ORDINAMENTI PARZIALI E CURVE DI LORENZ NELLA MISURAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA

Stefano Toso

Università di Bologna

Dicembre 1991

Riassunto

La teoria della misurazione della disuguaglianza ha subito nuovi importanti impulsi negli ultimi venti anni in seguito all'impiego, mutuato dalla teoria delle scelte in condizioni di incertezza, delle condizioni di dominanza stocastica. L'approccio perseguito è quello del confronto, in termini di benessere sociale, tra diverse distribuzioni di reddito sulla base di un criterio di ordinamento parziale. Tale impostazione si contrappone a quella assiomatica in quanto non implica l'adesione ad alcuna specifica misura sintetica della disuguaglianza nè quindi ad un giudizio di valore particolare, non necessariamente condiviso, in tema di equità. In questo lavoro si intende ripercorrere in modo sistematico tale recente filone della letteratura, che si fonda sul criterio di dominanza di Lorenz e su ulteriori estensioni teoriche, quali la dominanza generalizzata e quella generalizzata e sequenziale.

INDICE

1. Introduzione

Aprendo provocatoriamente un suo recente lavoro, Amartya Sen osserva: "What is economic inequality?... At one level, economic inequality is a very obvious thing.... Caviar for some and starvation for others. But the contrasts are often far more subtle and much harder to identify" (Sen 1989, 1). Al di là di delicate questioni definitorie, il passo precedente suggerisce che la misurazione della disuguaglianza è un tema particolarmente controverso dell'analisi distributiva. Ciò è appunto dovuto al contenuto sia oggettivo che etico del termine "inequality", il quale evoca un'idea di "differenza" e, al tempo stesso, di "ingiustizia".

Questa duplice accezione spiega la contemporanea presenza, in letteratura, di misure positive e normative della disuguaglianza. Le prime sono sostanzialmente indici statistici che forniscono un'informazione sintetica del grado di dispersione di una distribuzione. Rientrano tra questi, ad esempio, la varianza, il coefficiente di variazione, l'indice di Gini. Lo sviluppo della seconda classe di misure, quelle normative, risale invece al pionieristico lavoro di Dalton (1920), peraltro trascurato fino agli inizi degli anni settanta. L'assunto fondamentale di questa linea di ricerca è che la disuguaglianza non possa essere misurata senza introdurre giudizi di valore: "In comparing a 'positive' measure of inequality such as the Gini coefficient at two points in time, say, the statement 'the Gini is increased' is rarely made in purely descriptive spirit. More often the statement has a persuasive element, asking for government intervention or implying that society is in some sense worse-off" (Kanbur 1984, 410). Secondo questa visione, pertanto, ogni misura della disuguaglianza deve rendere esplicito il sistema di preferenze collettive ad essa sottostante. Lo strumento analitico impiegato è la funzione di benessere sociale di tipo Bergson-Samuelson.

La molteplicità di misure della disuguaglianza pone tuttavia un problema di scelta. Il ricorso all'uno o all'altro indice fornisce in generale differenti ordinamenti: la distribuzione del reddito del paese A, ad esempio, può risultare più o meno disuguale di quella del paese B, a seconda dell'indice utilizzato. Tale incongruenza dipende dall'ambizioso obiettivo, comune tanto agli indici di derivazione statistica quanto a quelli normativi, di costruire misure cardinali della disuguaglianza. Queste ultime, sintetizzando in un valore numerico le caratteristiche della distribuzione in esame, sono interpretabili come relazioni d'ordine, godono cioè delle proprietà di riflessività, transitività e completezza.

Il fatto che due misure della disuguaglianza diano risultati contrastanti potrebbe essere irrilevante se ci fossero "buoni motivi" per sceglierne una anzichè l'altra. Un modo per risolvere il problema della scelta parrebbe essere quello di valutare ciascuna misura in termini delle sue proprietà: è questa l'osservazione che sta alla base del cosiddetto approccio *assiomatico* alla misurazione della disuguaglianza. La costruzione di indici che rispondono a precisi requisiti assiomatici fornisce in effetti una soluzione alla 'querelle' tra misure positive e normative. Pur tuttavia anche questo approccio è interno ad una ricerca di ordinamenti completi e non risolve, se non a priori, il problema della scelta tra una molteplicità di misure.

Una linea di ricerca alternativa all'impostazione assiomatica è costituita dall'approccio degli *ordinamenti parziali* ("partial ranking approach"). Il punto di partenza di tale approccio, che ne costituisce anche la giustificazione metodologica, è l'accettazione della natura complessa e multidimensionale della disuguaglianza. La pluralità di spazi (reddito, risorse, capacità) rispetto ai quali valutare la disuguaglianza e l'eterogeneità degli agenti rispetto alle loro caratteristiche personali (età, abilità, area di residenza) induce a ritenere che sia impossibile ordinare univocamente un insieme di distribuzioni in termini di equità. L'incapacità di ottenere un ordinamento completo non rappresenta, quindi, un limite dell'analisi bensì una naturale conseguenza del carattere multiforme della disuguaglianza. Il problema della sua misurazione va inteso, in sostanza, come ricerca di una relazione d'ordine parziale ("quasi-ordering").

La più limpida giustificazione di questo approccio è forse contenuta nel classico "On Economic Inequality" di A. Sen, il quale sostiene: "Most statistical measures of the inequality level assume a high degree of measurement... this is true not only of the so-called objective measures, but also of normative evaluation. It is, however, possible to argue that the implicit notion of inequality that we carry in our mind is, in fact, much less precise and may correspond to an incomplete quasi-ordering. We may not indeed be able to decide whether one distribution x is more or less unequal than another, but we may be able to compare some other pairs perfectly well. The notion of inequality has many aspects, and a coincidence of them may permit a clear ranking, but when these different aspects conflict an incomplete ranking may emerge.... If so, to find a measure that involves a complete ranking may produce artificial problems, because a measure can hardly be more precise than the concept it represents" (Sen 1973, 5 e segg.).

L'approccio degli ordinamenti parziali alla misurazione della disuguaglianza è particolarmente attraente sul piano metodologico e meritevole di specifica attenzione. Con il presente lavoro intendiamo ripercorrere alcuni dei principali contributi interni a tale impostazione.

Lo sviluppo analitico del "partial ranking approach" fa uso di una tecnica, la dominanza stocastica, che trae origine dalla letteratura sulla teoria dell'incertezza. Sarà quindi necessario richiamarne, seppure solo in termini intuitivi, i principali risultati formali. Nel paragrafo 2, dopo aver esposto alcuni concetti di base, riassumeremo il contributo di Atkinson (1970) il quale fornisce una giustificazione normativa all'impiego della curva di Lorenz quale misura della disuguaglianza. Il paragrafo 3 è relativo alla generalizzazione da parte di Shorrocks (1983) del criterio di dominanza di Lorenz. Affronteremo quindi nel paragrafo successivo la soluzione proposta da Dardanoni, Lambert (1988) al caso in cui le curve di Lorenz generalizzate si incrociano. Il paragrafo 5 riguarda infine l'applicazione dell'approccio degli ordinamenti parziali allo studio della disuguaglianza multivariata, in particolare al caso in cui l'analisi distributiva tenga conto delle differenze nella dimensione familiare senza ricorrere all'uso delle "scale di equivalenza" (Atkinson, Bourguignon 1987). Brevi note di conclusione chiuderanno il lavoro.

2. Dominanza di Lorenz e "avversione alla disuguaglianza"

Un concetto chiave dell'approccio di "partial ranking" alla misurazione della disuguaglianza è quello di *dominanza stocastica*. Prima di darne un enunciato è però opportuno richiamare altri due concetti che si riveleranno utili in seguito: la curva di Lorenz ed il relativo criterio di dominanza.

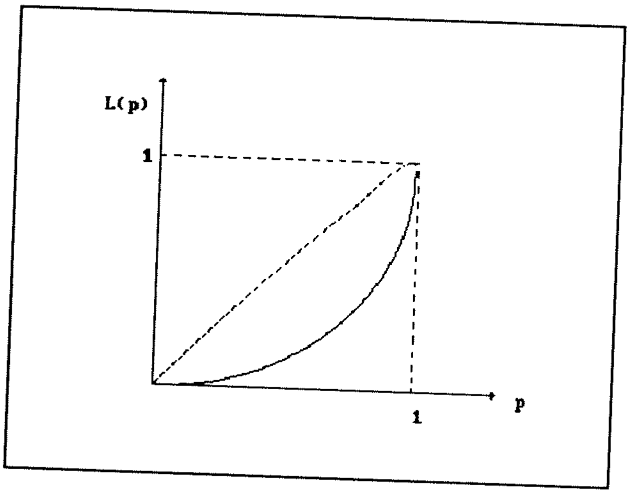
La *curva di Lorenz*, ideata nel 1905 dall'omonimo statistico statunitense, è una misura relativa della disuguaglianza che individua la proporzione del reddito totale distribuito a ciascuna percentuale, p, della popolazione ordinata per livelli non decrescenti di reddito. Essa può essere formulata, nel caso continuo, come

$$L(p) = \left(\frac{1}{\mu}\right) \int_0^Y y\, f(y)\, dy, \qquad p \varepsilon [0,1],\ Y \varepsilon [0,\bar{y}],$$

dove $f(Y)$ indica la funzione di densità di frequenza della distribuzione del reddito, μ la media della distribuzione, definita da $\mu = \int_0^{\bar{y}} y\, f(y)\, dy$, e $[0\ ,\ \bar{y}]$ il campo di variazione di Y.

Se si esclude il caso di equidistribuzione, in cui verrebbe a coincidere con la retta a 45 gradi, la curva di Lorenz avrà un andamento strettamente convesso (cfr. figura 1).

Fig. 1 - Curva di Lorenz



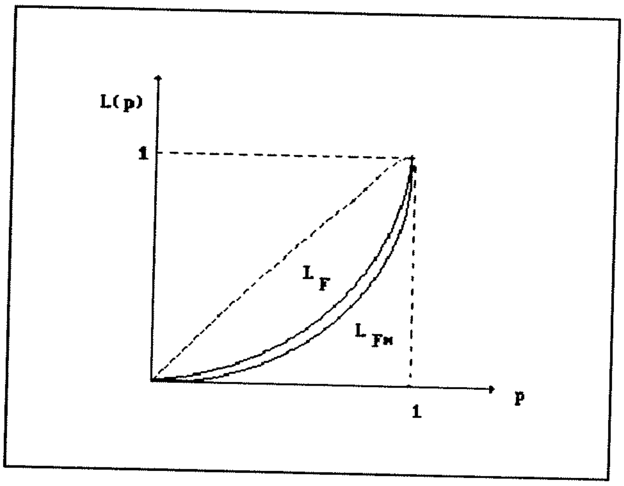
Enunciamo ora il criterio di *dominanza di Lorenz*. Indicando con F la funzione di densità cumulata, $F(Y) = \int_0^Y f(y)\, dy$, tale che $F(0) = 0$ e $F(\bar{y}) = 1$, si dirà che, date due qualsiasi distribuzioni $F(Y)$ ed $F^*(Y)$, F domina in senso di Lorenz F^* se

$$L_F(p) \geq L_{F^*}(p), \qquad \forall\, p\ \varepsilon\ [0,1]$$

e $L_F \neq L_{F^*}$.

Il criterio equivale ad affermare che il *100 p%* dei percettori di reddito nella distribuzione F detiene una quota maggiore del reddito totale del corrispondente gruppo nella distribuzione F^*, e ciò si verifica per qualsiasi valore di p compreso tra zero e l'unità (cfr. figura 2). Nulla vieta peraltro che le curve di Lorenz di F ed F^* si intersechino una o più volte, rendendo impossibile il ricorso al relativo criterio di dominanza. L'ordinamento stabilito da tale criterio è quindi, per sua natura, incompleto.

Fig. 2 - Dominanza di Lorenz



Possiamo a questo punto passare alla definizione del concetto di dominanza stocastica. Esso trae origine dalla teoria delle scelte in condizioni d'incertezza[1] e, pur senza darne una formulazione rigorosa, è riassumibile col seguente enunciato: date due distribuzioni di probabilità X e Y, la distribuzione X *domina stocasticamente* Y se e solo se l'utilità attesa associata ad X è non minore di quella di Y, per tutte le funzioni di utilità appartenenti ad una specifica classe U.

L'analogia formale tra lo studio dell'incertezza e della distribuzione del reddito risulta evidente se nella precedente definizione sostituiamo 'distribuzione di probabilità' con 'distribuzione di reddito' e 'utilità attesa' con 'benessere sociale'. Il parallelo è tra un ordinamento di diverse distribuzioni di eventi incerti sulla base della loro utilità attesa e un ordinamento di distribuzioni di reddito in termini di benessere sociale. Dato un insieme di distribuzioni di reddito ed una serie di giudizi

---

[1] Cfr., ad esempio, Hadar e Russel (1974).

di valore contenuti in una specifica classe di funzioni di benessere sociale, si dirà che una distribuzione domina un'altra se alla prima è associato un benessere non minore che alla seconda.

L'interesse per le condizioni di dominanza stocastica deriva dal fatto che esse consentono di ordinare distribuzioni alternative senza che sia necessario specificare la forma precisa della funzione di utilità individuale. Esiste più precisamente un trade-off tra le ipotesi relative alle funzioni di utilità e la forza delle condizioni di dominanza: facendo ipotesi minimali sulla classe di funzioni di utilità, otterremo un risultato di dominanza valido solo in circostanze particolari, ossia sarà spesso impossibile ordinare le distribuzioni messe a confronto. D'altra parte, se imponiamo ulteriori restrizioni sulle funzioni di utilità ridurremo l'ampiezza della classe ma aumenteremo il "range" di confronti possibili. La specificazione di successivi gradi di dominanza corrisponde dunque alla definizione di ipotesi normative sempre più stringenti da applicare all'insieme delle distribuzioni di reddito.

Il problema può essere formalizzato nel modo seguente. Si assuma che, in una prospettiva welfarista, il benessere sociale sia una funzione separabile in senso additivo e simmetrica dei redditi individuali y:

$$W = \int_0^{\bar{y}} u(y)\ f(y)\ dy$$

Si tratta di individuare le condizioni con le quali ordinare, in termini di benessere sociale, due qualsiasi profili di reddito appartenenti all'insieme di tutte le possibili distribuzioni.

Se restringiamo la nostra attenzione alla classe di funzioni di utilità individuali U_1, tale che

$$U_1 \equiv \{u(Y)\ /\ u'(Y) \geq 0, \quad \forall\ Y\ \varepsilon\ [0,\ \bar{y}\ ]\},$$

il primo risultato che si ottiene corrisponde alla condizione di *dominanza stocastica di primo ordine*: condizione necessaria e sufficiente affinchè la distribuzione F sia preferita, in termini di benessere sociale, alla distribuzione F^*, ossia

$$\Delta W = \int_0^{\bar{y}} u(y)\, f(y)\, dy - \int_0^{\bar{y}} u(y)\, f^*(y)\, dy \equiv \int_0^{\bar{y}} u(y)\, \Delta f(y)\, dy \geq 0,$$

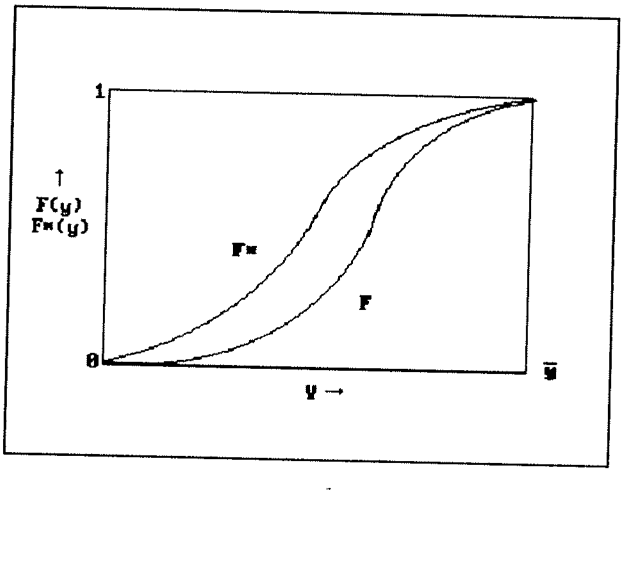
è che

$$\Delta F(Y) \equiv F(Y) - F^*(Y) \leq 0, \qquad \forall Y \,\varepsilon\, [0,\ \bar{y}\ ]$$

e che $\Delta F(Y) < 0$ per almeno un $Y \,\varepsilon\, [0,\ \bar{y}\ ]$ (1).

La condizione di dominanza stocastica di primo ordine afferma in sostanza che per qualsiasi livello di reddito y, compreso nel campo di variazione, la quota della popolazione avente un reddito non superiore ad y nella distribuzione F è sempre minore di quella della distribuzione F^*. La rappresentazione grafica di tale risultato è la seguente (cfr. figura 3).

Fig. 3 - Dominanza stocastica di primo ordine



La condizione di dominanza di primo ordine è particolarmente forte. Una condizione più debole, ma che estende il "ranking" tra profili di reddito, si ottiene restringendo la classe delle funzioni di utilità individuali da U_1 a U_2, tale che

$$U_2 \equiv \{ u(Y) \mid u'(Y) \geq 0,\ u''(Y) \leq 0,\ \forall Y\ \varepsilon\ [0, \bar{y}\ ] \},$$

dove l'ipotesi di utilità marginale del reddito decrescente viene normalmente interpretata come equivalente all'ipotesi di *avversione alla disuguaglianza* nella funzione di benessere sociale W. L'ipotesi di concavità di $u(Y)$ è anche coerente con il "principio del trasferimento" di Pigou-Dalton, il quale afferma che un qualsiasi trasferimento progressivo tra due individui (ossia da un ricco a un povero) che lascia inalterato il loro rango relativo riduce il valore della disuguaglianza.

Il risultato seguente è noto come condizione di *dominanza stocastica di secondo ordine*:

condizione necessaria e sufficiente affinchè la distribuzione F sia preferita, in termini di benessere sociale, alla distribuzione F^* è che

$$\Delta\phi(Y) \equiv \int_0^y \Delta\ F(y)\,dy = \int_0^y [F(y) - F^*(y)]\,dy \leq 0,\ \forall Y\ \varepsilon\ [0, \bar{y}\ ]$$

e che $\Delta\phi(Y) < 0$ per almeno un $Y\ \varepsilon\ [0, \bar{y}\ ]$ (2).

Dal confronto fra la condizione di dominanza di primo e di secondo ordine, si può notare che quest'ultima è più debole della prima poichè ammette la possibilità che F sia maggiore di F^* in qualche intervallo del campo di variazione $[0, \bar{y}\ ]$: ciò che si richiede infatti è solamente che l'integrale della loro differenza sia non positivo. La dominanza di secondo ordine può essere utilmente interpretata in termini dell'approccio di "partial ranking" alla misurazione della disuguaglianza. Si deve ad Atkinson (1970) la dimostrazione che, date due qualsiasi distribuzioni aventi uguale reddito medio, la condizione di dominanza stocastica di secondo ordine equivale al criterio di dominanza di Lorenz. Secondo la simbologia definita in precedenza:

$$\mu_F \geq \mu_{F^*} \quad e \quad L_F(p) \geq L_{F^*}(p),\ \forall p\ \varepsilon\ [0,1] \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\bar{y}} u(y)\,f(y)\,dy \geq \int_0^{\bar{y}} u(y)\,f^*(y)\,dy,\ \forall u(Y)\ \varepsilon\ U_2.$$

Il teorema implica che se le curve di Lorenz corrispondenti a due distribuzioni di reddito non si intersecano, si potrà ordinare queste ultime in senso di benessere sociale senza necessariamente specificare la forma della funzione di utilità, ammesso che sia non decrescente e concava[2]. Come rileva A. Sen, "the great attraction of Atkinson's result is that it permits us to rank the inequality levels of distributions in terms of the social welfare levels even without knowing the precise utility function to be chosen" (Sen 1973, 49).

Allo stesso tempo si può anche aggiungere che se due curve di Lorenz si incrociano, ossia non esiste dominanza dell'una rispetto all'altra, sarà sempre possibile trovare due funzioni di utilità, con $u'(Y) \geq 0$ e $u''(Y) \leq 0$, che ordineranno le due distribuzioni differentemente. La relazione d'ordine stabilita dal criterio di Lorenz è, in altri termini, incompleta ed un modo per cercare di estendere il "ranking" è quello di specificare ulteriormente la forma della funzione di utilità.

Il contributo di Atkinson (1970) ha fortemente influenzato gli sviluppi teorici successivi[3]. Essi possono essere raggruppati in due grandi linee di ricerca: una tesa ad estendere i risultati formali e la portata normativa della "Lorenz dominance", l'altra rivolta alla diretta assiomatizzazione delle misure della disuguaglianza. Mentre quest'ultima rientra in un approccio di ordinamenti completi, la prima linea di ricerca è invece interna ad un approccio di "partial ranking", ed ha affrontato alcuni problemi lasciati aperti dal criterio di dominanza di Lorenz. E' su di questa che ci soffermeremo nei paragrafi successivi.

---

[2] Anche l'ipotesi di concavita' di u(Y) puo' essere, in realta', indebolita assumendo che la funzione del benessere sociale sia simmetrica e quasi-concava (Rothschild e Stiglitz 1973) ovvero S-concava (Dasgupta, Sen e Starrett 1973).

[3] Per una rassegna della letteratura cfr., ad esempio, Kanbur (1984), Foster (1985), Atkinson (1989), Lambert (1989, 1991) e Chackravarty (1990).

3. La Dominanza di Lorenz generalizzata

L'impiego nell'analisi applicata della dominanza di Lorenz quale criterio di ordinamento parziale soffre di un'importante limitazione. Il contenuto normativo di tale criterio, stabilito dal teorema di Atkinson (1970), dipende dall'ipotesi che la distribuzione di reddito preferita abbia media non minore di quella dell'altra. Tale condizione non è ovviamente soddisfatta nei confronti internazionali, ma anche in un'analisi intertemporale relativa ad un medesimo paese essa può venir meno. E' ancora A. Sen ad osservare che "The problem of extending the Lorenz partial ordering to cases of variable mean income is quite a serious one, and this... restricts severely the usefulness of this approach" (Sen 1973, 61).

Da un punto di vista statistico, si noti, è del tutto irrilevante per il criterio di Lorenz che due distribuzioni abbiano media diversa. Consideriamo, ad esempio, due profili di reddito, F ed F^*, tali che il primo domina il secondo ossia $L_F(p) \geq L_{F^*}(p)$, $\forall p \; \varepsilon \; [0,1]$. La distribuzione F è meno disuguale di F^*. Per definizione di curva di Lorenz, questo risultato è compatibile sia con il caso in cui la media di F è maggiore di quella di F^* sia viceversa. In quest'ultimo caso, peraltro, la dominanza di Lorenz perde ogni significato normativo poichè non vale il teorema di Atkinson.

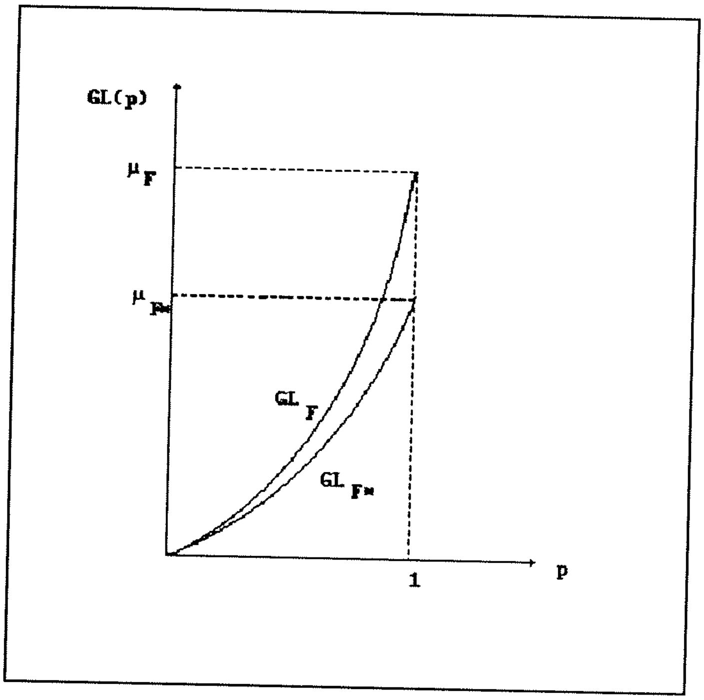
L'estensione del teorema al caso di medie differenti si deve a Shorrocks (1983), il quale introduce il concetto di *curva di Lorenz generalizzata*. Quest'ultima si ottiene semplicemente moltiplicando la curva di Lorenz per il livello del reddito medio:

$$GL(p) \equiv \int_0^y y\, f(y)\, dy = \mu\, L(p), \qquad p \; \varepsilon \; [0,1] \, , \; Y \; \varepsilon \; [0, \; \bar{y} \;]$$

cosicchè sull'asse delle ordinate non si misura più la proporzione del reddito totale detenuta dal 100 p% della popolazione bensì il livello del reddito procapite. Il calcolo della curva di Lorenz generalizzata corrisponde pertanto a cumulare il livello del reddito procapite da $p = 0$ a $p = 1$, tale che $GL(0) = 0$ e $GL(1) = \mu$.

Dalla definizione di curva di Lorenz generalizzata si ricava il corrispondente criterio di dominanza che, differentemente da quello di Lorenz tradizionale, tiene conto della dimensione assoluta delle distribuzioni (cfr. figura 4).

Fig. 4 - Dominanza di Lorenz generalizzata



Si può dimostrare allora che, dati due qualsiasi profili di reddito, la condizione di dominanza stocastica di secondo ordine equivale al criterio di dominanza di Lorenz generalizzata (Shorrocks 1983). In simboli:

$$GL_F(p) \geq GL_{F^*}(p), \quad \forall p \in [0,1] \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\bar{y}} u(y)\, f(y)\, dy \geq \int_0^{\bar{y}} u(y)\, f^*(y)\, dy, \quad \forall u(Y) \in U_2.$$

Il teorema sostiene, in altre parole, che se le curve di Lorenz generalizzate di due distribuzioni non si intersecano, si potrà ordinare queste ultime in termini di benessere sociale per tutte le funzioni W non decrescenti ed S-concave. Si fornisce così un fondamento normativo al criterio di dominanza di Lorenz generalizzata.

Questo risultato estende quello ottenuto da Atkinson in quanto il nuovo criterio può applicarsi a confronti altrimenti ambigui, più precisamente al caso in cui la distribuzione preferita, ad esempio F, ha un reddito medio maggiore ma è dominata in senso di Lorenz dalla distribuzione F^*:

$$\mu_F > \mu_{F^*}, \; L_F(p) \leq L_{F^*}(p), \quad GL_F(p) \geq GL_{F^*}(p), \; \forall p \; \varepsilon \; [0,1];$$

ovvero al caso in cui si verifica un "crossing" delle curve di Lorenz che però scompare se si ricorre alle corrispondenti curve generalizzate:

$$L_F(p) \text{ interseca } L_{F^*}(p), \; GL_F(p) \geq GL_{F^*}(p), \; \forall p \; \varepsilon \; [0,1].$$

4. Intersezioni delle curve di Lorenz generalizzate e "sensibilità al trasferimento"

Il contributo di Shorrocks (1983), pur risolvendo il problema relativo al confronto tra distribuzioni con differente reddito medio, non esclude la possibilità che anche le curve generalizzate di Lorenz si intersechino. Rimane pertanto il problema di estendere l'ordinamento, per sua natura incompleto, stabilito da tale criterio.

Coerentemente con un'impostazione di "partial ranking" ed alla luce dell'analogia formale con l'approccio della dominanza stocastica in teoria dell'incertezza, la via naturale da percorrere è di imporre ipotesi più vincolanti sul sistema delle preferenze collettive. In questo modo, pur restringendo la classe delle funzioni di benessere sociale compatibili con quelle preferenze, si estende il "range" di confronti non ambigui tra profili di reddito. Numerosi autori hanno fornito contributi in questa direzione: elemento comune a tali studi è la ulteriore specificazione dell'atteggiamento di avversione alla disuguaglianza del policy-maker, contenuto nell'ipotesi di concavità della funzione individuale di utilità[4].

A fini espositivi è forse utile considerare dapprima due atteggiamenti estremi, quello di "inequality neutrality" e quello "rawlsiano"[5]. In questi due casi è possibile mostrare che la configurazione delle curve generalizzate di Lorenz è di per sè

[4] Cfr. Atkinson (1973), Kolm (1976), Shorrocks e Foster (1987) e Dardanoni e Lambert (1988).

[5] La funzione di benessere sociale riconducibile al pensiero del filosofo contemporaneo J. Rawls e' costituita dall'utilita' dell'individuo che si trova nella posizione relativamente peggiore.

sufficiente ad ottenere un ordinamento, indipendentemente dal fatto che si incrocino oppure no.

Il primo caso, di "neutralità verso la disuguaglianza", implica che la funzione individuale di utilità sia lineare cosicchè qualsiasi trasferimento progressivo di reddito non determina alcun guadagno netto di utilità per la collettività. Data la generica funzione di utilità (non strettamente) concava,

$$u(Y) = a + b\,Y,$$

il benessere sociale è semplicemente valutato (a meno di una trasformazione lineare) in termini di reddito medio:

$$W = \int_0^{\bar{y}} u(y)\, f(y)\, dy = a + b\,\mu.$$

Questa situazione può essere interpretata in termini del teorema di Shorrocks: essa equivale ad affermare che l'unica informazione necessaria per stabilire la superiorità, in termini di benessere sociale, di una distribuzione sull'altra è il valore delle rispettive curve generalizzate di Lorenz per $p = 1$, poichè per definizione $GL(1) = \mu$. Date due qualsiasi distribuzioni F ed F^*, F sarà preferita a F^* se e solo se

$$GL_F\,(1) = \mu_F \geq \mu_{F^*} = GL_{F^*}\,(1).$$

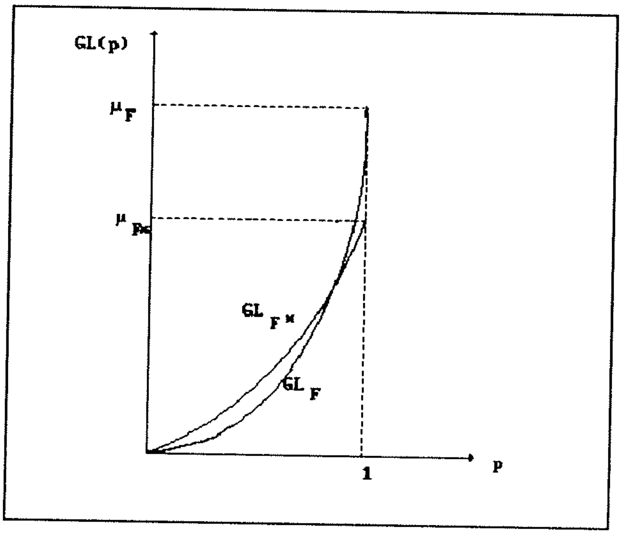
Eventuali intersezioni delle curve di Lorenz generalizzate non sono rilevanti ai fini dell'ordinamento.

Il caso opposto a quello dell'atteggiamento di neutralità verso la disuguaglianza è quello "rawlsiano" per il quale l'unico trasferimento progressivo che determina un guadagno netto di benessere sociale è a favore del più povero, indipendentemente da chi provenga. Anche questa situazione può essere interpretata in termini del teorema di Shorrocks: essa stabilisce la superiorità della distribuzione la cui curva di Lorenz generalizzata è dominante in un intorno sufficientemente piccolo di $p = 0$. In termini formali:

$$F \underset{R}{>} F^{*} \Rightarrow \exists\, p \in (0,q] \text{ tale che } GL_F(p) \geq GL_{F^*}(p) \text{ e } GL_F \neq GL_{F^*}.$$

Se si aderisse all'uno o all'altro di questi casi, che riassumono due atteggiamenti estremi del policy-maker in tema di avversione alla disuguaglianza, l'ordinamento di profili di reddito sarebbe semplicemente determinato dalla configurazione delle curve generalizzate di Lorenz. La presenza di una o più intersezioni sarebbe totalmente irrilevante. Si consideri, ad esempio, il confronto tra le distribuzioni F e F^* della figura 5: nonostante il teorema di Shorrocks non consenta di ordinare i due profili di reddito, l'adesione al principio di "inequality neutrality" renderebbe univocamente preferibile F ad F^*, mentre il criterio "ralwsiano" ordinerebbe le due distribuzioni in senso inverso.

Fig. 5 - Intersezione fra curve di Lorenz generalizzate



L'esempio precedente indica che la direzione da seguire per superare l'indeterminatezza relativa al caso in cui le curve di Lorenz generalizzate si incrociano è di restringere lo spettro dell'atteggiamento verso la disuguaglianza. Una condizione addizionale all'ipotesi di concavità della funzione di utilità potrebbe consistere, ad esempio, nell'assumere che la collettività preferisca che un trasferimento progressivo di dato ammontare monetario avvenga per livelli "bassi" piuttosto che per livelli "alti" di reddito. Questa ipotesi, definita di *sensibilità al trasferimento*[6], si distingue e rafforza il "principio del trasferimento" di Pigou-Dalton. Quest'ultimo, per definizione, non può confrontare due distribuzioni in cui una è ottenuta dall'altra da una serie di trasferimenti sia progressivi che regressivi. Al contrario, dalla definizione di "sensibilità al trasferimento" segue che se, ad esempio, la distribuzione F è identica a F^* a meno di un trasferimento regressivo ad "alti" livelli di reddito e di un trasferimento progressivo di uguale ammontare a "bassi" livelli di reddito, allora F è preferita ad F^*.

Un modo per formulare il principio in questione è il seguente. Indichiamo con $\alpha_{u(Y)}$ l'elasticità al reddito dell'utilità marginale tale che

$$\alpha_u(Y) \equiv - \frac{du'(Y)}{dY} \frac{Y}{u'(Y)} = - Y \frac{u''(Y)}{u'(Y)} \geq 0$$

sia una misura relativa dell'avversione alla disuguaglianza, mentre

$$\frac{\alpha_{u(Y)}}{Y} = - \frac{u''(Y)}{u'(Y)} \geq 0$$

è la corrispondente misura assoluta. Se interpretiamo la "sensibilità al trasferimento" con l'ipotesi di avversione assoluta alla disuguaglianza decrescente, condizione necessaria affinchè $\frac{\alpha_{u(Y)}}{Y}$ decresca all'aumentare del reddito è che la derivata terza della funzione di utilità sia positiva. In termini formali:

[6] Cfr. Shorrocks e Foster (1987), che ne discutono in modo rigoroso le implicazioni. Kolm (1976) definisce la stessa proprieta' "Principle of diminishing transfer".

$$\frac{d}{dY}\left[\frac{\alpha_{u(Y)}}{Y}\right] = \frac{-u'''(Y) \,.\, u'(Y) + [u''(Y)]^2}{[u'(Y)]^2} \leq 0$$

se $u'''(Y) \geq 0$.

Restringendo l'attenzione alla classe di funzioni di utilità U_3, tale che

$$U_3 \equiv \{u(Y) \;/\; u'(Y) \geq 0,\, u''(Y) \leq 0,\, u'''(Y) \geq 0,\; \forall Y \,\varepsilon\, [0, \bar{y}\,]\},$$

è possibile così enunciare un ulteriore risultato, analogo a quello noto in teoria dell'incertezza come condizione di *dominanza stocastica di terzo ordine*[7]:
condizione necessaria e sufficiente affinchè la distribuzione F sia preferita, in termini i benessere sociale, alla distribuzione F^* è che

$$\Delta\Phi(Y) \equiv \int_0^Y \Delta\phi(y)\, dy \leq 0, \quad \forall Y \,\varepsilon\, [0, \bar{y}\,]$$

e che $\Delta\Phi(Y) < 0$ per almeno un $Y \,\varepsilon\, [0, \bar{y}\,]$ (3).

L'interpretazione di tale risultato in termini delle curve di Lorenz generalizzate è stata fornita solo recentemente da Dardanoni e Lambert (1988). Essi dimostrano che se tali curve si intersecano una volta sola, la condizione di dominanza stocastica di terzo ordine equivale a stabilire una relazione d'ordine in termini della media, della varianza e del criterio "ralwsiano". Si considerino, ad esempio, due distribuzioni qualsiasi, F e F^*, di ugual media e tali che le curve generalizzate di Lorenz si incrocino una sola volta. Si può allora dimostrare che la dominanza stocastica di terzo ordine di F su F^* è equivalente all'ordinamento stabilito dal criterio "rawlsiano" se la varianza della prima è minore di quella della seconda. Nel caso in cui, invece, F^* abbia media più alta, la superiorità di F su F^* richiede una condizione più stringente sulle varianze e un'ulteriore restrizione sulla misura dell'avversione relativa alla

[7] Cfr. Whitmore (1970).

5. La dominanza generalizzata e sequenziale: un'analisi bidimensionale

L'ipotesi di simmetria della funzione di benessere sociale, tradizionalmente accolta in letteratura, implica che soggetti aventi lo stesso livello di reddito sono considerati uguali tra loro. Questa ipotesi, definita anche di anonimità poichè considera irrilevante qualsiasi altra informazione personale, condiziona non solo l'analisi teorica ma anche quella applicata: una politica redistributiva che trascurasse l'eterogeneità degli agenti (rispetto all'età, all'abilità, al livello dei "bisogni") potrebbe infatti, correggendo alcuni squilibri, accentuarne altri. Assume quindi un peso rilevante tenere conto delle differenze nelle caratteristiche personali degli individui. Non è forse inopportuno citare ancora Amartya Sen, secondo cui: "The powerful rhetoric of "equality of man" often tends to divert attention from these differences. Even though that rhetoric (e.g. "all men are born equal") is typically taken to be part and parcel of egalitarianism, the effect of ignoring these differences can, in fact, be deeply inegalitarian, in hiding the fact that equal concern for all may demand very unequal treatment in favour of the disadvantaged" (Sen 1989, 3).

La considerazione dell'eterogeneità degli agenti complica l'analisi poichè non è più possibile assumere funzioni di benessere sociale simmetriche. Di conseguenza un trasferimento regressivo da un individuo con reddito Y ad un altro con reddito $(Y + h)$ potrebbe essere giustificato, in termini di equità, se quest'ultimo avesse un livello di "bisogni" più elevato del primo.

La teoria della misurazione della disuguaglianza ha di recente affrontato questi temi estendendo l'analisi da uno spazio unidimensionale (nel reddito) ad uno a più dimensioni. Anche in quest'ambito si distingue fra un'impostazione assiomatica ed una di "partial ranking". La prima rientra in un approccio di ordinamenti completi e si è sviluppata in relazione all'analisi della scomponibilità delle misure della disuguaglianza, per tipo di reddito e sottogruppi di popolazione[8]. La seconda invece generalizza ad uno spazio a più dimensioni il criterio di dominanza di Lorenz,

[8] Cfr., ad esempio, Kolm (1977), Cowell (1980), Maasoumi (1986), Shorrocks (1987) e Rietveld (1990).

definito nel caso unidimensionale[9].

Un'interessante applicazione dell'approccio degli ordinamenti parziali che tiene conto di ingredienti di "social judgement" diversi dal reddito è contenuta in un recente lavoro di Atkinson e Bourguignon (1987). La variabile non monetaria considerata è la dimensione del nucleo familiare ("singles", coppie, coppie con un figlio,...) quale indicatore del livello dei "bisogni" dell'individuo.

L'introduzione di questa variabile pone il problema della comparazione tra livelli di reddito di famiglie di dimensione diversa. La soluzione tradizionale è di ricorrere alle "scale di equivalenza": esse attribuiscono ad ogni componente del nucleo familiare un peso proporzionale al suo costo marginale, convertendo i redditi di famiglie di diversa dimensione in redditi, appunto, equivalenti. Questo sistema, tuttavia, non è esente da problemi concettuali[10].

Atkinson e Bourguignon (1987) propongono una procedura alternativa, simile nello spirito a quella che conduce al criterio di dominanza di Lorenz. Essa può essere formalizzata nel modo seguente.

Si suddivida la popolazione raggruppando ciascuna i-esima unità di reddito (nuclei familiari di diversa dimensione) in ordine decrescente di bisogni, con $i = 1,2,...,n$. Il primo gruppo sarà, ad esempio, costituito dalla famiglie più numerose e così a scalare fino all'n-esima categoria, la "meno bisognosa" in assoluto. Indichiamo con p_i la frequenza marginale relativa alla classe i e con P_i la relativa frequenza cumulata, tali che

$$P_i = \sum_{j=1}^{i} p_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = P_n = 1.$$

Attribuendo a ciascuna unità del gruppo i-esimo la funzione di utilità $u_i(Y)$, definiamo con U_1 e U_2 le classi di funzioni:

$$U_1 \equiv \{u_i(Y) \;/\; u'_i(Y) \geq 0,\ i = 1,2,...,n\}$$

[9] Il riferimento essenziale e' Atkinson e Bourguignon (1982).

[10] Cfr., ad esempio, Deaton e Muellbauer (1980), cap.8.

$$U_2 \equiv \{u_i(Y) \mid u'_i(Y) \geq 0, u''_i(Y) \leq 0, i = 1,2,...,n\}$$

ed assumiamo che il benessere sociale sia una funzione separabile in senso additivo del tipo:

$$W = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{\bar{y}} (y) f_i(y)\, dy$$

dove $f_i(Y)$ indica la funzione di densità di frequenza condizionale di Y. Assumiamo infine che la distribuzione marginale dei bisogni sia fissa, ossia che la composizione per ampiezza familiare della popolazione sia costante.

Possiamo a questo punto individuare le condizioni con cui ordinare, in termini di benessere, F ed F^*, appartenenti all'insieme delle distribuzioni condizionali di Y, per una data struttura dei bisogni.

Se non si posseggono informazioni su come $u_i(Y)$ varia con i, ovvero si esclude alcuna relazione tra livello di reddito e livello di bisogni, condizione necessaria e sufficiente affinchè F domini F^* è che la dominanza valga per ciascun gruppo i-esimo, preso separatamente. In termini formali, l'enunciato è il seguente:
condizione necessaria e sufficiente affinchè la distribuzione F sia preferita alla distribuzione F^*, ossia valga

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{\bar{y}} u_i(y)\, \Delta f_i(y)\, dy = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \Delta W_i \geq 0,$$

è che:

a) se $u_i(Y)\ \varepsilon\ U_1$,

$$\Delta F_i(Y) \leq 0, \quad \forall Y\ \varepsilon\ [0, \bar{y}\,] \text{ e } \forall i \text{ per cui } p_i \neq 0 \qquad (4)$$

b) se $u_i(Y)\ U_2$,

$$\Delta\phi_i(Y) \leq 0, \quad \forall Y\ \varepsilon\ [0, \bar{y}\,] \text{ e } \forall i \text{ per cui } p_i \neq 0 \qquad (5)$$

dove $\phi_i(Y) = \int_0^Y F_i(y)\,dy$ e $\Delta\phi_i(Y) = \int_0^Y \Delta F_i(y)\,dy$.

Le condizioni (4) e (5) sono, rispettivamente, condizioni di dominanza stocastica di primo e secondo ordine, del tutto identiche a quelle ottenute nel caso unidimensionale. Esse sono interpretabili ricorrendo al teorema di Shorrocks che stabilisce, com'è ormai noto, l'equivalenza tra dominanza stocastica di secondo ordine e dominanza di Lorenz generalizzata.

In particolare si può osservare che la superiorità della distribuzione F rispetto ad F^* secondo la (5) richiede che sia verificata una condizione molto forte: la dominanza di Lorenz generalizzata deve valere per ciascuna categoria i-esima, *presa singolarmente*. Ciò implica che il livello del reddito medio di ogni tipologia di nucleo familiare in F sia non minore del corrispondente livello in F^*:

$$\mu_{Fi} \geq \mu_{Fi^*}, \quad \forall i \quad \text{per cui} \quad p_i \neq 0.$$

La forza di tale condizione esclude alcuni dei confronti più interessanti per l'analisi applicata: in tema di "tax reform", ad esempio, la valutazione di una riforma del trattamento fiscale dei redditi familiari, a parità di gettito. La redistribuzione di reddito operata dalla riforma, infatti, riducendo il reddito medio di una o più tipologie familiari, rende impossibile la dominanza di Lorenz generalizzata nel modo richiesto dalla (5).

Il modo naturale per superare questa difficoltà è di assumere una qualche interdipendenza tra livello del reddito e livello dei bisogni (dimensione del nucleo familiare), che non vincoli all'uso delle scale di equivalenza. Atkinson e Bourguignon (1987) assumono una "gerarchia di bisogni" di questo tipo:

a) l'utilità marginale del reddito decresca al diminuire della numerosità della famiglia,

b) la differenza di utilità marginale fra le diverse tipologie familiari diminuisca all'aumentare del reddito. In termini formali le due ipotesi sono esprimibili, rispettivamente, nel modo seguente:

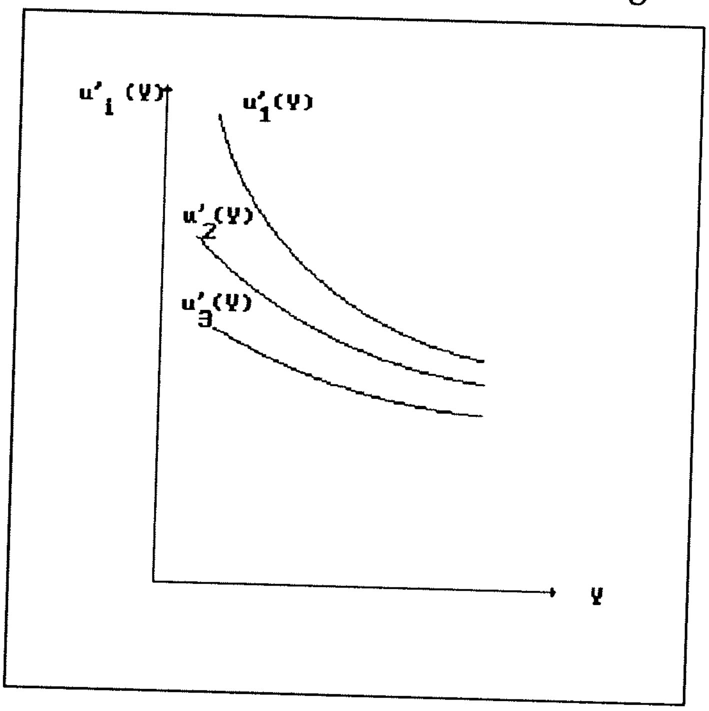
a) $u'_i(Y) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j(Y)$ per $i = 1,2,\ldots,n$

e $\delta_j(Y) \geq 0, \ \forall Y \varepsilon [0, \ \overline{y}\ ]$ e $j = 1,2,...,n$

b) $\delta'_j(Y) \leq 0, \ \forall Y \varepsilon [0, \ \overline{y}\ ]$ e $j = 1,2,...,n.$

Di tali ipotesi si può fornire un'intuizione grafica (cfr. figura 6): la prima afferma che, a parità di reddito, la curva di utilità marginale sarà tanto più alta quanto maggiore è il livello dei bisogni, la seconda invece sostiene che all'aumentare del reddito la collettività attribuisce minor peso al differenziale di utilità marginale tra livelli di bisogni consecutivi.

Fig. 6 - Ipotesi sulla "gerarchia dei bisogni"



Sulla base di queste ipotesi si ricavano condizioni di dominanza più deboli delle precedenti, ma che estendono il "range" dei confronti tra profili di reddito. In particolare, la nuova condizione di dominanza stocastica di secondo ordine è la seguente:

condizione necessaria e sufficiente affinchè, $\forall u_i\ (Y)\ \varepsilon\ U_2$, la distribuzione F sia preferita alla distribuzione F^* è che

$$\sum_{i=1}^{j} p_i\, \Delta\phi_i\,(Y) \leq 0, \ \forall Y \varepsilon [0, \ \overline{y}\ ] \ \text{ e } \ j = 1,2,...,n \qquad (6)$$

Anche questa condizione può essere riletta alla luce del teorema di Shorrocks. Essa equivale alla seguente procedura: date due distribuzioni di reddito, F ed F^*, si consideri dapprima se è verificata la dominanza di Lorenz generalizzata rispetto al gruppo con il più alto livello di bisogni (il nucleo familiare più numeroso), poi si *aggiunga* al primo gruppo quello immediatamente seguente nella scala dei bisogni e si verifichi se vale ancora la condizione di dominanza, quindi si *aggiunga* ai primi due il terzo e così via. Se a ciascuno stadio la condizione di dominanza è soddisfatta, allora F è preferita ad F^*.

Graficamente ciò implica il confronto di curve di Lorenz generalizzate che cumulano progressivamente categorie di bisogni via via decrescenti: di qui il termine, coniato dagli autori, di *curve di Lorenz generalizzate sequenziali*. Si noti, tra parentesi, che la dominanza relativa alla somma di tutti gli n gruppi sarebbe l'unico criterio rilevante se non si distinguesse tra livelli di bisogni, ma l'utilizzo di tale criterio implicherebbe il ritorno ad un'analisi unidimensionale.

La procedura suggerita da Atkinson e Bourguignon rimane, ovviamente, interna ad un approccio di ordinamento parziale, pur tuttavia costituisce un originale contributo, paragonabile alla costruzione della curva di Lorenz, al tema della misurazione della disuguaglianza multidimensionale.

6. Conclusioni

Due sono sostanzialmente le impostazioni che affrontano, su di un esplicito piano normativo, il tema della misurazione della disuguaglianza. La prima è quella assiomatica, la quale parte dal presupposto che si possa stabilire una relazione d'ordine (ossia una relazione dotata anche della proprietà di completezza) tra distribuzioni di reddito alternative. La costruzione di una misura cardinale della disuguaglianza è subordinata alla specificazione dei requisiti assiomatici che tale misura deve soddisfare. Questo approccio risolve così il problema della generale incoerenza di risultati derivante dall'uso contemporaneo di più indici (varianza, coefficiente di Gini,...).

Una linea di ricerca diametralmente opposta è quella che si fonda sulla piena accettazione del concetto complesso e multidimensionale di "inequality". Ritenendo che l'impossibilità di ordinare in modo univoco profili di reddito alternativi non costituisca un limite dell'analisi teorica, tale impostazione ricerca una relazione d'ordine parziale: di qui la dizione di approccio di "partial ranking".

Con questo lavoro si è inteso ripercorrere alcuni dei maggiori contributi interni a questa seconda impostazione, i cui principali strumenti analitici sono la curva di Lorenz ed l'omonimo criterio di dominanza. La dimostrazione del fondamento normativo del criterio di "Lorenz Dominance" è relativamente recente e riconducibile all'importante lavoro di Atkinson (1970). Tale contributo ha rappresentato il punto di partenza di gran parte degli sviluppi teorici successivi. Generalizzazioni del criterio di dominanza di Lorenz sono state proposte, in particolare, da Shorrocks (1983) e Dardanoni e Lambert (1988). L'estensione dei risultati ottenuti nel caso unidimensionale ad uno spazio a più dimensioni, ad esempio al caso in cui l'analisi distributiva tiene conto delle differenze nella dimensione familiare senza ricorrere alle scale di equivalenza (Atkinson e Bourguignon 1987), spinge a ricercare ulteriori campi di applicazione.

Riferimenti bibliografici

Atkinson, A. B. 1970. On the Measurement of the Inequality. *Journal of Economic Theory*, 2: 244-65. Ripubblicato in A. B. Atkinson, Social Justice and Public Policy, Wheatsheaf, London, 1983.

------. 1973. More on the measurement of Inequality, mimeo, MIT.

------. 1989. Measuring Inequality and Differing Social Judgements. London School of Economics, STICERD, Discussion Paper # TIDI/129.

------ e F. Bourguignon 1982. The Comparison of Multi- Dimensioned Distributions of Economic Status. *Review of Economic Studies*, 49:183-201. Ripubblicato in A. B. Atkinson, Social Justice and Public Policy, Wheatsheaf, London, 1983.

------ e ------. 1987. Income Distribution and Differences in Needs. In G. R. Feiwel (a cura di), *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, Macmillan, London.

Chackravarty S. R. 1990. *Ethical Social Index Numbers*, Springer-Verlag.

Cowell F. A. 1980. On the Structure of Additive Inequality Measures. *Review of Economic Studies*, 47:521-31.

Dalton H. 1920. The Measurement of Inequality of Incomes. *Economic Journal*, 30:348-61.

Dardanoni V. e P. Lambert 1988. Welfare Rankings of Income Distributions: A Role for the Variance and Some Insights for Tax Reforms. *Social Choice and Welfare*, 5:1-17.

Dasgupta, P., Sen A. e D. Starrett 1973. Notes on the Measurement of Inequality, *Journal of Economic Theory*, 6:180-87.

Deaton A. e J. Muellbauer 1980. *Economics and Consumer Behaviour*. Cambridge University Press.

Foster J. E. 1985. Inequality Measurement. In H. P. Young (a cura di), *Fair Allocation*, American Mathematical Association, Providence.

Hadar J. e W. R. Russel 1974. Stochastic Dominance in Choice under Uncertainty. In M. S. Balch, D. L. McFadden and S. Y. Wu (a cura di), *Essays on Economic Behaviour Under Uncertainty*, North-Holland, Amsterdam, cap. 5, 135-50.

Kanbur S. M. R. 1984. The Measurement and Decomposition of Inequality and Poverty. In F. van der Ploeg (a cura di), *Mathematical Methods in Economics*, Wiley, New York.

Kolm S. C. 1976. Unequal Inequalities I & II. *Journal of Economic Theory*, 12:416-42 e 13:82-111.

------. 1977. Multidimensional Egalitarianisms. *Quarterly Journal of Economics*, 91:1-13.

Lambert P. J. 1989. *The Distribution and Redistribution of Income: A Mathematical Analysis*, Basil Blackwell, Oxford.

------. 1991. The Distribution and Redistribution of Income. In P. M. Jackson (a cura di), *Current Issues in Public Economics*, Macmillan.

Maasoumi E. 1986. The measurement and Decomposition of Multi-Dimensional Inequality. *Econometrica*, 54:991-97.

Rietveld P. 1990. Multidimensional Inequality Comparisons: On Aggravation and Mitigation of Inequalities. *Economic Letters*, 32:187-92.

Rothschild M. e J. E. Stiglitz 1973. Some Further Results on the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 6:188-204.

Sen A. 1973. *On Economic Inequality*. Oxford University Press, Oxford.

------. 1989. The Nature of Inequality. Presidential Address at the Ninth Congress of the International Economic Association, Athens, mimeo.

Shorrocks A. F. 1983. Ranking Income Distributions. *Economica*, 50:3-17.

------. 1987. Aggregation Issues in Inequality Measurement. In W. Eichhorn (a cura di), *Measurement in Economics*, Physica-Verlag, New York.

------ e J. E. Foster 1987. Transfer Sensitive Inequality Measures. *Review of Economic Studies*, 54:485-97.

Whitmore G. A. 1970. Third-Degree Stochastic Dominance. *American Economic Review*, 60:617-28.