Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

Ottimizzazione economica dei cicli motori a gas con recupero.

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

1 – IMPIANTI DI TURBINA A GAS CON RECUPERO.

In un ciclo motore a gas, (**Fig. 1**), qualora la temperatura dei fumi di combustione in uscita dalla turbina, risulti maggiore di quella dell'aria compressa: $T_{2'} \leq T_{3'}$, è possibile inserire uno scambiatore di calore per il recupero di parte della potenza termica contenuta nei gas di scarico della turbina, altrimenti ceduta all'esterno, per preriscaldare il gas compresso, con risparmio di potenza termica primaria e aumento del rendimento di conversione del ciclo.

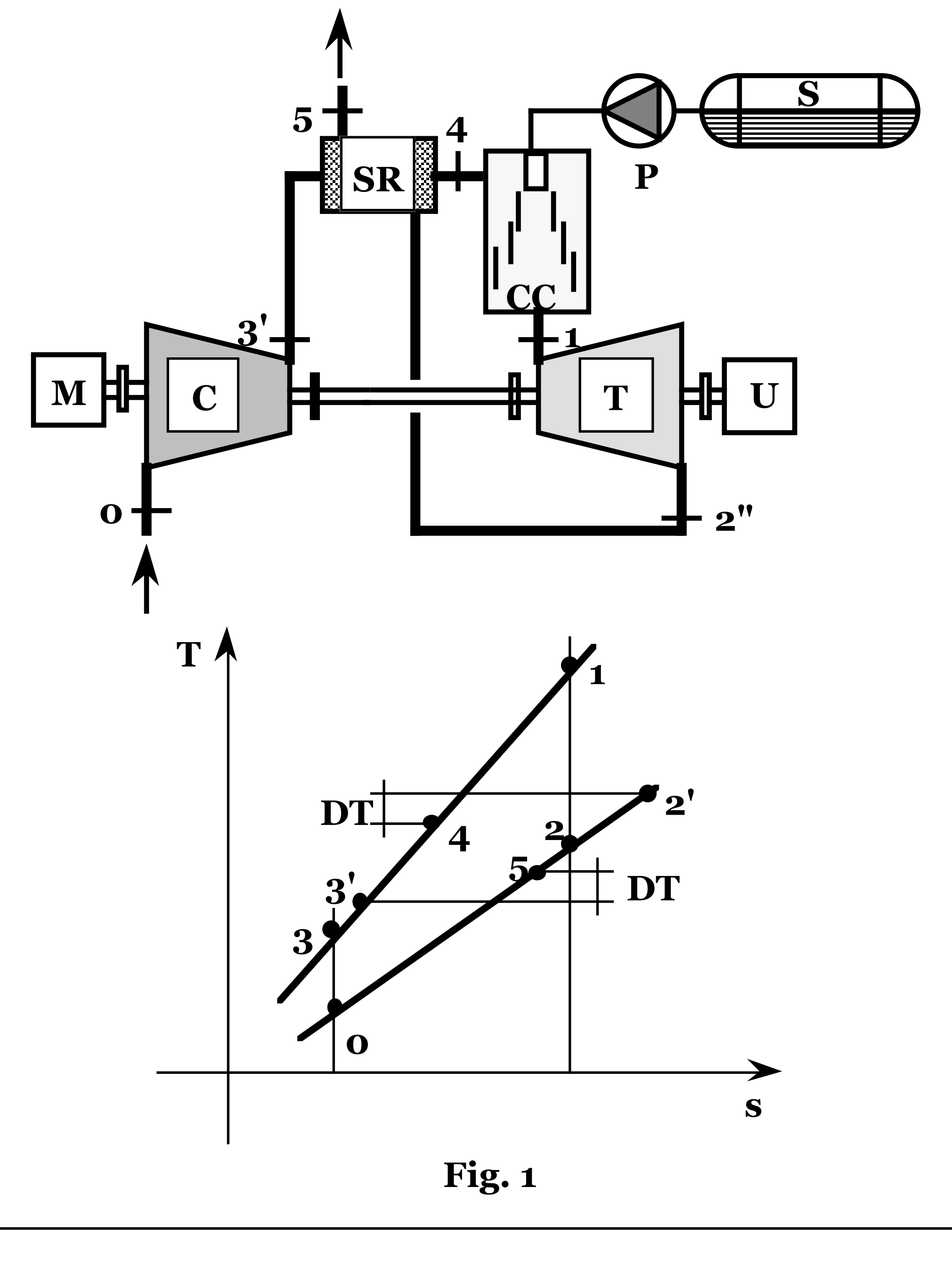

Fig. 1

Indicando con h_{ie}, h_{ic}, i rendimenti rispetto all'isoentropica di espansione e compressione e con: $t = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T_o} = \left(\frac{p_1}{p_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}$, il rapporto, (costante), delle temperature lungo una isoentropica e il corrispondente rapporto di pressioni, si ha:

$T_{2'} = T_1 - (T_1 - T_2)h_{ie}$; $T_{3'} = T_o + (T_3 - T_o)/h_{ic}$,

da cui la condizione risulta:

$$\frac{t}{h_{ic}} - \frac{T_1}{T_o}(1 - h_{ie}) - \left(\frac{1}{h_{ic}} - 1\right) - \frac{T_1}{T_o}\frac{h_{ie}}{t} \le 0.$$

Nell'intervallo: $1 < t < \frac{T_1}{T_o} h_{ie}h_{me}h_{ic}h_{mc}$, ($h_{me}$, h_{mc}, rendimenti meccanici di espansione e compressione), fra valori nulli del lavoro specifico e rendimento, la funzione risulta monotona crescente con **t** e verficata per **t** maggiore della soluzione dell'eguaglianza che come intersezione di una retta a pendenza positiva con un'iperbole equilatera, ammette una e una sola soluzione per **t** positivo e dotata di senso fisico, (**t > 1**), essendo la funzione, (crescente con **t**), verificata per:

$t = 1$: $1 - T_1/T_o < 0$.

L'introduzione dello scambiatore di calore di recupero comporta unicamente un minore potenza termica spesa per cui il lavoro specifico ottenuto risulta comunque:

$$L = c_p(T_1 - T_2)h_{ie}h_{me} - c_p(T_3 - T_o)/h_{ic}h_{mc} =$$

$$= c_pT_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)h_{ie}h_{me} - c_pT_o\frac{\left(\frac{T_3}{T_o} - 1\right)}{h_{ic}h_{mc}} = c_pT_1\left(1 - \frac{1}{t}\right)h_{ie}h_{me} - c_pT_o\frac{(t-1)}{h_{ic}h_{mc}} =$$

$$= c_p(t-1)\left[\frac{T_1}{t}h_{ie}h_{me} - \frac{T_o}{h_{ic}h_{mc}}\right],$$

mentre la potenza termica specificoa spesa, vale: $q = c_p(T_1 - T_4)/h_b$.

Indicando con: $i_s = c_p(T_4 - T_{3'})/c_p(T_{2'} - T_{3'}) = (T_4 - T_{3'})/(T_{2'} - T_{3'})$, l'indice dello scambiatore di recupero definito come rapporto fra l'energia termica specifica scambiata in realtà e la massima teoricamente recuperabile, si ottiene:

$$T_4 = T_{3'} + (T_{2'} - T_{3'})i_s = T_{3'}(1 - i_s) + T_{2'}\, i_s,$$

da cui: $$T_4 = \left(T_o + \frac{T_3 - T_o}{h_{ic}}\right)(1 - i_s) + \left[T_1 - (T_1 - T_2)h_{ie}\right] i_s =$$

$$= T_o\left(1 + \frac{t-1}{h_{ic}}\right)\left(1 - i_s\right) + T_1\left[1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)h_{ie}\right]i_s;$$

$$q(t, i_s) = \frac{c_p}{h_b}\left\{T_1 - T_o\left(1 + \frac{t-1}{h_{ic}}\right)\left(1 - i_s\right) - T_1\left[1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)h_{ie}\right]i_s\right\}.$$

Il rendimento globale di conversione risulta quindi:

$$h(t, i_s) = h_b \frac{T_1\left(1 - \frac{1}{t}\right)h_{ie}h_{me} - T_o \frac{(t-1)}{h_{ic}h_{mc}}}{T_1 - T_o\left(1 + \frac{t-1}{h_{ic}}\right)\left(1 - i_s\right) - T_1\left[1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)h_{ie}\right]i_s}.$$

Per valori tecnicamente accettabili dei parametri, il valore di annullamento della potenza termica ceduta, (e conseguente rendimento tendente all'infinito), risulta ancora superiore a quello limite di potenza meccanica netta positiva e quindi privo di significato.

La potenza termica spesa e quindi il rendimento globale dell'impianto risultano variabili con i parametri **t** e l'efficienza dello scambiatore di recupero, i_s: $q = q(t, i_s)$; $h = L/q = h(t, i_s)$, per cui i valori ottimali dei parametri **t** e i_s, ovvero di massimo rendimento globale risulterebbero teoricamente le radici del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta h(t, i_s)}{\delta t} = 0 \\ \dfrac{\delta h(t, i_s)}{\delta i_s} = 0 \end{cases}.$$

Tuttavia a meno di problemi economici, il valore ottimale dell'efficienza dello scambiatore di recupero è il massimo realizzabile e in teoria unitario, (ovvero superficie di scambio illimitata), risultando il rendimento monotono crescente con la superficie di scambio, per cui l'ottimizzazione risulta limitata al solo parametro **t**, come radice dell'equazione: $dh(t)/dt = 0$, $\forall\, i_s$.

In caso ideale il limite di possibilità di recupero, $(T_3 = T_2)$, (coincidente con la condizione di massimo lavoro del ciclo senza recupero), risulta: $t(L_{max}) = \sqrt{\frac{T_1}{T_o}}$, pertanto gli schemi, senza e con recupero, coincidono per: $t \geq \sqrt{\frac{T_1}{T_o}}$, mentre al di sotto di tale valore, per recupero totale, (i_s = 1), e rendimenti parziali unitari, si ha: $h(t) = \left(1 - \frac{T_o}{T_1} t\right)$, per rendimenti reali, (< 1), si ha:

$h(t) = h_b\left(h_{me} - \frac{T_o}{T_1}\frac{t}{h_{ic}h_{ie}h_{mc}}\right)$, ovvero rendimento comunque decrescente all'aumentare del rapporto **t** per riduzione del salto termico di recupero e quindi massimo per **t = 1**, nel qual caso, (efficienza di recupero unitaria: $i_s = 1$ e pressioni coincidenti: **t = 1**), il ciclo, posti tutti i rendimenti isoentropici e meccanici unitari, ($h_b = h_{ic} = h_{ie} = h_{me} = h_{mc} = 1$), diviene di Carnot e infatti quello globale di conversione risulta appunto: $h = 1 - T_o/T_1$.

In tutto il campo di variabilità del rapporto **t** nel caso ideale si ha quindi che nell'intervallo: $\frac{T_1}{T_o} \geq t \geq \sqrt{\frac{T_1}{T_o}}$, risulta possibile solo il ciclo senza recupero con rendimento decrescente dal valore di Carnot al limite superiore e viceversa con lavoro massimo al limite inferiore.

Nel restante intervallo: $\sqrt{\frac{T_1}{T_o}} \geq t \geq 1$, si ha invece possibilità di ciclo con recupero con lavoro massimo al limite superiore e rendimento pari a quello di Carnot al limite inferiore e decrescente al crescere del rapporto **t**.

In caso reale i risultati sono quantitativamente alterati, rimanendo tuttavia qualitativamente valido il principio che per qualunque valore realizzabile dell'efficienza dello scambiatore, (i_s < 1), all'aumentare di **t** divenendo il recupero comunque sempre meno apprezzabile, (fino ad essere impossibile per $T_{3'} \geq T_{2'}$), il rapporto di temperatura, (e quindi di pressione), di ottimizzazione risulta inferiore a quello relativo all'assenza di recupero e decrescente all'aumentare dell'efficienza i_s, con ulteriore possibilità di aumento della temperatura di picco del ciclo.

Quantitativamente per valori:

$i_s = 0{,}8$; $T_1 = 1200$ K; $T_o = 300$ K; $h_i = 0{,}8$; $h_m = 0{,}95$; $h_b = 0{,}9$

si ottiene: $t_{max} = 1{,}36$, ($T_2 = 882$ K); $h(t_{max}) = 0{,}25$; $p_1/p_o = 2{,}88$

mentre per: $T_1 = 1500$ K; $T_o = 300$ K; $h_i = 0{,}85$; $h_m = 0{,}95$; $h_b = 0{,}9$

si ottiene: $t_{max} = 1{,}47$, ($T_2 = 1.020$ K); $h(t_{max}) = 0{,}326$; $p_1/p_o = 3{,}76$

2 – COSTO DELL'ENERGIA PRODOTTA.

Indicando con.
P potenza dell'impianto;
u fattore di carico;
T unità di tempo a pariodo rateale;
$1/t_{ek}$, $1/t_{ek}$, $1/t_{ek}$, fattori di annualità relativi all'energia elettrica, al combustibile e alle opere di gestione e manutenzione, (supposte proporzionali al costo impianto);
c_k costo specifico dell'energia elettrica;
c_c costo specifico del combustibile;
f_r fattore di rivalutazione per apprezzabili tempi di costruzione;
a coefficiente di proporzionalità fra costi di gestioe e manutenzione e investimento;
I costo di investimento,
il valore attuale netto dell'investimento risulta:

$$VAN = \frac{PuTc_k}{t_{ek}} - \frac{PuTc_c}{hk_i t_{ec}} - \left(f_r + \frac{a}{t_{em}}\right)I,$$

da cui per: $t_{ek} \sim t_{ec}$: $c_k = \frac{c_c}{k_i h} + \left(f_r + \frac{a}{t_{em}}\right)\frac{I t_{ek}}{PuT}$.

La funzione tende a infinito per gli zeri delle funzioni: $h(t)$ e $L(t)$, ovvero:

$t = 1$ e $t = \frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}$, presentando un solo minimo, all'interno di tale intervallo di valori significativi.

Supponendo che il costo di investimento, a parità di potenza utile, sia proporzionale alle dimensioni e quindi alla portata di fluido circolante, per: $\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{ic} h_{me} h_{mc}} \leq t \leq \frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{ic} h_{me} h_{mc}$, (ciclo senza recupero), si ha: $I = q_o G = q_o \frac{P}{L(t)}$,

da cui: $$c_k = \frac{c_c}{h(t)k_i} + \left(f_r + \frac{a}{t_{em}}\right)\frac{q_o t_{ek}}{uTL(t)}.$$

Per gli usuali valori delle grandezze caratteristiche, si verifica che le condizioni di massimo lavoro specifico, (ovvero minimo costo impianto), e massimo rendimento, (ovvero minimo costo di esercizio), sono sensibilmente prossime:

$$t(L_{max}) \sim t(h_{max}) \sim \sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}},$$

per cui in condizioni di ottimizzazione risulta:

$$L = \frac{c_p T_o}{h_{ic} h_{mc}} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1 \right)^2 ;$$

$$q = \frac{c_p T_o}{h_b} \left[\left(\frac{T_1}{T_o} - 1 \right) - \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1}{h_{ic}} \right];$$

$$h = \frac{L}{q} = \frac{\frac{1}{h_{ic} h_{mc}} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1 \right)^2}{\frac{1}{h_b} \left[\left(\frac{T_1}{T_o} - 1 \right) - \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1}{h_{ic}} \right]}$$

$$c_k = c_c h_b h_{ic} h_{mc} \frac{\left(\frac{T_1}{T_o} - 1 \right) - \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1}{h_{ic}}}{k_i \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1 \right)^2} +$$

$$+ \left(f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) \frac{q_o t_{ek}}{uT} \frac{h_{ic} h_{mc}}{c_p T_o \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} - 1 \right)^2} .$$

Per: $1 < t < \sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ie} h_{ic} h_{me} h_{mc}}$, risultando possibile il ciclo con recupero, il costo di investimento è esprimibile come somma dell'impianto senza recupero, (I_o), e del sistema di recupero stesso, (I_r):

$I = q_o \frac{P}{L(t)} + I_r = q_o \frac{P}{L(t)} + b_o + bS$, avendo supposto il costo del gruppo di recupero proporzionale alle dimensioni e quindi superficie di scambio dello scambiatore, $(I_r = b_o + bS)$.

Si ottiene, quindi:

$$c_k(t, S) = \frac{c_c}{h(t, S) k_i} + \left(f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) \frac{q_o t_{ek}}{uTL(t)} + (b_o + bS) \frac{t_{ek}}{PuT},$$

risultando in questo caso, la potenza termica di recupero, (e quindi il rendimento del sistema), funzione, del rapporto **t** e dell'efficienza, (i_s): $h = h(t, i_s)$, con i_s funzione della superficie dello scambiatore, **S**, e della portata: $i_s = i_s(G, S)$, con: $G = P/L(t)$, da cui: $i_s = i_s(t, S)$, e quindi: $h = h(t, i_s) = h(t, S)$.

Poiché la potenza installata e il fattore di carico, (e quindi l'utile prodotto), non risultano variabili di ottimizzazione, i valori ottimali dei parametri **t** ed **S**, si ottengono indifferentemente come radici dei sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta VAN(t,S)}{\delta t} = 0 \\ \dfrac{\delta VAN(t,S)}{\delta S} = 0 \end{cases}, \text{ ovvero: } \begin{cases} \dfrac{\delta c_k(t,S)}{\delta t} = 0 \\ \dfrac{\delta c_k(t,S)}{\delta S} = 0 \end{cases},$$

o dall'analisi numerica delle funzioni:

$$VAN = VAN(t, S), \text{ ovvero: } c_k = c_k(t, S).$$

Il procedimento può essere scisso nelle due variabili considerando separatamente la superficie di scambio, (o efficienza), dello scambiatore di recupero come effetto dell'investimento: $I_r = b_o + bS$, relativo al risparmio conseguente alla sua installazione:

$$\frac{Gc_p(T_1 - T_{3'})uTc_c}{k_i h_g t_{ec}} - \frac{Gc_p uTc_c}{k_i h_g t_{ec}} \frac{(T_1 - T_4)}{i_s(S)} = \frac{Gc_p(T_4 - T_{3'})uTc_c}{k_i h_g t_{ec}}, \quad \text{da}$$

cui

$$VAN(S) = \frac{Gc_p(T_4 - T_{3'})uTc_c}{k_i h_g t_{ec}} - (b_o + bS) = \frac{Gc_p uTc_c}{k_i h_g t_{ec}} \frac{(T_{2'} - T_{3'})}{i_s(S)} - (b_o + bS) =$$

$$= \frac{Gc_p uTc_c}{k_i h_g t_{ec}} \frac{(T_{2'} - T_{3'})}{1 + \dfrac{Gc_p R_t}{S}} - (b_o + bS),$$

avendo considerato lo scambiatore come un'apparecchiatura in controcorrente a pendenze parallele di superficie **S** fra le medesime portate, (**G**), di fluido a pari calore specifico:

$$i_s(S) = \frac{c_p(T_4 - T_{3'})}{c_p(T_{2'} - T_{3'})} = \frac{T_4 - T_{3'}}{T_{2'} - T_{3'}} = \frac{1}{1 + \dfrac{Gc_p R_t}{S}}.$$

Essendo la portata: $G = P/L(t)$, indipendente dalla superficie in quanto il lavoro specifico non varia col recupero, il **VAN** risulta dipendente dalla sola variabile **S**, e pertanto l'equazione di ottimizzazione: $\frac{dVAN(S)}{dS} = 0$, porge:

$$S_{ec} = Gc_pR_t\left(\sqrt{\frac{(T_{2'} - T_{3'})uTc_c}{R_tk_ih_gt_{ec}b}} - 1\right) = Gc_pR_t\left\{\sqrt{\frac{\left[(T_1 - T_o) - (t-1)\left(T_1\frac{h_{ie}}{t} + \frac{T_o}{h_{ic}}\right)\right]uTc_c}{R_tk_ih_gt_{ec}b}} - 1\right\}$$

ovvero: $(i_s)_{ec} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\left[(T_1 - T_o) - (t-1)\left(T_1\frac{h_{ie}}{t} + \frac{T_o}{h_{ic}}\right)\right]uTc_c}{R_tk_ih_gt_{ec}b}} - 1}}$.

Per tali valori la funzione **VAN**:

$$VAN(t) = \frac{PuTc_k}{t_{ek}} - \frac{PuTc_c}{h(t, i_{sec})k_it_{ec}} - \left(f_r + \frac{a}{t_{em}}\right)\left[q_o\frac{P}{L(t)} + \left(b_o + bS_{ec}\right)\right]$$

presenta un solo massimo di ottimizzazione del restante parametro **t**, radice della relazione: **dVAN(t)/dt = 0**.

La funzione, infatti, contiene un termine di esercizio, (negativo), inversamente proporzionale al rendimento e due termini di impianto, (negativi), entrambi inversamente proporzionali al lavoro specifico e pertanto tende a meno infinito per i rispettivi zeri: $t = 1$ e $t = \frac{T_1}{T_o}h_{ie}h_{me}h_{ic}h_{mc}$, presentando un solo massimo, (il cui segno ne identifica le condizioni di massimo utile ovvero minima perdita), all'interno di tale intervallo di valori significativi.

La funzione **h(t)**, a ottimizzazione dello scambiatore effettuata, differisce dalla relazione valida per lo schema senza recupero solo per termini costanti, e parimenti, quindi, presenta un solo massimo.

Infine la funzione $c_k(t)$, presenta un solo minimo relativo alle condizioni di massimo rendimento, (minimo costo di esercizio), e minimo lavoro specifico, (minimo costo impianto), assai prossime fra loro.

****