

SENTIERO DI TRAVERSA E CONVERGENZA<sup>(\*)</sup>

Roberto Violi<sup>(+)</sup>

Marzo 1985

N. 14

(+) Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Bologna e  
Linacre College, Università di Oxford.

(\*) Sono debitore di un ringraziamento al prof. Zamagni per aver  
letto e commentato questo lavoro. Naturalmente egli non è mini-  
mamente responsabile per gli errori e le omissioni che il testo  
dovesse eventualmente contenere.

SENTIERO DI TRAVERSA E CONVERGENZA<sup>(\*)</sup>

Roberto Violi<sup>(+)</sup>

*Nero*

*Gennaio* 1985

N. 14

(+) Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Bologna e Linacre College, Università di Oxford.

(\*) Sono debitore di un ringraziamento al Prof. Zamagni per aver letto e commentato questo lavoro. Naturalmente egli non è minimamente responsabile per gli errori e le omissioni che il testo dovesse eventualmente contenere.

## I. INTRODUZIONE.

Lo scopo principale di questo lavoro è di *estendere i risultati* del paragrafo VII di Gozzi e Zamagni (9, 1982) (d'ora in poi G.Z.).

Tale paragrafo concerne lo studio della convergenza del sentiero di traversa al sentiero di crescita bilanciata per il modello neo-austriaco integrato, sotto l'ipotesi di salario fisso. Nell'analisi che svilupperemo si proverà <sup>che</sup> contrariamente a quanto congetturato in G.Z., tale convergenza ha luogo, sotto le <sup>stesse</sup> ipotesi assunte dagli autori. Il metodo di dimostrazione che impiegheremo, basato sulla trasformazione di Laplace, ci pare abbia un interesse che va ben oltre il risultato sopra menzionato. Esso consente infatti di mettere in luce assai più chiaramente alcuni aspetti specifici della analisi di traversa. Il risultato che ci pare più significativo è lo sganciamento dell'Effetto Ricardo dalla forma del progresso tecnico; proveremo infatti che, in generale (ovvero anche in assenza di troncamento dei vecchi processi obsoleti <sup>(1)</sup>), la riduzione dell'occupazione sul sentiero di traversa, rispetto al sentiero di riferimento, non è necessariamente biunivocamente collegata all'aumento del grado di meccanizzazione, sebbene <sup>sia</sup> proprio in questo caso che essa è più "probabile".

Un secondo interessante risultato concerne quello che è stato chiamato Effetto Hayek <sup>(2)</sup>, ovvero il verificarsi dell'incompatibilità, sul sentiero di traversa, tra consumi e investimenti (risparmi), incompatibilità che si manifesta con la negatività dei livelli di attivazione (di equilibrio) per i nuovi processi. Nella letteratura economica, soprattutto in quella di ispirazione "neoclassica", si tende ad accreditare l'idea che tale incompatibilità sia in larga misura legata all'aumento del grado di meccanizzazione della tecnologia. <sup>(3)</sup> Dimostreremo invece che <sup>il segno di</sup> tale effetto nulla ha a che vedere con la forma del progresso tecnico, il quale, eventualmente, può solo influenzare, <sup>in modo non necessariamente univoco</sup> l'intensità con cui tale effetto si manifesta.

Giova inoltre sottolineare che il metodo di analisi e i risultati possono, in linea di principio, essere estesi alla (più generale) versione non-integrata (multisetoriale) del modello neo-austriaco;

In particolare, ci preme mettere in risalto il fatto che la trattazione di quest'ultimo modello risulterebbe assai più agevole, rispetto a quella fino ad ora proposta<sup>(4)</sup>, grazie all'impiego del metodo della trasformazione di Laplace lungo le direttrici qui sviluppate.

Infine, ci permettiamo di richiamare l'attenzione sul teorema <sup>sezione 3 della</sup> provato nella Appendice matematica, la cui portata va oltre il quadro di analisi in cui questo lavoro si inserisce. Esso infatti ci pare rilevante all'interno della letteratura "del troncamento"<sup>(5)</sup>; non è questa la sede per una esposizione dettagliata della questione, per cui dovremo limitarci ad una telegrafica enunciazione del nostro risultato. È noto che l'assunzione di libera troncabilità del processo produttivo è una condizione sufficiente per l'esistenza di un unico (reale e positivo) saggio interno di rendimento. Se si assume poi che la condizione di annullamento del valore attuale del processo produttivo sia ristretta al solo campo reale (positivo), allora il saggio interno di rendimento è, in questo caso, un criterio accettabile di ordinamento dei progetti di investimento. Dimostreremo che l'estensione al campo complesso (con parte reale positiva) non altera il quadro precedente, ovvero la radice che annulla il valore attuale con la massima parte reale rimane l'unico saggio interno di rendimento. Questo risultato fa sì che, sotto l'ipotesi di troncabilità libera, il saggio interno di rendimento costituisce un criterio pienamente accettabile per l'ordinamento dei progetti d'investimento. Non viene affrontata qui la questione se questo teorema permane anche indebolendo l'ipotesi di troncabilità libera, sebbene ci pare di poter congetturare la persistenza della sua validità.

## II. LA DETERMINAZIONE DEI LIVELLI DI ATTIVAZIONE DEI PROCESSI PER IL SENTIERO DI TRAVERSA CON IL METODO DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE.

Nello svolgimento dell'analisi daremo per scontate tutte le assunzioni introdotte da G.Z., riportando nel testo solo quelle strettamente necessarie nello svolgimento delle argomentazioni. Il lettore è perciò rinviato a G.Z., se desidera avere un quadro esaustivo della struttura logica del modello neo-austriaco integrato, che utilizzeremo per l'analisi di traversa.

Pertanto iniziamo direttamente scrivendo le equazioni che descrivono il sentiero di traversa:

$$\int_0^T K(T-t)x(t)dt + \int_{\phi(T)-\theta^*}^0 K^*(T-t)x^*(t)dt = C(T) \quad (2.1)$$

$$\forall T \in [0, \theta]$$

$$\int_{T-\theta}^T K(T-t)x(t)dt + \int_{\phi(T)-\theta^*}^0 K^*(T-t)x^*(t)dt = C(T) \quad (2.2)$$

$$\phi(T) \equiv \begin{cases} T & \forall T \in [0, \theta^*] \\ \theta^* & \forall T > \theta^* \end{cases} \quad \forall T \in (\theta, +\infty]$$

dove:

$$K^*(T-t) \equiv b^*(T-t) - c_w w^* l^*(T-t); \quad \forall u \in [0, \theta^*] \quad (2.3)$$

$$u \equiv T-t$$

$$K(T-t) \equiv b(T-t) - c_w w^* l(T-t); \quad \forall u \in [0, \theta]$$

$$\theta, \theta^* > 0$$

rammentiamo che, in omaggio alla convenzione hicksiana, le grandezze asteriscate si riferiscono al vecchio processo. Inoltre,  $w^*$  indica il saggio di salario,  $c_w \in (0, 1)$  la propensione media (e marginale) al consumo dei lavoratori,  $(l(t), b(t))$  e  $(l^*(t), b^*(t))$  i flussi di inputs e di outputs per il nuovo ed il vecchio processo,  $x(T)$  e  $x^*(T)$  i livelli di attivazione, al tempo  $T$ , dei nuovi e dei vecchi processi. La (2.1)-(2.2) differisce dalla (3.1)-(3.11) di G.Z. in quanto abbiamo opportunamente compattato il caso di allungamento e di accorciamento della durata ottima.

Definiamo ora il sentiero di riferimento, ovvero l'equazione che avrebbe descritto l'andamento dei livelli di attivazione dei processi se non fosse intervenuto il mutamento tecnologico:

$$\int_{T-\theta^*}^T K^*(T-t)x^*(t)dt = C^*(T) \quad (2.4)$$

$$\forall T \in [0, +\infty]$$

dove  $C^*(T)$  sono i consumi extrasalariali al tempo  $T$ , così come lo sono  $C(T)$  per il sentiero di traversa nell'equazione (2.1)-(2.2). Quest'ultima può essere riscritta in forma compatta come segue:

$$\int_0^T K^+(T-t) X(t) dt + \int_{\phi(T)-\theta^*}^0 K^*(T-t) X^*(t) dt = C(T)$$

$$\forall T \in [0, +\infty]$$

$$K^+(u) \equiv \begin{cases} K(u) & \forall u \in [0, \theta] \\ 0 & \forall u > \theta \end{cases} \quad (2.5)$$

Analogamente la (2.4) è trasformabile in:

$$\int_0^T K^{*+}(T-t) X^*(t) + \int_{\phi(T)-\theta^*}^0 K^*(T-t) X^*(t) dt = C^*(T) \quad (2.6)$$

$$\forall T \in [0, +\infty]$$

$$K^{*+}(u) \equiv \begin{cases} K^*(u) & \forall u \in [0, \theta^*] \\ 0 & \forall u > \theta^* \end{cases}$$

Sottraendo infine la (2.6) dalla (2.5), si ottiene l'equazione:

$$\int_0^T K^+(T-t) X(t) dt = \int_0^T K^{*+}(T-t) X^*(t) dt + C(T) - C^*(T), \quad \forall T \in [0, \infty] \quad (2.7)$$

che descrive l'andamento dei livelli di attivazione dei nuovi processi durante tutto il sentiero di traversa, in funzione dei livelli di attivazione del sentiero di riferimento (ovvero dei vecchi processi) e della differenza  $\Delta C(T) = C(T) - C^*(T)$ , che rappresenta l'impatto del mutamento tecnologico sui consumi extrasalariali. Giova sottolineare che la (2.7) descrive il sentiero di traversa sotto l'ipotesi che vi sia un solo cambiamento tecnologico - che avviene al tempo  $T=0-$  e che il vecchio processo smetta di essere attivato<sup>(6)</sup>. La seconda ipotesi è chiaramente restrittiva e comunque ha senso solo sotto l'ipotesi di concorrenza perfetta (sui mercati dei capitali), mentre la prima comporta la concentrazione dell'analisi

su di un caso, apparentemente particolare, che sembra escludere la presenza di mutamenti tecnologici sequenziali plurimi. Le cose in realtà non stanno esattamente in questo modo; in effetti, se ad una qualsiasi data compresa tra  $(0, +\infty)$  avvenisse un ulteriore mutamento tecnologico, la (2.7) definirebbe, a sua volta, il nuovo sentiero di riferimento, mentre la (2.1)-(2.2), mutatis mutandis, descriverebbero la nuova traversa. Ciò chiarito, emerge un nuovo aspetto di interesse per la (2.7), con particolare riferimento a quelle date lontane dal tempo  $T=0$ , cioè distanti dall'innovazione.

Sembrerebbe infatti inutile, a prima vista, compattare la (2.1)-(2.2) in unica equazione - la (2.7) - che descrive il sentiero di traversa fino a  $+\infty$ . E' certo, come G.Z. (paragrafo VII) sottolineano, che prima di quella data sarà intervenuta qualche mutamento <sup>che</sup> invaliderà la (2.7) come descrizione dell'andamento effettivo dei livelli di attivazione dei processi. Nello stesso tempo però, come sottolineato poco sopra, la (2.7) si trasformerebbe nel nuovo sentiero di riferimento per la "seconda" innovazione e, poichè il sentiero di traversa - come vedremo meglio fra poco - dipende dai livelli di attivazione del sentiero di riferimento  $\forall T \in [0, +\infty]$ , ne segue che lo studio del comportamento asintotico della soluzione della (2.7) acquista pieno significato e rilevanza economica. Come è evidente, tale rilevanza e significato sono funzionali pienamente all'analisi di traversa, secondo una prospettiva sequenziale del mutamento tecnologico. Un pò paradossalmente si potrebbe concludere che l'analisi asintotica della (2.7) ha senso, <sup>io quando</sup> sotto il profilo economico, ~~se~~ tale equazione cessa di descrivere l'andamento effettivo dei livelli di attivazione dei processi. Vale inoltre la pena sottolineare, sotto il profilo interpretativo, il seguente aspetto della analisi di traversa, ciò il fatto che il sentiero <sup>che</sup> l'economia avrebbe seguito determina il sentiero che l'economia effettivamente segue. Non è questa la sede per l'esplicitazione delle implicazioni epistemologiche di questa situazione - un mondo possibile che determina un mondo effettivo - ci limitiamo a sottolineare come in economia, di solito, si ammetta <sup>no mente</sup> ~~solo~~ il passato e, talvolta, il futuro (attraverso le aspettative) quali determinanti del comportamento economico effettivo attuale.

Ciò chiarito, passiamo ora alla risoluzione della (2.7); a tale scopo introduciamo la definizione di trasformata di Laplace per una generica funzione  $f(u)$  definita nell'intervallo  $[0, +\infty]$ :

$$\int_0^{+\infty} f(u) e^{-su} du \equiv L[f(u); s], \quad \forall s \in S \quad (2.8)$$

dove  $S$  denota la regione del piano complesso in cui l'integrale che compare nella (2.8) esiste. Per semplificare l'analisi ed uniformarci a G.Z. - in particolare al paragrafo VII - introduciamo le ipotesi:

$$C^*(T) = C(T) \quad \forall T \in [0, +\infty] \quad (2.9)$$

ovvero il mutamento tecnologico non influisce sui consumi extrasalariali, e:

$$C_w = 1 \quad (2.10)$$

cioè tutto il salario dei lavoratori è consumato.

Inserendo la (2.9) e la (2.10) nella (2.7), si ha:

$$\int_0^T q^+(T-t) x(t) dt = \int_0^T q^{*+}(T-t) x^*(t) dt \quad (2.11)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

dove:

$$q^+(u) \equiv b^+(u) - w^* l^+(u); \quad q^{*+}(u) \equiv b^{*+}(u) - w^* l^{*+}(u) \quad (2.12)$$

$u \equiv T - t \quad \forall u \in [0, +\infty]$

rappresentano i rendimenti netti del vecchio e del nuovo processo a livello unitario. Applicando quindi la trasformata di Laplace alla (2.11), si ottiene:

$$L\left[\int_0^T q^+(T-t) x(t) dt, s\right] = L\left[\int_0^T q^{*+}(T-t) x^*(t) dt, s\right] \quad (2.13)$$

$\forall s \in S$

Sfruttando quindi il teorema di convoluzione per le trasformate di Laplace nella (2.13)<sup>(7)</sup>, si ha:

$$L\left[\int_0^T q^+(T-t) x(t) dt, s\right] = L[q^+(t), s] \cdot L[x(t), s] \quad (2.14)$$

$$L\left[\int_0^T q^{*+}(T-t) x^*(t) dt, s\right] = L[q^{*+}(t), s] \cdot L[x^*(t), s]$$

$\forall s \in S$

Sostituendo poi la (2.14) nella (2.13), si giunge alla forma canonica:



$$L[X(t),s] = L[q^{*+}(t),s] \cdot L[x^*(t),s] / L[q^+(t),s] \quad (2.15)$$

$\forall s \in S$

applicando ora ad entrambi i membri della (2.15) l'antitrasformata di Laplace <sup>(8)</sup>, si ottiene la soluzione della (2.11):

$$X(T) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{I}-i\beta}^{\bar{I}+i\beta} \frac{L[q^{*+}(t),s] \cdot L[x^*(t),s]}{L[q^+(t),s]} e^{sT} ds \quad (2.16)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

L'integrale che compare nella (2.16) è un integrale di linea (definito sul campo complesso), che, sotto certe condizioni <sup>(9)</sup>, può essere calcolato per mezzo del teorema dei residui:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\bar{I}-i\beta}^{\bar{I}+i\beta} F(s) e^{sT} ds = \sum_{i \in I} \text{RES} \{ F(s_i) e^{s_i T} \} \quad (2.17)$$

con:

$$F(s) \equiv L[q^{*+}(t),s] \cdot L[x^*(t),s] / L[q^+(t),s] \quad (2.18)$$

dove  $\{s_i, \forall i \in I\}$  sono le radici dell'equazione:

$$L[q^+(t),s] = \int_0^{\theta} q(t) e^{-st} dt = 0 \quad \forall s \in S \quad (2.19)$$

ed  $\bar{d}$  è tale per cui:

$$\text{MAX}_{i \in I} \text{RE} \{s_i\} < \bar{d} \quad (2.20)$$

la determinazione dei residui che compaiono nella (2.17) è svolta in Appendice, qui riportiamo solo il risultato finale:

$$\text{RES} \{ F(s_i) e^{s_i T} \} = \left[ - \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-s_i t} dt \cdot L[x^*(t),s] / \iint_{\theta}^{\theta} q(t) e^{-s_i t} dt du \right] e^{s_i T}, \quad \forall i \in I \quad (2.21)$$

Sostituendo infine la (2.21) nella (2.17) e, a sua volta, la (2.17) nella (2.16), si ottiene :

$$X(T) = - \frac{\left( \int_0^{\theta^*} q^*(u) e^{-zu} du \right) \int_0^{\infty} x^*(u) e^{-zu} du}{\int_0^{\theta} \int_t^{\theta} q(u) e^{-zu} du dt} e^{zT} \quad (2.22)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

$$- \sum_{i \in \{1, 2\}} \left\{ \left[ \int_0^{\theta^*} q^*(u) e^{-s_i u} du \right] \cdot \left[ \int_0^{\infty} x^*(u) e^{-s_i u} du \right] / \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-s_i t} dt du \right\} e^{s_i T}$$

La natura del lato destro della (2.22) dipende dalle radici dell'equazione (2.19); tale equazione ammette un'unica radice reale e positiva, che indichiamo con  $r$ , il saggio interno di rendimento del (nuovo) processo. In generale poi essa può presentare un numero (finito, oppure un'infinità numerabile) di radici complesse, la cui parte reale è (strettamente) minore di  $r$ .

Questo risultato consente di scrivere la (2.22) come segue:

$$X(T) = - h_0 e^{zT} - 2 \sum_{i \in \{1, 2\}} \{ h_i \cos \beta_i T + h'_i \sin \beta_i T \} e^{s_i T} \quad (2.23)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

dove  $h_0, h_i$  e  $h'_i$  sono delle costanti, la cui determinazione, salvo  $h_0$ , è relegata in appendice e

con:  $s_j = \alpha_j \pm i \beta_j \quad \forall j \in \{1, 2\}$

La (2.23) costituisce la forma definitiva della soluzione della equazione (2.11) in esame.

### III. EFFETTO HAYEK, EFFETTO RICARDO ED IL PROBLEMA DELLA CONVERGENZA AL SENTIERO DI CRESCITA BILANCIATA

Iniziamo questo paragrafo occupandoci prima di tutto del problema della convergenza al sentiero di crescita bilanciata della (2.23), che, ricordiamo, descrive l'andamento del sentiero di traversa. A tale scopo conviene rilevare che il primo termine al secondo membro è esattamente il sentiero di crescita bilanciata implicato nel problema di convergenza in questione; la condizione di convergenza richiede che:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \{ X(T) / -h_0 e^{zT} \} = 1 \quad (3.1)$$

dove:  $h_0 \equiv \int_0^{\theta^*} q^*(u) e^{-zu} du \int_0^{\infty} x^*(u) e^{-zu} du / \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-zt} dt du$

E' bene innanzitutto precisare che il sentiero di crescita bilanciata definito dalla costante  $-h_0$  è economicamente fattibile se e solo se l'integrale

$$\int_0^{\infty} X^*(u) e^{-zu} du \quad (3.2)$$

è positivo, in quanto il termine

$$\int_0^{\theta^*} q^*(u) e^{-zu} du \quad (3.3)$$

è certamente negativo, giacchè vale la seguente condizione di vitalità:

$$\int_0^{\theta^*} q^*(u) e^{-zu} du < \int_0^{\theta} q(u) e^{-zu} du = 0 \quad (3.4)$$

che comporta, in vista della monotonicità del valore capitale, un più elevato saggio interno di rendimento per il nuovo processo. Una ovvia condizione sufficiente per la positività della (3.2) è la non negatività dei livelli di attivazione del sentiero di riferimento, cioè:

$$X^*(T) \geq 0 \quad \forall T \in [0, +\infty] \quad (3.5)$$

tale condizione non è poi così scontata come a prima vista potrebbe sembrare. Proveremo più avanti, infatti, che, in generale, non vi è nulla che garantisca la non negatività dei livelli di attivazione per il sentiero di traversa  $\forall T \in [0, +\infty]$ . Siccome l'attuale sentiero di riferimento non è che un precedente sentiero di traversa, ne consegue che la (3.5) non è necessariamente soddisfatta. In tal caso si potrebbe dimostrare che la (2.23) è destinata, in un arco di tempo finito, a diventare irrimediabilmente negativa, in quanto sappiamo che:

$$r > \alpha_i \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.6)$$

cioè l'esponentiale più "rapido" è quello relativo a  $-h_0$ . Risulta, così, chiara la rilevanza della dinamica del sentiero di riferimento per l'andamento del sentiero di traversa, sebbene la (3.5) non sia sufficiente di per sé ad escludere la negatività dei livelli di attivazione durante qualche arco di tempo della traversa. Ciò chiarito, per semplice ispezione nella (3.1) (congiuntamente alla (2.23)) si ha che, in vista della (3.6), il limite in questione converge ad uno, ovvero l'economia tenderà a crescere (o a decrescere) asintoticamente al saggio  $r$ .

Contrariamente a quanto talvolta si tende ad accreditare, la (3.1) non implica che: <sup>(10)</sup>

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} d(x(T), -h_0 e^{2T}) = 0 \quad (3.7)$$

salvo il caso speciale in cui:

$$d_L < 0 \quad \forall L \in \{I/2\} \quad (3.8)$$

Il risultato qui trovato generalizza quello hicksiano <sup>(11)</sup>, che era ristretto al caso di point-input continuous-output e saggio costante di crescita dei consumi extrasalariali. Giova inoltre rilevare che la (3.1), non dipende dall'ipotesi (2.9), ovvero la convergenza in quanto tale non dipende dalla divergenza tra i consumi extrasalariali del sentiero di traversa e quelli del sentiero di riferimento. Tale divergenza, come si può facilmente dimostrare, influenza solo  $-h_0$ . Maggiore sarà  $\Delta C(T)$ , più probabile diventerà la negatività di  $-h_0$ , un fatto che implica la definitiva negatività dei livelli di attivazione del sentiero di traversa da una certa data in poi. Sotto il profilo economico, ciò significa che consumi troppo elevati -rispetto al sentiero di riferimento -possono compromettere la "percorribilità" del sentiero di traversa.

Veniamo ora ad analizzare le correzioni da apportare al paragrafo VII di G.Z. In primo luogo occorre sottolineare che questi autori applicano la trasformazione di Laplace solo alla fase successiva della traversa (nel caso di allungamento della durata ottima del nuovo processo), ovvero all'equazione <sup>(12)</sup>:

$$\int_0^T q^+(T-t)x(t)dt = C(T) \quad (3.9)$$

$$\forall T \in [\theta^*, +\infty]$$

Ciò non è corretto, in quanto la (3.9) può essere integrata solo nello intervallo  $[\theta^*, +\infty]$  -che è quello su cui è definita - e non, come la trasformazione di Laplace richiede, sull'intervallo  $[0, +\infty]$ .

La conseguenza di questo errore è chiaramente visibile poi nel fatto che il coefficiente  $-h_0$  sarebbe in questo caso sistematicamente negativo, quali che fossero le ipotesi rispetto a  $C(T)$  e  $x^*(T)$ .

In secondo luogo, la congettura formulata nella nota (62), come provato dal teorema <sup>nella sezione 3 della</sup> ~~esposto~~ <sup>Y</sup>appendice, non prege, ovvero sono da escludere radici della (2.19) con parte reale superiore ad  $r$ . Ciò comporta, come ricordato, che, a rigore, non si pone mai un problema di convergenza al sentiero di crescita bilanciata, ma semmai se tale sentiero è o meno economicamente fattibile (significativo). In altre parole, la questione è se il sentiero di traversa comporta livelli di attivazione dei processi che, prima o poi, diventano ~~negativi~~. Il problema va inquadrato, più in generale, nell'ambito dell'Effetto Hayek, ovvero se i livelli di attivazione del sentiero di traversa diventano o meno negativi per qualche intervallo di tempo. Ispezionando la (2.23), si trae che, in vista dell'indeterminatezza del segno dei coefficienti  $h_0, h_i, h'_i$ , nulla esclude che tale effetto possa verificarsi. Qualora invece si assumesse la positività dell'integrale (3.2) e l'assenza di radici complesse per l'equazione (2.19), ciò sarebbe sufficiente a scongiurarne la presenza. D'altro canto, mantenendo la prima ipotesi, la condizione necessaria perchè l'Effetto Hayek si verifichi è la presenza di radici complesse per l'equazione (2.19). Infine, la rimozione dell'ipotesi di positività della (3.2) è condizione sufficiente per la presenza di tale effetto. Altre condizioni - probabilmente più complicate - potrebbero essere individuate, il dato che però ci pare saliente è l'indipendenza, almeno per le condizioni qui proposte, dalla forma del cambiamento tecnologico. Infatti sia la (3.2) che la presenza o meno di radici complesse per la (2.19) nulla hanno a che vedere con il grado di meccanizzazione del nuovo processo rispetto al vecchio, nè con l'allungamento o l'accorciamento della durata ottimale e nemmeno con l'andamento dei consumi extrasalariali, una volta supposto che questi non mutino rispetto al sentiero di riferimento.

Prima di passare allo studio dell'Effetto Ricardo, occorre definire l'occupazione complessiva del sentiero di traversa e del sentiero di riferimento; tali grandezze sono pari rispettivamente a:

$$\int_0^T e^{+} (T-t) x(t) dt + \int_{\phi(\tau) - \theta^*}^0 e^{*} (T-t) x^{*}(t) dt \quad (3.10)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

e:

$$\int_0^T e^{**} (T-t) x^{*}(t) dt + \int_{\phi(\tau) - \theta^*}^0 e^{*} (T-t) x^{*}(t) dt \quad (3.11)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

dove la notazione impiegata è da ricollegare alla (2.1)-(2.3), (2.5)-(2.6) e alla (2.12). La differenza tra la (3.10) e la (3.11) segnala la differenza di occupazione tra il sentiero di traversa ed il sentiero di riferimento:

$$\int_0^T \ell^+(T-t) x(t) dt - \int_0^T \ell^{*+}(T-t) x^*(t) dt \quad (3.12)$$

$$\forall T \in [0, +\infty]$$

La negatività della (3.12) prende il nome di Effetto Ricardo in quanto significa che l'occupazione, se non fosse intervenuta l'innovazione, sarebbe stata, al tempo T, superiore. In generale, la (3.12) misura la variazione di occupazione dovuta all'innovazione. Siccome la (2.11) si può riscrivere come segue:

$$\int_0^T \ell^+(T-t) x(t) dt - \int_0^T \ell^{*+}(T-t) x^*(t) dt = \quad (3.13)$$

$$= \frac{1}{w^*} \left\{ \int_0^T b^+(T-t) x(t) dt - \int_0^T b^{*+}(T-t) x^*(t) dt \right\}, \quad \forall T \in [0, +\infty]$$

il lato sinistro della (3.13) coincide con la (3.12), possiamo limitare la attenzione solo al lato destro. In proposito la seguente ipotesi semplificatrice:

$$b(t) = b^*(t) \quad \forall t \in [0, \min(\theta^*, \theta)] \quad (3.14)$$

cioè l'uguaglianza del flusso di output per l'intervallo comune del tempo del processo, consente di ottenere:

$$\int_0^T b^{*+}(T-t) [x(t) - x^*(t)] dt + \chi(T), \quad \forall T \in [0, +\infty] \quad (3.15)$$

con:

$$\chi(T) = \begin{cases} 0 & \forall T \in [0, \min(\theta^*, \theta)] \\ \int_{\theta^*}^{\theta} b(t) x(T-t) dt & \text{se } \theta > \theta^* \\ -\int_{\theta}^{\theta^*} b^*(t) x^*(T-t) dt & \text{se } \theta^* > \theta \end{cases}$$

$$b^{*+}(u) = \begin{cases} b(u), & \forall u \in [0, \min(\theta, \theta^*) \\ 0 & \forall u > \min(\theta, \theta^*) \end{cases}$$

$$\forall T \in [\min(\theta^*, \theta), +\infty]$$

da cui emerge come la differenza di occupazione tra il sentiero di traversa ed il sentiero di riferimento dipende in larga misura, sebbene non esclusivamente (almeno con riferimento all'intervallo  $[\min(\theta^*, \theta), +\infty]$ ), dalla differenza nei livelli di attivazione tra i due sentieri.

Ciò comporta la necessità di un'ipotesi a priori per l'andamento dei livelli di attivazione del sentiero di riferimento. Al fine di semplificare la

trattazione -ed uniformarci a G.Z. (paragrafo V)- si assume che:

$$X^*(T) = X^*(0) e^{g^* T}, \quad g^* = z^* > 0 \quad \forall T \in [0, +\infty] \quad (3.16)$$

$$X^*(0) > 0$$

cioè i livelli di attivazione crescono al tasso costante  $g^*$ , pari al saggio interno di rendimento (del vecchio processo), sul sentiero di riferimento; si tratta, come è evidente, del caso di Golden Rule per l'accumulazione.

Sostituendo la (3.16) nella (3.2), si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} X^*(0) e^{(g^*-z)u} du = \frac{X^*(0)}{z-g^*} = \frac{X^*(0)}{z-z^*} \quad (3.17)$$

dove  $r^*$  è minore di  $r$ , per la condizione di vitalità (3.4), cosicchè la (3.17) è positiva. Inserendo quindi il lato destro della (3.17) nella (2.22) e giacchè<sup>(13)</sup>:

$$\frac{1}{r^*-z} \int_0^{\theta^*} q^*(u) e^{-zu} du = \int_0^{\theta^*} e^{-zu} \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*(t-u)} dt du \quad (3.18)$$

si ha l'espressione:

$$X(T) = \frac{X^*(0) \cdot \int_0^{\theta^*} e^{-u(z-z^*)} \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*t} dt du}{\int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-zt} dt du} e^{zT} + \quad (3.19)$$

$$\forall T \in [0, +\infty]$$

$$+ X^*(0) z \sum_{i \in \{1, 2\}} \left\{ \int_0^{\theta^*} e^{-u(d_i - z^*)} \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*t} dt du / \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-d_i t} dt du \right\} e^{d_i T}$$

da cui la soluzione definitiva<sup>(14)</sup>

$$X(T) = X^*(0) \left\{ v_0 e^{zT} + z \sum_{i \in \{1, 2\}} [v_i \cos \beta_i T + v_i' \sin \beta_i T] e^{d_i T} \right\} \quad (3.20)$$

$\forall T \in [0, +\infty]$

con:

$$v_0 \equiv \int_0^{\theta^*} e^{-u(z-z^*)} \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*t} dt / \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-zt} dt du$$

$$v_i \equiv \int_0^{\theta^*} e^{-u(d_i - z^*)} \cos \beta_i u \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*t} dt du - \tilde{d}_i \int_0^{\theta^*} e^{-u(d_i - z)} \sin \beta_i u \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*t} dt du$$

$$\tilde{d}_i \equiv - \left\{ \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-d_i t} \sin \beta_i t dt du / \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-d_i t} \cos \beta_i t dt du \right\}$$

$$\begin{aligned}
v_i' &\equiv \int_0^{\theta^*} e^{-u(d_i - z^*)} \sin \beta_i u \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^* t} dt du + d_i \int_0^{\theta^*} e^{-u(d_i - z^*)} \cos \beta_i u X \\
X &\int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^* t} dt du. \\
Y_i &\equiv \left( \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-d_i t} \sin \beta_i t dt du \right)^2 + \\
&+ \left( \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-d_i t} \cos \beta_i t dt du \right)^2 \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-d_i t} \cos \beta_i t dt du \\
&\forall i \in \{I/2\}
\end{aligned}$$

Il segno della differenza tra la (3.24) e la (3.16) è, in generale, indeterminato, giacchè è indeterminato il segno dei coefficienti  $v_i$  e  $v_i'$   $\forall i \in \{I/r\}$  mentre nulla sappiamo in merito alla relazione tra  $r^*$  e  $d_i$   $\forall i \in \{I/r\}$ . Resta pertanto indeterminato il segno della (3.15) e, di conseguenza, quello della (3.12). Giova sottolineare che, in linea di principio, l'indeterminatezza in questione è da ricollegarsi ancora una volta alla presenza di radici complesse per l'equazione (2.19). Questa condizione è peraltro solo sufficiente in questo caso; si supponga infatti di escluderne la presenza, non resterebbe quindi che indagare  $v_0$ , rammentando che, per la (3.4), si ha:

$$r > r^* \quad (3.21)$$

La differenza tra il sentiero di traversa ed il sentiero di riferimento si riduce a:

$$\begin{aligned}
X(T) - X^*(T) &\equiv X^*(0) [v_0 e^{zT} - e^{z^*T}] \\
&\forall T \in [0, +\infty]
\end{aligned} \quad (3.22)$$

cosicchè l'Effetto Ricardo si verifica o meno a seconda che:

$$v_0 \lesseqgtr 1 \quad (3.23)$$

Occorre in primo luogo sottolineare che  $v_0$  è positivo, poichè:

$$\begin{aligned}
\int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^* t} dt \geq 0 & \quad ; \quad \int_u^{\theta} q(t) e^{-z t} dt \geq 0 \\
\forall u \in [0, \theta^*] & \quad \quad \quad \forall u \in [0, \theta]
\end{aligned} \quad (3.24)$$



essendo  $\theta^*$  e  $\theta$  durate ottimali per i rispettivi processi .Al fine di mettere meglio in luce l'interpretazione economica della condizione (3.23), conviene considerare il seguente coefficiente:

$$\hat{v}_0 = \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q^*(t) e^{-z^*t} dt du / \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-zt} dt du \quad (3.25)$$

si constata facilmente che:

$$\hat{v}_0 > v_0 \quad (3.26)$$

e ciò in vista della (3.21).

La (3.23) e la (3.26) consentono di individuare la seguente condizione sufficiente per l'Effetto Ricardo:

$$\hat{v}_0 < 1 \quad (3.27)$$

la quale può essere così riscritta:

$$\frac{\int_0^{\theta^*} b^*(t) e^{-z^*t} dt}{\int_0^{\theta} b(t) e^{-zt} dt} \left\{ \frac{\int_0^{\theta^*} t \cdot b^*(t) e^{-z^*t} dt}{\int_0^{\theta^*} b^*(t) e^{-z^*t} dt} - \frac{\int_0^{\theta^*} t \ell^*(t) e^{-z^*t} dt}{\int_0^{\theta^*} \ell(t) e^{-z^*t} dt} \right\} / \left\{ \frac{\int_0^{\theta} t \cdot b(t) e^{-zt} dt}{\int_0^{\theta} b(t) e^{-zt} dt} - \frac{\int_0^{\theta} t \ell(t) e^{-zt} dt}{\int_0^{\theta} \ell(t) e^{-zt} dt} \right\} < 1 \quad (3.28)$$

Il secondo termine al primo membro rappresenta il rapporto tra il periodo di produzione del vecchio processo ed il periodo di produzione del nuovo processo, valutati al rispettivo saggio interno di rendimento.

Tale rapporto misura la relazione, in termini di grado di meccanizzazione tra i due processi; se è maggiore di uno significa che il nuovo processo è meno meccanizzato del vecchio e viceversa. Per quel che concerne il primo termine, trascurando momentaneamente la distinzione tra il caso di accorciamento e di allungamento della durata ottimale, la (3.14) e la (3.21) consentono di concludere che esso è, in generale, maggiore di uno. Nel caso di allungamento, coeteris paribus, sarà più piccolo, mentre sarà più grande nel caso di accorciamento.

Pertanto aumento del grado di meccanizzazione e allungamento della durata ottimale è il caso che più probabilmente, sebbene non necessariamente, soddisfa la (3.28), mentre il caso di accorciamento e di diminuzione del grado di mecca-

nizzazione viola certamente la (3.28). Tale violazione, peraltro, non esclude di per sè che  $v_0$  possa risultare ugualmente minore di uno, dando luogo così ugualmente all'Effetto Ricardo in presenza di condizioni "opposte" a quelle usuali.

Il carattere di "indeterminatezza" di queste conclusioni, al pari di quelle tratte per l'Effetto Hayek, più che un punto di debolezza di questi risultati, costituisce in realtà un punto di forza, poichè vale a dimostrare l'asserto che tali effetti non dipendono univocamente dalla forma del progresso tecnico. Essi sembrano per così dire connaturati al processo di transizione, che consegue all'introduzione di un'innovazione tecnologica.

In una certa misura queste conclusioni non coincidono perfettamente con alcuni risultati di Belloc (6, 1980) e G.Z.; ciò è dovuto sostanzialmente alla assenza di certe ipotesi restrittive sui profili temporali del vecchio e del nuovo processo<sup>(16)</sup>. Esse consentono una utile semplificazione quando, come

è il caso per questi autori, invece della trasformazione di Laplace, si impieghi il metodo del "nucleo risolvete" nella ricerca della soluzione della (2.1)-(2.2). Tuttavia <sup>tali ipotesi</sup> rischiano di occultare aspetti certamente non secondari sotto il profilo economico; in questo senso si giustifica la proposta di un metodo, quale quello della trasformazione di Laplace, che, facendo a meno di queste ipotesi restrittive, riesce nel contempo a mettere in chiaro nuovi aspetti dell'analisi di traversa.

#### IV. APPENDICE

1.

Le ipotesi relative ai profili temporali dei processi produttivi

$\{l(t); b(t)\}_{t=0}^{t=\hat{\theta}}$  e  $\{l^*(t); b^*(t)\}_{t=0}^{t=\hat{\theta}^*}$  sono le stesse di G.Z. (pag.314).

L'ipotesi di troncabilità libera consente di visualizzare come segue la scelta della durata ottimale del processo :

$$\text{MAX}_{\theta \in [0, \hat{\theta}]} \int_0^{\theta} q(t) e^{-\rho t} dt \quad (4.1)$$

$$\rho \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{MAX}_{\theta^* \in [0, \hat{\theta}^*]} \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-\rho t} dt$$

E' ottima la durata che massimizza il valore attuale -al saggio  $\rho$  - del processo . Le condizioni di primo e secondo ordine che una durata ottima deve soddisfare si ottengono differenziando gli integrali della (4.1):

$$q(\theta)e^{-\rho\theta} = 0, q^*(\theta^*)e^{-\rho\theta^*} = 0 \Rightarrow q(\theta) = 0, q^*(\theta^*) = 0 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{dq}{d\theta} \right|_{e^{-\rho\theta}} < 0, \left. \frac{dq^*}{d\theta^*} \right|_{e^{-\rho\theta^*}} < 0 \Rightarrow \left. \frac{dq}{d\theta} \right| < 0, \left. \frac{dq^*}{d\theta^*} \right| < 0 \quad (4.3)$$

$\rho \in \mathbb{R}_+$

Dalla definizione di durata ottimale, la quale esiste per le ipotesi qui assunte, si trae che:

$$\int_t^\theta q(u) e^{-\rho u} du \geq 0 \quad \forall t \in [0, \theta] \quad (4.4)$$

$$\int_t^{\theta^*} q^*(u) e^{-\rho u} du \geq 0 \quad \forall t \in [0, \theta^*] \quad (4.5)$$

e quindi integrando:

$$\int_0^\theta \int_t^\theta q(u) e^{-\rho u} du dt > 0 \quad (4.6)$$

$$\int_0^{\theta^*} \int_t^{\theta^*} q^*(u) e^{-\rho u} du dt > 0 \quad (4.7)$$

Inoltre dalla (4.2)-(4.3) si ha che esistono due date del processo  $t_1, t_1^*$

$$q(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_1, \theta] \quad (4.8)$$

$$q^*(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_1^*, \theta^*] \quad (4.9)$$

2.

Passiamo ora alla determinazione dei residui che compaiono nella (2.21); a tale scopo introduciamo il seguente .

LEMMA 1: siano  $f(s)$  e  $g(s)$  due funzioni analitiche in  $s_i$   $\forall i \in I$  e  $f'(s_i) \neq 0$ ,  $\forall s_i$  <sup>cons. radice</sup>  $\sqrt{\text{semplice}}$ ,

$\forall i \in I$ , allora:

$$\text{RES}_{s=s_i} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f(s_i)}{\left. \frac{dg(s)}{ds} \right|_{s_i}} \quad \forall i \in I \quad (4.10)$$

DIMOSTRAZIONE: APOSTOL ( 3 , 1977), pag. 476.

Ponendo ora:

$$f(s) \equiv \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-st} dt \cdot \int_0^{+\infty} x^*(u) e^{-su} du \quad (4.11)$$

$$g(s) \equiv \int_0^{\theta} q(t) e^{-st} dt, \quad (4.12)$$

e, poichè sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann per la derivazione di una funzione di variabile complessa<sup>(17)</sup>, si ha che:

$$\frac{dg(s)}{ds} = - \int_0^{\theta} t q(t) e^{-st} dt = - \int_0^{\theta} \int_u^{\theta} q(t) e^{-st} dt du \quad (4.13)$$

Dalla (4.11) e dalla (4.13), in vista del lemma 1, si ottiene il lato destro della (2.21)

Q.E.D.

3.

In questa sezione ci occuperemo della dimostrazione della (3.6). In primo luogo vale la pena ricordare che la positività dell'output netto, cioè:

$$\int_0^{\theta} q(t) dt > 0, \quad \int_0^{\theta^*} q^*(t) dt > 0 \quad (4.14)$$

è <sup>necessaria e</sup> condizione ~~ad~~ sufficiente ~~ad~~ assicurare l'esistenza dei saggi interni di rendimento  $r$  ed  $r^*$ , dato che la (4.13), calcolata in  $r$ , è pari alla (4.6) cambiata di segno (un ragionamento analogo vale per il vecchio processo).

Ciò posto, introduciamo tre lemmi preparatori;

LEMMA 2: sia data la seguente equazione:

$$\int_{a_1}^{a_2} z(t) e^{-st} dt = b \quad s \in S \subseteq C \quad (4.15)$$

con:

$$z(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a_1, a_2], \quad b > 0 \quad (4.16)$$

supponiamo che la (4.15) ammetta una soluzione reale  $s=m$ ; se esiste una qualche soluzione complessa, essa avrà la parte reale strettamente inferiore ad  $m$ .

DIMOSTRAZIONE: segue nelle linee essenziali Bellman e Cooke (5, 1963), pag. 232, 7.11.

i quali hanno provato un analogo risultato.

Denotiamo con  $\bar{s} = \bar{\alpha} + i\bar{\beta}$  una generica radice complessa della (4.15);

si ha pertanto che:

$$b = \left| \int_{a_1}^{a_2} z(t) e^{-(\bar{\alpha} + i\bar{\beta})t} dt \right| \quad (4.17)$$

dove  $|\cdot|$  indica il passaggio al modulo.

Poichè:

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_1}^{a_2} z(t) e^{-(\bar{\alpha} + i\bar{\beta})t} dt \right| &< \int_{a_1}^{a_2} |z(t) e^{-(\bar{\alpha} + i\bar{\beta})t}| dt = (4.18) \\ &= \int_{a_1}^{a_2} |z(t)| e^{-\bar{\alpha}t} dt = \int_{a_1}^{a_2} z(t) e^{-\bar{\alpha}t} dt \end{aligned}$$

ne segue che:

$$b < \int_{a_1}^{a_2} z(t) e^{-\bar{\alpha}t} dt \quad (4.19)$$

da cui, in vista della (4.16), si può concludere:

$$\bar{\alpha} < m \quad (4.20)$$

Q.E.D.

LEMMA 3: sia  $f(s)$  una funzione analitica nell'aperto  $S$  del piano complesso  $C$ ;

sia poi  $\bar{s} \in S$  un punto tale per cui:  $f(\bar{s}) \neq 0$ .

Esiste allora un disco aperto  $B(\bar{s})$ , centrato in  $\bar{s}$ , tale per cui:

$$f(s) \neq 0 \quad \forall s \in B(\bar{s}) \subseteq S \quad (4.21)$$

DIMOSTRAZIONE: Apostol (3, 1977), pag. 452, teorema 16.23.

LEMMA 4 (teorema di Hurwitz): sia  $S$  una regione del piano complesso  $C$  e supponiamo che  $\{f_n(s)\}$ , appartenenti ad  $H(S)$  - che è la collezione delle funzioni analitiche su  $S$  - converga (uniformemente) a  $f(s)$ .

Se  $f(s)$  non è identicamente nulla  $\forall s \in \{B(\hat{s}, R) \cup \partial B(\hat{s}, R)\}$

e  $f(s) \neq 0 \quad \forall s \in \delta B(\bar{s}, R), R > 0$ , esiste allora un intero  $N$  tale per cui  $\forall n \geq N, f_n$  e  $f$  hanno lo stesso numero di radici.

DIMOSTRAZIONE: Conway (8, 1973), pag. 148, teorema 25.

Poniamo ora:

$$a_1 \equiv t_1, \quad \theta \equiv a_2, \quad q(t) \equiv z(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1, \theta] \quad (4.22)$$

$$b \equiv -\int_0^{t_1} q(t) e^{-zt} dt > 0$$

cosicchè l'equazione:

$$f(s) \equiv \int_{t_1}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{t_1} q(t) e^{-zt} dt = 0 \quad s \in S \quad (4.23)$$

possiede, per costruzione, la radice reale  $r$ , mentre, per il lemma 2, le eventuali radici complesse hanno parte reale strettamente minore di  $r$ .

Si consideri ora l'equazione:

$$\int_0^{\theta} q(t) e^{-st} dt = 0 \quad \forall s \in S \quad (4.24)$$

e la sequenza:

$$\int_{z_n^0}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{z_n^0} q(t) e^{-zt} dt \quad (4.25)$$

con:  $z_n^0 \equiv t_1 p^n, \quad p \in (0, 1) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

Per  $n=0$  si

ha il lato sinistro della (4.23), mentre per  $n \rightarrow +\infty$  il lato sinistro della (4.24), data la convergenza uniforme della (4.25)<sup>(18)</sup>.

Procediamo ora per assurdo e supponiamo che la (4.24) ammetta una soluzione tale per cui:

$$\bar{s} \equiv \bar{a} + i\bar{b} \quad \bar{a} \geq r, \quad \bar{b} \neq 0 \quad (4.26)$$

in vista del lemma 3, esiste un disco  $B(\bar{s}, R), R > 0$ , tale per cui:

$$\int_0^{\theta} q(t) e^{-st} dt \neq 0 \quad \forall s \in \{B(\bar{s}, R) \setminus \bar{s}\} \quad (4.27)$$

Si consideri ora il disco  $B(\bar{s}, h), h \equiv \text{MIN}(\bar{a} - r, R)$ , che è per costruzione contenuto nel semipiano complesso alla destra della retta  $s = \bar{a}$ . Sappiamo che in tale semipiano, e quindi in tale disco, la (4.23) non ha soluzioni.

Assumendo la (4.26), dimostreremo il risultato contrario, cioè una contraddizione, per cui la (3.6) è dimostrata.

A tale scopo applichiamo alla (4.25) il lemma 4, cosicchè esiste un intero  $N_1$  tale per cui l'equazione:

$$\int_{\tau_{N_1}^0}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{\tau_{N_1}^0} q(t) e^{-zt} dt = 0 \quad (4.28)$$

$s \in B(\bar{s}, h)$

ha le stesse <sup>numero di</sup> radici della (4.24) in  $B(\bar{s}, h)$ .

Si definisca ora una nuova sequenza:

$$\int_{\tau_n^1}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{\tau_n^1} q(t) e^{-zt} dt \quad (4.29)$$

con:  $\tau_n^1 \equiv t_1 p^n + (1-p^n) \tau_{N_1}^0 \quad \forall n=0,1,2,\dots$

a cui applichiamo il lemma 4, per cui esiste un intero  $N_2$  tale per cui l'equazione:

$$\int_{\tau_{N_2}^1}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{\tau_{N_2}^1} q(t) e^{-zt} dt = 0 \quad (4.30)$$

$s \in B(\bar{s}, h)$

ha lo stesso numero di radici - ovvero una - della (4.24). Iterando  $m$  volte quest'ultima procedura si ha che la sequenza:

$$\int_{\tau_n^m}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{\tau_n^m} q(t) e^{-zt} dt \quad (4.31)$$

con:  $\tau_n^m \equiv t_1 p^n + (1-p^n) \tau_{N_m}^{m-1} \quad \forall n=0,1,2,\dots$

in vista del lemma (4), ammette un intero  $N_{m+1}$  tale per cui l'equazione:

$$\int_{\tau_{N_{m+1}}^m}^{\theta} q(t) e^{-st} dt + \int_0^{\tau_{N_{m+1}}^m} q(t) e^{-zt} dt = 0 \quad (4.32)$$

$s \in B(\bar{s}, h)$

ammette una radice. Siccome per costruzione, accade che:

$$\tau_{N_1}^0 < \tau_{N_2}^1 < \dots < \tau_{N_{m+1}}^m < \dots, \quad \tau_{N_{m+1}}^m \in [0, t_1] \quad (4.33)$$

$\forall m=0,1,2,\dots$

facendo tendere  $m$  a  $+\infty$  si può concludere che:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \tau_{N_{m+1}}^m = t_1 \quad (4.34)$$

cioè l'equazione (4.23) dovrebbe ammettere nel disco  $B(\bar{s}, h)$  una radice, in contraddizione con quanto stabilito in precedenza.

Q.E.D.

4.

La determinazione dei coefficienti  $h_i$  e  $h'_i \forall i \in \{I/r\}$  che compaiono nella (2.23) richiede i due seguenti lemmi:

LEMMA 5: se, per  $f: C^n \rightarrow C^m$ ,  $f(s)$  è esprimibile mediante un numero finito di operazioni razionali - le quattro operazioni - e di passaggi al coniugato applicabili alle componenti complesse di  $s \in C^n$ , allora:

$$f(\bar{s}) = \overline{f(s)} \quad (4.35)$$

dove il tratto sopra le variabili indica il passaggio al coniugato

LEMMA 6: siano  $x$  e  $y$  due numeri complessi ( $y \neq 0$ ), il quoziente  $z = x:y$  è dato da:

$$z_1 = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \quad z_2 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \quad (4.36)$$

con:

$$z \equiv z_1 + i z_2, \quad x \equiv x_1 + i x_2, \quad y \equiv y_1 + i y_2$$

DIMOSTRAZIONE: rinviamo per entrambi i lemmi a Castagnoli e Peccati (7, 1979)

APPENDICE.

Riconsideriamo in primo luogo la (2.21) escludendo la radice  $r$ , dato che ci occupiamo solo delle radici complesse della (2.19), le quali compaiono a coppie coniugate. Il lato destro, in forza della (4.11)-(4.13), si può riscrivere compattamente come segue:

$$f(s_i) / (dg(s)/ds)|_{s_i} \quad \forall i \in \{I/r\} \quad (4.37)$$

mentre, per le radici coniugate, in vista del lemma 5, si ha:

$$e^{s_i T} \left[ f(\bar{s}_i) / (dg(s)/ds)|_{\bar{s}_i} \right] = \overline{\left\{ f(s_i) / (dg(s)/ds)|_{s_i} \right\}} e^{s_i T} \quad (4.38)$$

$\forall i \in \{I/r\}$

sommando quindi la (4.37) e la (4.38) si ottiene per la definizione di coniugato:



$$2 \operatorname{RE} \left\{ f(s_i) / (dg(s)/ds)|_{s_i} \right\} e^{s_i T} \quad (4.39)$$

$\forall i \in \{I/2\}$

Applicando il lemma (6) al rapporto che compare nella (4.37), si ha:

$$x_1 = \operatorname{RE} f(s_i), \quad x_2 = \operatorname{IM} f(s_i) \quad (4.40)$$

$$y_1 = \operatorname{RE} \{ dg(s)/ds|_{s_i} \}, \quad y_2 = \operatorname{IM} \{ dg(s)/ds|_{s_i} \}$$

moltiplicando quindi il lato destro della (4.36) per l'esponenziale riscritto in forma trigonometrica, si ottiene:

$$e^{d_i T} [z_1 \cos \beta_i T - z_2 \sin \beta_i T] + i e^{d_i T} [z_2 \cos \beta_i T + z_1 \sin \beta_i T]; \quad s_i \equiv d_i + i \beta_i \quad \forall i \in \{I/2\}; \text{ dove:} \quad (4.41)$$

$$z_1 = \frac{y_1(x_1 + \frac{y_2}{y_1} x_2)}{(y_1^2 + y_2^2)} \equiv d(x_1 + \hat{d} x_2); \quad -z_2 = \frac{y_1(x_1 \hat{d} - x_2)}{(y_1^2 + y_2^2)}; \quad \hat{d} \equiv \frac{y_2}{y_1}$$

$d \equiv y_1 y_1^2 + y_2^2$

la cui parte reale, in forza della (4.39), dà luogo ai coefficienti cercati:

$$z_1^i \equiv -h_i; \quad z_2^i \equiv h_i; \quad y_1^i \equiv \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-d_i t} \cos \beta_i t dt du$$

$$x_1^i \equiv \int_0^{+\infty} x^*(u) e^{-d_i u} \cos \beta_i u du \cdot \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-d_i t} \cos \beta_i t dt -$$

$$- \int_0^{+\infty} x^*(u) e^{-d_i u} \sin \beta_i u du \cdot \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-d_i t} \sin \beta_i t dt; \quad y_2^i \equiv \int_0^{\theta^*} \int_u^{\theta^*} q(t) e^{-d_i t} \sin \beta_i t dt du$$

$$x_2^i \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} x^*(u) e^{-d_i u} \cos \beta_i u du \cdot \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-d_i t} \sin \beta_i t dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} x^*(u) e^{-d_i u} \sin \beta_i u du \cdot \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-d_i t} \cos \beta_i t dt \right\} \quad \forall i \in \{I/2\}$$

Sostituendo poi la (3.17) e la (3.18) nella (4.11) si ottengono i coefficienti  $v_i$  e  $v_i'$   $\forall i \in \{I/r\}$  della (3.20).

5.

Passiamo ora alla dimostrazione della (3.13); a tale scopo definiamo la funzione:

$$V^*(t) \equiv \int_t^{\theta^*} q^*(u) e^{-z^*(u-t)} du \quad \forall t \in [0, \theta^*] \quad (4.43)$$

da cui differenziando si ha:

$$\frac{dV^*(t)}{dt} = r^* V^*(t) - q^*(t) \quad \forall t \in [0, \theta^*] \quad (4.44)$$

moltiplicando ora entrambi i lati della (4.44) per  $e^{-rt}$  ed integrando, si ottiene:

$$\int_0^{\theta^*} \frac{dV(t)}{dt} e^{-rt} dt = r^* \int_0^{\theta^*} V(t) e^{-rt} dt - \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-rt} dt \quad (4.45)$$

e poichè:

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta^*} \frac{dV(t)}{dt} e^{-rt} dt &= r \int_0^{\theta^*} V(t) e^{-rt} dt - \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-r^*t} dt = \\ &= r \int_0^{\theta^*} V(t) e^{-rt} dt \end{aligned} \quad (4.46)$$

sostituendo la (4.46) nella (4.45), si conclude, riordinando i termini, che:

$$\frac{1}{r^* - r} \int_0^{\theta^*} q^*(t) e^{-rt} dt = \int_0^{\theta^*} V(t) e^{-rt} dt \quad (4.47)$$

ovvero la (3.18).

Per quel che concerne la determinazione della (3.28) dalla (3.25) è sufficiente notare che, per la definizione di saggio interno di rendimento:

$$w^* = \int_0^{\theta} b(t) e^{-rt} dt / \int_0^{\theta} l(t) e^{-rt} dt \quad (4.48)$$

$$w^* = \int_0^{\theta^*} b^*(t) e^{-r^*t} dt / \int_0^{\theta^*} l^*(t) e^{-r^*t} dt$$

sostituendo quindi la (4.48) nella (3.25), si mette in evidenza al numeratore:

$$\int_0^{\theta^*} b^*(t) e^{-r^*t} dt \quad (4.49)$$

mentre al denominatore:

$$\int_0^{\theta} b(t) e^{-rt} dt \quad (4.50)$$

da cui il lato sinistro della (3.28).

Q.E.D.

NOTE

- (1) Si veda Belloc ( 6 ,1980) cap.8,sottosezione 2,oppure Gozzi e Zamagni ( 9 ,1982) par.VI per la dimostrazione dell'Effetto Ricardo connesso al troncamento dei processi obsoleti.
- (2) La denominazione è di G.Z. (pag.323).
- (3) Invero Hayek,uno degli autori che ha più insistentemente sottolineato questo aspetto,tende a <sup>I'accento</sup> mettere <sup>su</sup>  $V$  più che <sup>su</sup> l'incremento dell'intensità fisica del capitale,<sup>su</sup> l'aumento della "attesa" per il ritorno dell'investimento (Hayek ( 11,1941)).
- (4) Oltre a G.Z. e Belloc,si veda in proposito anche Amendola( 1 ,1976) e Baldone ( 4 ,1984).
- (5) E' naturalmente impossibile dare qui un resoconto,anche parziale della letteratura in materia,il cui punto di arrivo è indubbiamente il lavoro di Ross,Spatt e Dybvig ( 13,1980). Per un interessante inquadramento della problematica e per alcuni "nuovi" risultati si veda Gronchi ( 10 ,1984).
- (6) Sia consentito il rinvio a Violi( 15,1983) in cui si analizza una traversa "schumpeteriana",dove "convivono" imprenditori innovatori e imitatori.
- (7) Per la dimostrazione di tale teorema si veda Amerio ( 2 ,1981),vol.III, parte prima,pag.214.
- (8) Si rinvia ad Amerio ( 2 ,1981) III,parte prima,pag.222,equazione (4.8) .
- (9) Per le condizioni richieste nell'applicazione del teorema dei residui di Cauchy,si veda Apostol ( 3 ,1977),pag.463,teorema 16.37 e pag.468,teorema 16.39.
- (10) La funzione  $d(\cdot)$  che compare nella (3.7) è una funzione di distanza; per un esempio in cui la stabilità relativa - che è la nozione di stabilità implicata nella (3.1)-non implica la (3.7),si veda Takayama ( 14,1974),pag.511.
- (11) Hicks ( 12,1973),pag.243-244.
- (12) La (3.9) corrisponde,nella nostra notazione,alla (7.1) di G.Z.
- (13) La dimostrazione della (3.18) è in Appendice (sezione 5).
- (14) La determinazione delle costanti che compaiono nella (3.20) è collegata con quella effettuata per la (2.23),perciò rinviamo all'Appendice (sezione 4).

- (15) Per la dimostrazione di questo passaggio si veda la seconda parte della sezione 5 dell'Appendice.
- (16) Tali ipotesi sono atte ad assicurare che  $\dot{K}(T-t) \geq 0$ , che, a sua, garantisce la positività del nucleo dell'equazione integrale di Volterra (2.1) di prima specie, ricondotta, per differenziazione, al caso canonico di seconda specie (G.Z. pag.321).
- (17) Per queste condizioni si veda Apostol (3, 1977), pag.118, teorema 5.22. Lasciamo al lettore come esercizio verificare che la (4.12) soddisfa davvero tali condizioni.
- (18) Per la definizione di convergenza uniforme si veda Apostol (3, 1977), pag.221, definizione 9.1. Lasciamo ancora al lettore come esercizio il controllo di tale convergenza per le sequenze (4.25), (4.29) e (4.31).

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- (1) Amendola M., Macchine, produttività, progresso tecnico, Milano, Isedi, 1976.
- (2) Amerio L., Analisi matematica, 3 voll., Torino, Utet, 1981.
- (3) Apostol T.M., Mathematical analysis, II ed., Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1977.
- (4) Baldone S., Integrazione verticale, struttura temporale dei processi produttivi e transizione tra le tecniche, "Economia Politica", 1984.
- (5) Bellman R. - Cooke K., Differential-difference equations, New York, Academic Press, 1963.
- (6) Belloc B., Croissance économique et adaptation du capital productif, Paris, Economica, 1980.
- (7) Castagnoli E. - Peccati L., Matematica per l'analisi economica: algebra lineare e sistemi dinamici, Milano, Etas, 1979.
- (8) Conway J.B., Functions of one complex variable, Berlin, Springer-Verlag, 1973.
- (9) Gozzi G. - Zamagni S., Crescita non uniforme e struttura produttiva: un modello di traversa a salario fisso, "Giornale degli economisti e annali di economia", 1982.

- (10) Gronchi S., Internal rate of return and projects evaluation, Quaderni dello Istituto di Scienze Economiche e Bancarie, Siena, 1984.
- (11) Von Hayek F., The pure theory of capital, London, Macmillan, 1941.
- (12) Hicks J., Capital and time. A neo-austrian theory, London, Oxford University Press, 1973 (tr. it. Capitale e tempo, Milano, Etas, 1973).
- (13) Ross S. - Spatt C. - Dybvig P., Present values and internal rates of return, "Journal of Economic Theory", 1980.
- (14) Takayama A., Mathematical Economics, Hinsdale (Ill.), The Dryden Press, 1974.
- (15) Violi R., Equilibrio e disequilibrio nell'analisi di traversa, Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Bologna, Bologna, 1983, (in corso di pubblicazione presso gli "Annali della Fondazione Einaudi").

## RIASSUNTO

Lo scopo principale di questo lavoro è di *estendere i risultati* del paragrafo VII di Gozzi e Zamagni (9,1982), paragrafo che concerne lo studio della convergenza del sentiero di traversa al sentiero di crescita bilanciata per il modello neo-austriaco integrato, sotto l'ipotesi di salario fisso. Attraverso il corretto impiego della trasformata di Laplace, si dimostra che, contrariamente a quanto congetturato dagli autori, tale convergenza ha luogo. Inoltre si evidenzia la rilevanza economica del comportamento asintotico del sentiero di traversa, qualora si considerino i mutamenti tecnologici in una prospettiva sequenziale, ovvero come un flusso di innovazioni nel tempo. In secondo luogo, due nuovi risultati sono provati: uno concernente l'Effetto Ricardo, l'altro l'Effetto Hayek. Con riferimento al primo, la differenza di occupazione tra sentiero di traversa e sentiero di riferimento viene sgangiata in generale da qualsiasi ipotesi concernente il grado di meccanizzazione dell'innovazione tecnologica, così come la durata del processo produttivo. Per l'Effetto Hayek, analogamente, si prova tale sganciamento, ovvero per la incompatibilità tra consumi e investimenti (risparmi) sul sentiero di traversa, manifestantesi con la negatività dei livelli di attivazione (di equilibrio) per i nuovi processi.

## SUMMARY

The principal aim of this paper is to bring *an extension* to the paragraph VII of Gozzi and Zamagni (9,1982), paragraph concerning the convergence of traverse path to the balanced growth path for the neo-austrian integrated model, under the hypothesis of fix wage. By means of a correct use of Laplace transformation, one proves that, contrarily to what has been conjectured by the authors, such a convergence takes place. Moreover we point out the economic relevance of the asymptotic behaviour of traverse path, in so far as one considers the technological changes in a sequential perspective, namely as a stream of innovations over time. Secondly two new results are proved, concerning on the one hand the Ricardo Effect and, on the other hand, the Hayek Effect. In the first case, the difference of employment between traverse path and reference path is detached, in general, from any hypothesis concerning the mechanization degree of the technological innovation, as well as the optimal length of the production process. In the second case, in a similar fashion, such a detachment is proved for the incompatibility between consumptions and in-

vestments (savings), which is characterized by the negativity of the activity levels (in equilibrium) for the new processes.