coefficiente di avversione relativa al rischio, e $U_t(.)$ è la funzione di utilità del periodo. Si assume inoltre che in questa economia il consumatore rappresentativo scelga un piano di consumo stocastico tale da massimizzare il valore atteso della sua funzione di utilità additiva nel tempo

$$E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t(C_t)\right] \tag{2.2}$$

dove ß il tasso di sconto, con 0<ß<1, e $U_t(.)$ è data nella (2.1). L'aspettativa matematica E_0 è condizionata ad un insieme di

[4] La funzione di utilità appartiene alla classe delle funzioni con avversione relativa al rischio costante (CRRA). Le proprietà che la contraddistinguono sono:
1) il coefficiente di avversione al rischio A è compreso tra 0 e ∞, dove A è interpretabile come misura della concavità delle funzioni di utilità;
2) la funzione presenta avversione relativa al rischio costante. Per verificarlo si applichi la formula di Arrow-Pratt alla (2.2)

$$R_t(C_t) = -\frac{U_t''(C_t)C_t}{U_t'(C_t)} = A$$

e derivando $R_t(C_t)$ rispetto C_t, si verifica che $R_t'(C_t)=0$ ossia $R_t(C_t)$ è costante per qualsiasi valore di C_t, ossia $U_t(C_t)$ è consistente con il comportamento di un investitore avverso al rischio che preferisce più al meno e la cui percentuale di investimenti in beni rischiosi rimane costante all'aumentare del consumo.

informazioni I_t disponibili agli agenti al tempo t; informazioni che comprendono i valori passati e presenti del consumo e dei rendimenti delle azioni. I consumatori sono quindi in grado di sostituire consumo presente con consumo futuro scambiando azioni sul mercato, nel rispetto del vincolo di bilancio

$$C_t + P_t W_t \le (P_t + P_t^*) W_t + Y_t \tag{2.3}$$

dove P_t rappresenta il prezzo di un titolo od azione al tempo t, Y_t è il reddito da lavoro (reale) al tempo t, W_t l'ammontare del bene posseduto alla fine del tempo t, P_t^* la variazione del prezzo del bene durante il periodo t .

La condizione di primo ordine necessaria alla massimizzazione della (2.2) soggetta alla (2.3), che permette di ottenere prezzi di equilibrio è data da

$$U_t'(C_t) = \beta E_t\left[U_{t+1}'(C_{t+1})\frac{P_{t+1}+D_{t+1}}{P_t}\right] \tag{2.4}$$

dove D_{t+1} è il dividendo reale al tempo t+1 e $U'(\ )$ la derivata prima della funzione di utilità rispetto al consumo.

Esplicitando dalla condizione di primo ordine di Eulero (2.4) il prezzo al tempo t, si ottiene il PVM come

$$P_t = E_t\left[\sum_k \beta^k \left[\frac{C_{t+k}}{C_t}\right]^{-A} D_{t+k}\right] \tag{2.5}$$

Nella (2.5) il saggio marginale di sostituzione intertemporale

(MRSI), misurato dalla quantità $\beta^k\left[\frac{U_t'(C_{t+k})}{U_t'(C_t)}\right]$, viene definita come

$\beta^k\left[\frac{C_{t+k}}{C_t}\right]^{-A}$. In particolare se si ipotizza che l'avversione al rischio dell'agente rappresentativo sia nulla, cioè A=0, la (2.5) risulta espressa come

$$P_t = E_t\left[\sum_k \beta^k D_{t+k}\right] \tag{2.6}$$

Ne deriva quindi che sotto l'ipotesi di neutralità al rischio degli investitori, il MRSI risulta costante nel tempo e pari a β^k. In questo caso il prezzo di equilibrio viene ricavato solo sulla base dei dividendi, annullando l'influenza dovuta a variazioni nel piano di consumo degli investitori e all'avversione al rischio degli stessi. In generale se $A \neq 0$ allora il MRSI varia nel tempo al variare dei suddetti fattori. In questo caso i prezzi di equilibrio, determinati con il PVM, risentiranno della variabilità temporale dei piani di consumo degli investitori: al tempo t=0 il consumatore deve scegliere il piano di consumo-investimento che massimizza la sua utilità attesa per i periodi sucessivi; egli è cioè in grado di anticipare o posticipare l'acquisto di beni finanziari in base al rendimento che egli si aspetta di ottenere da questi, di una misura che risente del grado di avversione al rischio dell'individuo. Ne deriva che gli agenti, nell'ipotesi di avversione al rischio, sono vincolati nelle loro scelte da considerazioni inerenti la quantità ottima da consumare e il rendimento massimo da questa ricavabile.

A fronte di tale semplicità di costruzione del modello, esiste una sostanziale sfiducia nella capacità descrittiva dello stesso. L'analisi delle serie storiche dei prezzi dei beni del mercato finanziario ha mostrato la presenza di una forte volatilità, che il PVM non è in grado di evidenziare se non in misura ridotta.

Negli studi di Shiller (1990), LeRoy e Porter (1981) emerge che la variabilità dei prezzi non può essere determinata dalle sole informazioni sui dividendi futuri in quanto questi ultimi non variano abbastanza da giustificare il movimento dei prezzi. L'introduzione dell'ipotesi di neutralità al rischio e quindi di MRSI costante si traduce di fatto nel negare l'influenza esercitata dal consumo e dal grado di avversione al rischio nelle scelte di allocazione individuale. In successivi lavori Shiller (1990) ed altri, sostituendo l'ipotesi di costanza con l'ipotesi di variabilità del fattore di sconto, verificano che, all'aumentare del coefficiente di rischio, la differenza tra prezzi reali del mercato e prezzi ottenuti tramite il modello tende a ridursi, anche se non ad annullarsi completamente (Grossman-Shiller, 1981). Tale risultato trova giustificazione nella relazione (Hansen-

Singleton, 1983) che lega i rendimenti dei beni azionari ai consumi tramite il grado di avversione al rischio[5], ed evidenzia la stretta connessione tra comportamento di consumo e rendimento dei prodotti finanziari. Le analisi empiriche confermano dunque che la variabilità dei dividendi e del consumo aggregato, pur esercitando una innegabile influenza sulla variabilità dei prezzi, non è comunque tale da riprodurla completamente, soprattutto nei periodi caratterizzati da eccessiva turbolenza del mercato. Questo risultato fà pensare che l'inefficienza del modello non sia legata a caratteristiche strutturali del mercato quanto piuttosto a errori di specificazione del modello stesso. Di qui l'interrogativo sulla correttezza dell'utilizzo del consumo aggregato (e implicitamente dell'ipotesi dell'agente rappresentativo) come espressione di sintesi dei consumi individuali. Se si suppone che gli agenti operanti nel mercato prendono le loro decisioni, in merito al piano di consumo-investimento, tenendo conto di fattori socio-demografici e psicologici che li caratterizzano a livello individuale, allora risulta estremamente vincolante assumere l'ipotesi di un comportamento di scelta omogeneo per l'intero mercato. In altre parole, l'assunzione dell'ipotesi di agente rappresentativo e quindi la scelta di utilizzare il consumo aggregato può "nascondere" l'effettiva variabilità dei piani di consumo dei singoli investitori.

Una soluzione che permetta di tener conto delle diverse strutture di preferenza per il consumo degli individui, consiste nel costruire una funzione di utilità specifica per ogni individuo (o coorti di individui) operante nel mercato, e nella successiva aggregazione di tali microfunzioni allo scopo di ricavare una macrofunzione di utilità che sia realmente rappresentativa del mercato. In questo modo potremmo disporre di tutte le informazioni, evidenziate nella

[5]Nell'ipotesi che la distribuzione congiunta dei rendimenti e consumo sia lognormale, si deriva che

$$E_t(\log R_t / I_t) = AE_t\left(\log \frac{C_t}{C_{t+1}} | I_t\right) - \log \beta - \frac{\sigma^2}{2}$$

dove il rendimento è definito come $R_t = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}$ e σ^2 è la varianza della distribuzione.

funzione di utilità e nel coefficiente di avversione al rischio, che caratterizzano e distinguono i soggetti nel processo decisionale e, tramite queste, saremo in grado di analizzare gli effetti che variazioni del mercato hanno sul prezzo di equilibrio dei beni finanziari. Si suppone cioè che eventuali shock o cambiamenti che intervengono nel mercato siano riflessi nei parametri e nelle variabili che caratterizzano le funzioni di utilità dei soggetti e tramite queste nei macroparametri della funzione aggregata, migliorando la capacità predittiva del modello (Kirman, 1991).

Con la rimozione dell'ipotesi dell'agente rappresentativo e tramite la costruzione di funzioni di utilità individuali $U_{it}(C_{it})$, con avversione relativa al rischio individuale diversa da zero $(1 - A_i)$,

$$U_{it}(C_{it}) = \frac{C_{it}^{1-A_i}}{1-A_i} \tag{2.7}$$

si è quindi cercato di valutare l'influenza, sintetizzata dal MRSI, dei comportamenti di consumo dei singoli individui appartenenti al mercato e dei dividendi sulla determinazione del prezzo di equilibrio[6].

Prima di entrare nel dettaglio dei vari metodi di aggregazione è necessario affrontare il problema della linearizzazione, tramite trasformata logaritmica, delle funzioni di utilità individuali di tipo CRRA, espresse in forma non lineare. Tale trasformazione non impedisce l'applicazione di procedure aggregative: si dimostra infatti che se le macrovariabili, tramite i relativi logaritmi, sono definite come combinazione lineare dei logaritmi delle corrispondenti

[6] Nel seguito si assume che il vincolo di bilancio rimanga uguale per tutti gli individui, allo scopo di eliminare eventuali complicazioni connesse a variazioni nella distribuzione del reddito degli agenti. Non viene inoltre preso in considerazione il problema della liquidità, pur consapevoli che verifiche empiriche hanno evidenziato che per buona parte della popolazione l'impossibilità di indebitarsi influenza direttamente il suo piano di consumo (Zeldes, 1989).

microvariabili e se si postula che queste macrovariabili sono connesse da una relazione di elasticità costante, allora si avranno risultati che sono identici a quelli ottenibili con relazioni lineari (Theil, 1964).

Vediamo ora, in modo più specifico, le implicazioni della trasformata logaritmica per la funzione di utilità. Applicando la trasformazione logaritmica alla (2.7) si ricava

$$\log U_{it} = (1 - A_i)\log C_{it} - \log(1 - A_i) \tag{2.8}$$

Definiamo dunque i valori aggregati del consumo e dell'utilità al tempo t come

$$\log U_t = \sum_{i=1}^{n} \log U_{it} \tag{2.9a}$$

$$\log C_t = \sum_{i=1}^{n} \log C_{it} \tag{2.10a}$$

ossia

$$U_t = \prod_{i=1}^{n} U_{it} \tag{2.9b}$$

$$C_t = \prod_{i=1}^{n} C_{it} \tag{2.10b}$$

nell'ipotesi che C_{it}, $U_{it}>0$, per i:1..n, t:1..T. Risulta quindi che la presenza di non linearità nella funzione di utilità fà si che il consumo aggregato sia ottento come prodotto dei consumi individuali (2.10), invece che come somma degli stessi. E' inoltre evidente che la somma dei logaritmi dei consumi individuali è in generale diversa dal logaritmo della somma degli stessi, e la diffrenza tra i due può subire variazioni nel tempo legate a variazioni della distribuzione dei consumi tra gli individui nel tempo. Se tale differenza, misurata in termini di entropia di Theil (Attanasio-Weber, 1993), rimane costante e incorrelata nel tempo con le variabili strumento, allora è possibile l'utilizzo corretto della (2.10) in luogo dell'analogo aggregato ottento per somma.

Nel seguito verranno presentati alcuni metodi di aggregazione, già presenti in letteratura, che, per le ipotesi su cui si basano e la metodologia che utilizzano, risultano adeguati nell'aggregazione delle funzioni di utilità individuali del PVM. Occorre già da ora

evidenziare che la scelta di utilizzare l'approccio di Theil (1964) per l'aggregazione in ambito statico, e l'approccio di Forni (1991) per l'aggregazione in ambito dinamico, è influenzata dalla forte analogia che lega le due procedure. Entrambe infatti, data la forma delle variabili aggregate e la relazione che lega le microvariabili a quelle aggregate, sono in grado di esprimere i macroparametri come particolari funzioni dei microparametri associati ai singoli individui. Ciò ci permetterà, in ultima analisi, di confrontare i risultati ottenuti nei due casi.

3. Aggregazione in contesto statico

Un'approccio generale al problema dell'aggregazione lineare in ambito statico viene esposto in Theil (1964). La metodologia proposta, utilizza espressioni lineari delle microfunzioni e, supponendo data la forma degli aggregati (2.9) e (2.10), permette di ricavare i macroparametri come particolari funzioni dei microparametri. Tale approccio si fonda sull'ipotesi che i microcomportamenti, espressi nelle microequazioni, rimangano costanti nel tempo sia rispetto il numero di individui coinvolti nell'analisi, sia nei microparametri.

La metodologia proposta utilizza la funzione di utilità riferita al generico individuo i, al tempo t, nella forma

$$u_{it} = -\log(1 - A_i) + (1 - A_i)c_{it} + \varepsilon_{it} \tag{3.1}$$

con $u_{it} = \log U_{it}$, $c_{it} = \log C_{it}$, ε_{it} white noise, per $i = 1,..,n$ $t = 1,..,T$. Allo scopo di individuare un legame tra i consumi individuali e il consumo aggregato si esprimano i c_{it} come funzioni lineari del c_t

$$c_{it} = f_i + g_i c_t + v_{it} \tag{3.2}$$

nell'ipotesi che v_{it} sono residui di media zero, incorrelati con i valori assunti dalla macrovariabile ad ogni t, e che $\sum_{i=1}^{n} f_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} g_i = 1$. Si noti che la (3.2) rappresenta una equazione ausiliaria che, se sommata rispetto gli individui i, soddisfa la condizione (2.10).

Il procedimento di aggregazione di Theil, condotto per somma delle microfunzioni trasformate, conduce alla macrorelazione

$$u_t = -\left[\log\prod_{i=1}^{n}(1-A_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(1-A_i)\right] + \sum_{i=1}^{n} g_i(1-A_i)c_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{it} + \sum_{i=1}^{n} v_{it}(1-A_i) \qquad (3.3)$$

I macroparametri risultano da combinazioni dei microparametri delle (3.1) e (3.2): in particolare la pendenza della (3.3) evidenzia come sia i coefficienti di avversione al rischio $(1-A_i)$, che i microcoefficienti della regressione del consumo dei singoli individui g_i, contribuiscano alla determinazione del macrocoefficiente di avversione al rischio $\sum_{i=1}^{n} g_i(1-A_i)$

Il valore atteso di ε_t è in generale diverso da zero, e lo eguaglia se e solo se i residui v_{it} risultano incorrelati con i microparametri corrispondenti. Se ciò è vero e i microdisturbi ε_{it} sono distribuiti indipendentemente tra gli individui si dimostra che il suo secondo momento centrato allo zero, è pari a

$$E(\varepsilon_t)^2 = E\left(\sum_i \varepsilon_{it}\right)^2 + E\left(\sum_i (1-A_i)v_{it}\right)^2 \qquad (3.4)$$

Questa espressione è sempre più grande della varianza della somma dei microdisturbi, a meno che il secondo membro della parte destra della (3.4) non si annulli. Ciò significa che la precisione con cui si stima l'utilità aggregata tramite la macroequazione, dato il consumo aggregato, è in generale minore di quando viene stimata tramite tutte le microequazioni, dati i valori dei microconsumi corrispondenti. Per ultimo occorre evidenziare che il termine di autocorrelazione temporale dei macrodisturbi non è, in generale, nullo, anche se i corrispondenti microdisturbi sono incorrelati nel tempo.

La (3.3) trasformata con l'operatore antilogaritmo risulta essere

$$U_t = \frac{C_t^{\sum_i g_i(1-A_i)} e^{\sum_i f_i(1-A_i)}}{\prod_i (1-A_i)} e^{\varepsilon_t} \qquad (3.5)$$

Si nota chiaramente che l'avversione al rischio, non più definita in riferimento ad un agente rappresentativo, è una media ponderata dei coefficiente di avversione al rischio dei soggetti coinvolti nel mercato, i cui pesi sono i coefficienti della regressione dei microconsumi sul consumo aggregato. La (3.5) è quindi in grado di sintetizzare le informazioni sulle propensioni al rischio individuale con le informazioni relative al consumo: in particolare l'avversione al rischio dell'agente i-esimo è pesata con la frazione di consumo totale sostenuta dallo stesso agente. Ne segue che l'utilità aggregata, e quindi il prezzo dei prodotti finanziari, è influenzata maggiormente dai parametri di avversione al rischio degli agenti che risultano essere i più grandi consumatori presenti nel mercato. Più in generale si può osservare che l'avversione al rischio aggregata può subire modificazioni nel tempo anche se le corrispondenti microavversioni rimangono costanti, in quanto i pesi che mettono in relazione il macroparametro con i microparametri dipendono dal comportamento nel tempo dei microconsumi. Qualora si suddivida l'arco temporale in sottoperiodi risulta quindi possibile catturare la variabilità dei piani di consumo degli agenti nel tempo e valutarne le conseguenze sul macroparametro.

Questo risultato potrebbe trovare una giustificazione teorico-economica in quella parte di letteratura (Shiller, 1990) che individua nei fenomeni di tipo irrazionale (mode) la causa principale della volatilità presente nel mercato finanziario. Se si ammette l'esistenza di dinamiche sociali tali per cui il comportamento di alcuni individui si adegua, in periodi di forte incertezza economica, al comportamento di altri, allora è verosimile pensare che forti fluttuazioni dei prezzi (non riproducibili nei termini del PVM classico) trovino spiegazione analizzando il macrocomportamento via micro.

La metodologia di aggregazione proposta da Theil non assicura, nel caso esposto, che le informazioni ricavate dalla macroequazione siano corrette, ossia che non contraddicano le informazioni contenute nelle microequazioni originarie, per qualsiasi valore e cambiamento assunto dalle microvariabili ad ogni istante o periodo temporale. Per ovviare a tale incoveniente, e quindi ricondursi al caso di aggregazione esatta, Theil introduce la "Regola di Perfezione".

Affinchè la Regola di Perfezione sia soddisfatta è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le seguenti condizioni imposte alle microequazioni:

1) i microparametri sono uguali;
2) l'aggregazione avviene a pesi fissi.

Analizziamo ora separatamente i due casi.

Nel primo caso si assume che i parametri relativi ai singoli agenti siano tra loro uguali. Ciò equivale, di fatto, ad assumere che il coefficiente di avversione al rischio individuale sia uguale per tutti gli investitori ritornando quindi all'ipotesi di agente rappresentativo. La microfunzione di utilità risulta dunque

$$u_{it} = -\log(1-A) + (1-A)c_{it} + \varepsilon_{it} \qquad (3.6)$$

Utilizzando il procedimento e le ipotesi generali del caso precedente si ricava la seguente macrorelazione

$$u_t = -n\log(1-A) + (1-A)c_t + \varepsilon_t \qquad (3.7)$$

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{it}$$

In questo caso il valore atteso di ε_t risulta nullo e la varianza è pari a

$$E(\varepsilon_t)^2 = E\left(\sum_i \varepsilon_{it}\right)^2 \qquad (3.8)$$

ossia la varianza del macrodisturbo è pari alla varianza della somma dei microdisturbi, e quindi minore di quella ottenuta nella (3.4). E' da notare tuttavia che questa soluzione ad agente rappresentativo è riduttiva per quanto esposto in precedenza.

Applicando l'operatore antilogaritmo alla (3.7) si ricava la seguente funzione di utilità aggregata

$$U_t = \frac{C_t^{1-A}}{(1-A)^n} e^{\varepsilon_t} \qquad (3.9)$$

che risulta analoga alla originaria (2.1), mentre si distingue dalla (3.4) perchè non considera la relazione esistente tra microconsumi e consumi aggregati.

Nel secondo caso, pur essendo diversi i microparametri, le variabili esplicative dei diversi agenti sono tutte uguali a meno di un fattore di scala (Lewbell, 1992) o variano nel tempo in modo esattamente uguale. Ciò equivale ad assumere, rispetto al caso precedente, che $c_{it} = q_i c_t$, dove $c_t = \sum_i c_{it}$ è la variabile esplicativa aggregata, q_i è indipendente dal tempo ed inoltre $\sum_i q_i = 1$, per i:1,..,n. Si noti l'analogia con il primo caso considerato ponendo $f_i=0$, e $v_{it}=0$ $\forall$ i. La microfunzione di utilità è del tipo

$$u_{it} = -\log(1-A_i) + (1-A_i)q_i c_t + \varepsilon_{it} \qquad (3.10)$$

da cui l'equazione aggregata risulta

$$u_t = -\sum_{i=1}^{n} \log(1-A_i) + \sum_{i=1}^{n} (1-A_i)q_i c_t + \varepsilon_t \qquad (3.11)$$

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{it}$$

Per l'errore ε_t valgono le considerazioni fatte per la (3.7).

Passando all'antilogaritmo della (3.11) si ricava

$$U_t = \frac{C_t^{\sum_i (1-A_i)q_i}}{\prod_i (1-A_i)} e^{\varepsilon_t} \qquad (3.12)$$

In questo caso i parametri della microrelazione risultano essere medie ponderate dei microparametri; in particolare il coefficiente di avversione al rischio è una media ponderata dei microparametri con pesi uguali alle quote (costanti) delle microvariabili esplicative sulla variabile aggregata corrispondente. Pur trattandosi di una forma piu' complessa e realistica della precedente, la macroequazione rimane vincolata all'ipotesi che le quote dei consumi degli investitori siano costanti nel tempo, non tenendo quindi in considerazione possibili variazioni dovute al ciclo di vita del consumo e a variazioni della ricchezza e del reddito.

Si verifica facilmente che le funzioni di utilità aggregate, fin qui ottenute, mantengono le proprietà della funzione di utilità originaria. Si può dunque affermare che l'operazione di aggregazione, pur modificando la forma dei parametri, non ha alterato la struttura di partenza delle funzioni di utilità. Sostituendo le funzioni di utilità aggregate nella formulazione classica del PVM, si ottiene, rispettivamente per i tre casi analizzati

$$P_t = E_t\left[\sum_k \beta^k \left[\frac{C_{t+k}}{C_t}\right]^{\sum_i g_i(1-A_i)-1} e^{\varepsilon_{t+k}-\varepsilon_t} D_{t+k}\right] \tag{3.13}$$

$$P_t = E_t\left[\sum_k \beta^k \left[\frac{C_{t+k}}{C_t}\right]^{-A} e^{\varepsilon_{t+k}-\varepsilon_t} D_{t+k}\right] \tag{3.14}$$

$$P_t = E_t\left[\sum_k \beta^k \left[\frac{C_{t+k}}{C_t}\right]^{\sum_i (1-A_i)q_i-1} e^{\varepsilon_{t+k}-\varepsilon_t} D_{t+k}\right] \tag{3.15}$$

I modelli di equilibrio non si discostano, se non nel coefficiente di avversione relativa al rischio e nel termine di errore, dal modello originario.

4. Aggregazione in contesto dinamico

L'abbandono dell'ipotesi dell'agente rappresentativo può portare a risultati particolarmente interessanti se ci si pone in ambito dinamico, ossia se si suppone che le variabili individuali oggetto di interesse siano generate da processi dinamici.

In letteratura viene consigliato l'utilizzo di procedimenti aggregativi a sfondo dinamico per funzioni non lineari o che comunque mostrano parametri che variano in relazione all'età o ai gusti individuali, tali per cui le distribuzioni dei caratteri stessi tra la popolazione si modificano nel tempo. Allo scopo di tener conto di questi mutamenti si propone di utilizzare il procedimento di aggregazione esposto in Forni (1991) applicato a variabili con innovazioni uguali, e qui generalizzato al caso di n individui.

Il modello si basa sulle seguenti ipotesi base:

1) le microrelazioni hanno parametri ($1-A_i$) diversi tra loro;

2) la variabile esplicativa consumo riferita ai diversi agenti non varia nel tempo in modo esattamente proporzionale;

3) il consumo individuale è generato da un processo autoregressivo di primo ordine[7].

Tradotte formalmente tali ipotesi portano alla

$$u_{it} = -\log(1-A_i) + (1-A_i)c_{it} + \varepsilon_{it} \tag{4.1}$$

$$(1-d_i L)c_{it} = \tau_t \tag{4.2}$$

Si ipotizza inoltre che le variabili u_{it} e c_{it} siano stazionarie in covarianza, che le variabili ε_{it} abbiano media nulla, siano congiuntamente white-noise, ortogonali a c_{it-k}, $\forall$ $i,k \geq 0$, e a u_{it-k}, $\forall$ $i,k>0$, ipotesi queste analoghe a quelle esposte nel caso statico. Si suppone inoltre che d_i sia il coefficiente autoregressivo riferito all'i-esimo individuo, e che il disturbo τ_t sia uguale per tutti gli investitori. Quest'ultima ipotesi è alquanto riduttiva dal momento che impone a tutti gli individui di commettere uguali errori, ma verrà mantenuta per convenienza. Occorre infine evidenziare che, tramite la (4.2), il consumo individuale, pur essendo aggiornato ad ogni istante t, rimane vincolato al consumo scelto al tempo iniziale t=0.

La macrofunzione che ne risulta[8] è

---

[7] Si tratta di un'ipotesi proposta in letteratura (Hall, 1978) per l'analisi del consumo aggregato e che in questo lavoro, per semplicità, ipotizziamo valga anche per il consumo individuale. Estensioni al caso di processi più generali sono comunque possibili con la metodologia qui utilizzata.

[8] Sia data la microfunzione di utilità della forma

$$u_{it} = -\log(1-A_i) + (1-A_i)c_{it} + \varepsilon_{it} \tag{A.1}$$

con ε_{it} a media nulla, congiuntamente white-noise, ortogonali a $c_{it-k}, \forall i,k \geq 0$ e a $u_{it-k}, \forall i,k>0$. Per individuare la relazione che lega $u_t = \sum_i u_{it}$ a $c_t = \sum_i c_{it}$ si effettua la regressione di u_t su c_{t-k}, $k \geq 0$, e u_{t-k}, $k>0$. Si consideri quindi

$$u_t = -\sum_{i=1}^{n} \log(1-A_i) + \sum_{i=1}^{n} (1-A_i)c_{it} + \varepsilon_t \tag{A.2}$$

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{it}$$

L'equazione aggregata si ottiene sostituendo a $c_t^* = \sum_{i=1}^{n}(1-A_i)c_{it}$ una espressione che contenga solo il valore aggregato. Tale termine viene ricavato tramite l'equazione di regressione

$$c_t^* = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i c_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_{t-i} + \eta_t \qquad \text{(A.3)}$$

dove η_t è un residuo di media nulla, ortogonale ai regressori. Sia R_t la parte non stocastica della (A.3), allora la (A.2) diventa

$$u_t = -\sum_{i=1}^{n} \log(1-A_i) + R_t + \varepsilon_t + \eta_t \qquad \text{(A.4)}$$

dove ε_t, η_t sono ortogonali alle variabili aggregate correnti e passate e incorrelati tra loro; la varianza residua della (A.4) è quindi data dalla varianza residua della (A.2) e dalla varianza di η_t, dove quest'ultimo rappresenta la perdita di informazione che si verifica nel processo di aggregazione. La (A.4) è quindi l'equazione aggregata. Per ricavare R_t si supponga che c_{it} siano autoregressivi di primo ordine

$$(1-d_i L)c_{it} = \tau_t \qquad \text{(A.5)}$$

allora

$$\sum_{i=1}^{n} c_{it} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (1-d_i L)}{\prod_{i=1}^{n} (1-d_i L)} \tau_t \qquad \text{(A.6)}$$

$$c_t^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1-A_i) \prod_{j \neq i} (1-d_j L)}{\prod_{i=1}^{n} (1-d_i L)} \tau_t \qquad \text{(A.7)}$$

da cui

$$u_t = -\sum_{i=1}^{n} \log(1-A_i) + \frac{\sum_i (1-A_i) \prod_{j \neq i} (1-d_j L)}{\sum_i \prod_{j \neq i} (1-d_j L)} c_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sum_i \varepsilon_{it} \qquad \text{(4.3)}$$

L'operatore che compare nella macroequazione comporta una dinamica infinita del consumo aggregato, dinamica che è del tutto assente nelle microequazioni (4.1). La dinamica della macroequazione deriva dalla ipotesi 3 sul processo generante i consumi, in altre parole la dinamica dell'equazione aggregata è interamente dovuta alla dinamica presente nelle microvariabili indipendenti. L'aggregazione dunque ha trasferito la dinamica intrinseca dei consumi nella relazione tra funzione di utilita' e consumo. Si verifica facilmente che nei casi limite in cui $d_i=0, \forall\ i=1..n$, oppure $d_i=d_j=d$, $\forall\ i \neq j, i, j: 1..n$, la (4.3) si riduce ad una macroequazione statica del tipo analizzato nel paragrafo precedente. Il valore atteso del macrodisturbo è nullo e la sua varianza è pari alla varianza della somma dei microdisturbi.

La (4.3) puo' essere riscritta, allo scopo di evidenziare la dinamica complessiva della funzione di utilità aggregata, come

---

$$c_t^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1-A_i) \prod_{i \neq j} (1-d_j L)}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (1-d_j L)} c_t \qquad \text{(A.8)}$$

che sostituito nella (A.2) permette di ricavare la macroequazione

$$u_t = -\sum_{i=1}^{n} \log(1-A_i) + \frac{\sum_{i=1}^{n} (1-A_i) \prod_{j \neq i} (1-d_j L)}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (1-d_j L)} c_t + \varepsilon_t \qquad \text{(A.9)}$$

Si nota chiaramente che $R_t = c^*_t$ e η_t è nullo. Il modello (A.9) può essere interpretato come un ARMAX(n-1, n-1, n-1).

$$\sum_i \prod_{j\neq i}(1-d_jL)u_t = -\sum_i \log(1-A_i)\sum_i \prod_{j\neq i}(1-d_j) +$$

$$+\sum_i (1-A_i)\prod_{j\neq i}(1-d_jL)c_t + \sum_i \prod_{j\neq i}(1-d_jL)\varepsilon_t \quad (4.4)$$

Svolgendo i prodotti e le sommatorie della (4.4) si ottiene una formulazione dinamica del tipo

$$D(L)u_t = B + C(L)c_t + D(L)\varepsilon_t \quad (4.5)$$

o, esplicitando rispetto u_t

$$u_t = \frac{B}{D(L)} + \frac{C(L)}{D(L)}c_t + \varepsilon_t \quad (4.6)$$

dove con D(L) si intende il polinomio ritardato

$$\left[n-(n-1)\sum_{i=1}^{n} d_i L + (n-2)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} d_i d_j L^2 - (n-3)\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{z=j+1}^{n} d_i d_j d_z L^3 + .. \right.$$

$$\left. ..+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{z=j+1}^{4} .. \sum_{k=h+1}^{n} d_i d_j d_z .. d_k L^{n-1}\right]$$

con C(L) il polinomio

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(1-A_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i, j=1}^{n}(1-A_i)d_jL + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i, j=1}^{n}\sum_{z\neq i, z>j}^{n}(1-A_i)d_jd_zL^2 - \right.$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i, j=1}^{n}\sum_{z\neq i, z>j}^{n}\sum_{k\neq i, k>z}^{n}(1-A_i)d_jd_zd_kL^3 + ..$$

$$\left. ..+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i, j=1}^{n}\sum_{z\neq i, z>j}^{n}\sum_{k\neq i, k>z}^{n} .. \sum_{h\neq i, h>w}^{n}(1-A_i)d_jd_zd_k..d_hL^{n-1}\right]$$

e con $B = -\sum_i \log(1-A_i)\sum_j \prod_{j\neq i}(1-d_j)$. Da cui una espressione più semplice, nei termini del polinomio ritardato,risulta (dopo aver diviso l'equazione per n)

$$(1-\theta_1 L - \theta_2 L^2 - .. - \theta_{n-1}L^{n-1})u_t = \frac{B}{n} + (\phi_0 - \phi_1 L - ..$$

$$.. - \phi_{n-1}L^{n-1})c_t + (1-\theta_1 L - .. - \theta_{n-1}L^{n-1})\varepsilon_t \quad (4.7)$$

dove $\theta_1 = \frac{n-1}{n}\sum_i d_i L$

$$\theta_2 = -\frac{n-2}{n}\sum_i \sum_j d_i d_j L^2 \quad (4.8)$$

$$\theta_3 = \frac{n-3}{n}\sum_i \sum_j \sum_z d_i d_j d_z L^3$$

....

$$\theta_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sum_i \sum_j .. \sum_k d_i d_j .. d_k L^{n-1}$$

e

$$\phi_0 = \frac{1}{n}\sum_i (1-A_i)$$

$$\phi_1 = -\frac{1}{n}\sum_i \sum_j (1-A_i)d_jL \quad (4.9)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{n}\sum_i \sum_j \sum_z (1-A_i)d_jd_zL^2$$

....

$$\phi_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sum_i \sum_j .. \sum_k (1-A_i)d_jd_z..d_kL^{n-1}$$

La lettura della (4.8), (4.9) evidenzia come i macroparametri siano particolari medie dei microparametri e, in aggiunta rispetto all'analogo caso statico, dei singoli microparametri del processo generante le microvariabili indipendenti. Risulta inoltre che il termine di disturbo della macroequazione è una media mobile dei microdisturbi, i cui coefficienti sono ricavati dai microparametri generanti i consumi individuali.

La (4.7) è interpretabile come un processo ARMAX(n-1,n-1,n-1). L'ordine del processo ARMAX, pari a (n-1) per tutte le variabili, puo' indurre perplessità. Tuttavia ciò rispetta pienamente i limiti superiori che si ottengono per trasformazioni lineari di processi ARMA (Lutkepohl, 1984).

L'utilità aggregata al tempo t è quindi

$$u_t = \frac{B}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i u_{t-i} + \phi_0 c_t - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i c_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \varepsilon_{t-i} \tag{4.10}$$

da cui, applicando l'operatore antilogaritmo, si ricava

$$U_t = e^{\left(\frac{B}{n} + \varepsilon_t - \sum_i \theta_i \varepsilon_{t-i}\right)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{U_{t-i}^{\theta_i}}{C_{t-i}^{\phi_i}} \right) C_t^{\phi_0} \tag{4.11}$$

La macrofunzione di utilità a sfondo dinamico risulta dal prodotto dei consumi aggregati riferiti ai tempi t=i=1,..,n-1, con avversione al rischio data dalla media aritmetica semplice dei coefficienti individuali, per un fattore di correzione dato dal rapporto dei prodotti delle utilità e consumi ritardati, ponderati ad esponente. Esplicitando detto fattore nelle sue singole componenti

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{U_{t-i}^{\theta_i}}{C_{t-i}^{\phi_i}} \right) = \frac{U_{t-1}^{\frac{n-1}{n}\sum_i d_i}}{C_{t-1}^{\frac{1}{n}\sum_i \sum_j (1-A_i) d_j}} \frac{C_{t-2}^{\frac{1}{n}\sum_i \sum_j \sum_z (1-A_i) d_j d_z}}{U_{t-2}^{\frac{n-2}{n}\sum_i \sum_j d_i d_j}} \cdots$$

$$\cdots \frac{U_{t-n+1}^{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sum_i \sum_j \cdots \sum_k d_i d_j \cdots d_k}}{C_{t-n+1}^{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sum_i \sum_j \cdots \sum_k (1-A_i) d_j \cdots d_k}} \tag{4.12}$$

si nota che esso rappresenta la variazione relativa di utilità e consumo aggregato nel periodo di tempo considerato, opportunamente pesati dai coefficienti individuali relativi al rischio e al consumo. E' quindi possibile interpretare la (4.12) come una misura, espressa in termini relativi, dell'aggiornamento delle macrovariabili che compongono la funzione di utilità stessa. Ciò permette di recuperare un importante insieme di informazioni che nei modelli analizzati in precedenza andava irrimediabilmente perduto. La U_t è infatti esprimibile come funzione dei valori passati e correnti del consumo, dei valori passati dell'utilità e del termine di errore; ossia

$$U_t = f\left[C_{t-i}, U_{t-i}, \varepsilon_{t-i}, 0 \le i \le n-1\right] \tag{4.13a}$$

che può essere riscritta, sfruttando la relazione che lega utilità e consumi, come

$$U_t = f\left[C_t, U_{t-i}(C_{t-i}), i: 1, .., n-1\right] \tag{4.13b}$$

dove si evidenzia l'estensione della base informativa e la caratteristica di ricorsività della specificazione dinamica del modello, dinamica che deriva dall'ipotesi di consumi autoreggressivi degli individui. Utilità aggregate ricorsive sono dunque ottenibili a partire da funzioni specificate in un micro-contesto statico, senza l'introduzione di ipotesi aggiuntive sul modello.

Analizziamo ora a titolo di esempio una particolare funzione di utilià derivata sotto l'ipotesi che il consumo individuale sia rappresentabile con un processo random walk (Hall, 1988)[9], ossia

$$c_{it} = c_{it-1} + \tau_t \tag{4.14}$$

Si ipotizza inoltre che valgano le stesse ipotesi viste all'inizio del paragrafo.

La funzione di utilità aggregata che si ricava ha la seguente espressione

$$U_t = \frac{C_t^{\sum_i \frac{1-A_i}{n}}}{\prod_i (1-A_i)} e^{\varepsilon_t} \tag{4.15}$$

Risulta evidente la connotazione statica della (4.15), la cui forma è pressochè simile a quella dedotta nel paragrafo precedente. Si può quindi concludere che l'introduzione nel modello di un processo random walk per il consumo, caso particolare della (4.3) per $d_i=1$, $\forall i$, non introduce dinamicità all'interno della funzione aggregata.

Prima di concludere ricaviamo il valore previsto $\hat{u}_t(l)$ e la relativa varianza. Sfruttando la particolare forma ARMAX della funzione aggregata, si ottiene

$$\hat{u}_t(l) = \hat{u}_{t+l} = \frac{B}{n} + \theta_1\left[u_{t+l-1}\right] + .. + \theta_{n-1}\left[u_{t+l-n+1}\right] + \phi_0\left[c_{t+l}\right] - ..$$

$$.. - \phi_{n-1}\left[c_{t+l-n+1}\right] + \left[\varepsilon_{t+l}\right] - \theta_1\left[\varepsilon_{t+l-1}\right] - .. - \theta_{n-1}\left[\varepsilon_{t+l-n+1}\right] \tag{4.16}$$

dove

[9]vedi nota 7.

$$[u_{t+l}] = \begin{cases} u_{t+l}, l \le 0 \\ \hat{u}_t(l), l > 0 \end{cases}$$

$$[c_{t+l}] = \begin{cases} c_{t+l}, l \le 0 \\ \hat{c}_t(l), l > 0 \end{cases}$$

$$[\varepsilon_{t+l}] = \begin{cases} \varepsilon_{t+l}, l \le 0 \\ 0, l > 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Nel derivare il valore di previsione si è supposto di non differenziare la serie dei dati e di tener conto di tutti i valori ritardati. Si noti inoltre che ε_t viene calcolato dall'equazione iniziale e $\hat{c}_t(l)$ tramite il suo modello generante.

La previsione per il tempo successivo a quello di origine, cioè per l=1, risulta essere

$$\hat{u}_t(1) = \frac{B}{n} + \theta_1 u_t + .. + \theta_{n-1} u_{t-n+2} +$$

$$+ \phi_0 \hat{c}_{t+1} - .. - \phi_{n-1} c_{t-n+2} - \theta_1 \varepsilon_t - .. - \theta_{n-1} \varepsilon_{t-n+2} \tag{4.18}$$

Il procedimento di previsione è il medesimo per valori di l>1, sostituendo i valori delle variabili per istanti successivi a quello di origine con le loro previsioni.

La varianza dell'errore di previsione[10] risulta essere

---

[10]Per il calcolo della varianza dell'errore minimo previsto si procede nel seguente modo. Data l'equazione

$$u_t = \frac{B}{D(L)} + \frac{C(L)}{D(L)} c_t + \varepsilon_t \tag{B.1}$$

si suppone che la serie c_t segua un adeguato modello stocastico

$$c_t = \frac{\tau_t}{F(L)} \tag{B.2}$$

La (B.1) può dunque essere riscritta (trascurando il termine noto) come

$$u_t = v_t(L)\tau_t + \varepsilon_t \tag{B.3}$$

dove τ_t, ε_t sono stocasticamente indipendenti. Supponendo che la previsione $\hat{u}_t(l)$ di u_{t+l} fatta dall'origine t sia della forma

$$E\{u_{t+l} - \hat{u}_t(l)\}^2 = \sigma_\tau^2 \sum_{i=0}^{l-1} v_i^2 + (l-1)\sigma_\varepsilon^2 \tag{4.19}$$

La (4.19) evidenzia che la varianza dell'errore di previsione minima dipende direttamente dalla varianza del consumo e dalla varianza dell'errore del macromodello.

La possibilità di ottenere previsioni del consumo e quindi dell'utilità direttamente dal modello ARMAX permette di ricavare una nuova versione del PVM, nel rispetto del procedimento metodologico classico. Si verifica infatti che la trasformazione antilogaritmica della (4.16) dà luogo alla

$$\hat{U}_t(l) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{[U_{t+l-i}]^{\theta_i}}{[C_{t+l-i}]^{\phi_i}}\right)[C_{t+l}]^{\phi_0} e^{\left(\frac{B}{n}+[\varepsilon_{t+l}]-\sum_i \theta_i[\varepsilon_{t+l-i}]\right)} \tag{4.20}$$

Da cui l'utilita' marginale del previsore al generico tempo l è

$$\hat{U}'_t(l) = \phi_0 [C_{t+l}]^{\phi_0 - 1} K \tag{4.21}$$

dove $K = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{[U_{t+l-i}]^{\theta_i}}{[C_{t+l-i}]^{\phi_i}}\right) e^{\left(\frac{B}{n}+[\varepsilon_{t+l}]-\sum_i \theta_i[\varepsilon_{t+l-i}]\right)}$

E' quindi possibile derivare un PVM della forma

$$\hat{u}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} v^0_{j+l}\tau_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t+j} \tag{B.4}$$

si deriva che (B.5)

$$u_{t+l} - \hat{u}_t(l) = \sum_{i=0}^{l-1}\left(v_i\tau_{t+l-i} + \varepsilon_{t+l-i}\right) + \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\left(v_{l+j} - v^0_{l+j}\right)\tau_{t+j} + \varepsilon_{t-j}\right\}$$

Da cui la varianza dell'errore di previsione minima è

$$E\{u_{t+l} - \hat{u}_t(l)\}^2 = \sigma_\tau^2 \sum_{i=0}^{l-1} v_i^2 + (l-1)\sigma_\varepsilon^2 \tag{B.6}$$

e i pesi v_i sono ottenuti uguagliando i coefficienti nella

$$D(L)F(L)v_t = C(L) \tag{B.7}$$

$$
P_t = E_t\left[\sum_{l=1}^{\infty} \beta^l \left[\frac{[C_{t+l}]}{C_t} \right]^{\phi_0 - 1} \frac{K}{Z} D_{t+l} \right]
\qquad (4.22)
$$

$$
Z = e^{\left(\frac{B}{n} + \varepsilon_t - \sum_i \theta \varepsilon_{t-i} \right)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{U_{t-i}^{\theta_i}}{C_{t-i}^{\phi_i}} \right).
$$

con

Il risultato ottenuto consente, dunque, di ricavare il prezzo di equilibrio del mercato utilizzando variabili ottenute con procedure aggregative dinamiche, senza che ciò alteri in modo evidente la formulazione del modello stesso. Si nota che il coefficiente di avversione al rischio $(\phi_0 - 1)$ corrisponde alla media semplice dei coefficienti di avversione relativa al rischio individuali, in analogia al modello originario e a quelli derivati in ambito statico. occorre tuttavia sottolineare che la presenza nella (4.22) del fattore (K/Z) e del coefficiente $(\phi_0 - 1)$ introducono nel modello un insieme più ampio di informazioni sui consumi e sull'avversione al rischio.

5. Conclusioni

In questo lavoro si è cercato di ripercorrere le problematiche , sia di tipo statistico che economico, connesse all'utilizzo di procedimenti aggregativi non esatti, con particolare riferimento al caso del modello dei valori attesi.

Rinunciando all'ipotesi dell'agente rappresentativo che stà alla base della formulazione elementare del PVM, è stata proposta la costruzione di funzioni di utilità individuali, in cui il coefficiente di avversione al rischio e il consumo sono direttamente riferiti agli agenti operanti sul mercato. Si è quindi proceduto all'aggregazione di dette microfunzioni di utilità, ponendosi in un contesto statico e dinamico. Nel primo caso si è ricavata una macrofunzione di utilità i cui parametri e variabili sono semplici medie ponderate di quelli individuali, mentre più interessante è risultata l'aggregazione dinamica. Si è infatti verificato che l'aggregazione può causare una

propagazione della dinamica, propria delle microvariabili indipendenti, alla macrorelazione, nonostante aggreghi microrelazioni statiche. Ciò ha permesso di espandere l'insieme informativo del modello ai valori passati delle macrovariabili, oltre che alle informazioni derivanti dai parametri individuali, come nel caso statico.

Occorre inoltre sottolineare che le ipotesi e la metodologia fin qui utilizzata hanno permesso di aggregare le funzioni individuali senza che ciò alteri le proprietà che definivano la classe CRRA e la struttura del PVM.

Per concludere si osservi che un eventuale limite dei procedimenti di aggregazione è individuabile nella scelta di utilizzare, come metodo base, somme di funzioni individuali. Tale procedimento assume implicitamente che non vi siano fenomeni di interrelazione tra gli individui, ipotesi questa che può risultare riduttiva. Occorre infatti considerare che gli individui presenti nel mercato interagiscono direttamente e consciamente tra loro attraverso meccanismi come il commercio, il passaggio di informazioni, la costruzione di regole, l'organizzazione in gruppi a scopo di contrattazione,...,. La natura e l'incisività di questi contatti porta a interpretare gli investitori molto più di semplici price-takers. Passo successivo di tale analisi può dunque essere la formalizzazione dell'interazione tra soggetti eterogenei con conflitti di interessi, tramite l'utilizzo della teoria dei giochi.

Bibliografia

O.P. Attanasio G. Weber (1993), *Consumption growth, the interest rate and aggregation.* Review of Economic Studies, vol 56, 631-649.

D.T. Breeden (1979), *An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investiment opportunities.* Journal of Financial Economics, vol.7, 265-296.

E.F. Fama (1977), *Foundation of Finance. Portfolio decisions and securities prices.* Basis Blackwell, Oxford.

Inventario N. 14989 D.

M. Forni (1991), *Aggregazione, dinamica ed esogeneità*. Studi e ricerche del Dipartimento di Economia e Politica, Università degli Studi di Modena.

S.J. Grossman R.J. Shiller (1982), *Consumption correlatedness and risk measurement*. Journal of Financial Economics, vol.10, 195-210.

R.E. Hall (1978), *Stocastic implication of the life cycle-permanent income hipothesis: theory and evidence*. Journal of Political Economy, vol.86, no 6, 971-987.

R.E. Hall (1988), *Intertemporal substitution in comumption*.Journal of Political Economy, vol.96, no 2, 339-357.

A.C. Harvey (1981), *The econometric analysis of time series*. Philip Allan, Oxford.

A.P. Kirman (1992), *Whom or what does the representative individual represent?*. Journal of Economic Perspectives, vol.6, 117-136.

S.F LeRoy C.J. LaCivita (1981), *Risk aversion and the dispersion of asset prices*. Journal of Business, vol.54, no 4, 535-547.

S.F. LeRoy D. Porter (1981), *The present value relation: test based on implied variance bounds*. Econometrica, vol.49, no 3, 557-574.

A. Lewbell (1992), *Aggregation with log-linear models*. Review of Economic Studie, vol.59, 635-642.

M. Lippi (1988), *On the dynamics of aggregate macrorelations: from simple microbehaviour to complex macrorelationships*. Technical change and economic theory, G. Dosi, C. Freeman, R. Nelson, G. Silverberg, L. Soete, London and New York.

H. Lutkepohl (1984), *Linear transformations of vector ARMA processes*. Journal of Econometrics, vol.26, 283-293.

R.J. Shiller (1990), *Market volatility*. MIT , Cambridge.

L.H. Summers (1991), *The scientific illusion in empirical macroeconomics*. Scandinavian Journal of Economics, vol.93, 129-148.

H. Theil (1965), *Linear aggregation of economic relations*. North-Holland Amsterdam.

S.P. Zeldes (1989), *Consumption and liquidity constraints: an empirical investigation*. Journal of Political Economy, vol.97, n.2, 305-306.