



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELLE COSTRUZIONI
MECCANICHE, NUCLEARI, AERONAUTICHE
E DI METALLURGIA**

NUOVO CODICE DI CALCOLO
PER LO STUDIO DEL CONTATTO TRA
ELEMENTI ELASTICI ED ELEMENTI RIGIDI

R. FRANCI, V. PARENTI-CASTELLI

Pubbl. DIEM, No. 126

Bologna, 09/01/2007

Nuovo codice di calcolo per lo studio del contatto tra elementi elastici ed elementi rigidi

Franci Riccardo, Parenti-Castelli Vincenzo

DIEM-Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche,
Nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia.
Viale Risorgimento 2, 40136 Bologna, Italia.
e-mail: riccardo.franci@mail.ing.unibo.it,
vincenzo.parenticastelli@mail.ing.unibo.it

9 gennaio 2007

Sommario

In questo lavoro viene presentato un nuovo codice di calcolo che consente di individuare una configurazione spaziale di equilibrio di un sistema meccanico costituito da fibre elastiche in contatto tra loro e/o con corpi rigidi. Trascurando tutti i fenomeni di attrito, una configurazione stabile di equilibrio delle fibre elastiche viene trovata sfruttando il principio del minimo dell'energia potenziale elastica totale del sistema. Nel lavoro, inoltre, viene data una panoramica sulle tecniche ottimali di rappresentazione di corpi rigidi per quanto riguarda il problema della verifica di collisione tra corpi. Mediante un nuovo indice che confronta tali tecniche in termini di qualità di rappresentazione, viene scelta e successivamente analizzata in dettaglio la rappresentazione adottata nel caso in studio. Infine, come esempio di applicazione, l'algoritmo è utilizzato nella determinazione delle configurazioni assunte dai legamenti umani, in particolare dal legamento tibio-calcaneo della caviglia.

Parole chiave: *fibre elastiche, rappresentazione di oggetti, interazione legamenti-ossa.*

Abstract

This paper presents a new tool to find the spatial configuration of a mechanical system which comprises elastic fibres interacting both with each other and/or with rigid bodies. The configuration is determined by means of the principle of the minimum elastic potential energy of the system. Coulomb friction is neglected at the contacts. The paper gives an overview on the optimal representation of the rigid body shapes in the collision detection problem. In particular, the paper presents an elastic fiber model and describes the rigid body representation adopted. Both have been implemented in the tool. Finally an application of the tool to the biomechanical field is presented which makes it possible to find the spatial configuration of the human ligaments at the ankle joint complex.

Keywords: *elastic fibres, object representation, ligament-bone interaction.*

Indice

1	Introduzione	3
2	Modellazione delle fibre elastiche	5
3	Modellazione della collisione tra fibre adiacenti	7
4	Modellazione dei corpi rigidi	8
4.1	Generalità sui metodi di rappresentazione	8
4.2	Metodi di rappresentazione mediante primitive sferiche	9
4.2.1	Strategie efficienti per la valutazione delle collisioni	10
4.2.2	Gli algoritmi	11
4.2.3	Esempio	13
4.3	Valutazione della qualità di rappresentazione	14
5	Modellazione della collisione tra fibre elastiche e corpi rigidi	15
6	Applicazione	16
6.1	Modellazione dei legamenti	16
6.2	Modellazione delle ossa	17
6.3	La simulazione del legamento tibio-calcaneo	20
7	Conclusioni	24
	Bibliografia	25

1 Introduzione

Le ricerche oggetto della presente dissertazione si inseriscono in un contesto molto ampio di identificazione, modellazione e simulazione di contatti tra oggetti che possono essere rigidi o elastici.

Tra tutti gli oggetti che appartengono ad un ambiente di simulazione, individuare quelli che collidono e capire come essi si dispongono per l'effetto causato dalle interazioni stesse, è di fondamentale importanza in molti campi, dalla robotica alla simulazione di ambienti reali fino alla realtà virtuale. Nell'ambito della biomeccanica ad esempio risulta importante capire l'interazione tra oggetti deformabili (tessuti molli e legamenti) e corpi che, rispetto ai primi, possono essere considerati rigidi (ossa).

In letteratura vi sono numerosi lavori che si sono occupati, in campi differenti, della modellazione di oggetti deformabili elasticamente. La trasversalità dell'argomento in esame ha portato ad altrettanto numerose applicazioni, dalla simulazione in ambienti virtuali di vestiti [1] all'addestramento nelle operazioni chirurgiche su tessuti molli [2]. Svariate sono le tecniche utilizzate per ottenere un'efficiente e corretta simulazione della realtà fisica, influenzate anche dal tipo di rappresentazione utilizzata per gli oggetti appartenenti all'ambiente virtuale. Tra i sistemi più semplici si ricordano quelli basati sul sistema massa-molla, largamente impiegati nella simulazione in tempo reale. L'evoluzione di questi modelli ha permesso di considerare anche le caratteristiche fisiche degli oggetti in esame e quindi l'influenza che la deformazione di una parte del corpo ha sull'intera struttura dell'oggetto stesso [3]. Per diminuire il costo computazionale altri approcci di natura più generale, come quello proposto in [4], si concentrano sulla trasformazione della forma del corpo nel suo insieme piuttosto che sulla simulazione della deformazione locale che poi progressivamente si propaga nel corpo.

In questo lavoro verrà presentato un nuovo strumento, di valenza generale ed applicabile ad una vasta gamma di problemi, tutti volti a definire una configurazione spaziale di equilibrio di un sistema costituito da corpi elastici e corpi rigidi (non compenetrabili) mutuamente interagenti fra loro. Tale configurazione si fonda sulle ipotesi che i corpi elastici siano modellabili come fasci di fibre elastiche e che ciascuna fibra non possa intersecare né le fibre adiacenti né altri corpi, quest'ultimi considerati sempre rigidi. Il modello matematico su cui si fonda lo strumento presentato si basa sull'ipotesi di trascurare tutti i fenomeni di attrito che si possono sviluppare tra i corpi in contatto. Una configurazione stabile delle fibre elastiche è determinata trovando un minimo dell'energia potenziale elastica totale del sistema.

In questo lavoro la problematica in studio verrà affrontata suddividendo il problema generale nei seguenti sottoproblemi:

- rappresentazione delle fibre elastiche e del fascio di fibre;
- modellazione dei contatti tra le singole fibre elastiche;
- rappresentazione della forma dei corpi rigidi;
- modellazione dell'interazione tra le fibre ed i corpi rigidi.

Il problema in esame, come verrà meglio chiarito in seguito, richiede la soluzione di un sistema di equazioni non lineari vincolate che comporta l'utilizzo

di metodi ottimizzati per la determinazione della soluzione. L'utilizzo di tali metodi, congiuntamente a problemi legati all'efficienza di calcolo, impongono, al fine di un'ottimizzazione globale del problema, l'uso di primitive nella rappresentazione dei corpi che permettano la verifica dell'eventuale interferenza tra gli oggetti attraverso il calcolo di una funzione matematica che sia almeno di classe C^1 . Questo ha portato a scegliere come primitiva elementare la sfera, nella rappresentazione sia delle fibre elastiche che dei corpi intesi come ostacolo al libero movimento delle fibre stesse.

Per una corretta rappresentazione mediante sfere di una geometria complessa, ci si è riferiti a metodologie presenti in letteratura, analizzando dapprima i diversi algoritmi comunemente utilizzati nell'ambito della *Collision Detection* [5, 6], poi algoritmi che migliorano questi ultimi e che ne rappresentano le evoluzioni più recenti [7]. Tali algoritmi consentono inoltre di risolvere efficacemente problemi di verifica di non compenetrazione tra i corpi in studio. La valutazione degli algoritmi esistenti, secondo criteri che ne valutano la bontà di rappresentazione [8, 9], ha permesso di scegliere quello più adatto alle esigenze delle problematiche allo studio. Quest'ultimo, opportunamente modificato, consente di dare una buona rappresentazione anche dei corpi con forma geometrica complessa.

Lo strumento qui sviluppato è stato quindi implementato in MATLAB[®] ottenendo un algoritmo che consente, nota la geometria dei corpi in esame, di individuare la posizione spaziale di elementi elastici rispetto a elementi rigidi rispettando i vincoli di non compenetrazione degli uni con gli altri.

Tale strumento è stato poi applicato all'ambito della biomeccanica, ossia nel campo delle indagini e degli studi delle proprietà meccaniche di parti strutturali dell'anatomia umana. Vista l'importanza che i legamenti ricoprono nella funzionalità motoria e nella resistenza meccanica dell'articolazione, congiuntamente alla volontà di ottenere diagnosi sempre più perfezionate, lo strumento sviluppato è stato utilizzato per capire la disposizione spaziale dei legamenti quando, a causa del moto relativo delle ossa, possono entrare in contatto con altre fibre e/o con le ossa stesse. Come esempio di applicazione dell'algoritmo è stata scelta l'articolazione tibiotarsica durante la prova denominata "test del cassetto", utilizzando i dati sperimentali ricavati da prove di laboratorio svolte in collaborazione con gli Istituti Ortopedici Rizzoli.

L'algoritmo presentato costituisce uno strumento originale e di natura generale che, applicato allo studio dei legamenti, consente di sviluppare ulteriormente lo studio delle articolazioni, sia in ambito modellistico che in ambito clinico, volto a contribuire alla creazione di un modello generale di un'intera articolazione che possa consentire le valutazioni quantitative pre e post-intervento.

Nella Sezione 2 verrà illustrato il modello adottato per la rappresentazione delle fibre elastiche, mentre nella Sezione 3 verrà discusso il modello impiegato per la valutazione della configurazione finale delle fibre nel caso di collisione tra gli elementi elastici. La Sezione 4 dà un'ampia panoramica delle tecniche ottimali di rappresentazione di corpi rigidi nel problema della verifica della collisione tra corpi, e analizza quindi la rappresentazione adottata nel caso in studio. La Sezione 5 illustra la condizione di non penetrazione tra elementi elastici e corpi rigidi. Nella Sezione 6, come esempio della sua efficienza, lo strumento in esame viene infine applicato allo studio di un legamento dell'articolazione tibiotarsica umana.

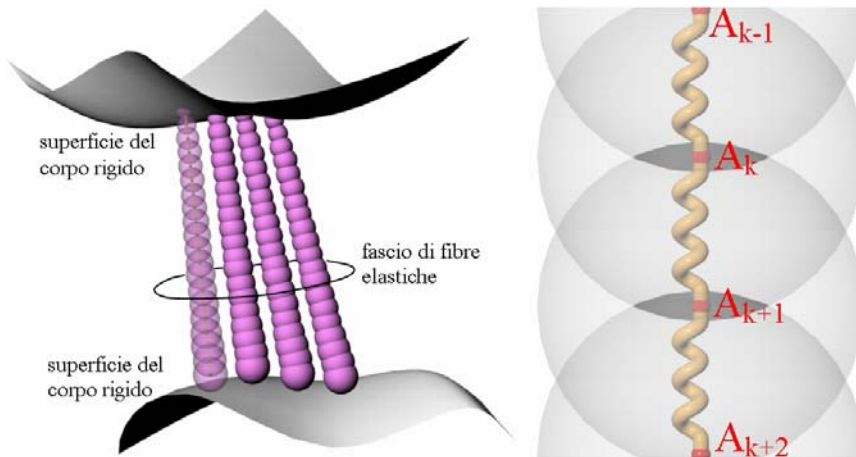


Figura 1: Modello di rappresentazione delle fibre elastiche.

2 Modellazione delle fibre elastiche

Senza soffermarci su altri modelli presenti in letteratura [10–14], peraltro già analizzati in [12, 13], si riprende brevemente in esame la struttura del modello matematico per la valutazione della disposizione spaziale delle fibre elastiche, che è stato il punto di partenza per lo sviluppo di questo lavoro.

Ogni fibra è stata discretizzata come un insieme finito di punti materiali (nodi), come illustrato in Figura 1. I nodi adiacenti A_k e A_{k+1} , ($k = 1, \dots, n$), sono connessi mediante una molla di lunghezza l_i , ($i = 1, \dots, n - 1$). Ciascun segmento elastico è allungabile in direzione rettilinea. Il modello di ciascuna fibra prevede che:

- il volume della fibra sia rappresentato mediante sfere centrate sui nodi A_k ;
- l'elasticità della fibra sia rappresentata da molle, ciascuna con costante elastica k_i , che uniscono consecutivamente i nodi A_k e A_{k+1} .

La forma della fibra è pertanto descritta dalle sfere centrate su ogni nodo, che definiscono il volume occupato dalla fibra. Ciascuna sfera di una fibra può compenetrare le sfere adiacenti se appartenenti alla fibra medesima (Figura 1) ma non può compenetrare le sfere appartenenti ad altre fibre.

La lunghezza di ciascun elemento elastico può essere espressa come:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2} \quad (1)$$

dove (x_i, y_i, z_i) , ($i = 1, \dots, n$), sono le coordinate cartesiane degli estremi dell' i -esimo elemento elastico in un arbitrario sistema di riferimento.

Detta l_{0i} la lunghezza iniziale della molla, la deformazione elastica ϵ di ciascuna molla può essere definita come:

$$\epsilon_i = \frac{l_i - l_{0i}}{l_{0i}} \quad (2)$$

Noto il modello meccanico di ogni elemento elastico, ovvero la curva di risposta forza-deformazione $F(\epsilon)$, è possibile quindi calcolare la forza agente lungo ogni

singolo elemento costituente la fibra e quindi la forza totale agente lungo l'intera fibra. Se ogni elemento elastico costituente la fibra non modifica la propria lunghezza allora la forza, e quindi la tensione, agente sull'elemento in esame rimane costante. La presenza di altri corpi estranei e/o di altre fibre adiacenti possono far deviare la fibra dalla condizione di rettilineità, variando lo stato di tensione all'interno della fibra stessa. Aumentando il numero delle sfere che approssimano il volume di una fibra, e quindi discretizzando la fibra con più elementi, è possibile tener conto di forti gradienti di tensione. La caratteristica meccanica può essere approssimata mediante una funzione polinomiale. Pertanto la forza agente sul i -esimo elemento elastico può essere definita come:

$$F(\epsilon_i) = a_1 \epsilon_i + a_2 \epsilon_i^2 + \dots + a_m \epsilon_i^m \quad (3)$$

dove a_j , ($j = 1, 2, \dots, m$), sono i coefficienti della funzione polinomiale. Il contributo di ciascun elemento elastico all'energia elastica potenziale totale è così definito:

$$U_i = l_{0i} \int_0^{\epsilon_i} F(\epsilon) d\epsilon \quad (4)$$

L'energia potenziale elastica totale U di una fibra risulta pertanto definita dalla seguente espressione:

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} U_i = \sum_{i=1}^{n-1} l_{0i} \left(a_1 \frac{\epsilon_i^2}{2} + a_2 \frac{\epsilon_i^3}{3} + \dots + a_m \frac{\epsilon_i^{m+1}}{m+1} \right) \quad (5)$$

Se l'attrito Coulombiano è trascurabile allora un minimo dell'energia elastica potenziale totale corrisponde ad una configurazione di equilibrio della fibra.

La ricerca del minimo del potenziale può essere condotta utilizzando algoritmi commerciali ottimizzati per tale scopo. In particolare la funzione *fmincon*, implementata nel "Optimization Toolbox" di MATLAB[®], consente di trovare il minimo valore di una funzione scalare (anche di più variabili) rispettando vincoli lineari e non lineari. Tale funzione consente la ricerca del minimo attraverso un calcolo iterativo che porta progressivamente ad un valore di convergenza. E' possibile scegliere il metodo di convergenza da adottare tra quello di "stampo classico" e quello in "Larga Scala", quest'ultimo utilizzato nel presente lavoro. Le diverse motivazioni che hanno spinto ad una tale scelta sono largamente documentate in [13] e si rimanda a testi specializzati per l'approfondimento delle problematiche connesse a tali algoritmi.

Preme invece sottolineare che i vincoli a cui le sfere delle fibre devono sottostare sono di natura diversa:

- *vincoli bilaterali lineari di posizionamento:*
per ciascuna fibra sono assegnati i centri della prima e dell'ultima sfera;
- *vincoli unilaterali geometrici non lineari di non compenetrazione:*
in generale, se le fibre fossero filiformi, la configurazione corrispondente al minimo dell'energia potenziale elastica totale sarebbe quella rettilinea, congiungente i punti estremi delle fibre definiti dai vincoli lineari di posizionamento. Poiché alle stesse fibre è stata data una dimensione trasversale, rappresentata da sfere concatenate aventi un determinato volume di ingombro, in generale le stesse sfere non potranno intersecare altri corpi. Per

evitare i contatti, le fibre vengono quindi deviate dalla condizione di rettilineità, allungandosi o accorciandosi. Le condizioni di non compenetrazione tra fibre adiacenti sono espresse da disequazioni non lineari.

3 Modellazione della collisione tra fibre adiacenti

Come precedentemente menzionato i vincoli sulle posizioni dei centri delle sfere possono essere di due tipi cioè vincoli bilaterali lineari e vincoli unilaterali non lineari.

- *vincoli bilaterali lineari:*

Per ciascuna fibra vengono assegnati i centri della prima e dell'ultima sfera e tali condizioni possono così essere rappresentate dal seguente sistema lineare:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6)$$

dove, se f è il numero di fibre, allora $\mathbf{A} [2 \cdot 3 \cdot f, 3 \cdot n \cdot f]$ è la matrice dei coefficienti, $\mathbf{b} [2 \cdot 3 \cdot f, 1]$ è il vettore delle coordinate cartesiane dei centri della prima e dell'ultima sfera di ciascuna fibra e $\mathbf{x} [3 \cdot n \cdot f, 1]$ è il vettore delle coordinate dei centri di tutte le sfere di ciascuna fibra.

- *vincoli unilaterali non lineari:*

Per quanto detto in precedenza, la dimensione trasversale delle fibre, assegnata attraverso le sfere costituenti le fibre stesse, non consente la compenetrazione tra sfere appartenenti a fibre adiacenti. Si deve pertanto verificare l'esistenza o meno di contatti tra sfere contigue. Dette quindi A e B due sfere appartenenti alle fibre in esame si ha contatto se è verificata la seguente relazione:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \leq r_A + r_B \quad (7)$$

dove (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) sono le coordinate dei centri delle due sfere A e B e r_A, r_B i raggi delle sfere medesime.

La funzione di MATLAB[®] in Larga Scala richiede che i vincoli siano esclusivamente lineari ed espressi da uguaglianze ovvero devono essere bilaterali. Per far ciò si è quindi provveduto a linearizzare i vincoli non lineari nell'intorno del punto calcolato come soluzione parziale del problema di minimizzazione e ripetendo la linearizzazione ad ogni iterazione, come illustrato in [13]. Per ogni contatto quindi si introduce l'equazione di vincolo definita dalla linearizzazione della disequazione (7). L'approssimazione lineare di tali vincoli si effettua mediante lo sviluppo in serie di Taylor fermandosi al primo termine della serie ed ottenendo così la seguente espressione:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}_{nl} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (8)$$

dove \mathbf{c} è il vettore delle funzioni di vincolo e \mathbf{J}_{nl} è la matrice Jacobiana (matrice delle derivate prime) delle equazioni non lineari di vincolo e \mathbf{x}_0 è una configurazione del sistema meccanico. La matrice \mathbf{J}_{nl} è definita dalle derivate parziali delle funzioni $c_i(\mathbf{x})$:

$$c_i(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2} - (r_j + r_k) \geq 0 \quad (9)$$

od anche

$$c_i(\mathbf{x}) = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2 - (r_j + r_k)^2 \geq 0 \quad (10)$$

che definiscono la condizione di non compenetrazione tra la sfera i e la sfera j rispetto alle $3 \cdot n \cdot f$ variabili, dove n è il numero dei nodi e f il numero di fibre. È importante notare che solo le derivate parziali rispetto (x_j, y_j, z_j) e (x_k, y_k, z_k) sono diverse da zero. Le derivate parziali possono quindi essere così definite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} &= 2(x_j - x_k) \\ \frac{\partial c_i}{\partial y_j} &= 2(y_j - y_k) \\ \frac{\partial c_i}{\partial z_j} &= 2(z_j - z_k) \\ \frac{\partial c_k}{\partial x_k} &= -2(x_j - x_k) = -\frac{\partial c_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial c_k}{\partial y_k} &= -2(y_j - y_k) = -\frac{\partial c_i}{\partial y_j} \\ \frac{\partial c_k}{\partial z_k} &= -2(z_j - z_k) = -\frac{\partial c_i}{\partial z_j} \end{aligned} \quad (11)$$

Sia i vincoli lineari (6) che i vincoli non lineari (7) possono essere rappresentati mediante la definizione di un'unica matrice \mathbf{J}_v :

$$\mathbf{J}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{J}_{nl} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Il modello appena esposto consente quindi di identificare le configurazioni delle fibre (intese come organi elastici deformabili non continui) nel rispetto della condizione di non compenetrazione tra fibre adiacenti.

4 Modellazione dei corpi rigidi

Il problema in studio prevede anche la presenza di corpi infinitamente rigidi modellati come ostacolo al libero movimento delle fibre. La verifica dell'interferenza tra le sfere delle fibre ed i corpi rigidi dipende dalla scelta adottata per la rappresentazione del corpo stesso. Di seguito verranno quindi illustrate dapprima le motivazioni che hanno portato ad adottare una rappresentazione del corpo rigido mediante sfere, poi i diversi metodi presenti in letteratura e che consentono di approssimare un corpo utilizzando primitive sferiche. Successivamente verranno confrontati, utilizzando l'indice K proposto in [8,9], i diversi metodi presi in esame per poter individuare quello che approssima meglio la forma dell'oggetto mediante sfere.

4.1 Generalità sui metodi di rappresentazione

Sebbene siano state proposte molte tipologie di rappresentazione per i modelli numerici tridimensionali, una modellazione della superficie esterna attraverso

una maglia poligonale (*mesh*), dove nel caso più semplice l'elemento base è costituito da un triangolo, è una soluzione che per semplicità algoritmica, robustezza numerica, possibilità di un'efficiente visualizzazione, costituisce lo standard di fatto per scambiare e visualizzare insiemi di dati tridimensionali in grafica computazionale.

In un primo approccio ci si è orientati a rappresentare i corpi attraverso questa tecnica, così come esposto approfonditamente in [12]. Il modello che introduce la presenza di ostacoli al movimento delle fibre con una rappresentazione attraverso *mesh* triangolari, seppur garantendo buoni risultati in termini di precisione di posizionamento, non risulta essere la rappresentazione più appropriata per il problema in esame. Infatti, come illustrato in [12], l'uso di *mesh* triangolari per la descrizione degli ostacoli al libero movimento delle fibre, porta ad avere, nella valutazione dei contatti, relazioni che dipendono dal tipo di intersezione che si verifica tra la sfera ed i triangoli in esame. Inoltre, nel caso di intersezione tra una sfera ed un vertice comune a più triangoli, il numero di relazioni che esprimono i vincoli dipendono dal numero di triangoli che insistono sullo stesso vertice. In tal caso si ha però un numero elevato di condizioni da soddisfare che rallenta in modo significativo l'intero algoritmo, oltre che a renderlo meno stabile con problemi di convergenza nella ricerca del valore di minimo potenziale. Per tale ragione, in quell'occasione, si erano adottate delle ipotesi semplificative che riducevano di gran lunga il numero delle disequazioni in gioco ma che introducevano inamovibilmente degli errori di approssimazione. Oltre a tutto ciò, per superare i problemi di convergenza e quindi di tempo di calcolo legati ad algoritmi di minimizzazione di stampo classico, nel lavoro attuale, come precedentemente esposto, si è fatto uso di un algoritmo di ottimizzazione in Larga Scala. L'introduzione di un algoritmo di minimizzazione in Larga Scala, con riferimento alla funzione *fmincon* di MATLAB[®], obbliga ad una linearizzazione dei vincoli e ad un precalcolo della matrice Hessiana del problema. Considerato che una rappresentazione attraverso triangoli di una superficie è un'approssimazione della superficie stessa e che intrinsecamente introduce delle discontinuità, la derivabilità della funzione distanza, calcolata da uno spigolo o da un vertice (inteso come punto comune a più triangoli), non è più assicurata. Da tutte queste considerazioni emerge come la descrizione di una superficie attraverso *mesh* di triangoli non sia la soluzione migliore per la rappresentazione dei corpi rigidi nel modello in esame. Si è perciò adottata una rappresentazione degli ostacoli attraverso superfici sferiche che permettono una buona rappresentazione ed una semplice definizione delle equazioni per la descrizione dei vincoli di non penetrazione, analogamente a quanto già visto nel modello delle fibre elastiche.

4.2 Metodi di rappresentazione mediante primitive sferiche

Per ridurre le criticità poc'anzi menzionate si è rappresentato l'ostacolo attraverso un insieme di elementi sferici, con dimensioni e posizioni tali da dare una raffigurazione il più vicina possibile a quella reale.

In letteratura sono presenti diversi metodi che approssimano la forma degli oggetti mediante primitive sferiche. Questi metodi partono da una rappresentazione dell'oggetto attraverso *mesh* triangolari. Tale superficie di partenza viene quindi presa come superficie da approssimare. E' evidente come la rap-

presentazione con *mesh* sia già di per sé un'approssimazione della superficie dell'oggetto reale. E' chiaro quindi come una cattiva rappresentazione del corpo mediante *mesh* rispetto alla forma reale dell'oggetto in esame determini, di conseguenza, una cattiva rappresentazione dello stesso attraverso le sfere. Risulta quindi importante che la rappresentazione con *mesh* triangolari rappresenti il più fedelmente possibile la forma reale dell'oggetto in studio.

4.2.1 Strategie efficienti per la valutazione delle collisioni

Tenendo presente le considerazioni sopra esposte, si vuole dare quindi una risposta alla seguente domanda: “dato un corpo rappresentato attraverso *mesh* triangolari, qual è la rappresentazione migliore che si può ottenere utilizzando delle primitive sferiche, per descrivere il corpo in esame?”. Tale rappresentazione deve peraltro essere organizzata in modo tale da permettere un'efficiente verifica di collisione tra sfere appartenenti a corpi differenti. Tali problematiche sono intimamente connesse ed in letteratura sono state largamente studiate nell'ambito della *Collision handling*, area della grafica computazionale. La *Collision handling* consiste in diverse aree quali la *Collision Detection* e la *Collision Response*. La *Collision Detection* verifica automaticamente dove e quali oggetti nella scena possono collidere. L'effetto causato dall'interazione tra gli stessi oggetti è chiamato *Collision Response*. Negli ultimi anni sono stati proposti diversi algoritmi; un'ampia panoramica delle principali metodologie adottate per la soluzione della problematica in esame è illustrata in [15, 16]. Lo scopo principale nello studio di tali metodologie è quello di ridurre il numero delle verifiche di intersezione che occorre fare per stabilire se due corpi o parte di essi sono in contatto. In letteratura questo problema è stato affrontato attraverso la decomposizione in fasi (*hybrid o multi-phase algorithm*) [6, 17] del problema stesso. Questa metodologia consente di restringere gradualmente la verifica della collisione agli oggetti o alle parti di essi che sono realmente interessati dal contatto. Per far ciò si esegue una decomposizione dello spazio occupato dai corpi o un'approssimazione degli stessi attraverso una rappresentazione mediante primitive elementari organizzate in una struttura gerarchica, ovvero una rappresentazione strutturata (ad albero) e sempre più dettagliata dell'oggetto in esame (*Bounding Volume Hierarchies*). La scelta del tipo di primitive incide fortemente sul costo computazionale totale, come da descritto in [18]. Le primitive comunemente utilizzate nell'approssimazione di oggetti sono le sfere, largamente studiate in [6, 17, 19, 20].

In letteratura sono presenti diversi algoritmi che consentono la costruzione di una gerarchia di sfere per la rappresentazione del corpo. Ciascun algoritmo per la costruzione di *Bounding Volume Hierarchies* deve sottostare alle seguenti condizioni:

- la gerarchia, secondo uno schema padre-figlio, deve approssimare il volume dell'oggetto e ciascun livello rappresenta un'approssimazione migliore del livello padre;
- per ciascun nodo della gerarchia, il figlio deve coprire la parte dell'oggetto coperta dal nodo padre;
- la gerarchia deve essere creata in modo automatico senza l'interazione da parte dell'utente;

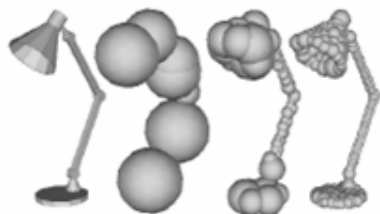


Figura 2: Esempio di applicazione della metodologia *Octree*.



Figura 3: *Medial Axis* per un poligono.

Lo scopo di questi algoritmi nella grafica computazionale è quello di realizzare un alto e costante *frame-rate*¹. Nel problema in studio invece si ricerca dapprima quell'algoritmo che permette un'approssimazione migliore dell'oggetto originale, sfruttando poi la caratteristica dell'organizzazione ad albero che permette anche un'efficienza maggiore nella determinazione dei possibili contatti che possono avvenire tra oggetti diversi appartenenti alla scena.

4.2.2 Gli algoritmi

Tra i primi algoritmi utilizzati in questo ambito vi è la metodologia *Octree* che prevede la suddivisione ricorsiva dello spazio in cubi e la costruzione di ciascuna sfera attorno al cubo. Tale metodologia parte dalla costruzione di un cubo che contiene l'intero oggetto. Questo nodo padre viene suddiviso in otto nodi figli, cioè dividendo a metà ciascuna dimensione ed ottenendo così che ciascun nodo figlio copra un ottavo del volume coperto dal nodo padre. Quei nodi figli che non contengono nessuna parte della superficie dell'oggetto vengono cancellati dall'albero, rappresentante la struttura gerarchica, che risulta composto così dai soli cubi che coprono la superficie del corpo in esame. Il numero di livelli dell'albero determina quindi il livello di dettaglio desiderato (Figura 2). Ciascuna sfera di centro C , coincidente con il centro del cubo, avrà raggio r pari alla distanza del centro dallo spigolo del cubo stesso, ovvero:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$$

dove l è la lunghezza del lato del cubo.

Il metodo di Hubbard [6] si basa invece sulla costruzione di un asse mediano (*medial axis*), definito da Blum in [21] come “il luogo dei centri di un insieme di sfere di diametri tali da riempire l'interno della figura” (esempio in Figura 3). Di conseguenza il *medial axis* rappresenta lo scheletro dell'oggetto e risulta quindi il posto ottimale per disporre inizialmente i centri delle sfere che approssimano

¹Velocità di immagini in un filmato, misurata in fotogrammi al secondo.

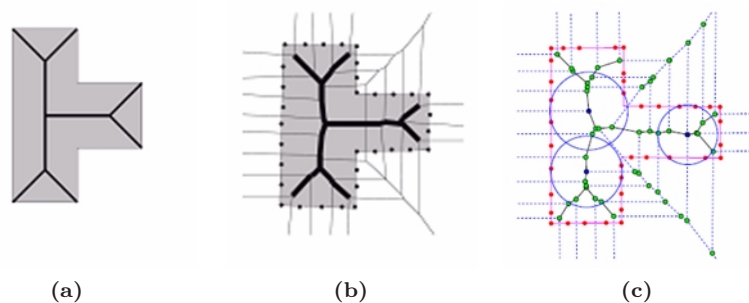


Figura 4: (a) *Medial Axis* teorico, (b) *Medial Axis* approssimato, (c) creazione delle sfere iniziali utilizzando i vertici delle celle del diagramma di Voronoi.

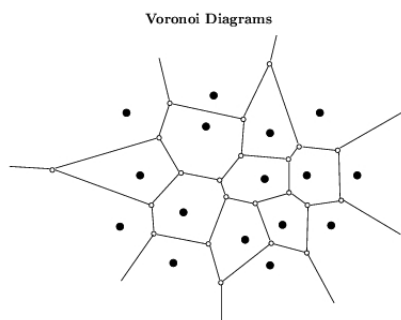


Figura 5: Esempio del diagramma di Voronoi nel piano. In nero i punti campione utilizzati nella costruzione del diagramma.

l'oggetto stesso. Tuttavia il calcolo del *medial axis* di un oggetto è un calcolo computazionalmente oneroso e poiché esso è utilizzato solo come iniziale guida al posizionamento delle sfere, è sufficiente darne una rappresentazione approssimata.

Il *medial axis* viene approssimato utilizzando un diagramma di Voronoi nello spazio (Figura 4b), costruito su un insieme di punti campione distribuiti sulla superficie dell'oggetto. Il diagramma di Voronoi (nel piano) di un insieme di punti è una collezione di regioni in cui viene ripartito un piano (Figura 5). Ogni regione contiene esattamente un punto dell'insieme dato e ha la proprietà di contenere tutti i punti del piano che sono più vicini a quel punto piuttosto che ad un altro. Ciascun vertice delle celle del diagramma di Voronoi interno all'oggetto (Figura 4c) è il centro di una sfera. Per la definizione di cella di Voronoi, ciascun vertice è equidistante dai punti campione utilizzati per la sua costruzione (posti sulla superficie dell'oggetto) e pertanto il raggio di una sfera è pari alla distanza tra tali punti campione ed il centro della sfera stessa.

L'insieme di sfere generato sfruttando il diagramma di Voronoi, non è adatto per essere direttamente utilizzato nella valutazione della *Collision Detection* in quanto sarà costituito da molte sfere (funzione del numero di celle del diagramma di Voronoi e quindi dal numero di punti campione utilizzati) e non organizzate in una struttura gerarchica, condizione essenziale per ottenere buone performance computazionali.

La costruzione dell'albero delle sfere utilizza una metodologia *top-down*. La radice dell'albero contiene una singola sfera, la più piccola sfera contenente tutti i punti campione (algoritmo di Ritter's [22]). A ciascun livello non terminale dell'albero è richiesto di avere uno specifico numero di figli (n). Così il primo livello dell'albero conterrà n sfere, ottenute attraverso un algoritmo di unione di coppie di sfere. I livelli successivi utilizzeranno le sfere usate per creare il nodo padre, derivanti dall'approssimazione del *medial axis*. La profondità raggiungibile nell'albero delle sfere non è arbitraria ma dipenderà dal numero di sfere generate dal *medial axis*, quindi dal numero e dalla posizione dei punti campione. Il numero di sfere (n) relativo a ciascun livello (l) dipende dal fattore di ramificazione (f). Quest'ultimo coefficiente rappresenta il numero di sfere generate da una stessa sfera padre, appartenente al livello superiore. Pertanto, il numero di sfere per livello è dato dalla seguente espressione:

$$n = f^l, \quad l = 1, \dots, l_{max} \quad (13)$$

dove l_{max} è il numero massimo di livelli dell'albero delle sfere.

La costruzione dell'albero delle sfere tramite il *medial axis* certamente porta ad approssimare meglio l'oggetto in esame rispetto al metodo *Octree*. Tale risultato è conseguenza del fatto che nel *medial axis* i centri delle sfere vengono posizionate lungo lo "scheletro" del corpo e quindi tenendo conto della forma del corpo stesso, mentre nel metodo *Octree* le posizioni dei centri delle sfere sono indipendenti dalla geometria dell'oggetto in esame. Per contro, il metodo *medial axis* è computazionalmente più costoso; questo però non rappresenta per noi un problema in quanto la costruzione dell'albero delle sfere è un processo precalcolato.

Sulla tecnica *medial axis* si sono basati numerosi algoritmi evolutivi [7,17] che cercano di dare una rappresentazione dell'oggetto ancora più accurata, mantenendo la struttura gerarchica su cui si basa la metodologia. Tra questi si ricorda il metodo *Burst* [17] che genera il numero n specifico di sfere per ogni livello attraverso successive ed oculte rimozioni di sfere. Quando una sfera è rimossa le sfere vicine devono aumentare la loro dimensione per poter coprire la superficie del corpo rimasta scoperta. Questo permette di distribuire meglio l'errore introdotto durante la riduzione.

4.2.3 Esempio

Per meglio comprendere la struttura gerarchica basata su primitive sferiche nell'approssimazione di un oggetto, di seguito viene presentato un esempio dell'applicazione della metodologia *Octree* ad un cubo. Questo viene descritto inizialmente attraverso una rappresentazione mediante *mesh* triangolare. Si è scelto di rappresentare il cubo attraverso 5 livelli, ed un coefficiente di ramificazione pari ad 8. Si ha così, per la (13), che ciascun livello è composto dal numero di sfere indicato in Tabella 1.

L'albero delle sfere ha la struttura rappresentata in Figura 6. Un maggior livello dell'albero delle sfere corrisponde un maggior dettaglio di rappresentazione del corpo (Figura 7). Scelto quindi il quinto livello come livello di dettaglio descrittivo della geometria del corpo, per la verifica di collisione tra il cubo (A) ed un secondo corpo (B), rappresentato anch'esso attraverso sfere, si può fare riferimento alla struttura di Figura 6. Se il corpo B è definito da una sola sfera, si procede dapprima attraverso la verifica della (7) tra la sfera del corpo B e la

Livello	Numero di sfere
1	1
2	8
3	64
4	512
5	4096

Tabella 1: Numero di sfere nella rappresentazione di un cubo.

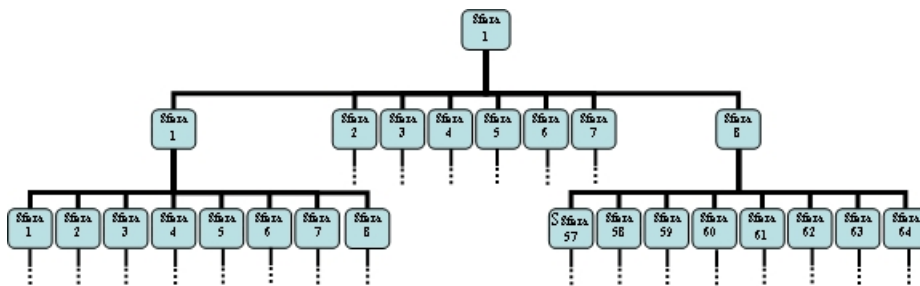


Figura 6: Rappresentazione dei primi tre livelli dell'albero delle sfere con un fattore di ramificazione pari ad 8.

sfera del livello 1 di A . Se la (7) è verificata significa che vi è collisione tra i due corpi quindi si procede alla verifica di collisione tra la stessa sfera del corpo B e quelle di livello 2 del corpo A . Se ad esempio tra queste solo la sfera 1 e la sfera 8 soddisfano la (7), il controllo successivo verrà effettuato solo tra le sfere figlie del livello 3 appartenenti alle sfere padre 1 ed 8 del livello 2. Si evince quindi come la verifica di collisione diventi molto efficiente in termini di tempi di calcolo.

4.3 Valutazione della qualità di rappresentazione

In generale, il confronto tra le varie metodologie per la soluzione del problema di *Collision Detection* che fanno uso di primitive nell'approssimazione di un oggetto avente forma generica, è basato sull'efficienza degli algoritmi in termini

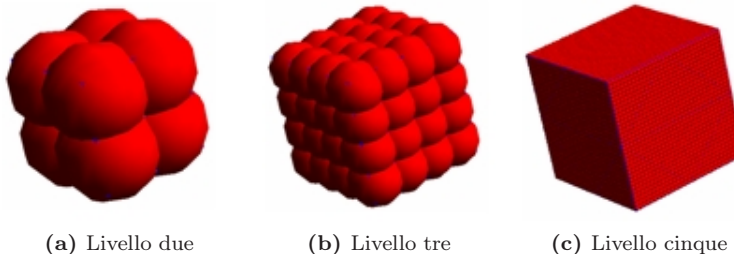


Figura 7: Approssimazione di un cubo con sfere utilizzando il metodo *Octree*.

di prestazioni computazionali. Tale parametro dipende fortemente dalla qualità di approssimazione del corpo e quindi dalla forma della primitiva elementare utilizzata per la rappresentazione approssimata dell'oggetto in studio. Come precedentemente menzionato, tutti gli algoritmi che utilizzano una data primitiva mirano a rappresentare la forma dell'oggetto il più vicino possibile alla forma reale e con il minor numero di primitive. Appare quindi importante riuscire a valutare la bontà di approssimazione nella rappresentazione mediante primitive elementari di un corpo avente forma generica. Nel nostro caso, la valutazione di tale parametro è ancora più importante in quanto si utilizza la rappresentazione approssimata dei corpi in esame, non solo nella verifica della collisione ma anche come vincolo alla disposizione delle fibre elastiche. Pertanto, come parametro discriminante per la scelta degli algoritmi che fanno uso di primitive organizzate in gerarchie ad albero, vi è la qualità di rappresentazione. In particolare, si vuole stabilire fra i tre algoritmi sopra considerati (*Octree*, *Hubbard* e *Burst*) quale sia quello che approssima meglio un oggetto mediante l'uso di primitive sferiche. Appare chiaro come nel caso in esame interessi il confronto tra i diversi algoritmi a parità di livello massimo scelto nella struttura gerarchica ad albero.

In letteratura sono stati definiti diversi indici che cercano di dare una plausibile misura della qualità di rappresentazione. Alcuni di questi, come la *distanza di Hausdorff* utilizzata in [6], sono generali e non dipendono dalla rappresentazione adottata, mentre altri, come l'indice δ in [20], sono legati al contesto della rappresentazione mediante sfere. Accanto a tali indici, è stato proposto in [8] un nuovo indice, denominato K , per la valutazione della qualità di approssimazione con primitive sferiche di un corpo avente forma generica. Dagli esempi riportati in [8], è stato possibile stabilire come l'algoritmo *Burst* permetta un'approssimazione con una qualità nettamente superiore rispetto agli altri due algoritmi. A conferma di questo risultato ogni esempio è stato confrontato con l'indice basato sulla *distanza di Hausdorff* che ha dato risultati concordi con quelli dell'indice K .

5 Modellazione della collisione tra fibre elastiche e corpi rigidi

L'utilizzo di primitive sferiche, sia nella rappresentazione di corpi rigidi che nella rappresentazione delle fibre elastiche comporta, oltre ai vantaggi sopra menzionati, anche la possibilità di utilizzare lo stesso modello adottato per la verifica della collisione tra fibre adiacenti (Sezione 2). Pertanto, la verifica della collisione tra una sfera della fibra ed una sfera del corpo avviene sfruttando il metodo gerarchico di rappresentazione esposto nella Sezione 4 secondo la disequazione (7). Se sono presenti delle collisioni, analogamente a quanto illustrato nella Sezione 3, si dovrà aggiornare la matrice \mathbf{J}_{nl} con le nuove condizioni espresse dai vincoli di non compenetrazione tra le sfere della fibra in esame e quelle di corpo rigido.

Appare chiaro quindi come l'adozione della stessa rappresentazione, sia per le fibre elastiche che per i corpi rigidi, renda il modello matematico generale semplice da gestire e da implementare garantendo nel contempo la precisione richiesta dall'applicazione. Quest'ultima è funzione del diametro delle sfere e

dal numero delle stesse utilizzate nella rappresentazione. La relazione tra questi due parametri e l'influenza degli stessi sui tempi di calcolo è illustrata in [12].

6 Applicazione

Come esempio di applicazione, di seguito verranno presentati i risultati ottenuti utilizzando lo strumento qui sviluppato nell'ambito della biomeccanica, in particolare nello studio dei fasci legamentosi dell'articolazione tibiotarsica umana durante il "test del cassetto". Tale test consente di valutare l'integrità dei fasci legamentosi dell'articolazione tibiotarsica e consiste in una trazione antero-posteriore manuale del calcagno rispetto alla gamba. Se si riscontrano traslazioni eccessive fuori sede dell'astragalo rispetto alla pinza tibio-fibulare, significa che il complesso legamentoso non garantisce la stabilità dovuta alla caviglia.

6.1 Modellazione dei legamenti

Alla stabilità ed alla guida dell'insieme articolare contribuiscono i forti nessi legamentosi. Tali legamenti sono costituiti da fibre di collagene (circa 80%) a cui si associano fibre elastiche (elastina circa 5%) con andamento parallelo a formare fasci o nastri. Sono queste fibre di collagene che conferiscono le proprietà meccaniche al legamento grazie alla flessibilità ed alla resistenza a trazione. Inoltre è assolutamente trascurabile l'allungamento che esse subiscono. Una caratteristica fondamentale dei legamenti è che non generano forze "attive" (come nel caso dei muscoli), ma forze passive: in altre parole le forze generate insorgono a causa delle deformazioni che vengono imposte esternamente. I legamenti possono essere visti come organi elastici ed è stata proprio questa similitudine a suggerire l'applicazione dello strumento qui studiato.

Nell'ambito dello studio di modelli che permettono di individuare le configurazioni e le forze scambiate dai legamenti, i primi lavori ipotizzarono i legamenti come un'unica fibra filiforme avente funzione di semplice tirante; successivamente fu adottato l'approccio più complesso multifibra che mirava a considerare il problema tridimensionale [23], quale è in realtà. Tale approccio tralasciava però l'aspetto fisico delle fibre, consentendone la compenetrazione. In questo ambito si inserivano i modelli di verifica di collisione a cilindri [10] e a sfere [11, 13]. Tali modelli hanno consentito di individuare le configurazioni spaziali delle fibre, aventi origine ed inserzioni descritte da curve nello spazio, nel rispetto della non compenetrazione reciproca tra le fibre stesse. Il successivo sviluppo di tali lavori è stato quello di introdurre nel modello l'ulteriore vincolo delle ossa [12], rappresentate attraverso l'uso di *mesh* triangolari piane, e quindi di determinare la configurazione del fascio legamentoso nel rispetto della non compenetrazione delle fibre stesse con le ossa di un'articolazione. Il modello a sfere adottato nel presente strumento risulta quindi in linea con l'evoluzione dei modelli precedenti, considerando i legamenti come fibre elastiche aventi origine ed inserzione sui capi ossei dove si innestano. Le ossa insieme alle fibre dei legamenti interagenti reciprocamente rappresentano quindi l'ostacolo al libero movimento dei legamenti stessi.

La caratteristica elastica è fornita dal modello meccanico ossia dalla curva di risposta forza-deformazione. A seconda dell'articolazione e del legamento che si intende studiare esistono diversi modelli noti in letteratura. Tra questi

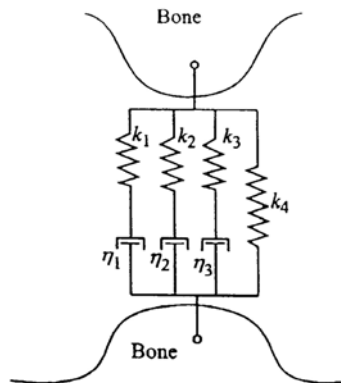


Figura 8: Modello di Funk.

si ricordano quelli parabolico e parabolico-lineare (utilizzati spesso nello studio dei legamenti del ginocchio). Per quanto riguarda invece lo studio dei legamenti della caviglia è spesso utilizzato il modello di Funk, nel quale il legamento è visto come un sistema viscoelastico (Figura 8), caratterizzato da elementi puramente elastici aventi rigidezze k_i e da elementi puramente viscosi aventi viscosità η_i , e la cui risposta meccanica è descritta in funzione del tempo e delle deformazioni [24]. Rimanendo nel campo dei sistemi stazionari (trascurando quindi d'ora in avanti il comportamento viscoso) la funzione (forza F) di risposta elastica che approssima i dati sperimentali dipende, secondo Funk, da due parametri A e B , tabulati, in particolare, per ogni legamento del sistema articolare della tibiotarsica:

$$F(\epsilon) = A(e^{B\epsilon} - 1) \quad (14)$$

Mediante la (5) è possibile quindi calcolare, per ogni fibra costituente il legamento in studio, l'energia potenziale elastica totale. Note le posizioni di inserzione ed origine sulle ossa, le fibre si disporranno secondo la configurazione corrispondente al minimo dell'energia potenziale elastica totale, rispettando i vincoli di non compenetrazione. Il nuovo algoritmo, sviluppato in MATLAB[®], implementa il solutore di sistemi vincolati non lineari presentato in [13] che permette di determinare il minimo della funzione energia potenziale totale con tempi computazionali ridotti.

6.2 Modellazione delle ossa

Per la definizione dei dati morfologici delle ossa sono stati utilizzati i risultati del progetto VAKHUM [25], volto a creare una banca dati di misurazioni morfologiche e cinematiche del corpo umano. Le ossa utilizzate in questa applicazione sono la tibia, il perone, l'astragalo ed il calcagno del piede sinistro ottenute attraverso TAC (*Tomografia Assiale Computerizzata*). Tali ossa sono state fornite in formato STL (*Standard Triangulation Language*) e da queste sono state ricavate, con l'aiuto di un software di disegno, le superfici NURBS chiuse ed inviluppanti le ossa stesse, così come descritto in [26]. Successivamente è stata applicata una tecnica di registrazione spaziale basata sull'algoritmo di Singular Value Decomposition (SVD) che ha consentito di determinare il vettore di

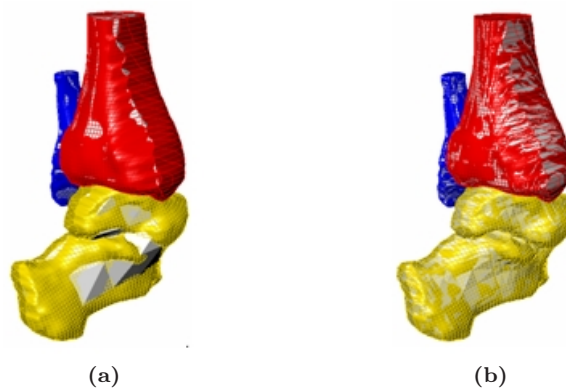


Figura 9: Approssimazione delle ossa, rappresentate da NURBS, mediante *mesh* triangolari con un numero insufficiente (a) e adeguato (b) di triangoli.

trasformazione e la matrice di rotazione per l'allineamento ottimale tra il modello delle ossa in esame e le superfici articolari relative alla posizione neutrale. Queste superfici sono state ricavate attraverso rilievi sperimentali su preparati anatomici eseguiti nei laboratori degli Istituti Ortopedici Rizzoli. Dalle superfici NURBS così ottenute è stato possibile ricavare, attraverso il comando “*mesh*” messo a disposizione dallo strumento CAD (*Computer Aided Design*) utilizzato, un'approssimazione a triangoli della superficie delle ossa. La rappresentazione delle stesse con un numero appropriato di triangoli è fondamentale per una corretta approssimazione della geometria. Avendo le ossa una geometria complessa, adottare un basso numero di triangoli significa ottenere una rappresentazione la cui forma risulta differente da quella del corpo reale (Figura 9).

In questa sede si è valutata solo qualitativamente la bontà di approssimazione delle superfici NURBS attraverso *mesh* triangolari piane, verificando visivamente il risultato dell'approssimazione stessa. Il numero di triangoli adottato per ogni corpo è indicato in Tabella 2.

Come descritto nella Sezione 4, la rappresentazione mediante triangoli delle ossa è il punto di partenza per la costruzione della successiva approssimazione del corpo osseo ottenuta attraverso l'uso di algoritmi per la generazione di una gerarchia di sfere.

Ai fini della valutazione del posizionamento del legamento (approssimato attraverso sfere) sulla superficie delle ossa, risulta importante che l'algoritmo per la generazione delle primitive sferiche sia in grado di dimensionare e collocare le sfere in modo da ricalcare il più possibile la forma geometrica del corpo reale. Ciascun algoritmo, secondo le diverse metodologie indicate nella Sezione 4, ap-

Tabella 2: Numero di triangoli utilizzati nella rappresentazione delle ossa.

Ossa	Numero di triangoli
Tibia	4249
Fibula	1759
Astragalo	10586

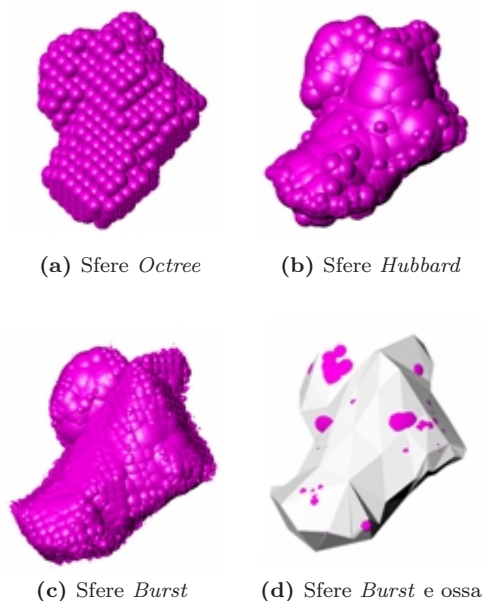


Figura 10: Livello cinque dell'albero delle sfere utilizzando diversi algoritmi di approssimazione.

prossima il corpo collocando le sfere in una struttura gerarchica ad albero, dove i livelli rappresentano un crescente miglioramento della qualità dell'approssimazione, come espresso dalla (13). Stabilito quindi un fattore di ramificazione f , la scelta del numero dei livelli per l'approssimazione con sfere del corpo osseo incide, attraverso il numero massimo di sfere utilizzate nella rappresentazione, sulla qualità dell'approssimazione stessa. Le sfere appartenenti al massimo livello della gerarchia verranno utilizzate nella simulazione come rappresentazione della forma delle ossa. Si evince quindi come la scelta del livello massimo, del fattore di ramificazione e del tipo di algoritmo sia determinante ai fini di una corretta approssimazione del corpo stesso.

Seguendo quanto illustrato nella Sezione 4.3, tra gli algoritmi *Octree*, *Hubbard* e *Burst* presi in considerazione, si è scelto quello che consente la migliore approssimazione qualitativa della forma delle ossa utilizzando primitive sferiche, a parità di fattore di ramificazione e livello massimo nell'albero gerarchico, come illustrato in Figura 10. I parametri nella generazione dell'albero delle sfere con i diversi algoritmi sono indicati in Tabella 3.

Per tale valutazione è stato utilizzato il coefficiente K presentato in [8, 9]. Tra gli algoritmi in esame quello che dà una qualità di approssimazione migliore rispetto agli altri in corrispondenza dell'ultimo livello della struttura gerarchica è l'algoritmo *Burst*, a conferma dei risultati precedentemente esposti nella Sezione 4.3. Si ha quindi che il livello cinque dell'albero delle sfere, generato utilizzando l'algoritmo *Burst* con i parametri di Tabella 3, rappresenta la soluzione la cui qualità di approssimazione rispetto al corpo reale è quella desiderata.

Da questo livello si ricrea l'albero delle sfere in modo tale che il livello superiore (in questo caso il livello quattro) abbia sfere che racchiudano tutte quelle

Tabella 3: Parametri degli algoritmi di approssimazione.

Parametri	Algoritmi		
	<i>Octree</i>	<i>Hubbard</i>	<i>Burst</i>
Numero di livelli	5	5	5
Fattore di ramificazione	-	6	6
Numero punti campione	-	500	500

del livello successivo (cinque). Ad esempio, facendo riferimento alla Figura 6, la sfera 1 del livello 2 deve avere dimensione e collocazione nello spazio tale da racchiudere tutte le sfere figlie del livello 3 (sfere da 1 a 8).

La tecnica adottata per calcolare il centro ed il raggio di una sfera tale da contenere n sfere i cui centri e raggi sono noti, è la seguente. Il centro della sfera viene collocato nel baricentro delle n sfere considerate aventi massa unitaria. Quindi noti i centri delle singole sfere individuati dai vettori posizione $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ il centro della nuova sfera è individuato dal vettore \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i}{n} \quad (15)$$

Il raggio r della medesima sfera risulta quindi essere:

$$r = \max(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{X}\| + r_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

dove r_i è il raggio della sfera i -esima.

Si vuol mettere in luce che non è possibile utilizzare l'albero creato direttamente dall'algoritmo *Burst* ai fini di una verifica precisa di collisione utilizzando approssimazioni con primitive sferiche, in quanto la disposizione delle sfere padre sono tali da non includere tutte le sfere figlie. In tal caso gli eventuali contatti generati dalle sfere figlie uscenti dalle sfera padre potrebbero non essere evidenziati, non segnalando così zone di contatto nei corpi. Con il nuovo albero delle sfere qui proposto risulta possibile affinare la ricerca della zona di contatto senza rischiare di perdere l'informazione del contatto stesso.

6.3 La simulazione del legamento tibio-calcaneo

Sfruttando le strategie precedentemente menzionate nella rappresentazione sia delle ossa che dei legamenti, si è simulata la disposizione del legamento tibio-calcaneo (TiCal) della caviglia sinistra umana durante il "test del cassetto".

Il legamento è stato rappresentato mediante quattro fibre composte da 40 sfere di ugual diametro. Nel movimento del talo e del calcagno, considerato ai fini della simulazione un corpo unico rispetto alla tibia ed alla fibula (considerate fisse), il legamento in studio ha assunto conformazioni diverse dalla condizione di rettilineità che si ottiene collegando attraverso segmenti retti le origini con le inserzioni. La presenza delle ossa ed in particolare la forma del malleolo ² laterale devia il legamento dalla condizione di rettilineità, anche se non in maniera significativa.

In Figura 11 è illustrato uno dei passi della simulazione. In (a) e (b) il

²Sporgenza ossea bilaterale situata in corrispondenza della caviglia.

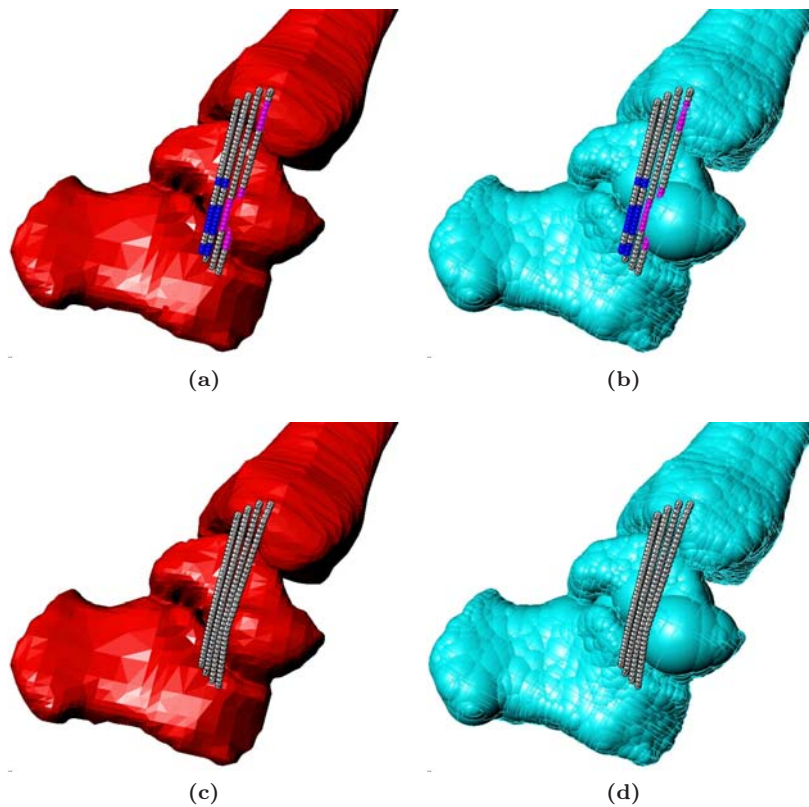


Figura 11: Passo di simulazione.

legamento è definito come unione di segmenti rettilinei aventi come estremi le origini e le inserzioni. Questa condizione è la fase iniziale per ogni passo della simulazione, dalla quale si parte per stabilire la corretta disposizione delle fibre nel rispetto della non compenetrazione sia reciproca che con le ossa. In (a) e (b) le sfere del legamento evidenziate in blu sono quelle che determinano contatto tra fibre adiacenti, mentre in magenta sono evidenziate le sfere del legamento che intersecano quelle descrittive dei corpi ossei. In (b) e (d) le ossa sono rappresentate dal quinto livello dell'albero delle sfere costruito con l'utilizzo dell'algoritmo *Burst* in accordo a quanto detto nella Sezione 4. Quindi le fibre del legamento si dovranno disporre in modo da rispettare il vincolo di non compenetrazione tra le sfere descrittive della fisicità del legamento stesso con quelle descrittive della forma delle ossa. La corretta collocazione e dimensione delle sfere nella descrizione delle ossa influisce sull'errore di posizionamento delle sfere dei legamenti. I metodi adottati nella Sezione 4 per la rappresentazione attraverso sfere di un corpo di forma qualunque assicura che l'errore stia nei limiti di interesse dell'applicazione in esame. In (c) e (d) è riportata la soluzione del passo di simulazione in studio rispetto alle ossa intese rispettivamente come insieme di *mesh* di triangoli o sfere.

In Tabella 4 sono riportati, per ogni passo di simulazione i tempi richiesti per disporre correttamente tutte le fibre del legamento. Si può notare come

la soluzione del passo 44 abbia un numero di cicli pari a 40. Questo è l'unico passo nell'intera simulazione che non è riuscito a determinare la configurazione corrispondente al minimo dell'energia potenziale elastica totale rispettando i vincoli di non compenetrazione. Questi rari casi di non convergenza possono essere imputati a cause di natura differente; ad esempio il solutore *fmincon* di MATLAB[®] potrebbe essersi imbattuto in minimi locali i quali hanno fatto sì che l'algoritmo non convergesse nella ricerca del minimo assoluto. Diversi sono i criteri che si possono adottare per la gestione di queste criticità, come illustrato in [13]. Qualunque metodo si adotti rimane comunque consigliato mettere un limite superiore al numero di cicli che il programma può effettuare nell'analisi di uno stesso passo di simulazione. Questo è quanto è stato fatto nel caso in esame e tale limite corrisponde proprio a 40 cicli.

Si vuole inoltre sottolineare come non sia a priori possibile dare una stima dei tempi di calcolo necessari alla simulazione in quanto tali tempi dipendono fortemente dalla configurazione del legamento stesso e quindi anche dal numero di contatti. In linea di massima, all'aumentare del numero dei contatti aumenterà il tempo richiesto in quanto aumenteranno in generale il numero di iterazioni del ciclo che porta alla minimizzazione dell'energia potenziale elastica totale.

Tabella 4: Parametri di elaborazione per ogni passo di simulazione.

Step	Tempo	N.ro cicli	N.ro iterazioni
1	0' 20"	4	384
2	0' 24"	6	447
3	0' 23"	6	447
4	0' 21"	5	434
5	0' 21"	5	430
6	0' 22"	6	402
7	0' 21"	6	381
8	0' 20"	6	359
9	0' 17"	5	334
10	0' 22"	7	375
11	0' 20"	6	373
12	0' 20"	6	380
13	0' 22"	7	386
14	0' 18"	5	364
15	0' 18"	5	353
16	0' 20"	6	385
17	0' 20"	6	366
18	0' 18"	6	346
19	0' 18"	6	335
20	0' 18"	6	332
21	0' 19"	6	331
22	0' 16"	5	317
23	0' 16"	5	315
24	0' 16"	5	317
25	0' 16"	5	323
26	0' 15"	5	301
27	0' 15"	5	290
28	0' 15"	5	313
29	0' 16"	5	331
30	0' 16"	5	331
31	0' 20"	7	329

Continua nella pagina successiva

Step	Tempo	N.ro cicli	N.ro iterazioni
32	0' 21"	8	342
33	0' 17"	6	329
34	0' 18"	6	336
35	0' 17"	6	326
36	0' 17"	6	327
37	0' 17"	6	319
38	0' 17"	6	318
39	0' 17"	6	326
40	0' 17"	6	317
41	0' 19"	7	310
42	0' 17"	6	318
43	0' 17"	6	326
44	1' 22"	40	412
45	0' 18"	6	326
46	0' 17"	6	307
47	0' 17"	6	304
48	0' 18"	6	310
49	0' 18"	6	306
50	0' 18"	6	309
51	0' 19"	6	331
52	0' 19"	6	336
53	0' 18"	6	330
54	0' 17"	6	294
55	0' 17"	5	292
56	0' 17"	5	288
57	0' 17"	5	276
58	0' 15"	5	269
59	0' 15"	5	276
60	0' 15"	5	279
61	0' 15"	5	285
	19' 25"	383	20535

7 Conclusioni

Nel presente lavoro è stato presentato uno strumento che consente di individuare le configurazioni spaziali assunte da fibre elastiche rispettando le condizioni di non compenetrazione tra corpi.

L'uso di primitive sferiche nella rappresentazione della forma degli oggetti appartenenti alla scena (siano essi rigidi o elastici) congiuntamente all'adozione di strategie comunemente utilizzate nell'ambito della grafica computazionale, ha permesso di ottenere uno strumento flessibile, robusto ed efficiente in termini di carico computazionale.

La precisione nei risultati è influenzata fortemente dal numero dei gradi di libertà che si vogliono adottare nel problema in studio, ovvero dal numero e dalla dimensione delle sfere utilizzate nella rappresentazione dei corpi. Diversamente, il tempo di calcolo è strettamente correlato alla configurazione assunta dagli oggetti e quindi è dipendente dal numero dei contatti che si verificano tra i corpi stessi durante la simulazione. Risulta pertanto difficile riuscire a stimare a priori il tempo necessario per portare a termine la simulazione.

Il nuovo strumento presentato in questo articolo è stato poi applicato all'ambito della biomeccanica in particolare nello studio delle configurazioni assunte dai legamenti umani nel movimento relativo delle ossa. La forte deformazione associata al legamento porta ad un incremento della forza che il legamento stesso esercita sui capi ossei. L'influenza di questo incremento sulla stabilità della struttura articolare dovrà essere in futuro verificata e confermata da prove cliniche di laboratorio. Le future applicazioni di questo strumento nel campo della biomeccanica lo vedono protagonista nel calcolo delle forze che i legamenti esercitano sulle articolazioni umane stabilendo quindi quali ed in che percentuale i legamenti stessi influiscono sull'insieme delle strutture articolari.

Riferimenti bibliografici

- [1] Baraff D. and Witkin A. Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics*, volume 32, pages 43–52, July 1998.
- [2] Kuehnapfel U., Cakmak H.K., and Maass H. Endoscopic surgery training using virtual reality and deformable tissue simulation. *Computers and Graphics (Pergamon)*, 24(5):671–682, 2000.
- [3] Conti F., Khatib O., and Baur C. Interactive rendering of deformable objects based on a filling sphere modeling approach. In *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 3716–3721, 2003.
- [4] Cani-Gascuel M.P. and Desbrun M. Animation of deformable models using implicit surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(1):39–50, 1997.
- [5] Summet H. and Webber R. Hierarchical data structures and algorithms for computer graphics. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 8(3):48–68, 1988.
- [6] Hubbard P.M. Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection. *ACM Transactions on Graphics*, 15(3):179–210, July 1996.
- [7] Bradshaw G. and O’Sullivan C. Adaptive medial-axis approximation for sphere-tree construction. *ACM Transactions on Graphics*, 23(1):1–26, January 2004.
- [8] Franci R. and Parenti-Castelli V. A novel index to compare the representation quality of objects approximated with spheres. In *Proceedings of RAAD’06, 15th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region*, Balatonfüred, Hungary, June 2006.
- [9] Franci R. and Parenti-Castelli V. Sulla qualità di rappresentazione di oggetti approssimati mediante primitive sferiche. Progress Report 125, DIEM - Faculty of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy, May 2006.
- [10] Paratelli R. Modello del comportamento elastico del legamento talofibulare anteriore della caviglia nel test del cassetto. Master’s thesis, DIEM - Faculty of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy, 2002.
- [11] Rondinini S. Validazione, analisi di sensibilità e nuovi sviluppi di un modello del comportamento elastico dei legamenti delle articolazioni umane. Master’s thesis, DIEM - Faculty of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy, 2003.
- [12] Franci R. Modello per lo studio del contatto ossa-legamenti con applicazione a movimenti della tibiotarsica umana. Master’s thesis, DIEM - Faculty of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy, 2004.

- [13] Sancisi N. Un nuovo modello cinetostatico dei legamenti umani con applicazione a test clinici del ginocchio. Master's thesis, DIEM - Faculty of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy, 2004.
- [14] Sancisi N., Parenti-Castelli V., and Leardini A. A matlab procedure for the solution of non-linearly constrained optimization problems. In *Proceedings of RAAD'05, 14th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region*, Bucharest, Romania, May 2005.
- [15] Jiménez P., Thomas F., and Torras C. 3D collision detection: a survey. *Computer&Graphics*, 25(2):269–285, April 2001.
- [16] Lin M.C. and Gottschalk S. Collision detection between geometric models: a survey. In *Proceeding of IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, volume 1, pages 602–608, San Diego, CA, May 1998.
- [17] Bradshaw G. *Bounding Volume Hierarchies for level of detail collision handling*. PhD thesis, Trinity College, Dublin, May 2002.
- [18] Gottschalk S., Lin M.C., and Manocha D. OBB-Tree: a hierarchical structure for rapid interference detection. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 171–180, New Orleans, August 1996.
- [19] Del Pobil A.P., Serna M.A., and Llovet J. A new representation for collision avoidance and detection. In *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 246–251, Nice, France, May 1992.
- [20] Gupta K. and Pobil A.P. *Practical motion planning in robotics: current approaches and future directions*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1998.
- [21] Blum H. A transformation for extracting new descriptors of shape. In *Models for the perception of speech and visual form*, pages 362–380. M.I.T. Press, Cambridge, MA, USA, 1967.
- [22] Ritter J. An efficient bounding sphere. In *Graphics Gems*, pages 301–303. Academic Press Professional, San Diego, CA, USA, 1990.
- [23] Corazza F., O'Connor J.J., Leardini A., and Parenti-Castelli V. Ligament fibre recruitment and forces for the anterior drawer test at the human ankle joint. *Journal of Biomechanics*, 36(3):363–372, 2001.
- [24] Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., and Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *Journal of Biomechanical Engineering*, 122(1):15–22, February 2000.
- [25] Van Sint Jan S. VAKHUM project: presentation and preliminary results. In *Proceeding of ISB 2001*, Zurich, Switzerland, July 2001.
- [26] Corazza F. TT FATO. Technical report, DIEM - Faculty of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy, 2005.

