

GIOCHI NON COOPERATIVI A SOMMA VARIABILE :
UN'INTRODUZIONE AI CONCETTI FONDAMENTALI

Roberto Cellini - Luca Lambertini *
Università di Bologna

settembre 1991

Abstract

The aim of this paper is to provide the reader with a simple and systematic analysis of the fundamentals of non cooperative game theory. Special attention is paid to the most controversial tools discussed throughout the specific literature concerning the problems of strategical interdependence.

Riassunto

Scopo del lavoro e' illustrare in modo semplice e sistematico i concetti fondamentali nell'ambito della teoria dei giochi non cooperativi. In particolare vengono presentati e discussi nei loro aspetti piu' controversi gli strumenti proposti dalla letteratura economica per risolvere i problemi di interdipendenza strategica e determinarne l'equilibrio.

* L'articolo e' frutto di un comune lavoro. La stesura dei paragrafi 1,2,3,5,6 e dell'Introduzione e' stata curata da Roberto Cellini; quella dei paragrafi 4,7,8,9,10 e delle Conclusioni da Luca Lambertini. A Paolo Onofri e Gianpaolo Rossini esterniamo un dovuto ringraziamento per i commenti espressi su versioni preliminari del presente lavoro.

I N D I C E

Introduzione.....	pag. 3
1. Il criterio della dominanza.....	6
1.1 Definizione.....	6
1.2 La dominanza iterata.....	7
1.3 Fallimento del criterio della dominanza...	7
2. Soluzioni self enforcing.....	9
3. Equilibrio di Nash.....	10
3.1 Definizione.....	10
3.2 Molteplicita' degli equilibri di Nash.....	11
3.3 Assenza dell'equilibrio di Nash.....	12
3.4 Unicita' e non soluzione.....	12
4. Giochi in forma estesa.....	15
4.1 Preliminari.....	15
4.2 Backward induction.....	16
4.3 Fallimento del criterio di backward induction.....	18
5. Strategie miste.....	21
5.1 Definizione.....	21
5.2 Dominanza di strategie miste.....	21
5.3 Equilibrio di Nash con strategie miste....	22
6. Refinements dell'equilibrio di Nash.....	25
6.1 Caratteristiche dell'equilibrio di Nash...	25
6.2 Ordinamento paretiano degli equilibri di Nash: definizione e motivi di inapplicabi- lita' del criterio.....	26
6.3 Eliminazione di equilibri con strategie dominate.....	27
6.4 Subgame perfection.....	28
6.5 Trembling hand.....	29
6.6 Razionalita' sequenziale.....	30
7. Equilibri di Nash in presenza di un continuum di strategie.....	33
8. Il dilemma del prigioniero.....	39
9. Possibili soluzioni del dilemma del prigioniero.....	41
10. Approfondimenti vari.....	45
10.1 Introduzioni di convenzioni sociali.....	46
10.2 Learning.....	46
Conclusioni.....	48
Note.....	50
Bibliografia.....	51

INTRODUZIONE

La teoria dei giochi ha visto negli ultimi anni uno sviluppo davvero molto veloce. Non vi e' campo dell'economia in cui non vengano ormai massicciamente impiegati concetti nati in questo ambito.

Esistono gia' molte trattazioni della materia, caratterizzate da differenti livelli di difficulta'; nelle trattazioni piu' elementari di teoria dei giochi, pero', molti concetti non vengono esaminati e, d'altra parte, in presentazioni piu' avanzate la sofisticazione degli strumenti matematici utilizzati comporta il rischio di non focalizzare adeguatamente i concetti basilari.

Il nostro obiettivo in questa sede e' quello di presentare in modo rigoroso e semplice i principali strumenti utilizzati dalla teoria dei giochi, cercando di evidenziarne soprattutto gli aspetti problematici.

Procederemo in modo molto articolato presentando ogni concetto dapprima in via definitoria, mostrandone poi l'applicazione in esempi concreti ed infine illustrando i motivi che ne possono rendere discutibile l'applicazione.

Introduciamo alcuni concetti preliminari.

Un qualsiasi gioco mette in evidenza l'interazione tra piu' agenti economici: l'incrociarsi delle strategie di ciascuno fornisce il risultato finale per ogni giocatore.

Un gioco e' caratterizzato dal numero dei giocatori, dalle strategie a disposizione di ciascuno e dagli esiti (detti anche payoff) associati ad ogni combinazione (o, piu' propriamente, ad ogni "prodotto") di mosse giocate. Se tutti i partecipanti al gioco conoscono tutti questi elementi diremo che il gioco e' a informazione completa.

Si noti, in particolare, che ciascun giocatore conosce non solo le strategie proprie, ma anche le mosse di cui dispongono gli altri giocatori e gli esiti di tutti i partecipanti.

Obiettivo di ogni giocatore e' massimizzare la propria utilita' (o minimizzare la perdita); ogni giocatore sa che anche gli altri hanno il medesimo obiettivo; prima di operare la propria scelta, quindi, ciascuno dovra' immedesimarsi nei panni altrui, per immaginarne le mosse, ed in funzione di queste, stabilire la propria.

Il concetto di razionalità di cui ci avvaliamo può essere sintetizzato nel modo che segue: ogni giocatore punta al massimo per sé, sapendo che anche gli altri hanno lo stesso obiettivo e sapendo che tutti dispongono delle stesse informazioni.

Sovente si parla degli altri giocatori come di "avversari". Ora, il termine "avversario" è senz'altro appropriato quando il gioco è a somma costante, sicché ciò che guadagna l'uno perde l'altro.

Sicuramente però il termine non è felice per i giochi cooperativi, nei quali dalla collaborazione reciproca derivano maggiori opportunità di guadagno per tutti i giocatori. Il problema principale dei giochi cooperativi è costituito non tanto dalla scelta delle mosse, quanto piuttosto dal modo in cui ripartire i maggiori profitti che derivano dalla collaborazione. Si ammette quindi che i giocatori possano preventivamente accordarsi sulle rispettive mosse e sul modo di dividere la posta complessiva, contrattando eventualmente trasferimenti collaterali tra essi.

Per questo lavoro ci siamo ritagliati un campo ben delimitato: i giochi non cooperativi a somma variabile⁽¹⁾.

Pertanto:

- 1) escludiamo che possano avvenire contrattazioni preliminari;
- 2) escludiamo che possano avvenire pagamenti collaterali tra i giocatori: ossia ogni giocatore riceve il payoff associato alla scelta simultanea delle strategie di tutti i giocatori, senza che possa poi remunerare altri o da altri ricevere remunerazioni.

Noi useremo quindi il termine "avversario", anche quando la natura del problema non è intrinsecamente conflittuale; con ciò vogliamo rendere chiaro che non tratteremo mai di agenti che possano contrattare le proprie mosse con gli altri.

Nei giochi a somma variabile è inoltre necessario chiarire esattamente i pagamenti che ciascuno riceve.

Nel caso particolare di due giocatori, i guadagni possono essere schematizzati in una "doppia matrice". Nello schema generico che segue, due giocatori, A e B,

posseggono ciascuno due strategie.

GIOCO G.O

		B	
		b 1	b 2
A	a1	m ; n	p ; q
	a2	r ; s	w ; z

Le coppie di numeri in ogni casella indicano i guadagni dei due giocatori, con l'avvertenza che il primo numero si riferisce sempre al giocatore indicato in riga ed il secondo al giocatore indicato in colonna. E' una convenzione che manterremo lungo tutto il lavoro. Quindi se A sceglie a2 e B sceglie b2, l'esito sara' che A guadagna la somma w e B ottiene z.

Sulla natura dei payoff non precisiamo nulla; si puo' pensare che si tratti di somme monetarie o di "livelli di utilita'".

1. IL CRITERIO DELLA DOMINANZA

1.1 Definizione

Una strategia h e' dominante su tutte le altre possibili strategie a disposizione del giocatore, quando il risultato associato a h e' sempre il migliore, qualunque sia la mossa dell'avversario; quando il risultato --anziche' "migliore" in senso stretto-- e' "non peggiore" si parla di "dominanza debole".

In modo del tutto simile si definisce una strategia dominata: j e' dominata se, per qualunque mossa degli avversari, esiste sempre una strategia che fornisca esiti migliori rispetto a quelli associati a j .

Ovviamente, quando un giocatore dispone di sole due strategie, se una e' dominante, l'altra e' dominata.

Se esiste tra le mosse del giocatore una strategia dominante, e' logico attendersi che essa verra' giocata, escludendo di norma la scelta delle strategie alternative; analogamente si puo' in genere escludere la evenienza che vengano giocate strategie dominate: esistono alternative che garantiscono sicuramente guadagni non peggiori.

Il fatto che esistano strategie dominanti e' noto non solo al giocatore che ne dispone l'uso, ma a tutti i giocatori impegnati. Tutti percio' dovranno ovviamente tenere conto, scegliendo le rispettive mosse, del fatto che uno di loro giochera' con certezza la strategia dominante di cui dispone (o con certezza non giochera' una strategia dominata).

Nel seguente gioco G.1 la strategia a_1 e' dominante sulla a_2 (in senso forte), mentre la b_2 e' debolmente dominante sulla b_1 .

GIOCO G.1

		B	
		b 1	b 2
A	a1	11 ; 7	8 ; 10
	a2	10 ; 12	6 ; 12

Nel gioco G.1 si raggiungera' l'equilibrio, dunque, in corrispondenza dell'incrocio tra le strategie a1-b2.

Per equilibrio del gioco intendiamo indicare -- a livello di prima intuizione -- una combinazione di mosse tale che, osservati gli esiti, nessuno dei giocatori intende variare la propria. Vedremo in seguito definizioni piu' rigorose (ma allo stesso tempo piu' "restrittive") del concetto di equilibrio.

1.2 La dominanza iterata.

Si prenda in esame il gioco G.2

GIOCO G.2

		B	
		b 1	b 2
A	a1	11 ; 15	3 ; 14
	a2	10 ; 13	20 ; 12

La strategia b1 domina la b2; il giocatore A (che non possiede strategie dominanti), puo' pero' ritenere con ragione che B sceglia b1 e dunque optera' a sua volta per a1. Un meccanismo di decisione siffatto, da parte del giocatore A, prevede l'applicazione del criterio della dominanza cosiddetta iterata; possiamo anche comprendere a pieno in questo caso il significato del concetto di "razionalita'" nella teoria dei giochi: ogni giocatore si comporta cercando di ottenere il meglio per se' ; sa che anche l'avversario si comporta in modo uguale ed e' quindi in grado di valutare le scelte sia proprie, sia altrui: potremmo affermare che il criterio di scelta segue un ragionamento del tipo: "io so che tu sai che io so ecc..."; in altre parole i giocatori risolvono un problema di ottimo, vincolato al fatto che anche gli avversari perseguono un ottimo vincolato.

1.3 Fallimento del criterio della dominanza

Immaginiamo ora che il gioco G.2 in luogo del payoff 3 presenti un payoff pari a -100 ; e' probabile che il giocatore A preferisca optare per la strategia a2,

che si presenta piu' sicura.

In altre parole il criterio della dominanza non prende in considerazione motivazioni di prudenza, mentre sembra da esperimenti empirici che i soggetti tengano in una qualche considerazione anche il fatto che la scelta altrui potrebbe non essere improntata a criteri di stretta razionalita' e pertanto, al momento di scegliere, possano preferire un criterio che massimizza la sicurezza, quale ad esempio il massiminimo, anche se in giochi a somma non costante il criterio del massiminimo appare non intrinsecamente necessario.

Un'altra critica rivolta al criterio della dominanza iterata e' rappresentata dal fatto che non conduce ad una unica coppia di strategie di equilibrio. Si esamini, per esempio, il gioco G.3.

GIOCO G.3

		B		
		b 1	b 2	b 3
A	a1	10 ; 50	6 ; 5	0 ; -3
	a2	10 ; 0	6 ; 1	5 ; -9

Ricordiamo che i due giocatori muovono simultaneamente. Il giocatore B potrebbe ragionare nel modo seguente: siccome a1 e' debolmente dominata da a2, A scegliera' a2, pertanto B ha convenienza nel giocare b2, determinando l'equilibrio in (a2-b2).

D'altra parte A potrebbe pensare: la strategia b3 e' dominata dalle altre due di cui dispone B; una volta escluso che B possa giocare b3, per A e' assolutamente indifferente giocare a1 o a2: l'esito potrebbe pertanto essere la combinazione (a2-b2).

In alcuni casi, come il presente, l'applicazione del criterio della dominanza non porta quindi a determinare univocamente il risultato del gioco.

2. SOLUZIONI SELF ENFORCING

Esistono giochi i cui payoffs presentano una struttura con una ovvia soluzione di equilibrio.

GIOCO G.4

		B	
		b 1	b 2
A	a1	25 ; 25	3 ; 0
	a2	0 ; 3	4 ; 4

Nel gioco G.4 la coppia di strategie a1-b1 si "impone" come equilibrio, eppure non e' ne' frutto di scelte che seguono il criterio della dominanza (a1 non e' dominante su a2 e b1 non lo e' su b2), ne' frutto di strategie di massiminimo (l'equilibrio di massiminimo e' a2-b2).

E' tuttavia evidente che se i due giocatori si potessero accordare preventivamente, avrebbero entrambi l'interesse a stabilirsi sull'esito a1-b1.

Definiamo allora equilibrio "self enforcing" quello in corrispondenza del quale nessun giocatore trae vantaggio dallo spostarsi. Non solo ciascun giocatore non ha incentivo nel deviare dalla propria scelta, ma ha interesse che neppure gli altri giocatori devino dalle rispettive scelte.

Ferma rimanendo l'ipotesi di divieto di accordi preventivi, l'equilibrio self enforcing puo' essere comunque interpretato come l'esito di un ipotetico, preliminare accordo, che ciascuna parte non ha interesse a disattendere; ribadiamo che --essendo il nostro studio limitato ai giochi non cooperativi--, l'accordo al quale si fa riferimento e' puramente teorico e non puo' prevedere alcun pagamento collaterale diretto tra i giocatori, altrimenti si entrerebbe nel campo dei giochi cooperativi.

3. EQUILIBRIO DI NASH

3.1 Definizione

Una soluzione costituisce equilibrio di Nash quando le strategie di ciascun giocatore rappresentano la scelta migliore, date le altrui strategie. Detto in altri termini, l'equilibrio di Nash e' rappresentato dalle risposte migliori alle scelte degli altri giocatori. Ancora: un equilibrio e' di Nash se ciascun giocatore, una volta sapute le scelte degli altri non ha alcun interesse a cambiare la propria. L'equilibrio di Nash gode quindi della proprieta' di stabilita', nel senso che ciascuno ha interesse a confermare la propria scelta, una volta saputa la mossa dell'avversario.

In termini formali, passando da due giocatori ad un generico numero L di giocatori, il risultato delle strategie s^i degli L giocatori ($s^A, s^B, \dots s^X \dots s^L$) da' luogo ad equilibrio di Nash quando

$$u_X(s^X) \geq u_X(s^A, s^B, \dots s^X \dots s^L),$$

per ogni X appartenente agli I giocatori.

La scrittura indica semplicemente che l'utilita' derivante dal giocare la strategia s^X e' maggiore (almeno debolmente) dell'utilita' che X trarrebbe giocando una qualsiasi altra possibile strategia (genericamente, s^X), date le scelte degli altri, improntate allo stesso criterio.

Torniamo a ragionare nel consueto caso di due strategie a disposizione di due giocatori.

GIOCO G.5

		B	
		b 1	b 2
A	a1	6 ; 6	10 ; 3
	a2	5 ; 7	4 ; 8

Mostriamo che $(a_1 - b_1)$ e' equilibrio di Nash ed e' l'unico punto stabile del gioco.

Se B avesse conosciuto la mossa di A (a_1), avrebbe confermato la propria scelta b_1 ; se A avesse saputo che B sceglieva b_1 , avrebbe confermato la scelta a_1 : questa osservazione e' di per se' gia' sufficiente per stabilire che (a_1-b_1) e' equilibrio di Nash.

A titolo di esempio mostriamo che a_2-b_2 non e' equilibrio di Nash. A tal fine e' sufficiente mostrare che se A avesse conosciuto la mossa di B (b_2), non avrebbe scelto a_2 , bensì a_1 .

Con ragionamento identico si mostra che neppure a_1-b_2 e a_2-b_1 sono equilibri di Nash.

Si noti che nel gioco non esistono strategie dominanti ne' dominate.

Si puo' facilmente mostrare che un equilibrio che sia frutto di strategie dominanti, e' anche equilibrio di Nash, mentre -- come si e' appena visto -- non vale il contrario, ossia un equilibrio di Nash non necessariamente e' frutto di strategie dominanti.

3.2 Molteplicità degli equilibri di Nash

Nel gioco appena esaminato esisteva un unico equilibrio di Nash.

Non sempre, pero', l'equilibrio di Nash gode della proprietà dell'unicità: il gioco raffigurato di seguito presenta, ad esempio, due equilibri di Nash.

GIOCO G.6

		B	
		b 1	b 2
A	a1	16 ; 4	10 ; 5
	a2	17 ; 8	9 ; 4

E' facile constatare che sia (a2-b1), sia (a1-b2) sono equilibri di Nash.

3.3 Assenza dell'equilibrio di Nash

Quando i giocatori hanno a disposizione soltanto le strategie pure (ossia giocano una delle strategie a loro disposizione e non una combinazione probabilistica di esse), puo' darsi il caso che l'equilibrio di Nash NON esista, come viene mostrato dal gioco G.7.

GIOCO G.7

		B	
		b 1	b 2
A	a1	4 ; 3	2 ; 4
	a2	2 ; 8	8 ; 7

Si noti che nel gioco in questione non esiste equilibrio di Nash, non esiste equilibrio che sia frutto di strategie dominanti e neppure equilibrio self enforcing (attenzione infatti a non considerare a2-b2 come self enforcing: non lo e', semplicemente perche' B non avrebbe alcun motivo per non deviare dalla scelta di b2).

3.4 Unicita' e non soluzione

L'equilibrio di Nash presenta dunque alcuni difetti oggettivi: non esistenza e non unicita' sono quelli immediatamente evidenti; non sono pero' i soli.

Puo' infatti darsi che anche quando l'equilibrio di Nash e' unico, non costituisca una soluzione convincente del gioco.

Per mostrare cio' si osservi il seguente caso, in cui ciascuno dei due giocatori dispone di tre strategie.

GIOCO G. 8

		B		
		b 1	b 2	b 3
A	a1	24 ; 24	22 ; 26	0 ; 0
	a2	22 ; 26	24 ; 24	0 ; 0
	a3	0 ; 0	0 ; 0	1 ; 1

Evidentemente, pur essendo a3-b3 l'unico equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure, nessuno dei due giocatori si augura di pervenirvi; e' in qualche modo evidente che entrambi auspicano di collocarsi su una delle quattro caselle con payoffs superiori a 20, pur non figurando tra esse alcun equilibrio di Nash .

Si esamini anche il gioco seguente.

GIOCO G.9

		B			
		b 1	b 2	b 3	b 4
A	a1	9 ; 6	3 ; 5	4 ; 3	0 ; -1
	a2	0 ; -2	5 ; -1	6 ; 3	3 ; 8

Il lettore provi ad immedesimarsi nell'agente B e scelga la mossa.

Kreps (1990, cap.11) sostiene che in un gioco di identica struttura, gli individui nei panni di B generalmente scelgono o b1 o b3. Noi abbiamo voluto verificare cio', sottoponendo il gioco ad un campione di 70 studenti del corso di Economia Politica 1 (esperimento svolto a Forli' il 2 maggio '91), ottenendo i seguenti responsi:

b1 scelta da 11 ; b2 da 1 ; b3 da 50 ; b4 da 7 .

Il risultato e' perfettamente concordante con quello di Kreps e la strategia b3 risulta essere la preferita.

D'altro lato, nel gioco esistono due equilibri di Nash: a1-b1 e a2-b4 ; come si puo' verificare, nessun equilibrio di Nash coinvolge la strategia b3.

Si puo' concludere che anche quando gli equilibri di Nash esistono, non necessariamente rappresentano la soluzione del gioco che empiricamente si rileva. In altre parole, si scopre che individui impegnati concretamente in giochi non sempre scelgono mosse che conducono a equilibri di Nash.

Non ci sembra una forzatura affermare che gli esperimenti "empirici" testimoniano una divaricazione tra "soluzione teorica" e "soluzione empiricamente rilevata".

D'altra parte questo e' un aspetto del piu' generale problema concernente l'effettivo utilizzo, nella realta', dei criteri di razionalita' individuati dalla teoria: e' noto come, posti di fronte a semplici e divertenti problemi, gli individui finiscano generalmente per fornire soluzioni lontane dalla soluzione indicata dalla teoria economica.

4. GIOCHI IN FORMA ESTESA

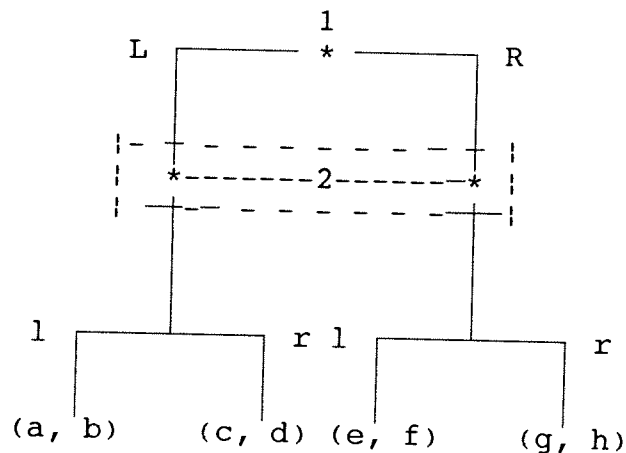
4.1 Preliminari

In questa sezione introdurremo un metodo alternativo di formalizzare la struttura di un gioco, che consiste nel descriverne la forma estesa, in cui si evidenzia l'ordine in cui i giocatori muovono (ordine che puo' non essere affatto temporale, bensì puramente logico), le informazioni e le strategie a disposizione dei giocatori, ed i payoffs conclusivi.

Ne risulta una forma ad albero strutturata su di una sequenza di nodi.

La presenza, come nella figura seguente, di un legame tra più nodi (rappresentato dalla linea tratteggiata) evidenzia il fatto che il giocatore --in questo caso, 2-- nel prendere la decisione relativa allo stadio in questione, non sa con esattezza in quale nodo si trova. Se invece il set informativo comprende un solo nodo (se cioè quest'ultimo è un "singoletto"), diremo che il gioco è ad informazione perfetta.

GIOCO G.10



La rappresentazione in forma estesa di un gioco ad informazione perfetta ne mette opportunamente in luce la natura dinamica, in quanto ogni giocatore ha la facoltà di osservare le mosse compiute dagli avversari prima di fare la propria scelta. Se invece, come in questo esempio, il set informativo comprende più

nodi, diremo che il gioco e' caratterizzato da informazione imperfetta, in quanto il giocatore 2 non e' a conoscenza della sequenza delle mosse precedenti la sua decisione: questo non e' che un modo alternativo per dire che il gioco e' di natura statica e simultanea.

Se, infine, e' possibile escludere qualsiasi incertezza di tipo esogeno, diremo che il gioco e' ad informazione completa, (2) ovvero che e' caratterizzato da 'common knowledge'.

Identifichiamo come supergioco l'intera struttura ad albero. Definiremo allora come sottogioco (proprio) ciascun sottoinsieme del supergioco avente origine in un singolo, e contenente tutti i nodi successivi a quello di origine.

Questa definizione e' essenziale per introdurre tanto un nuovo metodo di risoluzione quanto un nuovo concetto di equilibrio, basato su di esso.

4.2 Backward induction

Il metodo e' quello (3) dell'induzione a ritroso ('backward induction'): si procede a ritroso (partendo dai sottogiochi conclusivi) allo scopo di individuare l'equilibrio perfetto nei sottogiochi ('subgame perfect equilibrium').

In termini formali, diremo che una n-upla di strategie costituisce un equilibrio perfetto per il gioco se, dopo ogni stadio del gioco, le strategie che restano a disposizione dei giocatori per la continuazione del gioco nei rimanenti stadi formano un equilibrio di Nash per il gioco stesso (Selten, 1965).

Per usare un'espressione forse meno criptica, possiamo dire che, al fine di produrre un equilibrio perfetto, occorre che le strategie adottate dai giocatori producano un equilibrio di Nash in qualunque punto (leggi: sottogioco) dell'albero, anche al di fuori del sentiero di equilibrio (cioe' anche in un punto del gioco che potrebbe non essere mai effettivamente raggiunto). In altre parole, si perviene allo stesso equilibrio, qualunque sia il punto di partenza del gioco.

L'idea di fondo e' quindi quella di individuare gli equilibri di Nash (se ve ne e' piu' d'uno) che non comportano la scelta di strategie non credibili da

parte dei giocatori. Questo equivale al risultato raggiunto, nel caso della rappresentazione in forma normale, con il metodo della dominanza iterata. (4)

Per chiarire il significato di queste affermazioni, prendiamo in esame il seguente gioco in forma normale:

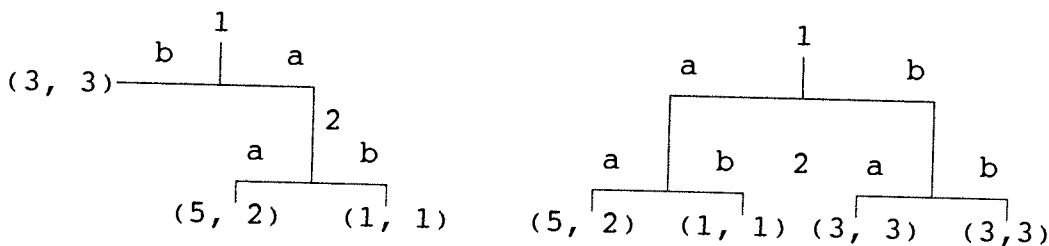
GIOCO G.11
(forma normale)

		2	
		a	b
1	a	5, 2	1, 1
	b	3, 3	3, 3

Questo gioco e' caratterizzato dalla presenza di due equilibri di Nash nelle strategie (1a - 2a) e (1b - 2b). Per capire quale dei due verra' effettivamente giocato, possiamo ricorrere al criterio della dominanza che permette di concludere che, essendo la strategia 2b debolmente dominata dalla 1b, i giocatori si collocheranno nella casella (5, 2).

In alternativa, possiamo ricorrere alle due possibili rappresentazioni in forma estesa di questo stesso gioco:

GIOCO G.11
(forma estesa)



Constatiamo che ad un medesimo gioco possono corrispondere piu' rappresentazioni in forma estesa, mentre corrisponde un'unica raffigurazione in forma strategica.

La rappresentazione estesa di sinistra e' pero' evidentemente la piu' significativa, in quanto sottolinea come la scelta del giocatore 2 sia irrilevante nel caso in cui 1 abbia scelto la strategia b.

Ma andiamo per ordine. Il giocatore 1 puo' evitare di scegliere la strategia a, perche' in tal caso 2 minaccia di scegliere b. Tuttavia, limitiamoci al sottogioco che prende il via dal singoletto corrispondente alla mossa di 2, ovvero supponiamo che 1 abbia scelto effettivamente a. In tal caso, a 2 conviene giocare a, perche' ottiene un payoff pari a 2: vale a dire che la minaccia su cui si regge l'equilibrio (1b - 2b) non e' credibile. La coppia di strategie (1a - 2a) individua quindi l'unico equilibrio perfetto del gioco. Si noti come il risultato coincida con quello fornito dal criterio di dominanza.

4.3 Fallimento del criterio di backward induction

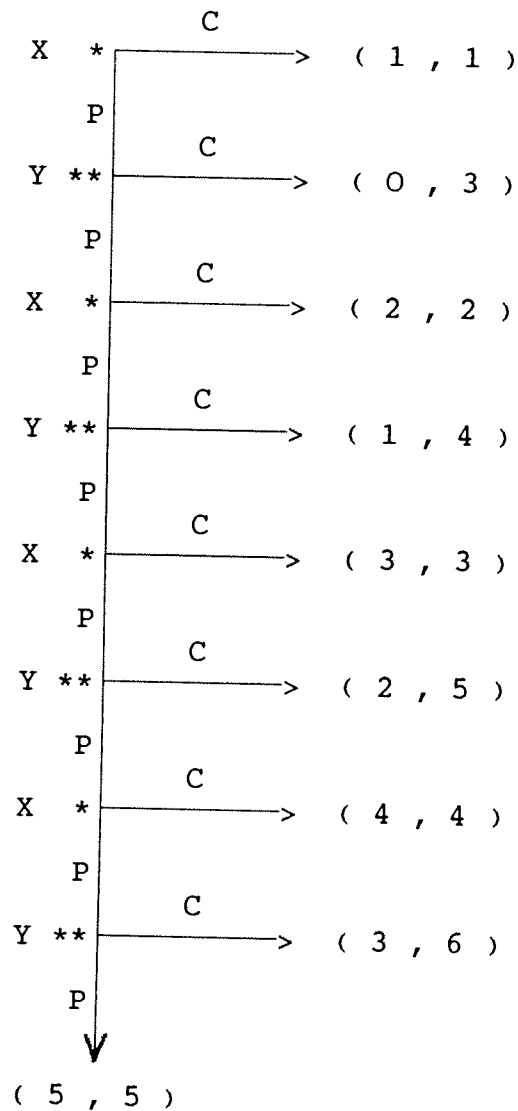
Nel gioco precedente la performance esibita dal criterio di backward induction appare quindi piu' che soddisfacente.

Ciononostante, possono presentarsi casi in cui la sua applicazione conduce ad equilibri che sembrano andare contro ogni logica. L'esempio piu' noto, al riguardo, e' rappresentato dal 'gioco del centipede' di Rosenthal (1981).

L'albero del gioco si articola su di un numero arbitrariamente alto di nodi (nella figura della pagina seguente ci siamo limitati a 4 nodi per ciascuno dei giocatori). In corrispondenza di ogni singolo nodo, l'individuo in questione puo' scegliere tra "chiudere" il gioco (mossa C) oppure "passare la mano all'altro" (P). La sequenza (virtuale) viene aperta dal giocatore X e chiusa dal giocatore Y. I nodi dispari (giocatore X) offrono ad entrambi lo stesso payoff, definito semplicemente dalla sequenza dei numeri naturali. I nodi pari (giocatore Y) forniscono coppie di payoffs cosi' definite: se indichiamo con i la sequenza dei nodi dispari, il generico nodo pari sara' $j = i + 1$ e la coppia di payoffs associata sara' $[(i-1) , (i+2)]$.

GIOCO G.12

(Il centipede di Rosenthal)



Se applichiamo il criterio della backward induction a questo gioco, vediamo che in corrispondenza del nodo conclusivo, il giocatore Y sceglierà C; quindi, essendo conscio di questo, in corrispondenza del penultimo nodo, X sceglierà a propria volta C (per ottenere il payoff 4 anziché 3); consapevole di ciò, al terzultimo nodo Y opterà per C (che gli garantisce 5 anziché 4) e così

via: entrambi i giocatori scelgono sempre la mossa C , fino al nodo iniziale in cui X sceglie C ed il gioco si ferma nell'equilibrio caratterizzato dai payoffs (1 , 1) , evidentemente sub - ottimale, rispetto ai payoffs che si sarebbero potuti ottenere.

Questo risultato, oltreche' insoddisfacente sul piano teorico, e' anche poco credibile su quello fattuale: dobbiamo infatti aspettarci che, concretamente, due giocatori dotati di una normale "razionalita' operativa" si spingano ragionevolmente avanti nello sviluppo del gioco. In termini piu' espliciti: l'esperienza empirica mostra -- ancora una volta e comprensibilmente -- una non rigida applicazione, di criteri di soluzione individuati dalla elaborazione teorica (nel caso presente, il criterio di backward induction).

5. STRATEGIE MISTE

5.1 Definizione

Un giocatore potrebbe scegliere di giocare non UNA delle strategie di cui dispone, in modo "secco", ma giocare una combinazione probabilistica di due o piu' strategie: ad esempio legare la scelta al fatto che nel lancio di una moneta esca testa piuttosto che croce.

Si parla in tal caso di strategia mista.

Questo comportamento potrebbe apparire a prima vista un po' bizzarro, dal momento che sembra difficile che un agente razionale abdichi al potere di scelta, affidandosi alla casualita'.

Alcuni vantaggi, si possono pero' comprendere subito: nel caso di strategie probabilistiche non ha piu' senso un ragionamento di induzione, circa le altrui strategie; si potrebbe anche argomentare che verrebbe vanificato qualsiasi eventuale tentativo di spionaggio.

Sicuramente l'introduzione della strategia mista ha incontrato grandissimo successo nella teoria dei giochi per la comodita' e l'eleganza formale che la caratterizzano. Possiamo anticipare, per esempio, che si dimostra che --almeno nell'ambito delle strategie miste -- l'equilibrio di Nash esiste sempre, quando e' finito il numero di giocatori e di strategie.

Con la scelta probabilistica, dovra' essere introdotto anche il concetto di utilita' attesa. Utilizzeremo l'approccio di Morgenstern e von Neumann e calcoleremo l'utilita' attesa come media ponderata dei possibili esiti elementari, applicando come coefficienti di ponderazione le probabilita' da ciascun giocatore assegnate alla scelta delle strategie pure.

5.2 Dominanza di strategie miste.

Si prenda di nuovo in esame il gioco G.8, interpretando i payoffs come livelli di utilita' percepita.

Abbiamo già notato che ciascuno dei due giocatori cercherà di sfuggire all'unico equilibrio di Nash che vi è nell'ambito delle strategie pure e desidererà

collocarsi su una delle quattro caselle di Nord-Ovest.

Possiamo immaginare allora che la mossa di A sia la seguente: lancio di moneta bilanciata; se esce testa scelta di a_1 , altrimenti di a_2 e immaginiamo che B si comporti in modo identico. L'utilità attesa da A risulta essere 23; l'utilità attesa da B è 25. Risulta peraltro ovvio che, in effetti A non percepirà ex post 23, così come B non percepirà 25.

Le grandezze attese sono comunque superiori in ogni caso alle utilità associate alla scelta di a_3 o di b_3 .

Siamo, in altre parole in presenza di una strategia dominante. Più precisamente, per A la strategia probabilistica che combina a_1 e a_2 è dominante sulla strategia pura a_3 (e, per conto di B, b_1/b_2 su b_3).

Si noti anche che l'esito derivante dalla giocata contemporanea delle due strategie miste da parte di A e di B costituisce un equilibrio di Nash, giacché nessuno dei due giocatori -- una volta conosciuta la strategia dell'altro -- desidererà cambiare la propria.

Il gioco quindi presenta complessivamente due equilibri di Nash: uno nell'ambito delle strategie pure (1;1) e l'altro nell'ambito delle strategie miste. Si noti anche che questo secondo -- nello spazio dell'utilità attesa -- è Pareto superiore all'equilibrio in strategie pure.

5.3 Equilibrio di Nash con strategie miste.

Nell'esempio appena illustrato abbiamo assunto per ipotesi che i coefficienti di ponderazione fossero 0.5 e 0.5. In verità, invece, la scelta dei coefficienti di probabilità costituisce il problema più complicato nella determinazione della strategia mista.

In che modo avverrà la scelta di tali coefficienti?

Sembra plausibile ipotizzare che la scelta debba essere tale da rendere massimo il livello di utilità attesa.

Prendiamo in esame il caso seguente.

GIOCO G.13

		B	
		b 1	b 2
A	a1	2 ; 2	2 ; 1
	a2	3 ; 2	1 ; 5

Si constata che non esiste nessun equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure.

Abbiamo già detto che invece --essendo il numero dei giocatori finito ed il numero delle strategie pure-- sicuramente esisterà equilibrio di Nash tra le strategie miste.

Possiamo immaginare che il problema di A sia quello di attribuire una opportuna probabilità alla scelta a1 ed alla scelta a2. Siano p1 e p2 le rispettive probabilità, con $p1 + p2 = 1$.

Simmetricamente siano v1 e v2 le probabilità applicate da B rispettivamente alla scelta b1 e b2. Naturalmente vale $v1 + v2 = 1$.

Combinando le due strategie miste, la probabilità che l'esito finale risulti a1-b1 è pari a $p1*v1$ e così per gli altri tre risultati; scriviamo di seguito la tabella delle probabilità associate agli esiti.

		B	
		b 1	b 2
A	a1	$p1*v1$	$p1*v2$
	a2	$p2*v1$	$p2*v2$

L'utilità attesa da A risulta quindi essere:

$$E(U)A = 2*p1*v1 + 3*p2*v1 + 2*p1*v2 + 1*p2*v2$$

ossia, dopo calcoli banali:

$$E(U)A = p_1(1 - 2*v_1) + 2*v_1 + 1$$

In modo identico si trova l'utilita' attesa di B:

$$E(U)B = v_1(4*p_1 - 3) - 4*p_1 + 5$$

Si puo' in questo modo osservare che le uniche scelte che assicurano l'equilibrio del gioco sono:

da parte di A:	$p_1 = 3/4$,	$p_2 = 1/4$;	$E(U)A=5/2$.
da parte di B:	$v_1 = 1/2$,	$v_2 = 1/2$.	$E(U)B=2$.

L'esito derivante costituisce equilibrio di Nash.

Infatti, ogni diversa attribuzione di probabilita' da parte di A o di B avrebbe spinto l'altro individuo ad una scelta pura, per aumentare la propria utilita'; si sarebbe cosi' ritornati nel dominio delle strategie pure, dove gia' sappiamo non esservi stabilita'. Si e' cosi' mostrato un gioco privo di equilibrio nelle strategie pure, ma con equilibrio di Nash tra le strategie miste.

Permangono, naturalmente, tutte le legittime perplessita' sul reale significato dell'uso di strategie miste nei giochi e sul fatto che possano essere empiricamente utili nella risoluzione di problemi di interdipendenza strategica.

6. REFINEMENTS DELL' EQUILIBRIO DI NASH

6.1 Caratteristiche dell' equilibrio di Nash.

Abbiamo in precedenza notato che l' equilibrio di Nash costituisce un equilibrio stabile dei giochi; tuttavia non sempre l'equilibrio esiste nell'ambito delle strategie pure; non sempre e' unico; inoltre anche quando e' unico non e' detto che costituisca la soluzione desiderabile del gioco.

Sembra insomma che questo concetto sia minato da molti punti deboli.

L'esistenza dell' equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie miste sembra rafforzarne la "solidita'" teorica; tuttavia non ci si deve scordare che l'esistenza certa dell'equilibrio di Nash e' vincolata a due condizioni: finitezza nel numero di giocatori e di strategie. Se viene meno una delle due condizioni, viene meno anche la certezza di avere l'equilibrio di Nash.

Un esempio banale puo' essere facilmente portato. Un gioco che consista in:
"chi dei due giocatori dice il numero piu' alto, vince l'ammontare piu' cospicuo"
e' evidentemente un gioco privo dell' equilibrio di Nash ; ne e' privo semplicemente perche' uno dei due giocatori non vorra' confermare la propria scelta, dopo aver saputo quella dell'altro; l'inesistenza dell' equilibrio di Nash deriva direttamente dal fatto che le strategie a disposizione dei giocatori sono infinite.

Un secondo problema deriva dalla molteplicita' degli equilibri di Nash. Quando in un gioco vi sono piu' equilibri di Nash, quale puo' essere considerato la soluzione del gioco? Per rispondere a questo quesito sono stati proposti alcuni criteri, che si prefiggono di "perfezionare" uno tra i molteplici equilibri che potrebbero emergere dal gioco, in modo da giudicarlo, per qualche motivo "migliore" degli altri.

Esamineremo di seguito questi refinements, di ciascuno illustrando dapprima le caratteristiche e poi i motivi per cui possono essere criticati.

6.2 Ordinamento paretiano degli equilibrio di Nash:
definizione e motivi di inapplicabilita' del criterio.

In un gioco che presenti piu' equilibri di Nash, potremmo pensare di ordinare tali equilibri in base a criteri "collettivi". E' rara, e sarebbe da considerarsi fortunata, la circostanza che tra gli equilibri di Nash ve ne fosse uno Pareto dominante, ossia il quale presenti payoffs per ciascun giocatore non inferiori ai payoffs garantiti dagli altri equilibri e, per almeno un giocatore, strettamente maggiore.

Se tra gli equilibri di Nash ne esiste uno Pareto-dominante potremmo pensare che esso sia la soluzione del gioco. Non dobbiamo comunque dimenticare che una evenienza siffatta e' tutt'altro che consueta.

Ma il criterio di Pareto e' minato, nella teoria dei giochi, da una lacuna assai piu' grave della rarita' che ne caratterizza l'applicabilita'.

Infatti puo' verificarsi il caso che un equilibrio di Nash, che pure e' Pareto dominante sugli altri equilibri, non rappresenti la soluzione del gioco.

E' una affermazione che puo' apparire davvero strana, eppure e' sufficiente osservare il gioco seguente per rendersene conto.

GIOCO G.14

		B	
		b 1	b 2
A	a1	8 ; 1	4 ; 3
	a2	8 ; 9	3 ; 1

Il gioco presenta due equilibri di Nash: (4;3) e (8;9). Il secondo e' Pareto dominante rispetto al primo ($8 > 4$ e $9 > 3$); saremmo fortemente tentati dunque di affermare che (a2-b1) e' la soluzione del gioco.

Eppure cio' non e' possibile.

Semplicemente perche' la strategia a2 e' dominata (anche se in senso debole) dalla strategia a1, che dunque

rappresenta la mossa sicura da parte del giocatore A, se assumiamo che il criterio della dominanza sia un criterio solido in base al quale orientare le proprie scelte.

Si prenda ora in esame il gioco G.15.

GIOCO G.15

		B	
		b 1	b 2
A	a1	90 ; 90	0 ; 80
	a2	80 ; 0	79 ; 79

Gli equilibri di Nash sono due: a1-b1 e a2-b2; il secondo e' Pareto dominato dal primo, eppure puo' essere difeso sulla base di considerazioni di prudenza: scegliendo la seconda strategia a disposizione, ciascun giocatore e' sicuro di evitare il payoff 0. Costituisce, evidentemente, un altro esempio del fatto che il criterio di Pareto dominanza puo' rivelarsi non soddisfacente nell'ordinamento di equilibri di Nash .

Al di la' dei lunghi discorsi che possono essere sviluppati su questo punto, una cosa ci preme sottolineare: anche un criterio severo come il criterio Paretiano, non e' di grande aiuto nell'ordinamento di diversi equilibri di Nash , dal momento che soluzioni Pareto dominanti, possono non essere soluzioni del gioco, in quanto in contrasto con criteri quali quello della dominanza o con considerazioni di prudenza.

6.3 Eliminazioni di equilibri con strategie dominate.

Dalla osservazione precedente deriva in modo immediato un altro refinement che appare logico richiedere ad un equilibrio di Nash, affinche' possa essere equilibrio del gioco: quello cioe' di escludere tutti gli equilibri di Nash che coinvolgono strategie dominate.

In base a questo criterio l'equilibrio (a1-b2) sarebbe da giudicarsi l'equilibrio del gioco G.14, in quanto l'altro equilibrio di Nash coinvolge una strategia dominata.

6.4 Subgame perfection.

Si e' gia' introdotto il concetto di equilibrio perfetto nei sottogiochi alla Selten (subgame perfect equilibrium) nel paragrafo 4.2; in questa sede, lo stesso concetto verra' esaminato come refinement dell'equilibrio di Nash.

Si osservi il gioco seguente, dove B e' un produttore gia' presente come monopolista su un certo mercato ed A e' un potenziale entrante. A dispone di due strategie: entrata (a1) e non entrata (a2); B dispone delle due strategie combattere (b1) e colludere (b2).

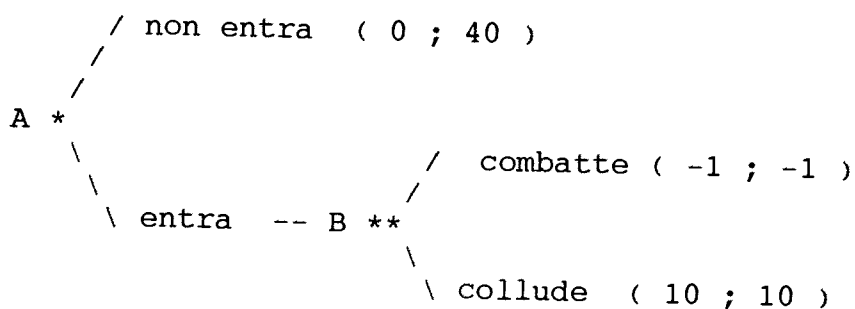
GIOCO G.16 (forma normale)

		B	
		b1=guerra	b2=collus.
A	a1= entrata	-1 ; -1	10 ; 10
	a2=non entra	0 ; 40	0 ; 40

Si constata che vi sono due equilibri di Nash: a1-b2 (entrata-collusione) e a2-b1 (non entrata-guerra).

In effetti pero', in questo gioco, le mosse dei due non avvengono simultaneamente, ma sequenzialmente: prima A decide se entrare o meno; in un secondo momento B decide --se A e' entrato-- di combattere oppure colludere. La raffigurazione piu' adeguata e' quella sequenziale, proposta di seguito:

GIOCO G.16 (forma sequenziale)



Se il gioco iniziasse nel nodo **, il risultato di equilibrio sarebbe (entra - collude); tale equilibrio gode dunque della perfezione alla Selten; il risultato (non entra-combatte), invece, non viene raggiunto se si parte da un punto del gioco differente dal nodo * e pertanto non puo' essere giudicato perfetto. Cio' non vuol dire, naturalmente, che non sia equilibrio di Nash anche la soluzione (a2-b1).

Chiediamoci pero' se i due equilibri di Nash abbiano entrambi senso economico: la risposta e' negativa, in quanto non avrebbe senso per il giocatore B combattere, se l'impresa A decide di non entrare sul mercato.

6.5 Trembling hand.

Immaginiamo che un giocatore H pensi che qualcuno tra i suoi avversari abbia la mano tremante, ovvero possa sbagliare involontariamente la scelta della mossa. Se questa eventualita' non provoca peggioramenti della situazione di H --data la propria mossa-- e se cio' e' vero per tutti i giocatori partecipanti, un equilibrio di Nash e' robusto al criterio della mano tremante.

E' bene notare che la definizione del criterio di trembling hand presentata in questa sede si limita ad un livello puramente intuitivo. In termini rigorosi, la definizione non puo' prescindere dall'esame di strategie miste, anche quando ci si trova nell'ambito delle sole strategie pure: infatti immaginare che vi possa essere errore equivale a ipotizzare la scelta (consapevole o meno) di una strategia mista.

Teniamo comunque la trattazione a livello elementare e riprendiamo il gioco G.15.

Tale gioco presenta --come si sa-- due equilibri di Nash; tuttavia si osservi che a2-b2 soddisfa la robustezza al criterio di trembling hand (se A avesse giocato erroneamente a1, B non avrebbe peggiorato il proprio payoff, data la scelta b2; ed egualmente -- data da parte di A la scelta a2 -- l'utilita' percepita non peggiora in caso di errore involontariamente commesso da B), mentre l'equilibrio a1-b1 non soddisfa (come si puo' facilmente verificare) tale requisito.

Come si vede, anche questo criterio porta a concludere che, nel caso specifico, l'equilibrio di Nash che e' Pareto-inferiore e' piu' soddisfacente di quello Pareto-superiore.

6.6 Razionalita' sequenziale.

Va oltre gli scopi del presente lavoro presentare il concetto di equilibrio sequenziale. In questo paragrafo vogliamo pero' presentare in modo intuitivo una caratteristica dell'equilibrio sequenziale, e cioe' la "razionalita' sequenziale".

Noi prenderemo in esame equilibri di Nash e valuteremo se le strategie che li determinano, godano di tale proprieta'. E' bene pero' avvertire che il concetto di razionalita' sequenziale e' usato in letteratura prevalentemente per trovare equilibri di Nash (che poi vengono detti equilibri sequenziali) piuttosto che per valutare soluzioni che si sanno gia' essere equilibri di Nash. Per maggiori dettagli si rinvia a KREPS (1990, pag. 425 e segg.)

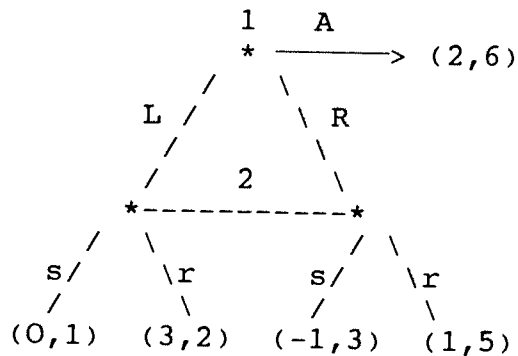
A scopo illustrativo prendiamo in esame un esempio mutuato proprio da Kreps. Il giocatore 1 dispone di tre strategie (A,L,R) ed il giocatore 2 dispone delle due strategie s ed r. Di seguito forniamo gli esiti, in forma normale ed estesa.

GIOCO G.17

(forma normale)

		2	
		s	r
1	A	2, 6	2, 6
	L	0, 1	3, 2
	R	-1, 3	1, 5

(forma estesa)



Si puo' constatare (dalla matrice di forma strategica) che gli equilibri di Nash sono due: A - s e L - r.

Il giocatore 2, quando opera la sua scelta, non sa qual è la scelta operata da 1, ossia --facendo riferimento alla forma estesa-- non sa con esattezza in quale nodo si trova.

Potrebbe però avere delle congetture, ossia una distribuzione probabilistica: ad esempio ritiene di trovarsi sul nodo di sinistra con probabilità m e su quello di destra con probabilità n .

Egli deriva quindi un'utilità attesa pari a $(1m + 3n)$ se gioca s e pari a $(3m + 5n)$ se gioca r . Qualunque sia la distribuzione di probabilità, converrà giocare r , ossia un equilibrio che contiene la strategia s non è "sequenzialmente razionale".

Si noti -- per inciso -- che la strategia r risulta pure debolmente dominante, ossia l'equilibrio sequenzialmente non razionale sarebbe da scartare anche sulla base del criterio della dominanza.

Possiamo quindi azzardare una definizione di strategia sequenzialmente razionale: data una distribuzione di congetture (che sintetizza la storia passata del gioco), una strategia è sequenzialmente razionale se è ottima (cioè offre utilità attese non minori rispetto ad altre strategie), qualunque sia il nodo di partenza nel gioco ad albero.

Come abbiamo in precedenza accennato, questo concetto trova le sue principali applicazioni nei giochi ad informazione imperfetta, ossia, nei quali non si conoscono con certezza le caratteristiche dell'avversario o -- più precisamente -- se ne conoscono solo le distribuzioni probabilistiche. Ad esempio, nel caso che i due giocatori siano imprese, si sa che l'avversario ha costi di produzione "alti" con probabilità p e costi "bassi" con probabilità $(1-p)$.

L'argomento esula, data l'informazione imperfetta, dal campo d'indagine coperto da questo lavoro. Vale la pena però dire che interessanti sviluppi si hanno allorché si ammette la possibilità di segnalare --tramite le proprie mosse-- la caratteristica posseduta: seguendo l'esempio precedente potremmo pensare che il praticare prezzi alti "segnali" costi di produzione alti; lo stesso comportamento potrebbe però essere messo in atto per ingannare l'avversario (inducendolo, ad esempio, a non entrare nel mercato).

In casi simili il problema interessante e' stabilire quali sono i valori dei parametri che spingono ciascuno a compiere azioni che segnalano la verita', pervenendo cosi' ad un equilibrio detto "separante"; nel caso che un medesimo segnale (ossia comportamento) sia ottimale, per qualunque caratteristica posseduta (e quindi possa convenire "barare") si parla di equilibrio "accomunante" (pooling), ad indicare che, data una mossa-segnale dell'avversario, non si e' in grado di stabilire con certezza se sia fatta per trarre in inganno o per segnalare la verita'.

7. EQUILIBRI DI NASH IN PRESENZA DI UN CONTINUUM DI STRATEGIE.

Finora abbiamo trattato in modo esplicito solamente giochi caratterizzati da strategie discrete, evidenziando la possibilità che non esista un equilibrio di Nash nelle strategie pure, rendendosi così necessario il passaggio a strategie miste.

Se andiamo nello spazio delle strategie continue --ipotizzando per esempio che l'insieme delle mosse possibili degli agenti sia costituito dai numeri reali compresi in un dato intervallo-- il problema assume connotati parzialmente diversi.

Allo scopo di fornire un significato operativo ai concetti esposti sinora in tema di equilibrio di Nash e di interazione strategica tra individui, descriveremo un gioco del genere in termini quanto mai generali. Faremo ricorso ad un semplice apparato grafico e ad un rilevante strumento analitico, vale a dire la funzione di reazione o funzione di risposta ottima.

La strategia di ciascun giocatore consiste ora nella scelta di un numero reale positivo. In un grafico a due dimensioni sui cui assi compaiono le strategie dell'uno e dell'altro giocatore, la funzione di reazione corrisponde al luogo dei punti di tangenza tra il sistema di curve di indifferenza di ciascun giocatore e le semirette rappresentanti ogni possibile mossa dell'avversario; la tangenza rappresenta la soluzione grafica di un problema di massimo vincolato, affrontato da ciascun giocatore.

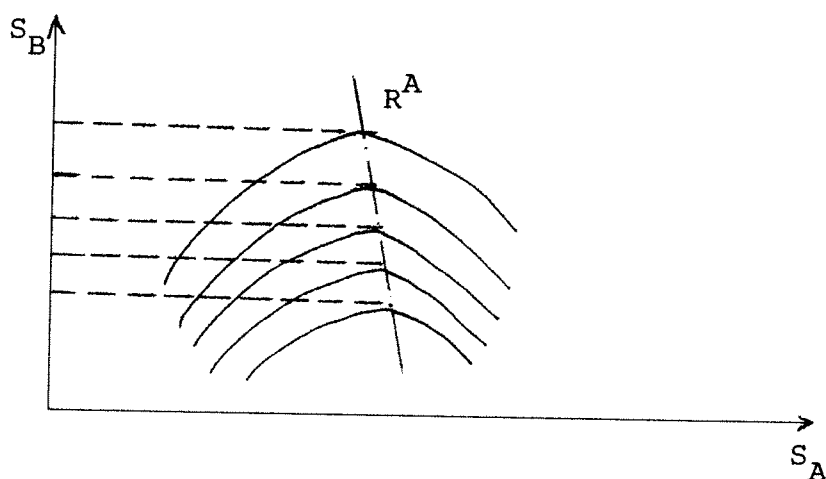


figura 1

Naturalmente la specifica raffigurazione grafica e' estremamente generica ed anche in parte arbitraria, in quanto potremmo trovarci di fronte a situazioni che non corrispondono esattamente a tale rappresentazione. La scelta e' motivata esclusivamente da considerazioni di carattere descrittivo. Inoltre assumiamo (ancora a scopo esemplificativo) che l'utilita' (ovvero il payoff) dello individuo A aumenti, man mano che ci si sposta da sinistra verso destra. Questo significa che A cerchera' di mantenersi sulla propria curva di indifferenza più bassa, data la scelta effettuata da B. Per quanto riguarda quest'ultimo, valgono considerazioni simmetriche e del tutto analoghe.

Il risultato e' nel seguente grafico:

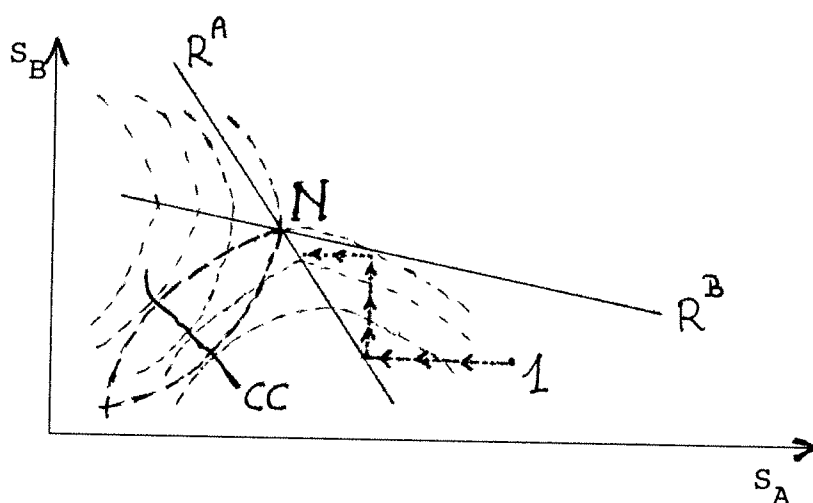


figura 2

Il punto N in cui le funzioni di reazione si intersecano, costituisce l'equilibrio di Nash del gioco.

L'equilibrio e' stabile nel duplice senso che:

- a) se i giocatori si trovano nel punto N, tenderanno a rimanervi e
- b) se il gioco inizia in un altro punto, date le preferenze e le funzioni di reazione dei due giocatori, si tendera' a raggiungere N. Ad esempio se il gioco ha inizio nel punto l, A ha interesse a spostarsi verso sinistra, mentre B ha interesse a spostarsi verso l'alto. Progressivamente, nel gioco rappresentato in figura, si raggiungera' N.

In termini di aspettative, cio' significa che N e' l'unico punto in cui quelle di entrambi sono corrette, ossia confermate dalle altrui mosse.

Si noti che le etichette adottate in letteratura (curve di reazione o di risposta ottima) sono, in qualche misura, inadeguate in quanto potrebbero indurre a ritenere che vi sia un ordine temporale nelle mosse dei giocatori, mentre sappiamo che si tratta di giochi con mosse simultanee. Si puo' pensare semmai all'esistenza di "sequenze ex ante", nelle menti di entrambi i giocatori, al solo scopo di prefigurarsi l'andamento del gioco stesso.

E' agevole rilevare la subottimalita' dell'equilibrio di Nash; a questo scopo, possiamo costruire una sorta di curva dei contratti, costituita dai punti di tangenza tra i due sistemi di curve di indifferenza. In altri termini, la curva dei contratti rappresenta l'insieme di tutte le configurazioni Pareto efficienti per il gioco in esame. In generale, il punto che individua l'equilibrio di Nash non si trova su di essa, ossia non e' Pareto efficiente.

Forniremo di seguito la dimostrazione analitica della inefficienza paretiana dell'equilibrio di Nash in presenza di un continuum di strategie e nel caso particolare di due soli giocatori.

GIOCATORE	MOSSA DI CUI DISPONE	FUNZIONE DI UTILITA'
1	x_1 (numero reale)	$u = F_1(x_1, x_2)$
2	x_2 (numero reale)	$u = F_2(x_1, x_2)$

Assumiamo che vi sia interdipendenza tra i due giocatori, cioe' imponiamo che $(d F_1 / d x_2) \neq 0$ e $(d F_2 / d x_1) \neq 0$. Inoltre assumiamo $F_1 \neq F_2$, che sta a significare, come e' logico, che i due giocatori hanno differenti obiettivi.

Siano x_{1N} e x_{2N} le mosse rispettivamente del giocatore 1 e del giocatore 2 che costituiscono equilibrio di Nash. Ricordiamo che un equilibrio di Nash e' tale se ciascun giocatore massimizza la propria utilita', data la mossa dell'avversario. In altre parole x_{1N} ed x_{2N} debbono

soddisfare le condizioni seguenti:

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d F1}{d x1} \\ \frac{d F2}{d x2} \end{array} \right|_{x1N, x2N} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d F1}{d x1} \\ \frac{d F2}{d x2} \end{array} \right|_{x1N, x2N} = 0$$

Introduciamo altresì la definizione di configurazione Pareto-efficiente: $x1$ ed $x2$ è Pareto efficiente se $x1$ viene scelto in modo da massimizzare $F1$, dato un livello K^{\wedge} che deve essere raggiunto da $F2$.

In altre parole $(x1, x2)$ è Pareto efficiente se risolve il problema seguente:

$$\text{MAX} \quad F1(x1, x2)$$

$$\text{S.V.} \quad F2(x1, x2) = K^{\wedge}$$

Costruiamo il Lagrangiano di tale problema, essendo m il moltiplicatore di Lagrange:

$$L = F1(x1, x2) - m (K^{\wedge} - F2(x1, x2))$$

Le condizioni di primo ordine di tale problema sono:

$$(**) \quad \begin{aligned} \frac{dL}{dx1} &= \frac{dF1}{dx1} - m \left(\frac{dF2}{dx1} \right) = 0 \\ \frac{dL}{dx2} &= \frac{dF1}{dx2} - m \left(\frac{dF2}{dx2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ora è facile constatare che se $(\frac{dF1}{dx2}) \neq 0$, $(\frac{dF2}{dx1}) \neq 0$ e $m \neq 0$, allora non esiste alcuna coppia $(x1, x2)$ che soddisfi simultaneamente le condizioni (*) e (**).

Ossia equilibri di Nash non sono Pareto efficienti e l'insieme delle configurazioni Pareto efficienti non contiene equilibri di Nash. Q.E.D. .

Il conseguimento di una soluzione (o allocazione) efficiente richiede pertanto la possibilità di cooperazione tra i giocatori. In modo del tutto analogo a quanto si verifica nell'ambito della teoria dello

scambio, possiamo immaginare che se i giocatori si trovano nel punto N (che potremmo vedere come una sorta di allocazione iniziale) e se sono in grado di cooperare, potranno collocarsi in un punto sul tratto della curva dei contratti interno all'area delimitata dalle curve di indifferenza che si intersecano in N . L'esatta collocazione dipendera' dalla forza contrattuale relativa; in condizioni di perfetta simmetria, si collocheranno nel punto individuato dalla bisettrice del quadrante.

Naturalmente, come evidenzieremo anche a proposito del dilemma del prigioniero, ciascun giocatore in atto di cooperazione ma non sottoposto ad accordi vincolanti, e' incentivato a deviare dall'accordo, in modo tale da avvicinarsi al proprio ottimo individuale ("bliss point").

Supponendo che le regole del gioco, ovvero le istituzioni, consentano ad uno dei giocatori di muovere effettivamente per primo, e di conoscere inoltre la funzione di reazione dell'altro, egli assumerà il ruolo di leader nel senso di Stackelberg.

Supponiamo ad esempio che il ruolo di leader spetti ad A ; l'equilibrio di Stackelberg e' identificato dal punto (fig. 3) di tangenza tra la funzione di reazione di B e la curva di indifferenza di A caratterizzata dal payoff piu' alto compatibile con la curva di reazione di B .

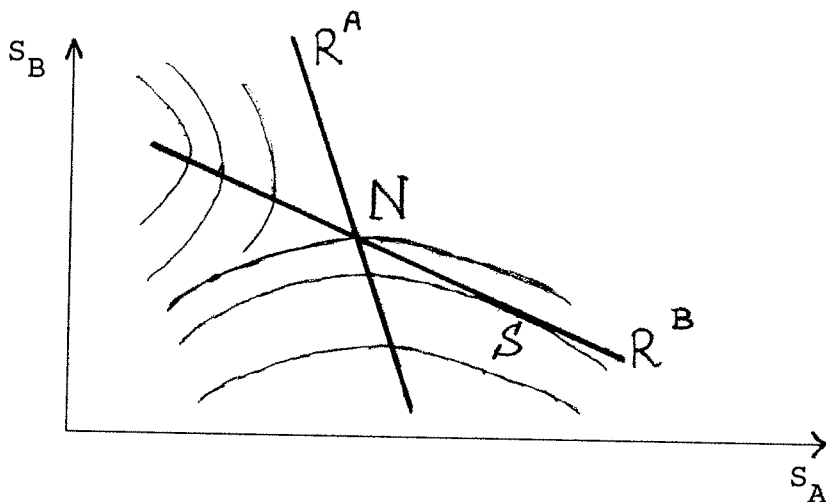


figura 3

Un'altra interpretazione plausibile della fig. 3 e' la seguente: il leader che fa la mossa, compie una operazione di precommitment (cioe' una mossa irreversibile e la cui irreversibilita' e' nota ad entrambi). La risposta di B lungo la propria curva di reazione porta il gioco a collocarsi nell'equilibrio di Nash-Stackelberg (che di nuovo puo' essere Pareto inefficiente).

Si noti infine che se e' possibile effettuare un precommitment, allora il medesimo equilibrio si ottiene anche nel caso in cui le mosse siano contemporanee.

8. IL DILEMMA DEL PRIGIONIERO.

Presenteremo ora un caso di gioco non cooperativo a somma variabile, di grande rilevanza all'interno della letteratura economica, in particolare in tema di mercati oligopolistici: il dilemma del prigioniero.

La configurazione del gioco e' nota: la polizia custodisce in celle diverse due individui accusati di essere complici di uno stesso crimine; tuttavia, non disponendo di prove sufficienti a comminare ai due una pena piu' che simbolica, gli inquirenti cercano di indurre i detenuti a confessare.

GIOCO G.18

(DILEMMA DEL PRIGIONIERO)

		2	
		NC	C
1	NC	-1 ; -1	-6; 0
	C	0 ; -6	-5; -5

Nella tabella compaiono gli anni di reclusione inflitti a seconda delle strategie adottate (C = confessare ; NC = non confessare). Sono espressi come numeri negativi, in quanto rappresentano "disutilita'" per i giocatori.

L'equilibrio di Nash (che e' anche equilibrio nelle strategie dominanti) e' individuato dalla combinazione (1C - 2C) che comporta per entrambi 5 anni di reclusione.

Si noti che la adozione di un criterio di razionalita' individuale conduce ad un risultato subottimale nel senso di Pareto (perche' peggiore di quello che potrebbero ottenere se nessuno dei due confessasse) ; non basta: questo e' anche il risultato complessivamente peggiore, dal momento che comporta un totale di dieci anni di carcere.

Se i due potessero comunicare e stipulare un accordo vincolante, potrebbero adottare entrambi la

strategia dominata (NC) ed ottenere il risultato ottimale (-1 , -1) .

Quindi, la considerazione di rilievo che emerge dal dilemma del prigioniero e' il conflitto tra stabilita' (equilibrio) ed efficienza.

Questo conflitto pone un ulteriore problema, cioe' quello di stabilire se e sotto quali condizioni sia possibile produrre il risultato efficiente (ovvero socialmente preferibile) . In altre parole, ci dobbiamo chiedere se e quando e' possibile, produrre consenso (cooperazione) circa le strategie che ciascun individuo dovra' adottare. Questo tema sara' oggetto della sezione conclusiva.

9. POSSIBILI SOLUZIONI DEL DILEMMA DEL PRIGIONIERO.

Un eventuale patto NC-NC non costituisce equilibrio del gioco, perché ciascun giocatore avrebbe incentivo a non mantenere il patto. Se però esistesse un'autorità esterna che costringesse i giocatori a non confessare (pena ritorsioni quando si esce dalla galera), potremmo aver individuato una soluzione del dilemma. Si tratta però, evidentemente, di una soluzione "esogena" e, in una certa misura, banale.

Sarebbe molto più interessante il caso in cui la scelta cooperativa si imponesse endogenamente.

Supponiamo che i due prigionieri possano ripetere il proprio gioco più volte. Ci domandiamo: la ripetizione può indurre comportamenti cooperativi?

Ovvero: la ripetizione produce meccanismi tali da spingere i giocatori ad adottare la combinazione di strategie che fornisce il risultato ottimale?

La risposta è ambigua, e dipende in modo cruciale dall'orizzonte temporale considerato.

Supponiamo, per il momento, che il gioco venga ripetuto un numero finito di volte, pari a T , e supponiamo che entrambi ne siano a conoscenza.

Il gioco in esame può definirsi ad informazione 'quasi perfetta' (Tirole, 1988, p. 431), in quanto vi è simultaneità all'interno di ogni singolo round: in altre parole, il supergioco non è altro che un gioco ripetuto basato su di un gioco costituente che è quello che già conosciamo. Ogni round costituisce un sottogioco che non ha alcun legame fisico con i precedenti, la cui storia tuttavia costituisce 'common knowledge' dei giocatori.

Procediamo per backward induction, partendo appunto dall'ultimo round.

Al tempo T , non c'è futuro, ed è come se il gioco fosse giocato una sola volta: ne consegue che non c'è collaborazione, ed il risultato riproduce quello già noto (e subottimale) derivante dalla dominanza della strategia 'confessare' per entrambi.

Ma se questo è vero per il round giocato al tempo T , lo sarà anche per quello precedente, e così via,

risalendo fino all'istante iniziale. I giocatori non collaborano mai, lungo tutto l'orizzonte (finito).

In generale, si può concludere che se l'equilibrio del gioco costituente è unico, e questo viene ripetuto un numero finito di volte T , l'equilibrio del supergioco risultante non è altro che la ripetizione dell'equilibrio uniperiodale per T volte (Selten, 1978).

La conclusione cambia radicalmente se si considera un orizzonte infinito⁽⁶⁾. In tale situazione, l'equilibrio non cooperativo è ancora perfetto, ma non è più il solo. Infatti, vi è una molteplicità di situazioni in cui può crearsi cooperazione, sulla base di due meccanismi:

- 1) la possibilità da parte dei giocatori di porre in atto ritorsioni ('trigger strategies') che costituiscono minacce credibili, se gli altri non cooperano;
- 2) la formazione ed il mantenimento di una reputazione da parte dei giocatori.

Definiamo le strategie a disposizione dell' i -esimo giocatore nel seguente modo:

$$S_i = \{s_{i0}, s_{i1}, \dots, s_{it}, \dots\}, \quad t = 0, \dots, \infty.$$

Esaminiamo ora una combinazione di trigger strategies così definita:

$$S_1 = \begin{cases} s_{1t} = s_{1*} & t = 0; \\ s_{1t} = s_{1*} & \text{se } s_{2g} = s_{2*} \quad t > 0, g < t; \\ s_{1t} = s_{1d} & \text{se } s_{2g} \neq s_{2*} \quad \text{fino a } t = \infty. \end{cases}$$

L'asterisco indica la mossa cooperativa, mentre il deponente d nella terza eventualità indica la scelta della strategia dominante (non cooperativa, in quanto individualmente razionale) come punizione se in uno dei round precedenti (al tempo g) si è registrato un atteggiamento non cooperativo da parte di altri.

Questa combinazione di strategie produce un equilibrio perfetto, sotto la condizione che il fattore di sconto $k = 1/(1+r)$ applicato dagli individui al flusso dei loro payoffs futuri sia sufficientemente alto (prossimo ad 1),⁽⁷⁾ ovvero che il tasso di sconto r sia prossimo a zero.

In termini piu' espliciti, conviene a ciascun individuo (purché non eccessivamente impaziente, ossia sotto l'ipotesi di valori di r non troppo alti) adattarsi alla strategia cooperativa perché, se non lo facesse, otterrebbe in futuro risultati così bassi da vanificare il beneficio che pure potrebbe avere nell'immediato.

Un'altra possibile soluzione è quella proposta da Axelrod (1985), nota come strategia del 'colpo su colpo' ('tit for tat').

Essa consiste nella seguente regola di comportamento:

- all'istante iniziale, coopera;
- nel proseguimento del gioco, scegli in ogni periodo la stessa strategia adottata dall'avversario nel periodo precedente.

Come si nota, la mancanza di cooperazione viene immediatamente punita, però si lascia spazio --contrariamente al caso precedente-- alla ricostruzione della cooperazione: in questo senso la strategia del colpo su colpo non è solo efficace ma anche leale, e consente al 'traditore' di ricostruirsi una credibilità'.

In effetti, quelli che abbiamo proposto non sono che due tra i molteplici casi che possono presentarsi.

In generale, ogni possibile combinazione di strategie potrà generare un equilibrio sostenibile fintantoche' i payoffs (attesi) da essa generati per ciascun giocatore sono non minori di quelli che quest'ultimo potrebbe garantirsi nelle condizioni peggiori, cioè nel caso in cui tutti gli altri si coalizzassero contro di lui. In altre parole esiste un limite inferiore definibile come 'payoff individualmente razionale' che equivale al minimo che il giocatore i -esimo sarebbe costretto ad accettare dagli altri $n-i$ giocatori:

$$\min_{a-i} \max_{a_i} \pi_i(s_i, s_{-i}).$$

L'enunciato di quello che è noto come "folk (8) theorem" sottolinea esattamente questo: qualunque payoff non minore di quello appena definito è sostenibile -- in media -- come equilibrio perfetto del gioco ripetuto infinite volte, a condizione che:

i) la probabilita' che ad ogni istante il gioco continui sia pari o prossima a 1;

ii) il fattore di sconto sia pari o sufficientemente prossimo all'unita'.

In altre parole, il folk theorem stabilisce le condizioni sotto le quali un gioco non cooperativo puo' endogenamente fornire come equilibrio una soluzione cooperativa.

10. APPROFONDIMENTI VARI.

In questa sezione prenderemo in esame una serie di arricchimenti del concetto di equilibrio che abbiamo sviluppato finora, che sono di aiuto in tutti i casi in cui il gioco in esame non ammetta una soluzione univoca.

In altre parole, cio' che e' in discussione qui e' l'idea che il modo ovvio di giocare (se esiste) sia quello individuato da quella combinazione di strategie che forma un equilibrio di Nash. Vale a dire, la condizione necessaria affinche' una data combinazione di strategie rappresenti un modo ovvio di giocare quel determinato gioco (e quindi sia una soluzione evidente del gioco) e' che essa dia luogo ad un equilibrio di Nash.

Il problema sorge nel momento in cui si considera che:
(1) questa e' una soluzione necessaria ma non sufficiente, in quanto l'equilibrio di Nash puo' non essere unico;
(2) puo' non esistere alcuna soluzione evidente, anche in presenza di uno o piu' equilibri di Nash.

Un esempio che mette perfettamente in luce questo problema e' offerto dal seguente gioco:

GIOCO G.19

		2	
		a	b
1	a	1, 1	50, 51
	b	51, 50	1, 1

In questo gioco esistono, nell'ambito delle strategie pure, due equilibri di Nash simmetrici: (1a - 2b) e (1b - 2a), ma non esiste alcun 'modo ovvio' di giocare.

Il nostro obiettivo e' l'introduzione di elementi aggiuntivi che permettano di superare tale impasse.

In primo luogo, si puo' considerare la possibilita' che l'introduzione di convenzioni sociali possa contribuire a selezionare le strategie di equilibrio.

In secondo luogo, si puo' pensare che lo stesso gioco venga ripetuto piu' volte, e che intervengano quindi fenomeni di apprendimento ('learning'). Questo secondo caso puo' tuttavia essere ricondotto al primo, al quale noi limiteremo la nostra attenzione.

10.1 Introduzione di convenzioni sociali.

A scopo illustrativo, utilizzeremo quello che possiamo chiamare 'gioco della precedenza'. Il luogo in cui si svolge e' un crocevia, i giocatori sono gli automobilisti 1 (che viene da sinistra) e 2 (che viene da destra), che dispongono della medesima coppia di strategie: F = fermarsi e P = passare.

GIOCO G.20

		2 (D)	
		F	P
1 (S)	F	-20, -20	-2, 0
	P	0, -2	-90, -90

Il gioco presenta due equilibri di Nash: (1F - 2P) e (1P - 2F); a priori, non e' tuttavia evidente quale verra' giocato; interviene quindi la convenzione sociale secondo la quale ha la precedenza chi viene da destra, per cui l'equilibrio effettivamente giocato e' (1F - 2P).

E' interessante rilevare a questo punto che la teoria dei giochi e' servita e puo' servire (in ambito piu' filosofico che economico), a giustificare la nascita di istituzioni sociali.

10.2 Learning.

Riprendiamo ora il gioco precedente, modificando leggermente (e comunque in modo irrilevante ai fini del risultato) la tabella dei payoffs, ed interpretiamolo come 'battaglia dei sessi':

GIOCO G.21

		2 (lui)	
		C	P
1 (lei)	C	50, 40	10, 10
	P	0, 0	40, 50

Le strategie disponibili sono C = andare al cinema e P = andare alla partita. Naturalmente (!), lui preferisce P, lei preferisce C; tuttavia, entrambi traggono maggior soddisfazione dalla compagnia dell'altro/altra. Questo produce due equilibri di Nash: (1C - 2C) e (1P - 2P).

Di nuovo, resta da stabilire quale dei due verra' giocato.

Una societa' fortemente maschilista potrebbe indurre a ritenere che l'equilibrio sara' P-P; si tratta, in questo caso, di una convenzione "esogena" che impone un equilibrio piuttosto che un altro.

E' piu' interessante pensare ad un caso in cui non esistano condizionamenti esogeni, e che fornisca un equilibrio "endogeno"; se, ad esempio, il gioco e' ripetuto, i giocatori potranno stabilire un accordo che preveda l'alternanza, un round dopo l'altro, dei due equilibri. Tirole (1988, p. 427) identifica questo genere di equilibrio come 'focal equilibrium', vale a dire come un equilibrio dotato di caratteristiche di ottimalita' e di simmetria tali da imporlo alla attenzione dei giocatori come soluzione naturale del gioco, e questo anche se essi non fossero in grado di comunicare tra loro per accordarsi.

Piu' in generale un focal point e' un esito che si impone all'attenzione dei giocatori per la natura peculiare di esso all'interno della matrice dei payoffs e che spinge i giocatori a scegliere proprio le strategie che danno luogo a quell'equilibrio cosi'peculiare.

CONCLUSIONI

In questo breve lavoro abbiamo inteso fornire al lettore una sintesi ragionata della materia, esponendone i risultati così come i limiti principali.

La molteplicità delle interpretazioni possibili per un gioco non cooperativo, così come la non unicità dei criteri risolutivi e dei concetti di equilibrio individuati dalla teoria, mentre testimoniano la spinta evolutiva della ricerca, evidenziano nello stesso tempo le debolezze intrinseche nei risultati raggiunti, ognuno dei quali si propone, il più delle volte, come complemento e non come sostituto di quelli già acquisiti.

In particolare, il risultato che possiamo definire come il più rilevante, cioè il Folk Theorem, è forse il principale testimone del problema più generale che affligge la teoria, vale a dire la non unicità dell'equilibrio. Mentre esso fornisce un criterio quanto più generale possibile -ed esattamente in questo risiede il suo contributo notevole- contemporaneamente prospetta una tale molteplicità di equilibri sostenibili per uno stesso gioco, da disarmare l'utente. Una qualunque soluzione che Pareto domina l'equilibrio di Nash può infatti configurarsi come equilibrio del gioco.

Tuttavia, è senz'altro possibile isolare il risultato di fondo raggiunto dalla teoria dei giochi non cooperativi ed affermato in modo specifico dal folk theorem, vale a dire l'insorgenza endogena della cooperazione nell'ambito di un supergioco, ovvero della collusione tacita tra agenti che si pongono, in partenza, obiettivi conflittuali.

A fronte di un risultato del genere, quanto meno in via preliminare, può ben passare in secondo piano l'aspetto deludente (ed interlocutorio) della conclusione raggiunta dal teorema, vale a dire l'impossibilità di identificare a priori, fra tutti gli equilibri possibili, quello che verterà effettivamente a stabilirsi.

Non solo: l'idea che vi sia una molteplicità di equilibri sostenibili nel tempo e che non sia disponibile alcun criterio deterministico che consenta di isolarne uno, spinge a pensare che nel processo di selezione di tale equilibrio nell'ambito di una situazione reale, giochi un ruolo importante la razionalità operativa (o limitata) degli individui, i quali si porranno obiettivi "sufficientemente soddisfacenti", per quanto sub-ottimali

se considerati nella prospettiva di una razionalita' massimizzante.

In altre parole il Folk Theorem sembra esprimere, nel linguaggio proprio della teoria dei giochi, un concetto operativo o comportamentale che e' gia' stato ampiamente riconosciuto nell'ambito delle scienze sociali in senso lato, e che sembra destinato ad acquisire un peso considerevole anche nell'ambito della moderna teoria economica.

N O T E

- (1) Peraltro, molti concetti introdotti in questo lavoro trovano applicazione anche in altri ambiti e sotto diverse ipotesi.
- (2) La letteratura tradizionale sulla teoria dei giochi definisce ad informazione completa i giochi dei quali gli agenti conoscono la struttura (sintetizzabile nei seguenti dati: identità e numero dei giocatori, strategie disponibili per ciascuno e payoffs conclusivi); nei contributi più recenti si dice che un gioco è ad informazione completa se la mossa iniziale non è preceduta da alcuna mossa da parte della natura, tale da introdurre un'asimmetria informativa iniziale a favore di uno dei giocatori - che è il problema noto in letteratura sotto l'etichetta di 'adverse selection'.
- (3) Questo metodo è noto anche come algoritmo di Kuhn.
- (4) Si rammenti che questa conclusione vale nel caso di giochi ad informazione perfetta.
- (5) Senza la pretesa di essere rigorosi, possiamo affermare che la contemporanea giocata delle strategie miste da parte dei due giocatori, consente a ciascuno di raggiungere una sorta di "tranquillità ex ante", nel senso che meglio di così - senza conoscere l'esito casuale dell'estrazione - ciascuno non poteva comunque fare.
- (6) A rigore, è sufficiente che i giocatori non sappiano con certezza quando finirà il gioco. Ad ogni round, sanno semplicemente che vi è una probabilità $0 < p_t < 1$ che il gioco si concluda, e che $\sum p_t = 1$.
- (7) Il fattore di sconto si può interpretare anche come la probabilità che il gioco continui.
- (8) Questa etichetta è dovuta al fatto che non possiamo identificare un singolo autore che possa rivendicare la paternità del teorema. Tuttavia, la prima formulazione che ne è stata data nell'ambito della letteratura è di Friedman (1971).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Abreu, D. (1988), "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting", Econometrica (56) n.2, pp.383-96.
- Aumann, R. (1985), "Repeated Games", in G. Feiwel (a cura di) Issues in Contemporary Microeconomics and Welfare", London, Macmillan, pp.209-42.
- Axelrod, R. (1984), The Evolution of Cooperation, New York, Basic Books; trad. it. Giochi di reciprocità. L'insorgenza della cooperazione, Feltrinelli, Milano, 1985.
- Carraro, C. e F. Giavazzi (1989), "Teoria dei giochi e teoria della politica economica", working paper n.70, Dipartimento di Scienze Economiche, Università' degli Studi di Bologna.
- e D. Siniscalco (1989), "L'OPEC e il mercato del greggio: uno schema di oligopolio", Economia Politica, n.1 (aprile), pp.31-64.
- Friedman, J.W. (1971), "A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames", Review of Economic Studies, (38) n.1, pp.1-12.
- (1986), Game Theory with Applications to Economics, Oxford, Oxford University Press.
- Fudenberg, D. ed E. Maskin (1986), "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information", Econometrica (54) n.3, pp.541-68.
- Harsanyi, J. (1967-68), "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players", Management Science (14), pp.159-82, 320-24, 486-503.
- Kohlberg, E. e J.F. Mertens (1986), "On the Strategic Stability of Equilibria", Econometrica (54), pp.1003-38.
- Kreps, D. (1990), A Course in Microeconomic Theory, Harvester Wheatsheaf, New York, capp.11-15.
- e R. Wilson (1982), "Reputation and Imperfect Information", Journal of Economic Theory (27) n.2, pp.253-79.
- , P. Milgrom, J. Roberts e R. Wilson (1982),

- "Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoner's Dilemma", Journal of Economic Theory (27), n.2, pp.245-52.
- Kuhn, H. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information", in H. Kuhn ed A. Tucker, Contribution to the Theory of Games, Princeton, N.J., Princeton University Press, vol.2, pp.193-216.
- Milgrom, P. e R. Roberts (1982a), "Predation, Reputation, and Entry Deterrence", Journal of Economic Theory (27) n.2, pp.280-312.
- Myerson, R. (1978), "Refinements of the Nash Equilibrium Concept", International Journal of Game Theory (7), pp.73-80.
- Radner, R. (1985), "Repeated Partnership Games with Imperfect Monitoring and No Discounting", Review of Economic Studies (53), pp.43-58.
- Rasmusen, E. (1988), Games and Information, New York, Basic Books.
- Rosenthal, R. (1981), "Games of Perfect Information, Predatory Pricing, and the Chain-store Paradox", Journal of Economic Theory (25) n.1, pp.92-100.
- Selten, R. (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit", Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft (121), pp.301-24.
- (1975), "Re-examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", International Journal of Game Theory (4), pp.25-55.
- (1978), "The Chain-store Paradox", Theory and Decision (9), pp.127-59.
- Tirole, J. (1988), The Theory of Industrial Organization, Cambridge, Mass., MIT Press, cap.11; di prossima pubblicazione presso Hoepli.
- Van Damme, E. (1987), Stability and Perfection of Nash Equilibrium, Berlin, Springer-Verlag.