

Università degli Studi di Bologna

DIEM

Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche,  
Nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia.  
Viale Risorgimento 2, 40136 Bologna, Italia

# Sulla qualità di rappresentazione di oggetti approssimati mediante primitive sferiche

Riccardo Franci, Vincenzo Parenti-Castelli

Data: 11.05.2006

*DIEM – PUBBLICAZIONE No. 125*



# SULLA QUALITÀ DI RAPPRESENTAZIONE DI OGGETTI APPROSSIMATI MEDIANTE PRIMITIVE SFERICHE

**Riccardo Franci, Vincenzo Parenti-Castelli**

DIEM- Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche,  
Nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia.  
Viale Risorgimento 2, 40136 Bologna, Italia  
e-mail: [riccardo.franci@mail.ing.unibo.it](mailto:riccardo.franci@mail.ing.unibo.it),  
[vincenzo.parenticastelli@mail.ing.unibo.it](mailto:vincenzo.parenticastelli@mail.ing.unibo.it)

Data: 11.05.2006

---

## **Abstract**

*Both algorithm efficiency and contact evaluation accuracy play a key role when dealing with the problem of Collision Detection. Several techniques from the literature used to solve this problem are based on the object representation by means of spheres. Efficiency and precision of the algorithms are closely connected to the quality of the representation of the objects. In this report, a new index which evaluates the approximation quality of the representation of the object with spheres is presented. Comparing the proposed index with other indexes from previous researches proves its correctness. Finally, as an example of application to a complex geometry bone, from the human ankle highlights the efficiency of the index.*

**Keywords:** Representation Quality, Collision Detection, Sphere-Tree, Quality Index

---

## **Sommario**

*Nell'ambito della verifica di collisione fra corpi l'efficienza degli algoritmi gioca un ruolo fondamentale congiuntamente alla precisione nella valutazione dei contatti. Molte delle tecniche adottate in letteratura per risolvere tale problematica si basano sull'approssimazione degli oggetti in studio mediante l'uso di primitive elementari quali, ad esempio, sfere. Efficienza e precisione degli algoritmi sono aspetti strettamente correlati alla qualità di rappresentazione degli oggetti. In questo lavoro viene presentato un nuovo indice che confronta, in termini di qualità di rappresentazione, i differenti algoritmi che approssimano un oggetto mediante primitive sferiche. La validazione dei risultati viene ottenuta attraverso l'analisi ed il confronto con altri indici presenti in letteratura. La validità dell'indice proposto viene infine messa in luce da un'applicazione ad un corpo a geometria complessa quale è la tibiotarsica umana.*

**Keywords:** Qualità di rappresentazione, Collision Detection, Albero delle sfere, Indice di qualità

---

# INDICE

<b>1. INTRODUZIONE</b>	<b>3</b>
<b>2. LA RAPPRESENTAZIONE A SFERE</b>	<b>5</b>
<b>3. VALUTAZIONE DELLA RAPPRESENTAZIONE ATTRAVERSO UN PARAMETRO DI “FITTING”</b>	<b>5</b>
3.1. Intersezione con un piano individuato da un triangolo	6
3.2. Intersezione con il solo spigolo	7
3.3. Intersezione con un vertice	12
<b>4. DEFINIZIONE DELL’INDICE DI QUALITÀ <math>K</math></b>	<b>13</b>
<b>5. APPLICAZIONI</b>	<b>14</b>
5.1. Corpi semplici	14
5.2. Confronto tra l’indice $K$ e la distanza di <i>Hausdorff</i>	15
5.3. Calcolo dell’indice $K$ per un corpo a geometria complessa	18
<b>6. CONCLUSIONI</b>	<b>21</b>

# 1. Introduzione

In un ambiente virtuale di simulazione vi possono essere sia oggetti in movimento sia oggetti fermi. Se gli oggetti appartenenti alla scena sono oggetti solidi allora non sono compenetrabili.

La *Collision Detection* verifica automaticamente dove e quali oggetti nella scena possono collidere. L'effetto causato dall'interazione tra gli stessi oggetti è chiamato *Collision Response*.

La *Collision Detection* è un fondamentale problema non solo nella computer grafica ma anche nella simulazione di ambienti reali, nella geometria computazionale, nella prototipazione virtuale e nella robotica. Negli ultimi anni sono stati proposti numerosi algoritmi per la risoluzione della *Collision Detection*, alcuni applicati a casi particolari altri invece basati su concetti teorici di geometria computazionale. Un'ampia panoramica delle principali metodologie adottate per la soluzione della problematica in esame è illustrata in [1,2].

Lo scopo principale nello studio di tali metodologie è quello di poter verificare la presenza o meno di contatti tra due o più corpi senza dover effettuare la verifica di tutte le possibili collisioni che vi possono essere tra tutti gli oggetti della scena che porterebbe, anche con algoritmi ottimizzati [3], ad un carico computazionale troppo elevato.

La gestione delle collisioni sono uno dei maggiori "colli di bottiglia" in un ambiente virtuale interattivo, in termini di tempo di calcolo, e quindi per diminuire tale carico computazionale una delle strategie è quella di approssimare l'oggetto o di decomporre lo spazio che esso occupa utilizzando una rappresentazione gerarchica ovvero una rappresentazione strutturata e sempre più dettagliata dell'oggetto in esame (*Bounding Volume Hierarchies*). Come messo in evidenza in [1], i principali vantaggi sono in primo luogo, che in molti casi l'interferenza o la non interferenza tra due oggetti può essere facilmente verificabile analizzando solo i primi livelli della struttura gerarchica ed in secondo luogo, una rappresentazione più dettagliata dell'oggetto è necessaria solo nella parte dove la collisione può verificarsi.

A tale scopo vengono spesso utilizzati algoritmi multifase (*hybrid algorithm*) [4-6], basati appunto sulla suddivisione della verifica in fasi, che consentono di analizzare un numero limitato di possibili collisioni tra oggetti, aumentando quindi l'efficienza dell'algoritmo. Le fasi in oggetto sono:

- *Broad phase*: riduce il numero delle coppie di oggetti che potenzialmente possono collidere, eliminando gli oggetti che risultano lontani tra loro;
- *Narrow phase*: riduce le aree degli oggetti che potenzialmente possono collidere attraverso una rappresentazione gerarchica dell'oggetto (*Bounding Volume Hierarchies*).
- *Exact Phase*: sfrutta i risultati della *narrow phase* per stabilire l'esatta collocazione dei contatti tra i corpi in esame.

Differenti tecniche sono state utilizzate allo scopo di realizzare la *Broad Phase*, ovvero una verifica "grezza" ma rapida della collisione tra i corpi. Un esempio di tale strategia è quella denominata "*Sweep and Prune*" presentata in [4] all'interno di un sistema denominato *I-COLLIDE*.

Tra le strategie più utilizzate nella soluzione della *Narrow Phase* vi sono quelle che operano una suddivisione spaziale degli oggetti utilizzando primitive di forma semplice (*Bounding Volume*) organizzate in strutture gerarchiche (*Bounding Volume Hierarchies*) ottenendo così contemporaneamente un'approssimazione successiva del corpo ed una rapida verifica di intersezione tra i corpi in contatto.

Molte sono le primitive presenti in letteratura su cui si basano le diverse strutture gerarchiche. La natura della forma delle primitive ha dato origine alle seguenti *Bounding Volume Hierarchies* (*BVH*):

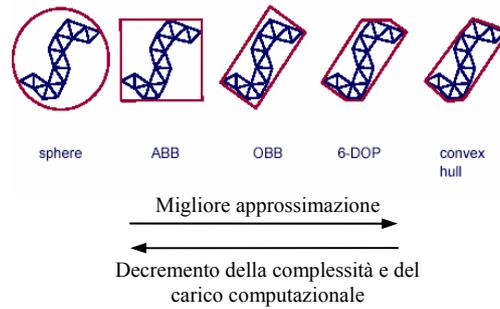
- sferiche: *Sphere-Tree* [5-10], *Spherical Shells* [11], *Sphere Swept Volumes (SSVs)* [12];
- parallelepipedi orientati come gli assi: *Axis Aligned Bounding Boxes (AABBs)* [13];
- parallelepipedi orientati: *Oriented Bounding Boxes (OBBs)* [14], implementato in un algoritmo denominato *RAPID*;
- forme composte: *Discrete Oriented Polytopes (k-DOPs)* [14].

La seguente equazione è stata utilizzata da Gottschalk in [14] per valutare l'efficienza in termini di tempi di calcolo dei vari tipi di *BVH*:

$$T = N_u \times C_u + N_p \times C_p \quad (1)$$

dove:

- $T$ : costo computazionale totale per la verifica di collisione tra una coppia di oggetti rappresentata da primitive;
- $N_u$ : numero di primitive aggiornate nella visita della struttura gerarchica;
- $C_u$ : costo dell'aggiornamento di una primitiva, dovuta al moto dell'oggetto;
- $N_p$ : numero di coppie di primitive testate;
- $C_p$ : costo per testare l'interferenza di una coppia di primitive/nodi della struttura gerarchica.



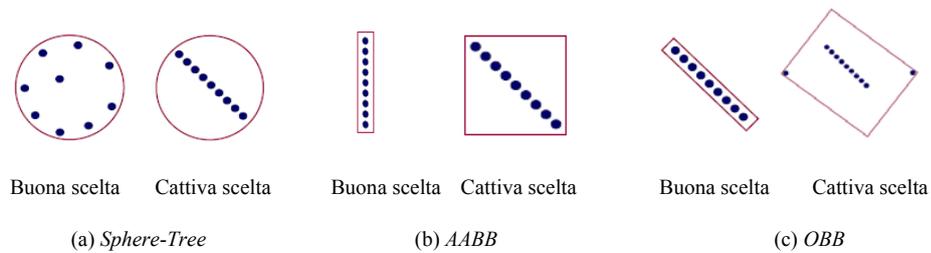
**Figura 1** - Caratteristiche delle diverse primitive [15].

All'aumentare della complessità delle primitive aumenta il valore di  $C_u$  e  $C_p$ , quindi semplici primitive, come ad esempio le sfere, consentono di avere un peso computazionale basso nella verifica di collisione che richiede, in questo caso, un semplice calcolo sulla distanza tra i centri delle sfere che approssimano la superficie del corpo in esame. Tuttavia, forme più complesse riescono ad approssimare meglio un oggetto di forma generica riducendo così il numero dei nodi necessari a realizzare il livello di approssimazione desiderato. Si può pensare anche come l'adozione di primitive la cui forma non si adatti all'oggetto che devono approssimare (il cui volume totale sia quindi molto più grande rispetto a quello dell'oggetto stesso) determini una maggiore probabilità di contatto tra le primitive stesse. Questo porterebbe quindi ad analizzare un numero elevato di nodi della struttura gerarchica, facendo decadere le prestazioni computazionali. Di conseguenza, per primitive più complesse il valore di  $N_u$  e  $N_p$  risulta, in generale, minore rispetto a quello che si avrebbe nell'utilizzare primitive di forma più semplice. Quindi la primitiva ottimale da adottare, come evidenziato in Figura 1, è quella che determina il miglior compromesso tra prestazioni, in termini di carico computazionale, e qualità di rappresentazione.

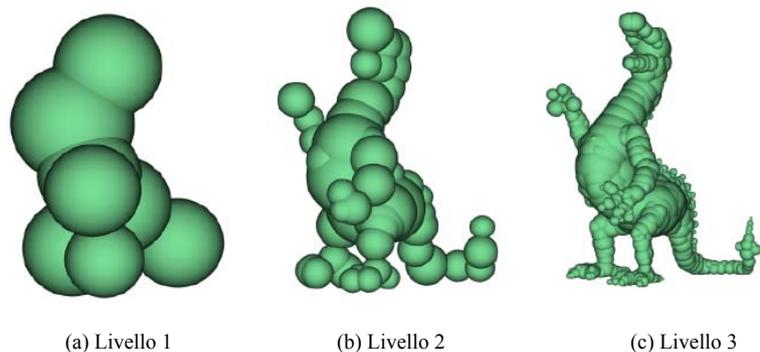
Si può osservare come la scelta del tipo di primitiva da adottare, per la rappresentazione approssimata di un corpo, dipenda anche dalla forma del corpo stesso (Figura 2), pertanto si può affermare che non esiste una primitiva migliore in assoluto.

Scelta la primitiva da adottare per la rappresentazione del corpo è possibile poi procedere alla costruzione della struttura gerarchica (ad albero) utilizzando strategie differenti e presenti in letteratura.

L'ultimo livello dell'albero gerarchico definisce il livello di dettaglio che si vuole raggiungere attraverso l'approssimazione successiva del corpo mediante le primitive scelte. Più alto sarà il numero di livelli più la rappresentazione approssimata tenderà a quella del corpo reale ma più nodi costituiranno la gerarchia stessa (Figura 3).



**Figura 2** - Esempi di valutazione sulla scelta della primitiva più adatta in base alla forma dell'oggetto in studio [15].



**Figura 3** - Esempio di approssimazione con 3 livelli di sfere.

La verifica di collisione tra due corpi, rappresentati da primitive dello stesso tipo, viene quindi effettuata tra primitive appartenenti allo stesso livello. Se vi sono primitive che collidono, allora si procede con la verifica di collisione solo dei loro figli (contenute nelle primitive che collidono e di livello inferiore nell'albero gerarchico), questo fino a giungere all'ultimo livello dell'albero gerarchico. Vengono così individuate le zone degli oggetti appartenenti alla scena che vengono in contatto concludendo così, quella che in precedenza è stata definita *Narrow Phase*. Nell'eventualità che sia necessario capire l'esatto punto in cui vi è contatto tra i corpi, verranno applicati gli algoritmi ottimizzati caratteristici della *Exact Phase* [3].

Per le applicazioni in cui è richiesto un elevato valore di *frame-rate*<sup>1</sup> (come la simulazione in tempo reale) o per tutte quelle applicazioni in cui la verifica della collisione deve essere eseguita in un tempo prestabilito, ci si accontenta di un'approssimazione nella valutazione della posizione del contatto fermando l'analisi della collisione ad un determinato livello della struttura gerarchica se il tempo di calcolo richiesto ha raggiunto il tempo preventivato, ossia il tempo necessario a mantenere il *frame-rate* richiesto. Tale algoritmo è conosciuto come *Interruptible Collision Detection* [7].

Il confronto tra le varie metodologie è, come ovvio, di interesse e può essere effettuato valutando l'efficienza degli algoritmi sia in termini di prestazioni computazionali sia in termini di qualità di rappresentazione.

In questo lavoro si definisce un nuovo indice che consente di valutare la qualità di approssimazione con primitive sferiche di un corpo avente forma generica. Questo nuovo indice permette quindi di confrontare i diversi algoritmi per la costruzione dell'albero delle sfere potendo così definire, caso per caso, quale algoritmo dia una rappresentazione più vicina alla forma dell'oggetto. Quindi, l'indice in questione viene confrontato con altri presenti in letteratura mettendone in evidenza l'efficacia e successivamente viene illustrato un caso applicativo nel quale si valuta la qualità di rappresentazione dei diversi algoritmi nell'approssimare attraverso sfere un corpo di forma complessa, quale è la caviglia umana.

## 2. La rappresentazione a sfere

In questo lavoro si è scelto di rappresentare il corpo attraverso primitive sferiche.

Lo spostamento del corpo (rigido) durante la simulazione prevede la sola trasformazione delle coordinate dei centri delle sfere appartenenti all'albero gerarchico. Si ha interferenza tra una coppia di sfere se è verificata la seguente disequazione:

$$\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \leq r_j + r_i \quad (2)$$

dove  $C_j = (x_j, y_j, z_j)$  e  $C_i = (x_i, y_i, z_i)$  sono le coordinate dei centri della coppia di sfere in esame, e  $r_i, r_j$  sono i raggi delle sfere medesime.

La facilità con la quale l'albero delle sfere può essere analizzato comporta un basso valore di  $C_u$  e  $C_v$  (1). Tuttavia, per raggiungere un adeguato livello di dettaglio nella rappresentazione approssimata è necessario utilizzare un elevato numero di sfere (specie se il corpo ha una forma complessa) che incrementa quindi i valori di  $N_u$  e  $N_v$  (1). Il numero delle sfere utilizzato per raggiungere un livello di dettaglio adeguato è strettamente correlato alla metodologia adottata nella realizzazione dell'albero gerarchico.

In letteratura sono presenti diversi algoritmi per l'approssimazione successiva di un oggetto attraverso la costruzione di una gerarchia (ad albero) di sfere [5-10]. Tra le strategie le più comuni vi sono quelle che si basano sul metodo *Octree* [6] e *Hubbard* [7].

Il metodo *Octree* prevede la suddivisione ricorsiva dello spazio in cubi e la costruzione di ciascuna sfera attorno al cubo.

Il metodo di *Hubbard* si fonda sulla costruzione di un asse mediano (*medial axis*) che rappresenta lo scheletro dell'oggetto e che consente di guidare la disposizione iniziale delle sfere. Su questo metodo si sono basati ulteriori algoritmi [5,6] che cercano di dare una rappresentazione dell'oggetto il più accurata possibile.

## 3. Valutazione della rappresentazione attraverso un parametro di "fitting"

Per valutare la bontà di rappresentazione di un corpo per mezzo di sfere, si è cercato di individuare un parametro oggettivo che permettesse un confronto diretto tra i diversi metodi adottati.

In letteratura sono stati definiti diversi indici che cercano di dare una plausibile misura della qualità di rappresentazione.

In [8,9] è stato proposto un indice,  $\delta$ , definito come il rapporto tra il volume occupato dalla parte esterna delle sfere (rispetto alla superficie dell'oggetto) usate per approssimare la superficie dell'oggetto in esame e l'area

<sup>1</sup> Velocità di immagini in un filmato, misurata in fotogrammi al secondo.

della superficie stessa coperta dalle sfere medesime. Questo parametro stima l'errore medio della distanza tra il bordo delle sfere, che fuoriescono dalla superficie del corpo, e la superficie del corpo stesso.

In [7] si fa riferimento alla *distanza di Hausdorff* per la misura dell'imprecisione nella verifica di collisione. In particolare, dati due insiemi di punti  $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  e  $B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , si definisce *distanza di Hausdorff* come:

$$H(A, B) = \max(h(A, B), h(B, A)) \quad (3)$$

dove

$$h(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|$$

$$h(B, A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\|$$

e  $\|\cdot\|$  è una norma (per esempio Euclidea) sui punti A e B.

La funzione  $h(A, B)$  è chiamata *distanza diretta di Hausdorff* da A a B e coincide con il massimo valore ottenuto calcolando per ogni  $a \in A$  la distanza dal punto B ad esso più vicino secondo la norma utilizzata. Quindi,  $h(A, B)$  classifica ogni punto di A in base alla sua distanza con il punto B più vicino. Se  $h(A, B)=d$ , allora ogni punto di A deve trovarsi ad una distanza minore o uguale a  $d$  da qualunque punto di B.

Come si è visto, la distanza di Hausdorff  $H(A, B)$  è il massimo valore tra  $h(A, B)$  e  $h(B, A)$ , ed indica quello che viene definito *grado di mismatch* tra due insiemi di punti. La distanza di Hausdorff è invariante per movimenti e riflessioni, però è sensibile al rumore. Questa distanza può essere utilizzata per determinare il grado di somiglianza tra due oggetti sovrapposti e viene applicata nell'ambito della *Computer Vision* insieme a diverse altre tecniche.

L'indice proposto nel presente lavoro valuta invece le massime distanze che le sfere hanno dalla superficie del corpo e la media di queste distanze definisce la bontà di approssimazione del corpo stesso. Per meglio comprendere la logica su cui si è basato il ragionamento, saranno riportate nel seguito definizioni e considerazioni preliminari che porteranno alla definizione finale dell'indice. Si considerano quindi separatamente i diversi casi che si possono avere nell'intersezione della sfera con un triangolo, ovvero:

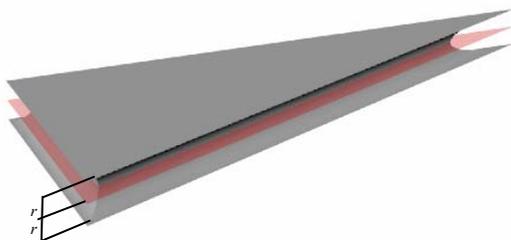
- intersezione tra la sfera ed il solo piano su cui giace il triangolo;
- intersezione tra la sfera ed uno o più spigoli del triangolo;
- intersezione tra la sfera ed uno o più vertici del triangolo (vertici interni alla sfera).

Naturalmente l'intersezione tra spigoli determina anche l'intersezione tra i piani e l'intersezione con un vertice include l'intersezione con almeno tre spigoli e quindi con i rispettivi piani.

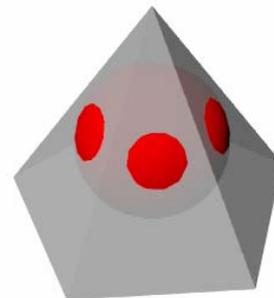
L'oggetto è definito attraverso un modello rappresentato da una superficie a maglia triangolare (*mesh* triangolare) che diviene la base del confronto con una rappresentazione del corpo a sfere. Si assumono noti i versori delle normali alla superficie triangolare, diretti esternamente al corpo. La superficie del corpo in esame deve essere chiusa ma non necessariamente convessa<sup>2</sup>.

### 3.1. Intersezione con un piano individuato da un triangolo

Si osserva che il luogo geometrico delle posizioni che può assumere il centro della sfera perché vi sia intersezione solo con il piano individuato dal triangolo è definito dalla regione distante al più  $r$  (raggio della sfera) dal piano triangolare, dagli spigoli e dai vertici (Figura 4). Si osserva inoltre che una singola sfera può intersecare  $n$  piani triangolari senza intersecare nessuno spigolo e/o vertice (Figura 5).



**Figura 4** - Luogo geometrico delle posizioni che può assumere il centro della sfera per determinare contatto con il piano del triangolo (in rosso).



**Figura 5** - Esempio di intersezione di una sfera con cinque piani e nessuno spigolo e/o vertice dei triangoli.

<sup>2</sup> Un insieme X di punti in uno spazio affine  $R^n$  è detto convesso se contenendo due punti  $x_1$  e  $x_2$  contiene anche il segmento che li congiunge.

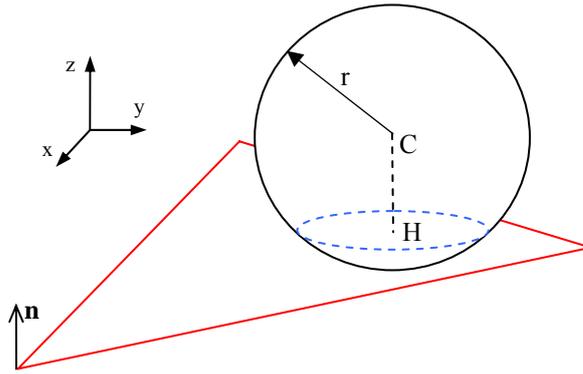


Figura 6 - Intersezione tra una sfera ed un triangolo.

Si consideri ora l'ipotetico caso in cui si voglia valutare la bontà di rappresentazione di un triangolo approssimato con una primitiva sferica che interseca il solo piano individuato dal triangolo stesso (Figura 6).

Sia  $\mathbf{n}$  la normale, di modulo unitario, uscente dal corpo e  $C$  il centro di una sfera di raggio  $r$ . Si vuole individuare la misura che indica di quanto la sfera fuoriesca dal piano individuato dal triangolo e considerare tale misura come caratteristica della bontà di rappresentazione. La misura può essere così espressa:

- $d = r + \|C - H\|$ , se  $(C - V) \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0$  sfera avente il centro esterno al corpo (posizione in Figura 6);
- $d = r - \|C - H\|$ , se  $(C - V) \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0$  sfera avente il centro interno al corpo;
- $d = r$  se  $(C - V) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$  sfera avente il centro sul piano individuato dal triangolo;

dove  $\|\cdot\|$  è la norma euclidea,  $V$  uno dei vertici del triangolo.

Noti  $(V_1, V_2, V_3)$ , vertici del triangolo in esame, allora la misura  $d$  definita precedentemente in funzione della posizione del centro  $C$  della sfera, si può anche esprimere come:

$$d = r + (C - V_i) \cdot \bar{\mathbf{n}}, \quad i=1, 2, 3 \quad (4)$$

dove  $V_i$  è uno dei vertici del triangolo.

Si può osservare che  $d=r$  se e solo se  $C$  giace sul piano individuato dal triangolo. Infatti  $d=r$  se e solo se  $(C - V_i) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \Rightarrow V_i \equiv C$  oppure  $(C - V_i) \perp \bar{\mathbf{n}}$ . Inoltre  $0 \leq d \leq 2r$ . Si assume quindi che tanto più il parametro  $d$  è piccolo tanto meglio la sfera approssima il triangolo.

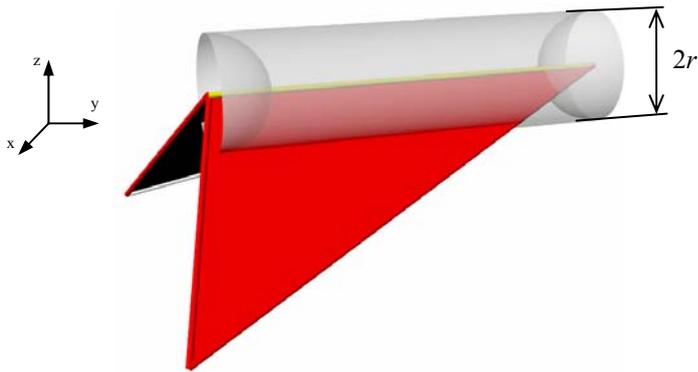
### 3.2. Intersezione con il solo spigolo

Si definisce spigolo, il lato in comune unicamente a due triangoli. Sono escluse quindi le configurazioni indicate in Figura 7, dove più triangoli insistono sullo stesso spigolo.

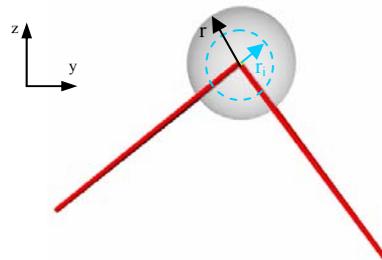
Qui di seguito verrà valutata l'intersezione tra una sfera ed un solo spigolo ovvero tra la sfera ed il segmento comune ai due triangoli formante lo spigolo, senza che gli estremi di tale segmento siano interni alla sfera stessa. Si può quindi dedurre che il luogo geometrico  $\zeta$  delle posizioni che può assumere il centro  $C$  della sfera di raggio  $r$  perché vi sia intersezione con il solo spigolo sono tutti i punti distanti al più  $r$  dallo spigolo stesso e dai suoi estremi che lo definiscono (Figura 8).



Figura 7 - Esempi di configurazioni di triangoli non ammesse.



**Figura 8** - In grigio l'estremità del luogo geometrico  $\zeta$  delle posizioni che può assumere il centro  $C$  della sfera perché vi sia intersezione con il solo spigolo (colore giallo) definito dai due triangoli (colore rosso).



**Figura 9** - Sezione del luogo geometrico  $\zeta$  (grigio) con un piano  $\pi$ . In ciano la circonferenza  $\gamma_i$ .

Si consideri ora una sezione del luogo geometrico  $\zeta$ , rispetto ad un piano  $\pi$  perpendicolare allo spigolo e la cui distanza da un estremo dello spigolo (vertici in comune ai due triangoli) sia maggiore del raggio  $r$  della sfera. Si immagini di spostare il centro della sfera  $C$  lungo una circonferenza  $\gamma_i \subset \zeta$  sul piano  $\pi$ , di raggio  $r_i$  con  $r_i < r$  e centro sullo spigolo (Figura 9).

Si consideri ora una generica posizione del centro  $C$  della sfera sulla circonferenza  $\gamma_i$ . Siano  $p_1$  e  $p_2$  i piani individuati dai triangoli formanti lo spigolo in esame ed  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  le normali con modulo unitario a detti piani (Figura 10). Riprendendo quanto già visto in §3.1, la distanza del punto  $C$  dal piano  $p_1$  è data dalla seguente espressione:

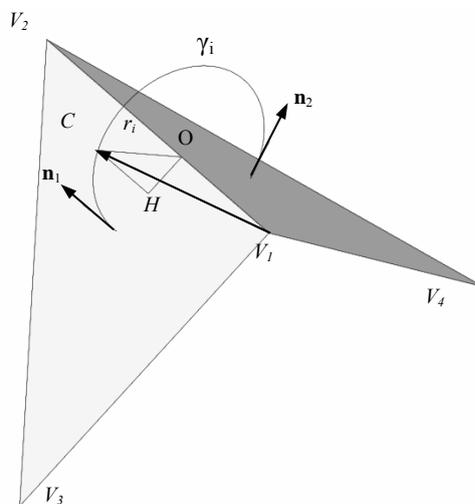
$$d_1 = (C - V_i) \cdot \overline{\mathbf{n}_1}, \quad i=1, 2, 3 \quad (5)$$

dove  $V_i$  è uno dei vertici del triangolo che giace sul piano  $p_i$ .

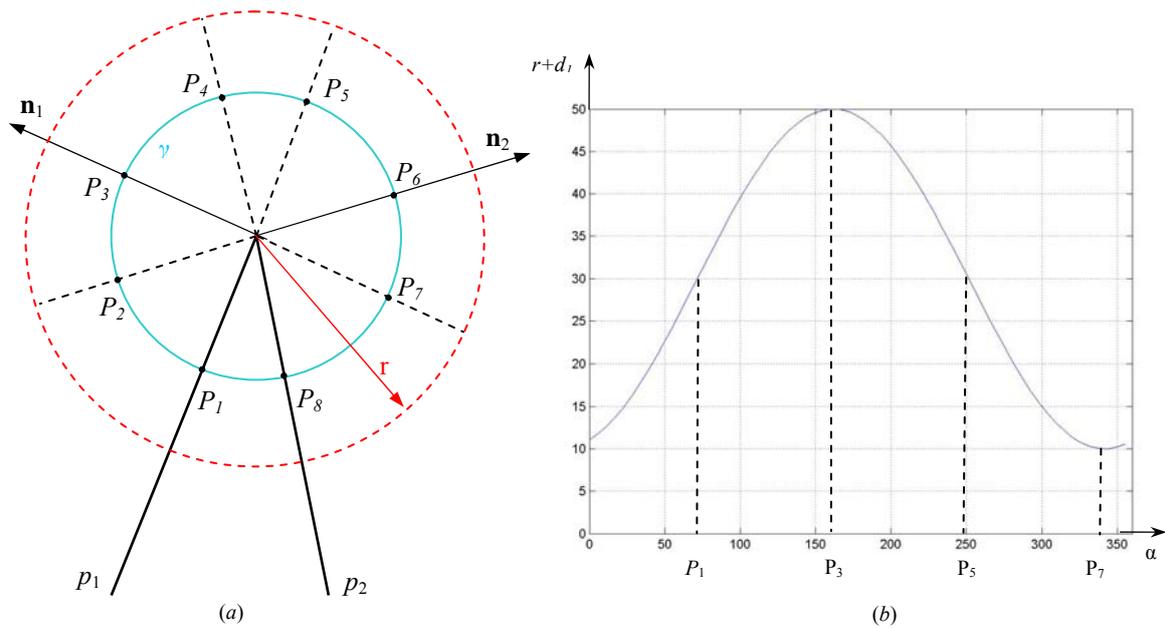
Si osserva che la (5) si può anche scrivere come:

$$d_1 = r_i \cdot \sin \alpha, \quad \text{dove } \alpha \text{ è l'angolo } \widehat{C\hat{O}H}.$$

In conclusione, se si prende una sfera di raggio  $r$  e si sposta il centro di detta sfera sulla circonferenza  $\gamma_i$ , il parametro definito in (4), che identifica la caratteristica della bontà di rappresentazione della sfera rispetto ad un piano triangolare, varia con legge sinusoidale. Tale andamento è riportato in Figura 11. La circonferenza tratteggiata è la circonferenza  $\gamma_i$  avente raggio  $r_i = r$ ,  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  sono le normali unitarie ai piani  $p_1$  e  $p_2$ . Per analizzare l'andamento del parametro in funzione della posizione assunta dal punto  $C$  si sono individuati otto punti notevoli (da  $P_1$  a  $P_8$ ).



**Figura 10** - Spigolo



**Figura 11** – (a) Punti notevoli sulla circonferenza  $\gamma_i$ . (b) Andamento del parametro  $r+d_1$  in funzione dell'angolo  $\alpha$ .

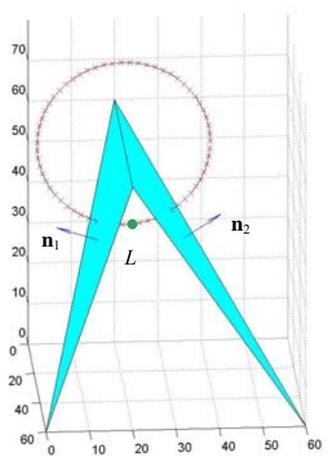
Si può osservare, alla luce di quanto detto nel paragrafo precedente, come la posizione  $P_7$  sia la posizione del centro della sfera che approssima meglio il piano  $p_1$ , determinando il minimo valore del parametro  $r+d_1$ . Se il centro  $C$  appartenesse alla circonferenza di raggio  $r_i=r$  la curva di Figura 11 risulterebbe traslata verso il basso ed in corrispondenza della posizione individuata da  $P_7$  si avrebbe un valore del parametro  $r+d_1 = 0$ : questa risulta essere quindi la posizione ottimale della sfera ai fini della rappresentazione del triangolo giacente su  $p_1$ .

Si supponga ora di spostare il centro  $C$  della sfera di raggio  $r$  lungo una circonferenza  $\gamma_i$  anch'essa di raggio  $r_i=r$  (Figura 12). Analogamente a quanto fatto in precedenza, in Figura 13 sono riportati gli andamenti dei seguenti parametri:

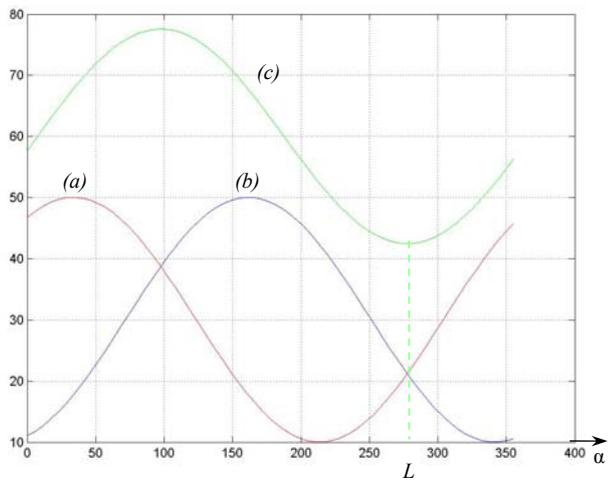
$$r+d_1 = r + (C - V_i) \cdot \overline{n_1}, \quad i=1, 2, 3 \text{ (curva b)} \tag{6}$$

$$r+d_2 = r + (C - V_i) \cdot \overline{n_2}, \quad i=1, 2, 4 \text{ (curva a)} \tag{7}$$

dove  $V_1, V_2$  sono i vertici comuni ai due triangoli.



**Figura 12** - Spostamento di  $C$  lungo la circonferenza  $\gamma_i$ .  $L$  posizione ottimale per la rappresentazione dello spigolo con la sfera in esame.



**Figura 13** - Andamento in funzione di  $\alpha$  dei seguenti parametri: (a)  $r+d_2$ , (b)  $r+d_1$  e (c) indice  $k_1$

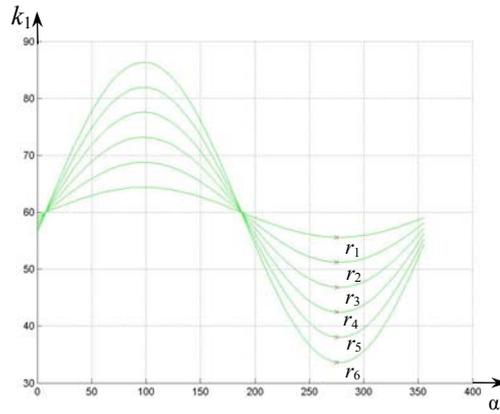


Figura 14 - Indice  $k_1$  in funzione di  $\alpha$ .

In tale grafico, la curva (c) rappresenta l'andamento della funzione somma di (6) e (7), ovvero:

$$k_1 = (r + d_1) + (r + d_2) = 2r + (C - V) \cdot (\overline{n_1} + \overline{n_2}) \quad (8)$$

dove  $V$  è uno dei due vertici in comune ai due triangoli che formano lo spigolo.

Con le convenzioni adottate precedentemente, si può così osservare come il minimo dell'indice  $k_1$  rappresenti la posizione del centro  $C$  della sfera sulla circonferenza  $\gamma_i$  che colloca la stessa sfera (di raggio  $r$ ) nella posizione ottimale di rappresentazione dello spigolo (posizione  $L$  in Figura 12).

Con riferimento alla Figura 10, si considerino tutte le circonferenze  $\gamma_i \subset \zeta, \gamma_i \in \pi$  aventi raggio  $r_i$  con  $0 \leq r_i \leq r$ , centrate sull'intersezione dello spigolo con il piano  $\pi$  (centro  $O$ ). Muovendo il centro della sfera lungo ciascuna circonferenza (al variare di  $\alpha$ , con  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ) si possono ottenere grafici come quello riportato in Figura 14 ottenuto per sei valori crescenti  $r_1, \dots, r_6$  di  $r_i$ . Si può notare come al diminuire del raggio  $r_i$  (avvicinandoci allo spigolo) della circonferenza su cui ci si muove, il valore minimo dell'indice  $k_1$  aumenti, indicando quindi una peggiore rappresentazione dello spigolo. Per  $r_i=0$  si ha  $k_1=2r$ , mentre tra tutte le circonferenze  $\gamma_i$  quella in cui l'indice  $k_1$  ha valore minimo corrisponde alla circonferenza di raggio  $r_i=r$  ovvero con sfera tangente allo spigolo.

Si può inoltre dimostrare che le posizioni del centro della sfera a cui corrispondono i valori minimi dell'indice  $k_1$  stanno sulla bisettrice dell'angolo formato dai piani su cui giacciono i triangoli.

Fin qui si è dimostrato come l'indice  $k_1$  dia una rappresentazione corretta al variare della posizione del centro di una sfera di raggio  $r$  lungo una circonferenza  $\gamma_i$  di raggio  $r_i$  con  $0 \leq r_i \leq r$ . Come si evince però dall'espressione analitica (8), è possibile trovare un'altra sfera di raggio diverso avente lo stesso valore dell'indice  $k_1$ . In tal caso significherebbe che le sfere in esame danno la stessa rappresentazione dello spigolo. In realtà però vi possono essere sfere diverse che approssimano palesemente in maniera differente lo stesso spigolo pur avendo il medesimo valore  $k_1$ . Si consideri ad esempio la Figura 15, rappresentazione dello spigolo in un piano ortogonale allo spigolo stesso. Si prenda una sfera di raggio  $r_1$ , con centro  $C_1$  sulla bisettrice dell'angolo formato dallo spigolo ad una distanza dal medesimo pari ad  $r_1$  (la sfera è tangente allo spigolo in esame). E' evidente che tutte le sfere (di raggio  $r_2$  con  $r_2 < r_1$ ) con centro sulla bisettrice e tangenti alle rette  $a$  e  $b$  hanno lo stesso valore dell'indice  $k_1$  (Figura 16) anche se rappresentano lo spigolo in modo peggiore nell'avvicinamento del centro allo spigolo stesso.

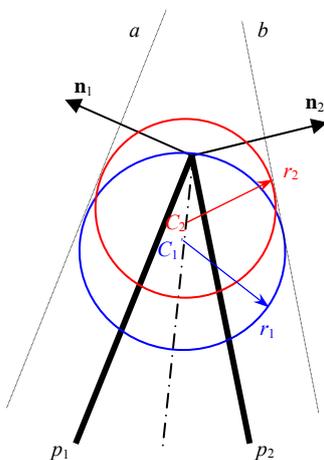


Figura 15 - Esempio di sfere aventi stesso valore  $k_1$ .

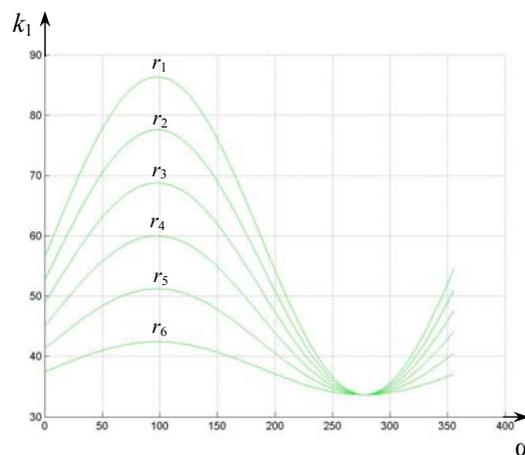


Figura 16 - Indice  $k_1$  al variare di  $\alpha$  per sfere di raggi differenti ( $r_1 > r_6$ ) aventi centro sulla bisettrice dell'angolo formato dalle tracce dei piani  $p_1, p_2$ .

Risulta quindi necessario inserire un'altro parametro che consenta di identificare, insieme alla funzione somma (8), in modo univoco la bontà di rappresentazione. Si considera quindi come parametro la distanza del centro della sfera dallo spigolo, ovvero (con riferimento alla Figura 10):

$$d_s = \|C - O\| \quad (9)$$

Detti  $V_1$  e  $V_2$  i vertici comuni ai due triangoli che compongono lo spigolo, si ha:

$$C - O = (C - V_1) + (V_1 - O) \quad (10)$$

$$V_1 - O = (V_1 - V_2) \frac{\|V_1 - O\|}{\|V_1 - V_2\|} \quad (11)$$

$$\|V_1 - O\| = \frac{(V_1 - C) \cdot (V_1 - V_2)}{\|V_1 - V_2\|} \quad (12)$$

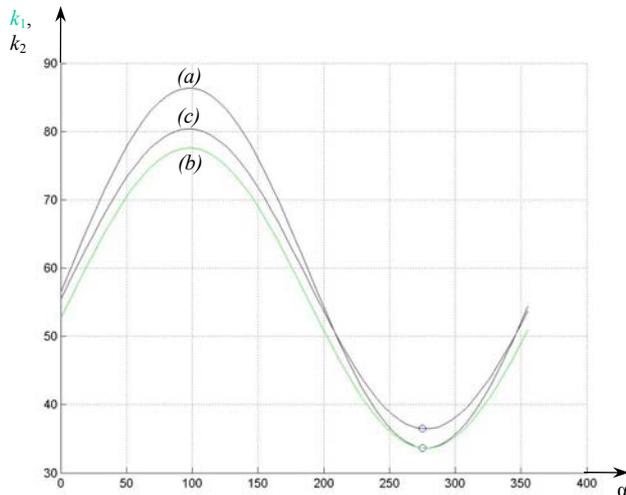
Si può quindi ora definire un nuovo indice,  $k_2$ , che descrive la bontà di approssimazione di uno spigolo attraverso una sfera. Tale indice è funzione sia dalla posizione assunta dalla sfera, sia dalle dimensioni della sfera stessa, essendo così definito:

$$k_2 = k_1 + (r - d_s) \quad (13)$$

Si effettuerà ora l'analisi di tale indice per il quale ci si aspetta che, per i casi di Figura 15, dia valori più grandi mano a mano che ci si sposta verso lo spigolo, mentre per i casi illustrati in Figura 12 dia un andamento simile a quelli illustrati in Figura 13.

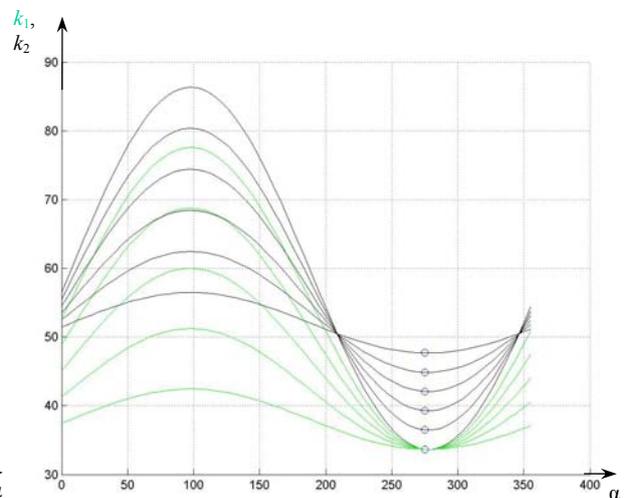
Si consideri quindi una sfera di raggio  $r$ , posta ad una distanza  $r$  dallo spigolo. Al variare della posizione del centro della sfera lungo una circonferenza  $\gamma_1$  di raggio  $r_1=r$  e centro su  $O$  (intersezione della normale allo spigolo passante per  $C$  con lo spigolo stesso) l'indice  $k_2$  rimane coincidente con l'indice  $k_1$  (Figura 17), in quanto  $d_s=r$ .

Nell'avvicinamento allo spigolo lungo la bisettrice, per le sfere aventi un valore del raggio tale per cui il minimo dell'indice  $k_1$  rimane costante (Figura 16, Figura 17), il minimo dell'indice  $k_2$  assumerà valori maggiori, via via crescenti con l'avvicinamento del centro  $C$  allo spigolo stesso (Figura 18, Figura 19).



**Figura 17**

- (a)  $k_1 \equiv k_2$  per una sfera di raggio  $r_j$  con  $r_j=r$ , distante  $r$  dallo spigolo;
- (b)  $k_1$  per una sfera con raggio  $r_k$  con  $r_k < r_j$  e  $\min(k_1)_{r_j} = \min(k_1)_{r_k}$ ;
- (c)  $k_2$  per una sfera con raggio  $r_k$  con  $r_k < r_j$  e  $\min(k_1)_{r_j} = \min(k_1)_{r_k}$ .



**Figura 18** - Indice  $k_2$  (curve nere) per sfere di raggio diverso, aventi lo stesso valore minimo dell'indice  $k_1$  (curve verdi) nel moto di  $C$  lungo la bisettrice dello spigolo, al variare di  $\alpha$ .

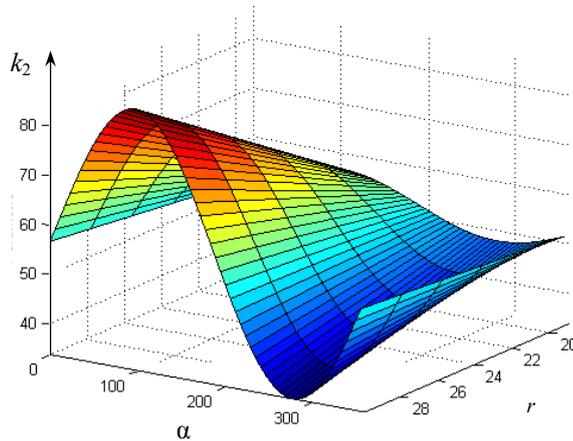


Figura 19 - Indice  $k_2$ , in funzione di  $r$  e  $\alpha$

### 3.3. Intersezione con un vertice

Diciamo che un vertice  $V$  di un triangolo è interno ad una sfera di raggio  $r$  e centro  $C$  se  $\|C - V\| \leq r$  ed in tal caso coniamo l'espressione "intersezione con un vertice". Per come è stato affrontato il problema, l'intersezione con un vertice rappresenta la generalizzazione del caso di intersezione con uno spigolo.

Poiché il corpo di cui si vuole dare un'approssimazione attraverso delle sfere è un corpo chiuso descritto da triangoli, un vertice  $V$  è un punto in comune ad almeno tre triangoli. In analogia a quanto sviluppato nell'intersezione tra una sfera ed un solo spigolo, si studia il comportamento dell'indice  $k_2$ , definito in (13), nel caso in cui si abbia intersezione tra una sfera di centro  $C$  ed un vertice  $V$ , punto comune di almeno tre triangoli.

In generale, se al vertice concorrono  $N$  triangoli, allora la funzione  $k_1$  definita in (8) si può così generalizzare:

$$k_1 = \sum_{i=1}^{N_{tri}} \left( r + (C - V) \cdot \vec{n}_i \right) \quad (14)$$

dove  $N_{tri}$  è il numero dei triangoli che compongono il vertice  $V$ .

Si supponga di spostare il centro  $C$  di una sfera di raggio  $r$  su di una circonferenza  $\gamma_i$ , anch'essa di raggio  $r$  con centro in  $V$ , così come illustrato in Figura 20.

Analogamente a quanto illustrato in Figura 13, la Figura 21 evidenzia gli andamenti delle distanze del centro della sfera dai triangoli formanti il vertice  $V$ , nel muoversi sulla circonferenza  $\gamma_i$ . Inoltre, la curva  $(d)$  rappresenta l'indice  $k_1$  la cui posizione di minimo è rappresentata in Figura 22.

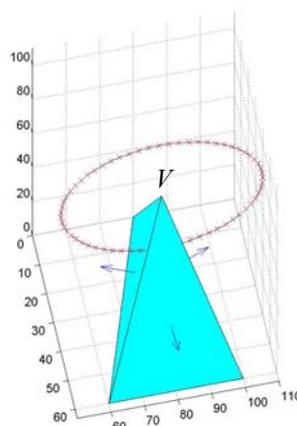


Figura 20 - Circonferenza  $\gamma_i$  di centro  $V$  e raggio  $r$ .

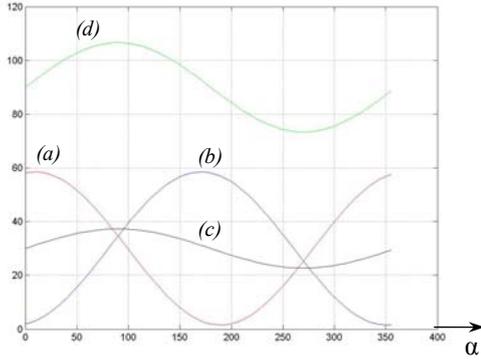


Figura 21 - (a), (b), (c): andamenti che rappresentano le distanze del centro della sfera dai piani su cui giacciono i triangoli che formano il vertice  $V$ . (d) indice  $k_1$ .

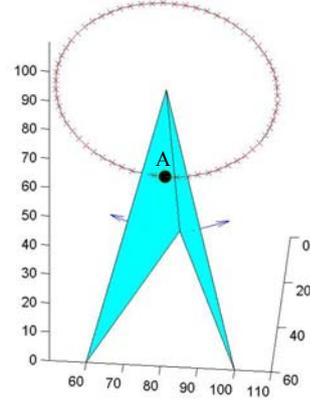


Figura 22 - Punto A: valore minimo di  $k_1$ .

#### 4. Definizione dell'indice di qualità $K$

Le considerazioni precedentemente sviluppate hanno portato quindi ad una prima formulazione di un indice di qualità, definito in (13). Questo indice rispondeva bene nel caso di intersezione tra una sfera ed uno spigolo ma non dà valori confrontabili nelle situazioni generali di intersezione tra una sfera ed un vertice. Infatti l'indice  $k_2$  è somma delle differenti distanze dai piani, quindi al crescere del numero dei piani che insistono sullo stesso spigolo,  $k_2$  tende a crescere. Quindi per effettuare un confronto anche tra una stessa sfera che interseca un piano, uno spigolo e un vertice oltre che tra sfere differenti, il solo parametro  $k_2$  non è sufficiente per stabilire un confronto.

Per ovviare al problema, si prende in considerazione il rapporto tra il parametro  $k_2$  ed il numero dei piani che costituiscono l'entità con cui la sfera interseca il corpo, ovvero viene diviso per due nel caso di intersezione con uno spigolo e per  $N$  nel caso di intersezione con un vertice su cui insistono  $N$  triangoli.

In definitiva per una sfera di centro  $C$  e raggio  $r$  che interseca un vertice  $V$  su cui insistono  $N$  triangoli, il nuovo indice che esprime la bontà di rappresentazione della sfera in esame è definito come:

$$k_3 = \frac{\sum_{i=1}^{N_{tri}} [r + (C - V) \cdot \bar{n}_i] + (r - \|C - V\|)}{N_{tri}} \quad (15)$$

dove:

- $N_{tri}$  è il numero dei triangoli che compongono il vertice  $V$
- $\bar{n}_i$  è la normale ai piani su cui giacciono i triangoli che compongono il vertice  $V$

In particolare, nel caso di intersezione tra una sfera ed uno spigolo la (15) diviene:

$$k_3 = \frac{\sum_{i=1}^2 [r + (C - V) \cdot \bar{n}_i] + (r - \|C - O\|)}{2} \quad (16)$$

dove:

- $V$  è uno dei due vertici comuni ai due triangoli formanti lo spigolo
- $O$  è il punto sullo spigolo tale che la distanza  $\|C - O\|$  risulti minima

Nel caso invece di intersezione tra una sfera ed un piano, la (15) si semplifica:

$$k_3 = r + (C - V) \cdot \bar{n} \quad (17)$$

ritrovando l'espressione (4).

Si trovano quindi tanti valori di  $k_3$  quanti sono le intersezioni individuate tra le sfere ed il corpo descritto da primitive triangolari. Si può quindi definire un unico indice di rappresentazione della qualità di approssimazione di un corpo attraverso sfere:

$$K = \frac{\sum_{j=1}^{N_{int}} k_{3,j}}{N_{int}} \quad (18)$$

dove  $N_{int}$  è il numero di intersezioni individuate tra le sfere ed il corpo descritto da primitive triangolari.

## 5. Applicazioni

In questa sezione si applica l'indice  $K$ , definito in (18), a corpi aventi forma arbitraria, con lo scopo di confrontare la qualità di rappresentazione del corpo approssimato attraverso primitive sferiche generate da algoritmi differenti. Si stabilisce quindi quale algoritmo dia l'approssimazione migliore del corpo in esame, utilizzando l'indice proposto. I risultati trovati vengono poi confrontati con quelli calcolati attraverso la *distanza di Hausdorff* [7,16-19].

Alcune verifiche sono state effettuate utilizzando dapprima corpi con forma semplice che consentissero anche visivamente di poter verificare la bontà di rappresentazione; si è poi utilizzata la metodologia descritta in questo articolo, per confrontare i diversi algoritmi utilizzati per la generazione dell'albero delle sfere applicata ad una superficie complessa, quale è quella di un osso umano.

L'oggetto iniziale da approssimare è rappresentato attraverso poligoni triangolari. Nelle prove seguenti a tali corpi si sono applicati tre algoritmi per la generazione dell'albero delle sfere: *Octree* [6], *Hubbard* [7], *Burst* [5,6]. Per la creazione dell'albero gerarchico (approssimazione successiva di un oggetto attraverso sfere organizzate in una struttura a livelli a seconda del grado di approssimazione) è stato utilizzato un programma che implementa gli algoritmi menzionati [20].

### 5.1. Corpi semplici

I corpi presi in esame sono un cubo ed una sfera, rappresentati attraverso *mesh* triangolare (Figura 23).

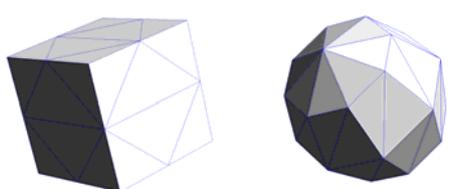
La sfera in esame approssima molto male quella che può essere una sfera reale, infatti si è preso volutamente un basso numero di triangoli per la sua definizione in modo da mettere in risalto quelle che sono le differenze, in termini di qualità, con i corpi sferici generati dagli algoritmi.

In Tabella 1 sono riportati i parametri utilizzati negli algoritmi sopra menzionati, per la generazione dell'albero gerarchico di sfere.

**Tabella 1** - Parametri per la costruzione dell'albero delle sfere.

Parametri	Algoritmi		
	<i>Octree</i>	<i>Hubbard</i>	<i>Burst</i>
Numero di livelli	4	4	4
Fattore di ramificazione	-	8	8
Numero punti campione	-	500	500

In Figura 24 sono rappresentati i cubi approssimati con il quarto livello della gerarchia di sfere, relativi a ciascun algoritmo. Si può visivamente notare come l'algoritmo *Burst* generi delle sfere che sono disposte in modo tale da fuoriuscire dal corpo originario molto meno rispetto agli algoritmi *Octree* ed *Hubbard*. L'indice  $K$ , calcolato per ogni livello della gerarchia di sfere (Tabella 2), conferma tale risultato. E' possibile notare quindi come all'aumentare del livello e quindi della precisione con cui viene approssimato il corpo, l'indice  $K$  tenda a diminuire, dando quindi indicazione sulla migliore qualità di rappresentazione. Confrontando tra loro i diversi algoritmi si può notare come il metodo *Octree*, in questo caso particolare, dia un'ottima rappresentazione della forma del cubo; le sue sfere però sono poste fuori dalla *mesh* originaria, dando quindi un contributo maggiore all'errore calcolato sulla distanza e quindi facendo crescere l'indice stesso. La particolare geometria del corpo fa sì che il metodo di approssimazione *Hubbard* sia di poco superiore al metodo *Octree* in termini di qualità di rappresentazione, ma il metodo *Burst* risulta quello con il minor valore dell'indice  $K$ , e quindi quello che tende a rappresentare meglio il cubo.



**Figura 23** - Rappresentazione dei corpi presi in esame.

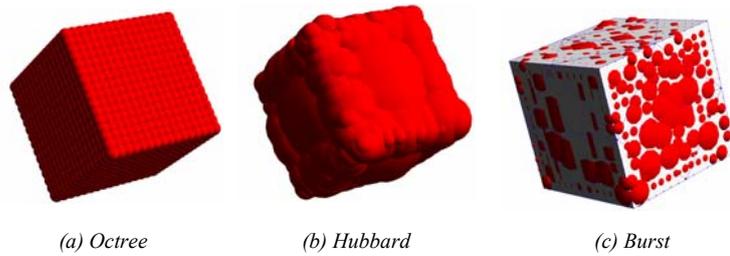


Figura 24 - Approssimazione del corpo cubo mediante le sfere del quarto livello generate dai tre algoritmi presi in considerazione.

Tabella 2 – Indice  $K$  nell'approssimazione di un cubo.

Algoritmi	Livello albero		
	2	3	4
<i>Octree</i>	2.751	1.9487	1.199
<i>Hubbard</i>	0.7828	0.3123	0.1597
<i>Burst</i>	0.5653	0.3474	0.1054

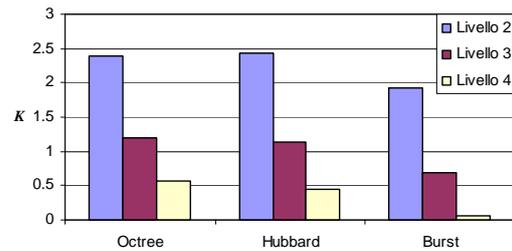


Figura 25 – Istogramma con dati di Tab. 2

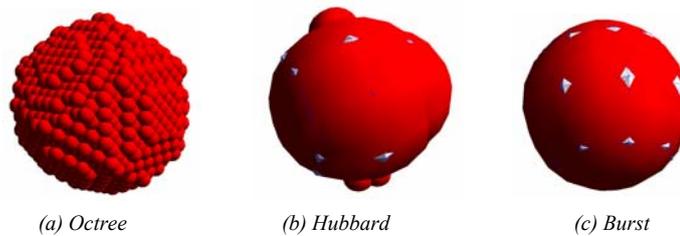


Figura 26 - Approssimazione del corpo sfera mediante le sfere del quarto livello generate dai tre algoritmi presi in considerazione.

Tabella 3 – Indice  $K$  nell'approssimazione di una sfera.

Algoritmi	Livello albero		
	2	3	4
<i>Octree</i>	2.4	1.2	0.5598
<i>Hubbard</i>	2.4301	1.1313	0.4543
<i>Burst</i>	1.9306	0.6946	0.0606

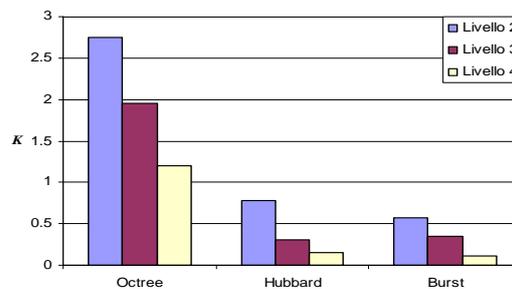


Figura 27 – Istogramma con dati di Tab. 3

Analogamente al caso precedente, in Figura 26 è rappresentata l'approssimazione del corpo sfera con l'uso delle metodologie sopra esposte. In questo caso invece, il metodo *Octree* genera una qualità di approssimazione molto peggiore rispetto agli altri due metodi e tale risultato è evidenziato dall'indice  $K$  in Tabella 3 (Figura 27). Il metodo *Hubbard* risulta essere peggiore dell'algoritmo *Burst* in quanto pone delle sfere sui vertici della *mesh*, che volutamente è stata creata con un numero di triangoli molto piccolo in modo da amplificare eventuali problemi all'atto della creazione dell'albero delle sfere. In prima battuta dunque il metodo *Burst* sembra comunque dare una buona rappresentazione rispetto agli altri due, confermando i risultati già trovati in [5,6].

## 5.2. Confronto tra l'indice $K$ e la distanza di Hausdorff

Come già visto nella sezione 3 in letteratura sono stati presentati diversi parametri che esprimono attraverso uno o più coefficienti il grado di "somiglianza" tra due oggetti. Tra i più semplici ed efficienti approcci vi sono quelli che si basano sul calcolo della *distanza di Hausdorff*.

Per validare l'indice  $K$  illustrato si è considerato l'esempio del cubo già proposto nella sezione 3.

Analogamente al caso precedente si è generato l'albero delle sfere utilizzando le metodologie *Octree*, *Hubbard* e *Burst*. Per valutare la *distanza di Hausdorff* si è sfruttato l'algoritmo [21], evoluzione di [19], che consente inoltre di ricavare diversi dati statistici sulla distribuzione di punti e sulle distanze calcolate. Questi algoritmi confrontano corpi rappresentati attraverso *mesh* triangolari. Si è così provveduto a rappresentare le sfere di ciascun livello attraverso *mesh* triangolari. Adottare sfere approssimate attraverso un elevato numero di triangoli in luogo di sfere esatte non comporta, ai fini del calcolo della *distanza di Hausdorff*, un errore significativo.

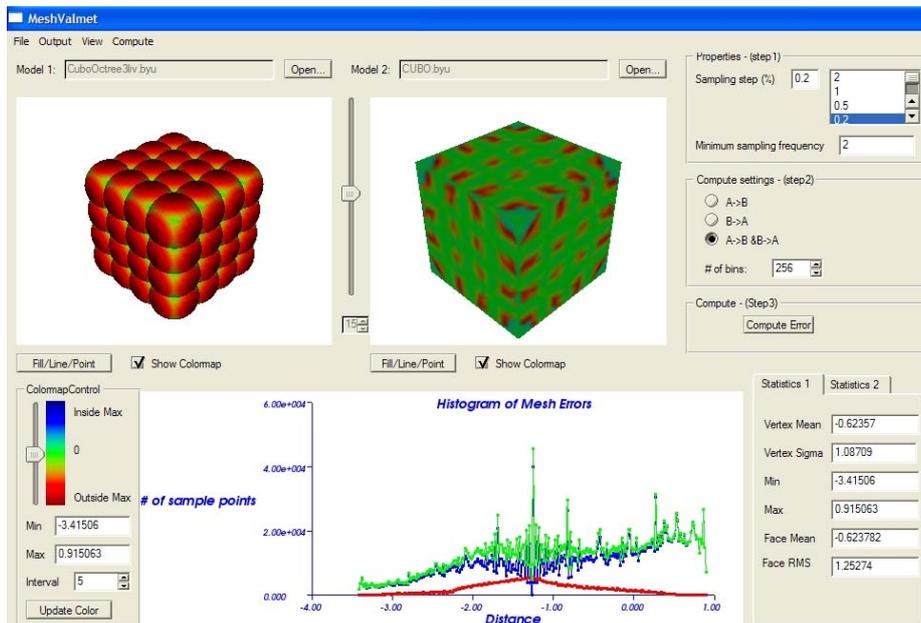
Utilizzando l'algoritmo [21] si ricavano, per le diverse metodologie, i dati illustrati in Tabella 4 risultanti dal confronto del corpo cubo con le primitive sferiche.

**Tabella 4** - Calcolo, relativo ad un cubo, di alcuni parametri derivanti dalla *distanza di Hausdorff*.

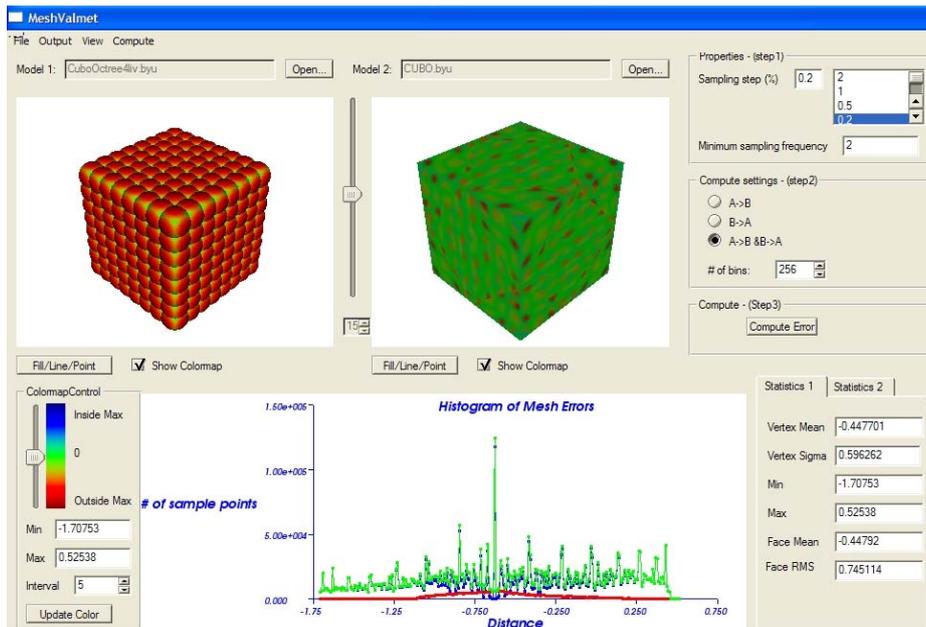
	Algoritmi								
	Octree			Hubbard			Burst		
	Level 2	Level 3	Level 4	Level 2	Level 3	Level 4	Level 2	Level 3	Level 4
Min	-4.985774	-3.415063	-1.707532	-4.648348	-3.9037	-4.829974	-4.975953	-4.89031	-4.971136
Max	1.830127	0.915063	0.52538	3.492468	2.623232	1.624525	2.091311	0.93505	0.354937
VertexMean	-0.185934	-0.6241	-0.447701	0.764251	-0.172774	-0.878622	-0.180751	-0.732711	-0.932487
VertexSigma	1.470061	1.087125	0.596262	1.54247	1.1359	1.013747	1.593951	1.040937	0.962827
FaceMean	-0.186261	-0.623797	-0.44792	0.760299	-0.175696	-0.933572	-0.179493	-0.793272	-1.246178
FaceRMS	1.48052	1.252739	0.745114	1.718998	1.15747	1.384832	1.600601	1.329903	1.587467
Hausdorff	4.985774	3.415063	1.707532	4.648348	3.9037	4.829974	4.975953	4.89031	4.971136
MSD	1.158398	0.933366	0.568803	1.476487	0.897211	0.993024	1.307814	0.92446	0.939151
MAD	1.158398	0.933366	0.568803	1.476487	0.897211	0.993024	1.307814	0.92446	0.939151
Median	-0.262202	-0.782651	-0.514429	1.009944	-0.032188	-0.689371	0.304757	-0.503433	-0.662197
DistVolume	1430.391174	1806.016356	1399.683075	6181.956043	7979.224043	44882.64163	2371.444418	3216.638292	13709.34097

Tale algoritmo consente inoltre di dare una rappresentazione visiva del calcolo delle distanze aiutando ad interpretare in modo immediato i risultati (Figura 28). Le sfere vengono colorate in base alla distanza calcolata tra i punti giacenti sulle superfici sferiche ed il cubo (curva blu). Analogamente il cubo è colorato in base alla distanza calcolata tra i punti giacenti sulla superficie del cubo e le superfici sferiche (curva rossa). Il grafico divide le distanze rilevate in 256 gruppi (asse x) e mostra il numero di punti campione appartenenti a tali gruppi. La curva verde è la somma delle distanze (curve rossa e blu).

Dall'analisi dei dati emerge chiaramente che il valore della *distanza di Hausdorff*, così come definita in (4), non dà un risultato valido. Infatti dai valori riportati in Tabella 4, per un dato algoritmo, all'aumentare del livello nell'albero delle sfere (corrispondente ad una migliore approssimazione del cubo con primitive sferiche) non sempre corrisponde un decremento della *distanza di Hausdorff*, come si evince osservando i dati relativi alla metodologia *Hubbard* e *Burst*. Questo risultato è dovuto non ad una errata definizione in (4) ma dalla considerazione che i punti campione alla base del calcolo del parametro di *Hausdorff* vengono distribuiti uniformemente su tutta la superficie delle sfere. Nel calcolo di tale distanza vengono quindi prese in considerazione anche le distanze tra il cubo ed i punti campione appartenenti alla superficie sferica, interni al cubo stesso. Tali punti possono essere più distanti rispetto a quelli appartenenti alla parte di superficie sferica che invece risulta esterna al cubo e quindi fuoriesce da esso.



(a)



(b)

**Figura 28** - Rappresentazione grafica basata sul calcolo della *distanza di Hausdorff*. (a) Cubo approssimato con 64 sfere; (b) Cubo approssimato con 512 sfere.

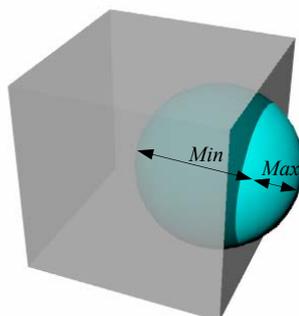
Nella Tabella sono riportati i parametri *Min* e *Max* intesi come la massima distanza con segno: valore positivo per le distanze calcolate tra i punti appartenenti alla superficie sferica esterna al cubo ed il cubo stesso e negativa per quelli interni. Si può notare come, per l’algoritmo *Hubbard* e *Burst*, risultati:  $|Min| > Max$  portando la *distanza di Hausdorff* ad avere valore pari a *Min* (Figura 29).

Per la valutazione invece della bontà di approssimazione di un corpo (in questo esempio, il cubo) attraverso primitive sferiche utilizzando la *distanza di Hausdorff* bisogna quindi prendere in considerazione i soli punti esterni al corpo stesso e quindi il solo parametro *Max*. Tale parametro, come messo in luce dai valori riportati in Tabella 4, dà una corretta interpretazione della qualità di rappresentazione dei livelli di ciascun metodo di approssimazione dando peraltro un andamento analogo al parametro *K* (Figura 30).

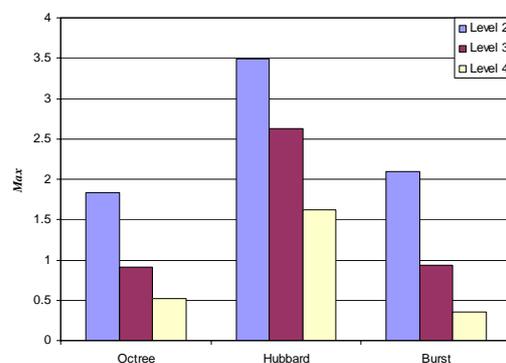
Anche in questo caso se si confrontano tra loro i diversi algoritmi si può notare come il livello quattro dell’algoritmo *Burst* sia quello che dà i migliori risultati in termini di approssimazione del cubo con sfere.

Il parametro definito dalla *distanza di Hausdorff* risulta un parametro valido nel caso in cui si consideri l’unione delle sfere in luogo delle singole sfere componenti il livello dell’albero gerarchico. In Figura 31 è rappresentato il secondo livello dell’albero delle sfere ottenuto con la metodologia *Octree*.

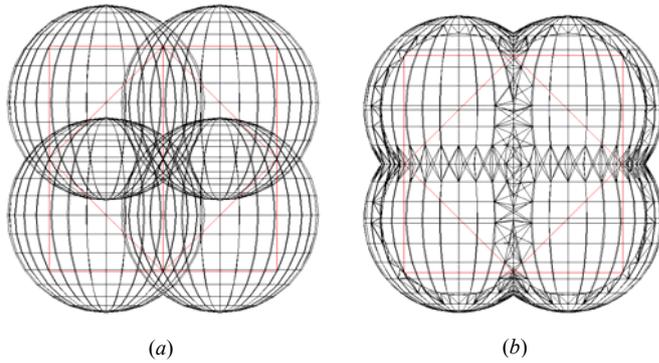
Se si considerano le sfere unite allora i punti campioni, necessari per il calcolo della *distanza di Hausdorff*, sono disposti sulla superficie dell’unione delle sfere che risulta esterna al cubo in esame. Si ha così che  $Min \cong 0$  e quindi la *distanza di Hausdorff* coincide con il valore di *Max* (Tabella 5), confermando così le precedenti osservazioni.



**Figura 29** - Distanza della parte della sfera interna al cubo maggiore di quella esterna.



**Figura 30** - Parametro *Max* per un cubo.



**Figura 31** - Livello due dell'albero delle sfere con il metodo *Octree*, approssimanti un cubo (rosso): (a) sfere separate, (b) sfere unite.

**Tabella 5** – Dati relativi al quarto livello dell'algoritmo *Burst*.

Parametri	Sfere	
	separate	unite
Min	-4.985774	-0.009043
Max	1.830127	1.830127
FaceMean	-0.210293	1.155373
FaceRMS	1.644876	1.223371
Hausdorff	4.985774	1.830127
DistVolume	2479.332695	1871.277856

Il parametro  $K$  introdotto in questo articolo si basa sull'intersezione che si ha tra le sfere che approssimano il corpo (descritto da *mesh* triangolari) ed il corpo stesso. Si potrebbe pensare che possono esistere casi in cui le sfere siano totalmente collocate esternamente o internamente al corpo in esame, come illustrato ad esempio in Figura 32. In questo caso l'indice  $K$  non riesce a valutare la bontà di rappresentazione in quanto nessuna sfera interseca il corpo mentre la *distanza di Hausdorff* riesce comunque a definire la qualità della rappresentazione (Tabella 6).

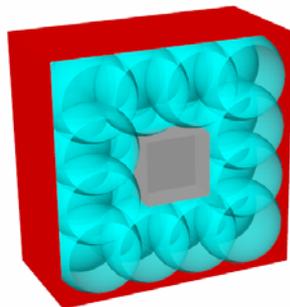
Si deve però considerare che tutti gli algoritmi per la costruzione di un albero gerarchico di sfere distribuiscono le sfere stesse in prossimità del contorno dell'oggetto da approssimare altrimenti tali algoritmi non darebbero una corretta interpretazione geometrica del corpo in esame. Se quindi da un lato la *distanza di Hausdorff* è applicabile a forme di oggetti generici, l'indice  $K$  dà una stima corretta della bontà di rappresentazione di un corpo approssimato con sole sfere. Come illustrato nella sezione 1 l'adozione di un *Bounding Volume Hierarchies* con primitive sferiche è fortemente utilizzato nell'ambito della *Collision Detection* per una valutazione rapida della collisione tra corpi in esame, ed è in tale ambito che l'indice  $K$  qui descritto si vuole collocare.

### 5.3. Calcolo dell'indice $K$ per un corpo a geometria complessa

Si applica ora l'indice  $K$  ad un corpo avente una forma geometrica più complessa per valutare quale metodologia, per la generazione di un albero gerarchico di sfere, dia i migliori risultati in termini di qualità di rappresentazione. Il parametro di confronto, per stabilire se l'indice  $K$  dà buoni risultati o meno, è il parametro *Max* precedentemente definito. Accanto a questo, i risultati vengono valutati anche qualitativamente, analizzando visivamente quelle che sono le differenze tra il modello approssimato con sfere ed il modello originale.

Il corpo preso in esame è quello che descrive, attraverso un basso numero di triangoli, l'insieme delle ossa del talo e del calcagno umano. Partendo dalle ipotesi precedentemente definite, le normali al corpo devono risultare orientate esterne al corpo stesso (Figura 33).

Nell'analizzare le diverse sfere che intersecano il corpo in esame, per la valutazione dell'indice  $K$ , definito in (18), si riscontrano casi come quello illustrato in Figura 33, dove una stessa sfera interseca tre vertici costituiti da diversi triangoli, generalizzando il caso descritto in §3.3.



**Figura 32** - Rappresentazione in sezione di un'approssimazione attraverso sfere di un cubo completamente esterno/interno ad esse (rosso/grigio).

**Tabella 6** – Dati relativi al caso di Fig. 32.

Parametri	Posizione del cubo	
	interno	esterno
Min	-4.330126	0.000292
Max	0	5.915288
FaceMean	-1.654608	3.077683
FaceRMS	2.007919	3.35956
Hausdorff	4.330126	5.915288
DistVolume	5414.230008	10070.83603

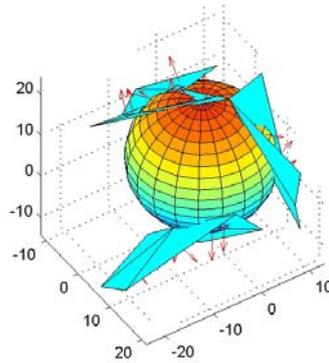


Figura 33 - Esempio di intersezione di una sfera con più vertici del corpo.

I risultati finali numerici sono rappresentati in Tabella 7, dove emerge chiaramente che l'algoritmo *Burst* per la generazione delle sfere dia di gran lunga la migliore qualità di rappresentazione.

Tabella 7 – Indice *K*.

Algoritmi	Livello			
	2	3	4	5
<i>Octree</i>	26.5906	13.4003	7.7795	4.0672
<i>Hubbard</i>	22.0165	10.6303	6.0987	5.2842
<i>Burst</i>	8.2608	3.0432	0.6481	0.1315

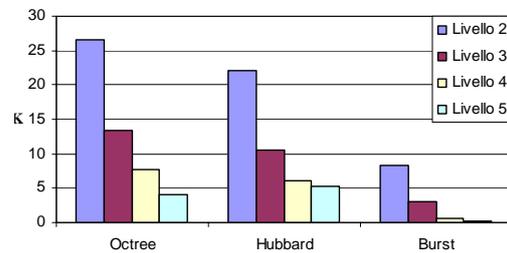
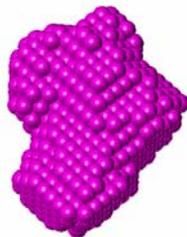
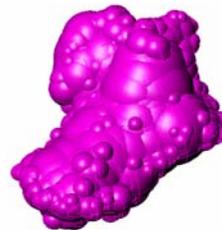


Figura 34 – Istogramma con dati di Tab. 7

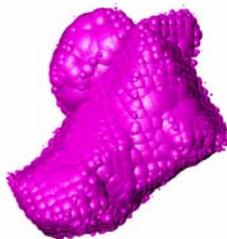
In Figura 35 sono rappresentate le diverse disposizioni delle sfere per ciascun algoritmo. E' evidente anche visivamente come l'algoritmo *Burst* approssimi molto meglio il corpo originario definito da *mesh* triangolari piane. In Figura 35(d) è visualizzata la rappresentazione a *mesh* sovrapposta con quella a sfere. Nel caso dell'algoritmo *Octree*, le sfere coprono totalmente il corpo.



(a) Sfere *Octree*



(b) Sfere *Hubbard*



(c) Sfere *Burst*



(d) Sfere *Burst* e ossa

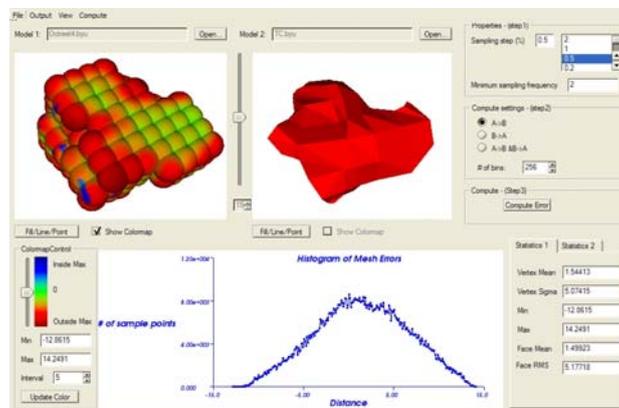
Figura 35 - Livello cinque dell'albero delle sfere utilizzando diversi algoritmi di approssimazione.

Analogamente ai casi precedenti si è provveduto a calcolare il parametro *Max* che utilizza la *distanza di Hausdorff* per valutare la qualità di rappresentazione. Anche tale parametro, come evidenziato in Tabella 8, considera la metodologia *Burst* la migliore in termini di qualità di rappresentazione del corpo osseo con sfere.

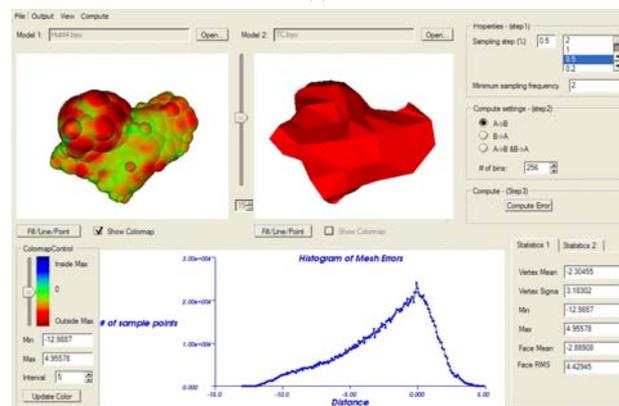
Tabella 8 – Distanza di *Hausdorff* nell'approssimazione della tibiotarsica umana attraverso l'algoritmo *Burst*.

Parametri	Octree			Hubbard			Burst		
	Level 2	Level 3	Level 4	Level 2	Level 3	Level 4	Level 2	Level 3	Level 4
Min	-34.11	-23.37	-12.86	-13.70	-12.32	-12.98	-12.84	-12.86	-13.02
Max	53.56	26.72	14.24	19.99	7.85	4.95	9.16	5.07	3.31
Hausdorff	53.56	26.72	14.24	19.99	12.31	12.98	12.84	12.86	13.02

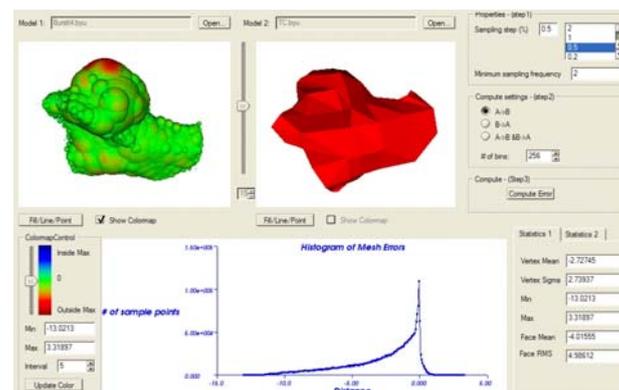
Gli stessi risultati possono essere visualizzati in forma grafica (Figura 36) dove vengono inoltre indicati i grafici relativi alla distribuzione delle distanze, analogamente a quanto già visto per l'esempio del cubo. Si può notare come, nel caso *Burst*, il diagramma degli errori mostri un picco molto ristretto intorno alla distanza zero (asse *x*). Ciò significa che vi è un alto numero di punti campione la cui distanza dal modello è circa nulla e quindi la rispettiva rappresentazione a sfere approssima molto bene il modello a *mesh* triangolari piane.



(a)



(b)



(c)

Figura 36 - Rappresentazione dei risultati calcolati in base alla *distanza di Hausdorff* con l'aiuto dello strumento [21], relativi agli algoritmi (a) Octree, (b) Hubbard, (c) Burst.

## 6. Conclusioni

Lo scopo principale di questo lavoro era quello di definire un indice che potesse permettere di scegliere, tra gli algoritmi esistenti più noti, quello che genera un'approssimazione di un corpo, mediante sfere organizzate secondo un albero gerarchico, con la migliore qualità di rappresentazione. L'indice proposto, denominato  $K$ , è applicabile alla grande generalità degli oggetti escludendo alcuni casi molto particolari messi in evidenza nel presente lavoro. Come descritto nel testo, in letteratura sono presenti altri coefficienti analoghi all'indice  $K$ , alcuni dei quali si collocano nell'ambito della valutazione della bontà di approssimazione di un corpo attraverso sfere ed altri sono di carattere molto più generale, come quelli basati sul calcolo della *distanza di Hausdorff* che rappresenta una misura di riferimento ampiamente consolidata in letteratura.

In questo articolo l'indice  $K$  proposto è stato applicato a diversi casi che hanno permesso una analisi critica ed un confronto con la *distanza di Hausdorff*. Per tutti i casi analizzati, con le considerazioni descritte nella sezione 3, l'indice  $K$  dà un'effettiva descrizione della qualità di rappresentazione di un corpo approssimato mediante sfere consentendo così di stabilire, tra le metodologie in confronto, quella che genera e colloca le sfere in maniera ottimale nel tentativo di approssimare il corpo originale rappresentato da poligoni triangolari.

Scelta quindi la metodologia ottimale per il corpo in studio, in base anche ad altri fattori oltre a quelli strettamente correlati con la qualità di rappresentazione, l'indice  $K$  consente di definire fino a che livello dell'albero gerarchico occorre spingersi per ottenere la qualità di rappresentazione desiderata. Infatti, come dimostrato anche in letteratura, esiste un livello soglia nell'albero gerarchico oltre il quale non si ha un significativo aumento della qualità di rappresentazione con la strategia di approssimazione scelta anche se si verifica un aumento esponenziale del numero di sfere in gioco. L'indice  $K$  dà eccellenti risultati, confermati anche dall'aspetto visivo delle immagini nella quasi totalità dei casi. Tali risultati sono analoghi a quelli calcolati secondo la *distanza di Hausdorff* la quale peraltro rimane poco attendibile in alcuni casi particolari. In letteratura vi sono altri parametri basati sulla stessa distanza che superano il problema considerando valori mediati in luogo di valori massimi.

Concludendo, alla luce delle considerazioni e dei numerosi esempi applicativi svolti, si può affermare che l'indice  $K$  si colloca come una valida alternativa ai su citati parametri quale coefficiente per valutare la qualità della rappresentazione di un oggetto approssimato mediante sfere.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Jiménez P., Thomas F. and Torras C., 2001. "3D Collision detection: a survey". *Computer & Graphics*, Vol. 25, No. 2, April, pp. 269-285.
- [2] Lin M.C. and Gottschalk S., 1998. "Collision Detection between geometric models: a survey". *IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, San Diego, CA, Vol. 1, May, pp. 602-608.
- [3] M. Held, 1997. "ERIT – A collision of efficient and reliable intersection tests". *Journal of Graphics Tools*, Vol. 2, No. 4, pp. 25-44.
- [4] Cohen J.C., Lin M.C., Monocha D. and Ponamgi M. K., 1995. "I-COLLIDE: An interactive and exact collision detection system for large-scale environments". In Proceedings of the 1995 Symposium on Interactive 3D Graphics, Monterey, California, United States, April 9-12, pp. 189-195.
- [5] Bradshaw G. and O'Sullivan C., 2004. "Adaptive Medial-Axis Approximation for Sphere-Tree Construction". *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, Vol. 23, No. 1, January, pp. 1-26 .
- [6] Bradshaw G., 2002. "Bounding Volume Hierarchies for level of detail collision handling". PhD Thesis, University of Higher Education, Trinity College, Dublin, May.
- [7] Hubbard P. M., 1996. "Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection". *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 15, No. 3, July, pp.179-210.
- [8] Del Pobil A.P., Serna M.A. and Lovet J., 1992. "A new representation for collision avoidance and detection". In Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, Vol. 1, May, pp. 246-251.
- [9] Gupta K. and Del Pobil A.P, 1998. *Practical motion planning in robotics*. John Wiley & Sons, Chap. 11.
- [10] Martínez B., Del Pobil A.P. and Pérez M., 1998. "Very fast collision detection for practical motion planning. Part I: the spatial representation". In Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, Vol. 1, May, pp. 624-629.
- [11] Krishnan S., Gopi M., Lin M., Manocha D. and Pattekar A., 1998. "Rapid and accurate contact determination between spline models using ShellTrees". In Proceedings of Eurographics 1998, Vol. 17, pp. 315-326.
- [12] Larsen E., Gottschalk S., Lin M. and Manocha D., 1999. Fast proximity queries with swept sphere volumes. Technical Report TR99-018, Dept. of Computer Science, University of North Carolina.
- [13] Van den Bergen G.. "Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees". *Journal of Graphics Tools*, Vol. 2, No. 4, pp.1-13, 1997.
- [14] Gottschalk S., Lin M. C. and Manocha D., 1996. "OBB-Tree: A Hierarchical Structure for Rapid Interference Detection". In Proceedings of ACM SIGGRAPH, New Orleans , August 4-9, pp. 171-180.
- [15] 2005. Collision Detection. Tutorial Notes, Dept of Computer Graphics, University of Freiburg. See also URL <http://cg.informatik.uni-freiburg.de/teaching.htm>.
- [16] Veltkamp R.C. and Hagedoorn M., 1999. State of the art in shape matching. Technical Report UU-CS-1999-27, Utrecht University, the Netherlands, Department of Computing Science.
- [17] Held M., Klosowski J.T. and Mitchell J.S.B, 1995. "Evaluation of collision detection methods for virtual reality". In Proceedings of 7<sup>th</sup> Canadian Conference on Computational Geometry, pp. 205-210.
- [18] Cignoni P., Rocchini C. and Scopino R., 1998. "Metro: measuring error on simplified surfaces". *Computer Graphics Forum*, Vol. 17, No. 2, June, pp. 167-174.
- [19] Aspert N., Santa-Cruz D. and Ebrachimi T., 2002. "MESH: measuring errors between surfaces using the Hausdorff distance". In Proceeding of the IEEE International Conference in Multimedia and Expo (ICME), Lausanne, Switzerland, August 26-29, Vol. 1, pp. 705-708.
- [20] Bradshaw G. Sphere-Tree construction toolkit. See also URL <http://isg.cs.tcd.ie/spheretree>.
- [21] C. Xu, 2004. MeshValmet. Unpublished document title. See also URL <http://www.cs.unc.edu/~xushun>.