Prof. Daniele Cattani

Appunti delle lezioni di Cosmologia

A.A. 2001/2002

Corso di Laurea in Astronomia

Università di Bologna

a cura di Giorgio Spada, Francesco Mainardi, Daniele Melini

CC BY NC ND

PREFAZIONE

Le qualità didattiche del Prof. Daniele Cattani sono state ben note agli studenti e colleghi nei quarant'anni circa di insegnamento di corsi di Fisica presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. di UNIBO. In particolare, tali doti hanno incuriosito uno di noi (FM), che come collega di corsi di Fisica Matematica ha voluto interessarsi delle sue note che riguardavano l'Elettromagnetismo e l'Ottica, apprezzandone gli aspetti didattici.

Venuto a conoscenza di note scritte a mano e non pubblicate, riguardanti un corso di Cosmologia che il Prof. Daniele Cattani ha tenuto nell'Anno Accademico 2001/02, FM ha ritenuto opportuno contattare GS e DM per poterle rendere accessibili mediante una traduzione in LaTeX e la pubblicazione nella Biblioteca digitale di UNIBO.

Pertanto, siamo lieti e onorati di potere curare l'acclusa pubblicazione confidando che sia apprezzata dagli utilizzatori di ALMA DL interessati alla Cosmologia.

Francesco MAINARDI, già docente di Fisica Matematica presso UNIBO.

Daniele MELINI, ricercatore presso l'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Roma.

Giorgio SPADA, Professore di Geofisica presso UNIBO.

Bologna 30 Novembre 2022

Appunti delle lezioni di Cosmologia A.A. 2001/2002 - Corso di Laurea in Astronomia Università di Bologna

Daniele Cattani

17 novembre 2022

Sommario

Queste note sono state trascritte in LaTeX dalle dispense manoscritte delle Lezioni tenute nell'A.A. 2001/2002 nella Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell'Università di Bologna dal Prof. Daniele Cattani, libero Docente in Astrofisica Teorica, e debitamente aggiornate con le ultime scoperte.

Indice

1 Introduzione **2**

2 Il ragionamento di Olbers e la legge di Hubble **2**
2.1 Il paradosso di Olbers 2
2.2 La legge di Hubble 2

3 Consequenze della legge di Hubble sulle dimensioni dell'Universo e sulla densità di materia in funzione del tempo **4**
3.1 Densità di materia nell'Universo 4
3.2 Evoluzione delle dimensioni dell'Universo 5
3.3 Addenda al §3 10
3.3.1 Parametro di rallentamento 10
3.3.2 Significato dei termini nell'equazione differenziale che dà l'integrale primo del fattore di scala $R(t)$. 11
3.3.3 Grafico del fattore di scala $R(t)$. 11
3.3.4 Raggio massimo dell'Universo chiuso 11

4 La radiazione cosmica di fondo **12**

5 Aggiornamenti **14**

1 Introduzione

In questo nostro ciclo di lezioni ci proponiamo di esporre quello che possiamo dire su ciò che vediamo nel cielo, o riteniamo di vedere. In greco la parola $\chi o \sigma \mu o \varsigma$ significa anche *abbellire* come ci ricordano le parole derivate italiane *cosmesi*, *cosmetico*, etc. La parola *cosmo* quindi presuppone un'idea di ordine e bellezza e quindi potremmo pensare che la cosmologia sia lo studio di questo ordine. Ma questa è pura letteratura.

Per noi la *cosmologia* sarà lo studio, in base alle nostre conoscenze della fisica che riteniamo valide ovunque ed in ogni tempo, di quello che vi è attorno alla nostra Terra e che le conoscenze astronomiche a poco a poco ci rivelano.

Chiamiamo quindi *Universo* tutto quello che abbiamo attorno e che è *conoscibile* da noi. Ciò ovviamente non esclude la possibilità di *altri universi*; noi però ci limitiamo al nostro perché gli altri apparterrebbero all'insieme degli oggetti da noi *non* conoscibili.

2 Il ragionamento di Olbers e la legge di Hubble

2.1 Il paradosso di Olbers

Come ricordato da H. Bondi nel suo libro Cosmology [2], il primo che in epoca moderna ragionò scientificamente sul cosmo fu H.W.H. Olbers, astronomo tedesco contemporaneo del Piazzi. Il suo ragionamento è riportato da J. E. Bode [1]. È un ragionamento molto bello e vale la pena di riportarlo qui.

Supponiamo che l'Universo sia *infinito* e supponiamo che, se si operano delle medie su grandissima scala, la densità media degli oggetti celesti sia ovunque la stessa. Questa visione dello spazio come riempito di un gas di oggetti che ha ovunque la stessa densità viene oggi detta *Principio Cosmologico* e lo si enuncia dicendo che su grandissima scala l'Universo è *omogeneo* ed inoltre è *isotropo*, ovvero appare lo stesso in qualsiasi direzione lo si osservi. Ovviamente nel 1826 non si parlava di galassie o quasars ma solo di stelle e nebulose; tuttavia è solo una questione di scala che non inficia il ragionamento di Olbers.

Se allora noi consideriamo un guscio sferico di raggio r e volume $4\pi r^2 dr$, attorno a noi, con r grandissimo, possiamo indicare con u il prodotto della densità media di stelle per la loro luminosità media. La luminosità del guscio sferico sarà $4\pi r^2 u\, dr$ e la luce da noi ricevuta risulta $u\, dr$. Per avere la luce che arriva fino a noi da tutto l'universo basta integrare fino a $r = \infty$. Visto che il cielo *non* è tutto bianco come il sole, Olbers comprese che o l'universo *non* era infinito, o la postulata staticità degli emettitori di luce non poteva essere mantenuta.

L'obiezione poi che la luce dei gusci sferici potrebbe essere intercettata ed assorbita da altre stelle, porterebbe comunque il risultato che tutto risplenderebbe come il sole e tutti i corpi ne avrebbero la stessa temperatura.

Concludiamo quindi che l'ipotesi di universo omogeneo, statico ed infinito è da rigettare.

2.2 La legge di Hubble

Passiamo ora al secolo ventesimo. Verso il 1920 le osservazioni astronomiche, con la costruzione dei grandi telescopi di Flagstaff e di Monte Wilson, passarono dallo studio dei pianeti a quello delle nebulose e si comprese che queste erano galassie simili alla Via Lattea. Fu così che Hubble nel 1929, interpretando lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali delle galassie di cui aveva determinato la distanza con il metodo delle Cefeidi, enunciò la *legge di*

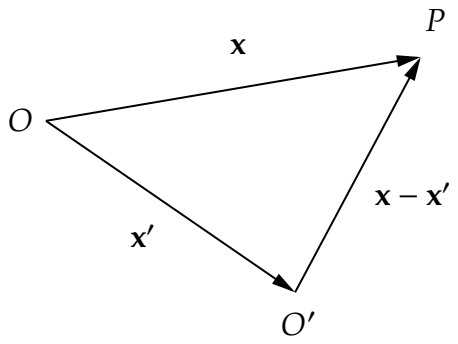

Figura 1: Universalità della legge di Hubble per osservatori diversi.

Hubble, ovvero che le galassie distanti si allontanano da noi con una velocità $\mathbf{v}$ direttamente proporzionale alla loro distanza $\mathbf{x}$ dalla Terra.

Essendo le osservazioni di Hubble fatte al tempo t, scriveremo

$$\mathbf{v}(t) = H(t)\mathbf{x}(t)\,, \tag{2.1}$$

dove $H(t)$ viene detta *funzione di Hubble*. NB

A prima vista questa legge sembrerebbe significare che la Terra ha una posizione privilegata al centro dell'Universo. Ma se si dà alla (2.1) valore universale, si trova che la Terra *non* è affatto privilegiata. Sia infatti P, posta in $\mathbf{x}$ (Figura 1), la galassia che si allontana dalla Terra, posta in O, con velocità

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{v} = H\mathbf{x}\,, \tag{2.2}$$

dove per semplicità abbiamo lasciato implicita la dipendenza da t. Supponiamo che la stessa galassia sia contemporaneamente osservata da un'altra galassia posta in O', individuata dal vettore $\mathbf{x}'$. Per la legge di Hubble (2.1) questa galassia, posta in O', dovrà avere rispetto alla Terra la velocità

$$\dot{\mathbf{x}}' \equiv \mathbf{v}' = H\mathbf{x}' \tag{2.3}$$

e pertanto P si muoverà rispetto ad O' con velocità

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' = H(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,. \tag{2.4}$$

Ma $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ è esattamente il vettore che va da O' a P, mentre $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è la velocità di P rispetto ad O'. La legge di Hubble vale quindi per qualsiasi osservatore nell'Universo e *non* privilegia affatto la Terra.

Il valore attuale di $H(t_0) \equiv H_0$ è detto *costante di Hubble*. Il valore di H_0 è molto difficile da determinare a causa delle difficoltà che abbiamo nel misurare le distanze galattiche per oggetti estremamente distanti. Un valore possibile è $H_0 = 75\,\mathrm{km/(s\cdot Mpc)}$. Ovvero, essendo il Mpc la distanza alla quale l'Unità Astronomica (1.5×10^{13}cm) è vista sotto l'angolo di un milionesimo di secondo d'arco, il Mpc corrisponde a 3.094×10^{24}cm ovvero 3.27×10^6 ly, essendo $1\,\mathrm{ly} = 9.47 \times 10^{17}$ cm. In unità CGS abbiamo NB

$$H_0 \simeq 2.42 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}\,, \tag{2.5}$$

ovvero

$$H_0^{-1} \simeq 4.127 \times 10^{17}\,\mathrm{s} = 13.1 \times 10^9\,\mathrm{y}\,. \tag{2.6}$$

Oggi tuttavia molti astrofisici scrivono

$$H_0 = 100\,h\,\mathrm{km/Mpc} = (3.23 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}) \times h\,, \tag{2.7}$$

e quindi

$$H_0^{-1} = (3.1 \times 10^{17}\,\mathrm{s}) \times h^{-1}\,, \tag{2.8}$$

essendo $0.4 \leq h \leq 1$ un fattore che tiene conto dell'incertezza nella definizione di H_0. Nella (2.5) e (2.6) abbiamo posto $h = 0.75$.

Un'altra conseguenza della legge di Hubble è che qualsiasi dimensione appare crescere con il tempo. Se infatti consideriamo un regolo di estremi A e B che al tempo t_0 ha lunghezza l_0, se indichiamo con $\mathbf{x}_A$ e $\mathbf{x}_B$ la posizione dei punti A e B, e con $l = |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|$ la lunghezza del regolo, avremo

$$\dot{\mathbf{x}}_B - \dot{\mathbf{x}}_A = H(t)(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \tag{2.9}$$

e quindi

$$\frac{dl}{dt} = H(t)l \tag{2.10}$$

per cui, separando le variabili ed integrando fra t_0 e t, otteniamo

$$l(t) = l_0\, e^{\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'}\,. \tag{2.11}$$

La (2.11) può essere considerata una proprietà generale dello spazio.

Possiamo ora assumere che la legge trovata sperimentalmente da Hubble nel 1929 sia una legge universale, e, unendola alla legge di Newton sulla gravitazione universale, ne possiamo vedere le conseguenze.

La prima conseguenza è che si offre una via d'uscita a quella terribile situazione in cui ci aveva lasciato Olbers, portando via l'idea della immutabilità dell'Universo. L'espansione muta l'Universo e le dimensioni infinite non sono più una ipotesi necessaria. L'altra conseguenza la vedremo nel paragrafo che segue.

Per la verità storica avremmo dovuto dire che già nel 1917 Einstein aveva trovato le sue equazioni del campo gravitazionale e che già nel 1924 il matematico russo A. A. Friedman aveva pubblicato una soluzione delle equazioni di Einstein che portava all'espansione dell'Universo, ma trattavasi di teorie matematiche e certamente come tali furono giudicate prima della scoperta di Hubble.

3 Consequenze della legge di Hubble sulle dimensioni dell'Universo e sulla densità di materia in funzione del tempo

3.1 Densità di materia nell'Universo

Assunta la (2.1) a legge fondamentale della Natura, possiamo cercarne le conseguenze dell'ambito del principio cosmologico (omogeneità ed isotropia della materia nell'universo), della conservazione della massa e della validità della legge di Newton sulla gravitazione unversale.

Cominciamo con la densità di massa. Se entro un volume sferico la massa *non* varia, variando il raggio della sfera varierà la densità. Sia allora $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$ il valore della densità ad un certo tempo t_0, quando il raggio della sfera era $r_0 \equiv r(t_0)$. Se al tempo t il raggio vale $r \equiv r(t)$, per la conservazione della massa avremo $\rho_0 r_0^3 = \rho r^3$, da cui

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \tag{3.1}$$

e quindi essendo $r \equiv r(t)$, abbiamo

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho_0 r_0^3 \left(\frac{1}{r^4}\right) \frac{dr}{dt} \tag{3.2}$$

ed essendo $dr/dt = Hr$, segue

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 H(t) = -3H(t)\rho(t) \tag{3.3}$$

È qui importante rilevare che avendo ragionato su una sfera di raggio r presa nello spazio in modo arbitrario, la densità di materia dipende dal tempo ma *non* dalle coordinate spaziali. L'uniformità, voluta dal principio cosmologico, si conserva quindi nel tempo pur variando $\rho(t)$.

Facciamoci ora un'altra domanda: in presenza di una densità di materia uniformemente distribuita, come viene modificata la velocità di espansione a causa dell'attrazione newtoniana? Per rispondere basta considerare un oggetto alla superficie di una sfera di raggio r. Questo oggetto sarà aottoposto ad una accelerazione verso il centro della sfera pari a

$$g = -G\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\frac{1}{r^2} \tag{3.4}$$

o vettorialmente

$$\mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \mathbf{r}\,, \tag{3.5}$$

accelerazione che ha la direzione di $\mathbf{r}$ al pari della velocità di espansione (2.1). La gravitazione quindi *non* modifica la forma della (2.1).

3.2 Evoluzione delle dimensioni dell'Universo

Studiamo quindi l'evoluzione delle dimensioni dell'Universo.

Riscriviamo la (2.1) mettendo in evidenza nelle distanze $\mathbf{x}(t)$ la parte variabile nel tempo e la parte costante. Scriviamo quindi:

$$\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{x}_0 \tag{3.6}$$

e quindi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0 \dot{R}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) = H(t)R(t)\mathbf{x}_0\,. \tag{3.7}$$

La (2.1) diventa quindi

$$\dot{R}(t) = H(t)R(t)\,, \tag{3.8}$$

oppure

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\,. \tag{3.9}$$

$R(t)$ è una funzione scalare e noi ne studieremo l'evoluzione temporale. Ma essa ovviamente ci rappresenta, in modo adimensionale, le dimensioni dell'Universo. Se oggi ($t = t_0$) abbiamo $R = 1$, dire $R = 0.1$ significa parlare di un'epoca in cui l'Universo aveva dimensioni di un decimo di quelle di oggi.

Lo studio di $R(t)$ è importante perché noi possiamo misurare solo il valore attuale di $H(t)$, cioè $H(t_0)$, ma non conosciamo assolutamente la funzione $H(t)$ e pertanto da $R(t_0)$ non possiamo valutare $R(t)$.

Per trovare $R(t)$ consideriamo allora una regione sferica molto grande, di raggio r. Per il principio cosmologico potremo dire che al suo interno si trova una massa $M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$. Il teorema di Gauss (quello che abbiamo visto in elettrostatica) ci assicura che il campo gravitazionale è lo stesso di quello generato da una massa M puntiforme concentrata al centro della sfera. Una massa m quindi, posta sulla superficie della sfera in posizione $\mathbf{x}$, subirà la forza attrattiva

$$F = -G\frac{M\,m}{r}\,, \tag{3.10}$$

avendo ricordato con il segno $-$ che la forza è diretta verso il centro della sfera.

Dalla seconda equazione della dinamica sappiamo che le forze determinano la variazione nel tempo della quantità di moto e quindi vediamo che la presenza della materia nell'Universo implica che la velocità che compare nella (2.1), o nella (3.8), sia variata dalla forza (3.10). Scriviamo quindi

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + G\frac{M\,m}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = 0 \tag{3.11}$$

ed essendo $|\mathbf{x}| = r$, risulta

$$\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} + G\frac{M}{r^3}\mathbf{x} = 0 \tag{3.12}$$

ovvero per la funzione $R(t)$ definita dalla (3.6):

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} + G\frac{M}{r^3}R(t) = 0 \tag{3.13}$$

ovvero esprimendo M tramite la densità $\rho(t)$:

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} + \frac{4\pi}{3}G\rho(t)R(t) = 0 \tag{3.14}$$

Nella (3.14) ρ è funzione del tempo. Per la (3.1) possiamo però scrivere $\rho = \rho_0 R(t_0)^3/R(t)^3 = \rho_0 R_0^3/R^3$, per cui la (3.14) diventa:

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{R_0^3}{R^2} = 0\,. \tag{3.15}$$

La (3.15) è quindi l'equazione differenziale che regola l'espansione dell'Universo. Si può notare che l'unica quantità che vi interviene è l'attuale densità ρ_0 della materia nell'Universo. L'integrale primo della (3.15) è:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi}{3} G\rho_0 \frac{R_0^3}{R} + K = 0 \tag{3.16}$$

come si può facilmente verificare derivando (3.16) rispetto al tempo e dividendo ciò che risulta per dR/dt. K è una costante di integrazione che può essere calcolata con i dati iniziali per $t = t_0$.

$$\begin{aligned} K &= -\left(\frac{dR}{dt}\right)^2_{t=t_0} + \frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^2 && (3.17)\\ &= -H_0^2 R_0^2 + \frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^2 && (3.18)\\ &= \frac{8\pi}{3} G R_0^2 \left(\rho_0 - \frac{3}{8\pi G} H_0^2\right) && (3.19) \end{aligned}$$

Posto

$$C \equiv \frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^3 \,, \tag{3.20}$$

la (3.15) diviene:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{C}{R} - K \tag{3.21}$$

da cui:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{C}{R} - K} \tag{3.22}$$

ovvero

$$\frac{dR}{\sqrt{\frac{C}{R} - K}} = dt \,, \tag{3.23}$$

equazione differenziale che, integrata fra 0 e t, dà:

$$t = \int_0^t dt = \int_0^R \frac{dR'}{\sqrt{\frac{C}{R'} - K}} \,. \tag{3.24}$$

Se fosse $K = 0$, cioè

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \,, \tag{3.25}$$

la (3.24) diverrebbe

$$t = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_0^R \sqrt{R'}\, dR' = \frac{2}{3\sqrt{C}} R^{\frac{3}{2}} \,, \tag{3.26}$$

da cui:

$$R = \sqrt[3]{\frac{9}{4}C}\, t^{\frac{2}{3}} = R_0 \sqrt[3]{6\pi G \rho_0}\, t^{\frac{2}{3}} \tag{3.27}$$

e sostituendo il valore di ρ_0 che abbiamo ipotizzato in (3.25):

$$R = R_0 \sqrt[3]{6\pi G \frac{3H_0^2}{8\pi G}}\, t^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\, R_0\, (H_0 t)^{\frac{2}{3}} = R_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{\frac{2}{3}} . \tag{3.28}$$

Il valore critico ρ_0 dato da (3.28) conduce quindi ad una espansione di R nel tempo. Il valore critico ρ_0 tuttavia è molto importante per trovare le soluzioni della (3.15), per cui continuiamo a ragionare su (3.28): prendendo per H_0 il valore stimato (2.6) si hanno due risultati. Uno è l'età attuale dell'Universo a cui $R = R_0$, cioè

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} = 8.7 \times 10^9 \,\mathrm{y} \tag{3.29}$$

mentre l'altro risultato è il valore della densità critica (3.25):

$$\rho_{0,\mathrm{crit}} = 1.05 \times 10^{-29} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2} \tag{3.30}$$

oppure, dando H_0 con il fattore h:

$$\rho_{0,\mathrm{crit}} = 1.87 h^2 \times 10^{-29} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2} . \tag{3.31}$$

Le attuali stime di ρ_0 portano ad un valore 10 volte inferiore a (3.30), però occorre tenere presente che le nostre stime della quantità di materia oscura nell'Universo sono alquanto rozze. Un astrofisico recentemente ha detto che la situazione è analoga a quella di un extraterrestre che, volendo rilevare le montagne sulla Terra, prendesse in considerazione solo le cime innevate!

A questo punto però possiamo capire qualcosa di più sulla soluzione della (3.24). Siamo partiti prendendo in cosiderazione il rallentamento dell'espansione dovuto all'attrazione gravitazionale delle masse presenti nell'Universo. Abbiamo trovato che per una densità pari a $\rho_{0,\mathrm{crit}}$, data da (3.25), si ha espansione senza fine. Ovviamente sarà lo stesso per densità inferiori, ovvero per valori di $K < 0$. Resta quindi da vedere se ρ_0 è maggiore del valore critico dato da (3.25), cioè occorre studiare l'integrale (3.24) nel caso $K > 0$. Non ci dilungheremo per il momento sulla soluzione dell'integrale in (3.24). Diciamo solo che occorre eseguire la sostituzione $x = C/R'$, $dR' = -C/x^2\, dx$ e quindi risolvere l'integrale

$$-C \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x - K}} = -C \left(\frac{\sqrt{x - K}}{Kx} + \frac{1}{2K} \int \frac{dx}{x \sqrt{x - K}} \right) \tag{3.32}$$

dove con $K > 0$ il secondo integrale diviene:

$$\frac{2}{K} \arctan \sqrt{\frac{x - K}{K}} + \mathrm{cost.} \tag{3.33}$$

Sommando i due contributi si ha:

$$-C \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x - K}} = -C \left(\frac{\sqrt{x - K}}{Kx} + \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{x - K}{K}} + \mathrm{cost.} \right) . \tag{3.34}$$

Esprimendo poi R in funzione di t si trova che per $t = 0$ si ha $R = 0$, poi R cresce fino a raggiungere un massimo e poi diminuisce fino a tornare al valore zero. È il caso del cosiddetto *universo chiuso* che presuppone l'esplosione iniziale (quella che gli astrofisici amano chiamare il Big Bang) con un'espansione che via via rallenta fino alla contrazione totale ed il ritorno alle condizioni iniziali (Figura 2). La soluzione (3.34) comporta quindi l'oscillazione delle dimensioni dell'Universo. Comunque si può dimostrare che per piccoli valori di R (e di t) la (3.34) si riduce alla (3.28). Ancora, si può considerare il parametro di decelerazione q:

$$q = -\ddot{R}\frac{R}{\dot{R}^2} \tag{3.35}$$

e risulta (si veda al §3.3.1 più avanti):

$$q = \frac{4\pi}{3}G\rho\frac{1}{H^2} \tag{3.36}$$

Si trova che per $K = 0$ si ha $q = \frac{1}{2}$; per $K > 0$ risulta $q > \frac{1}{2}$ mentre per $K < 0$, $0 < q < \frac{1}{2}$.

A questo punto vogliamo discutere una ulteriore conseguenza della legge di Hubble data dalla (2.1): *l'orizzonte dell'Universo*.

Le nostre attuali osservazioni astronomiche mostrano che, più potenziamo i nostri mezzi di osservazione, più si scoprono oggetti sempre più distanti con velocità di allontanamento sempre maggiori. Come sappiamo dalla relatività ristretta, la luce di questi oggetti si propaga sempre alla velocità c, ma le sue lunghezze d'onda sono sempre più spostate verso il rosso. Esattamente la formula dell'effetto Doppler è

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-(v/c)\cos\theta}\,, \tag{3.37}$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità della sorgente, θ è l'angolo fra $\mathbf{v}$ ed il vettore d'onda $\mathbf{k}$, ω_0 la frequenza emessa. Nel caso di allontanamento radiale, $\theta = \pi$ e quindi risulta immediatamente:

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,, \tag{3.38}$$

formula che ci dice che[1], se $v \to c$, $\omega \to 0$.

L'energia dei fotoni $E = \hbar\omega$ va quindi a zero e la luce di questi oggetti che si allontanano con velocità tendenti a c *non* può arrivarci.

[1]Gli astronomi usano misurare le lunghezze d'onda e *non* le frequenze. Ricordando che $\lambda\omega = c$ si ha che

$$\frac{\omega_0-\omega}{\omega} = \frac{1/\lambda_0 - 1/\lambda}{1/\lambda} = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \equiv z$$

da cui sostituendo ad ω il suo valore dato dalla (3.38) e risolvendo per v/c si ottiene immediatamente:

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}\,. \tag{3.39}$$

Per $z << 1$ si vede facilmente che $z \simeq v/c$; per grandi valori di z invece $v \simeq c$. Ad esempio, se $z = 10$, $v/c = 120/122 = 0.984$. Ancora:

$$z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - 1\,.$$

La legge di Hubble ci dà la distanza r per cui ciò accade:

$$r = \frac{c}{H_0}\,. \tag{3.40}$$

Se altri oggetti si trovano oltre c/H_0, cioè oltre l'orizzonte, noi *non* possiamo vederli. A questo punto torniamo alla discussione precedente sul valore critico della densità di materia dato dalla (3.25), $\rho_0 = 3H_0^2/8\pi G$, essendo (3.40) il raggio dell'Universo visibile. La massa totale entro r risulta:

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{1}{2G} H_0^2 r^3 = \frac{1}{2G} H_0^2 \frac{c^2}{H_0^2} r = \frac{rc^2}{2G} \tag{3.41}$$

ovvero $r = 2GM/c^2$!

Alla densità critica il raggio dell'Universo risulta il raggio di Schwarzschild, ovvero il raggio di un buco nero dal quale niente può uscire.

Aggiungiamo che se il valore di H_0^{-1} è quello dato da (2.6), allora il raggio dell'universo risulta

$$r = cH_0^{-1} = 13.1 \times 10^9 \,\text{ly}\,. \tag{3.42}$$

3.3 Addenda al §3

3.3.1 Parametro di rallentamento

Calcoliamo il *parametro di rallentamento*

$$q \equiv -\frac{\ddot{R}\,R}{(\dot{R})^2} \tag{3.43}$$

Sostituendo

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G\rho R \\ \dot{R}^2 = H^2 R^2 \end{cases} \tag{3.44}$$

si ottiene

$$q = \frac{4\pi}{3} G\rho R^2 \frac{1}{H^2 R^2} = \frac{4\pi}{3} G\rho H^{-2}\,. \tag{3.45}$$

Per $K = 0$, $\rho = \rho_{0,\text{crit}} = 3H_0^2/8\pi G$, da cui $q = \frac{1}{2}$.

Si definisce *parametro di densità* Ω_0 il rapporto fra la densità e la densità critica:

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho}{\rho_{0,\text{crit}}} \tag{3.46}$$

e sostituendo $\rho = \Omega_0 \rho_{0,\text{crit}}$ nella (3.45) si ricava $q = \Omega_0/2$.

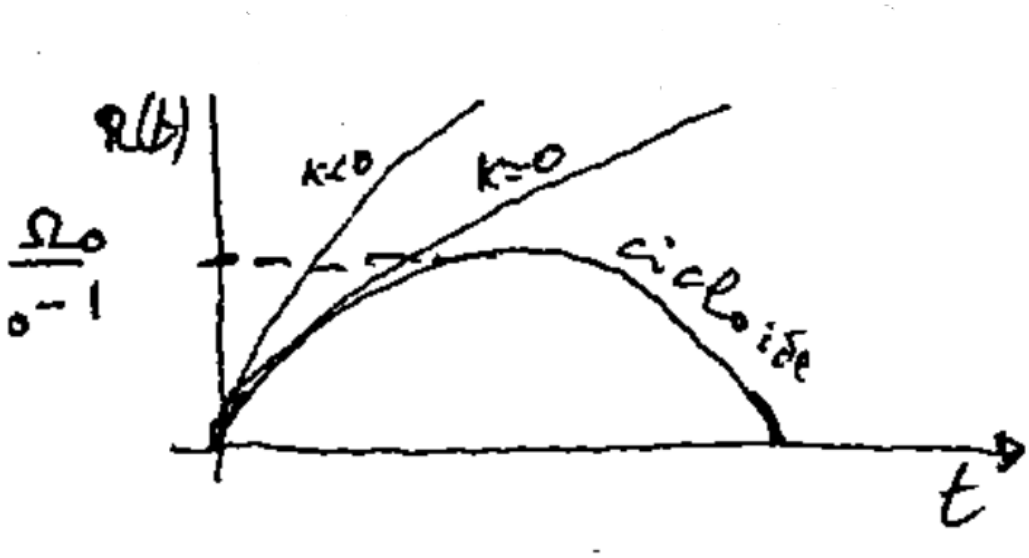

Figura 2: Andamento temporale del fattore di scala $R(t)$ per i casi $K < 0$, $K = 0$ e $K > 0$.

3.3.2 Significato dei termini nell'equazione differenziale che dà l'integrale primo del fattore di scala $R(t)$.

Abbiamo tre termini: Moltiplicando per $m/2$, il primo termine dà l'energia cinetica della massa m, il secondo, negativo, è l'energia potenziale gravitazionale della massa m, il terzo quindi, come vuole il principio di conservazione dell'energia, rappresenta l'energia totale. Quindi se $K > 0$, allora $-K$ è negativo e l'energia cinetica non riesce a vincere l'energia gravitazionale e quindi il sistema è chiuso. Viceversa se $K < 0$, si ha espansione senza fine. Ricordiamo l'esempio del sasso lanciato verso l'alto con la mano: ricasca perché l'energia cinetica è piccola; se invece lo lanciassimo a 12 km/s uscirebbe dal campo gravitazionale terrestre.

3.3.3 Grafico del fattore di scala $R(t)$.

Nel caso $K > 0$, la curva è una *cicloide*. Il suo andamento è rappresentato schematicamente in Figura 2.

3.3.4 Raggio massimo dell'Universo chiuso

Si raggiunge quando $\dot{R} = 0$, quindi, in base alla (3.21), quando $C/R = K$:

$$R = \frac{C}{K} = \frac{\frac{8\pi}{3} G \rho_0 R_0^3}{\frac{8\pi}{3} G R_0^2 \left(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G}\right)} \tag{3.47}$$

da cui

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 - \rho_{0,\mathrm{crit}}/\rho_0} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \tag{3.48}$$

Domanda indiscreta: cosa possiamo dire della distanza Terra-Sole 4×10^9 anni fa?

4 La radiazione cosmica di fondo

Nel secolo appena terminato, oltre alla scoperta di Hubble nel 1929, si deve ricordare un'altra scoperta, fondamentale per la cosmologia, fatta nel 1964 da A. A. Penzias e R. W. Wilson, due ricercatori della Bell Telephone. Mentre provavano una potente antenna a forma di corno per ricevere segnali riflessi dai satelliti Echo, si accorsero di una emissione di fondo non eliminabile che, malgrado rilevata solo in una ristretta banda di lunghezze d'onda attorno ai 7 cm, per la sua intensità poteva essere dovuta ad una emissione di corpo nero a $T \approx 3$ K. Essi *non* avevano alcuna idea della causa di quel fastidioso rumore.

Non staremo qui a dilungarci su come due fisici di Princeton, R. H. Dicke e P. J. E. Peebles avevano teorizzato che l'anomala abbondanza di elio nel Sole poteva essere dovuta ad una nucleogenesi avvenuta all'inizio dei tempi, quando l'Universo era molto più piccolo e molto più caldo di ora. Secondo i loro calcoli l'Universo si sarebbe raffreddato ed attualmente la temperatura doveva essere di circa 5 K.

Fortunatamente i laboratori della Bell erano a Holmdel, N. J., abbastanza vicini a Princeton e ci fu chi mise al corrente Wilson e Penzias della ricerca sulla radiazione fossile che Dicke stava progettando. Essi ebbero quindi il merito della scoperta e, se ricordo bene, anche il Nobel, nel 1978.

Nel 1989 fu lanciato il satellite "Cosmic Background Explorer" (COBE) (che si legge *co-bì*) costruito per misurare il fondo a microonde per lunghezze d'onda nel range $10^{-4}\,\mathrm{cm} < \lambda < 1\,\mathrm{cm}$ con una risoluzione angolare di 30″ di arco. COBE ha misurato un perfetto spettro di corpo nero alla temperatura

$$T = 2.726\ \mathrm{K} \tag{4.1}$$

perfettamente isotropo entro 10^{-4}K salvo una variazione angolare compresa fra ± 0.0033 K, dipendente da un $\cos\theta$, in due direzioni fra loro opposte. L'eccesso di temperatura essendo in direzione della costellazione del Leone e la deficienza nella direzione dell'Acquario che è opposto al Leone. Considerando che la Terra e il Sole nel loro moto attorno al centro galattico hanno una velocità di 370 km/s in direzione del Leone, COBE ha messo in evidenza questo nostro moto rispetto alla radiazione fossile.

Risultando quindi perfettamente isotropa la radiazione fossile (entro 10^{-4}K), noi la possiamo mettere in relazione facilmente con l'espansione dell'Universo. Trattandosi di frequenze molto diverse da quelle prodotte dalle stelle e di intensità molto superiore a quella che tutte le stelle potrebbero produrre alle stesse frequenze, noi possiamo trattare la radiazione fossile di corpo nero come fosse la sola esistente.

Supponiamo quindi che ai primordi dell'Universo ci fosse ovunque radiazione termica di temperatura uniforme ed elevata. Espandendosi l'Universo si espanderà anche questa radiazione. Vediamo come. Consideriamo una scatola cubica a pareti perfettamente riflettenti piena di radiazione. Espandendosi l'Universo, si espanderà anche la scatola così come il regolo che abbiamo studiato al §2.2. Non c'è però differenza fra quello che accade nella scatola e fuori. Nella scatola si hanno le riflessioni sulle pareti che lasciano immutato il numero dei fotoni; fuori ci saranno, in un volume uguale a quello della scatola, fotoni che fuoriescono e fotoni che entrano, ma il numero dei fotoni a parità di volume non cambia. Ora noi sappiamo dalla formula di Planck che, alla frequenza ν ed alla temperatura T, la densità specifica di radiazione è

$$u_{\nu,T} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{4.2}$$

per cui il numero di fotoni entro il cubo di spigolo a sarà $n_{\nu,T} = a^3 u_{\nu,T}$. Espandendosi il volume lo spigolo diventerà $a' = \alpha a$, la lunghezza d'onda $\lambda' = \alpha\lambda$, da cui $\nu' = \nu/\alpha$. Il numero di fotoni nella scatola espansa sarà quindi:

$$n_{\nu',T'} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{(\alpha a)^3 \nu'^3}{e^{h\nu'/kT} - 1} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{a^3\nu^3}{e^{h\nu'/kT} - 1} \tag{4.3}$$

Poiché la scatola è chiusa $n_{\nu,T} = n_{\nu',T'}$ e quindi deve essere $\nu/T = \nu'/T'$, da cui segue:

$$T' = \frac{\nu'}{\nu}\, T = \frac{T}{\alpha} \tag{4.4}$$

ovvero la temperatura della radiazione risulta inversamente proporzionale al raggio dell'Universo.

Quella palla di fuoco primordiale, causa l'espansione, ha ora la temperatura 2.726 K. Studiamo ora la relazione fra la densità di energia termica e le dimensioni dell'Universo. Restando lo stesso il numero dei fotoni ed essendo $h\nu$ l'energia di ciascun fotone, risulta che l'energia totale della radiazione nell'Universo diminiisce come ν, cioè in modo inversamente proporzionale alle dimensioni dell'Universo. Se allora scriviamo tale radiazione totale come il prodotto della densità u per il volume dell'Universo, risulta:

$$E_{\text{totale}} = \frac{4\pi}{3} r^3 u \propto \frac{1}{r} \tag{4.5}$$

da cui

$$u(t) r^4(t) = u(t_0) r^4(t_0)\,. \tag{4.6}$$

La densità di radiazione è legata alla intensità luminosa superficiale data dalla legge di Stefan-Boltzmann dalla relazione $uc = 4\sigma T^4$, dove σ è la costante di Stefan che vale $5.67051 \times 10^{-5}\,\text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$, mentre il fattore 4 viene da un integrale direzionale e dal conteggio dei due stati di polarizzazione. Scriviamo quindi:

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4 \tag{4.7}$$

equivalente alla densità materiale

$$\frac{u}{c^2} = \frac{4\sigma}{c^3} T^4\,. \tag{4.8}$$

Sostituendo il valore (4.1) risulta:

$$\rho_{\text{RAD}} = 4.64 \times 10^{-34}\, \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\,. \tag{4.9}$$

Oggi quindi la densità della radiazione è molto minore di quella della materia. Tuttavia decrescendo la densità di materia come R^{-3}, mentre quella della radiazione decresce come R^{-4}, andando indietro nel tempo si può trovare un'epoca in cui la radiazione dominava.

Vediamo quindi in quali condizioni doveva essere l'Universo affinché l'energia sotto forma di radiazione fosse uguale all'energia in forma di materia. Per fissare le idee assumiamo che la densità di materia oggi sia quella critica data da (3.31) che fa da spartiacque fra l'Universo aperto e l'Universo chiuso. Per quanto sopra visto la densità di radiazione data oggi da (4.9) avrebbe uguagliato quella materiale data da (3.31), quando

$$4.64 \times 10^{-34}\, \frac{R_0}{R} = 1.87 h^2 \times 10^{-19} \tag{4.10}$$

ovvero quando

$$\alpha = \frac{R_0}{R} = \left(4.03 \times 10^4\right) h^2 \tag{4.11}$$

che con $h = 0.75$ dà

$$\alpha \approx 23\,000 \tag{4.12}$$

ciò significa un Universo 23 000 volte più piccolo con una radiazione di corpo nero avente il suo massimo non più a $\lambda = 0.106$ cm ma nell'ultravioletto a 460 A. Ulteriori calcoli ci portano a valutare queste condizioni essere occorse ad una età di 2 500 anni dalla grande esplosione. Si suole allora dire che quella era l'era RD (Radiation-Dominated Unvierse). Ovviamente più si scende nel tempo più l'energia cresce e tutto diventa possibile. Si teorizza un modello standard, si ipotizza la grande unificazione GUT (Grand Unified Theory) che avviene ad energie di 10^{14}GeV e la Supergrand Unified Theory a 10^{19}GeV quando si unifica anche la forza di gravità. Nel primo 10^{-43}-esimo di secondo della vita dell'Universo succede ...

Qui mi fermo. Ormai a questo punto la cosmologia *non* è più materia per astronomi, ma per fisici teorici e particellari.

Guardiamoci però indietro. Siamo partiti dall'osservazione di Hubble sul moto delle galassie distanti e dalla scoperta casuale di Wilson e Penzies e siamo arrivati ad intravvedere la teoria di ogni cosa, "the theory of everything".

Abbiamo usato la gravitazione di Newton anziché quella più raffinata di Einstein, ma visti gli strabilianti risultati cui le due scoperte sopra ricordate ci hanno portato, è doveroso ricominciare tutto da capo, rivedendo innazitutto i nostri concetti sullo spazio e sul tempo, ed operare poi con più adeguati strumenti.

Oltretutto la possibilità vista più sopra che la massa totale dell'Universo sia la massa critica per racchiudere tutto l'Universo entro un buco nero, *non* ci lascia alternative. Per essere certi della veridicità di quanto sopra visto dobbiamo rifare i nostri conti partendo dalle equazioni di campo trovate da Einstein e con le soluzioni di tali equazioni.

5 Aggiornamenti

Dopo il 2003 il fatto più importante è stato la scoperta della *materia oscura* e della *energia oscura*.

Nel 1933 l'astronomo svizzero Fritz Zwicky, studiando la velocità delle galassie nell'ammasso della Chioma di Berenice, osservò che la velocità delle singole galassie era molto più elevata di quanto si pensasse e quindi ritenne che all'interno dell'ammasso dovesse esserci dell'altra materia che egli chiamò "materia oscura".

Durante gli anni sessanta gli astronomi Vera Rubin e Kent Ford studiando, grazie all'effetto Doppler, la velocità delle stelle sia nella Via Lattea sia in altre galassie, si accorsero che a grandi distanze dal nucleo galattico le velocità non erano nulle come era prevedibile a causa della distanza ma sostanzialmente continuavano ad avere i valori che avevano vicino al nucleo come se, nella galassia, oltre alla materia ordinaria fosse presente altra materia non visibile. Anche le immagini di collisioni fra ammassi galattici, riprese negli anni 2000, hanno mostrato chiaramente la presenza di materia non visibile all'interno degli ammassi collidenti. Complessivamente possiamo dire che nell'Universo abbiamo un 90% di materia oscura.

Un discorso a parte merita l'*energia oscura*.

Dalle osservazioni sappiamo che la densità media nel nostro universo è uguale alla densità critica, quella che rende piatta la metrica.

L'energia oscura è legata all'espansione accelerata dell'Universo, evidenziata dalle osservazioni.

La presenza della materia oscura dovrebbe portare ad una contrazione anziché ad una espansione.

Con mirabolanti osservazioni fatte su milioni di supernove del tipo "Ia" presenti in lontane galassie si è riusciti a stimare la variazione nel tempo del ritmo di espansione del nostro Universo.

Si è trovato che, essendo attualmente nel nostro Universo il valore della densità di materia uguale a quello della densità critica, poiché la materia ordinaria vi contribuisce per il 5% e la materia oscura per il 27% (quindi in totale per il 32%), è necessario aggiungere un 68% per avere la densità critica.

Dalla Relatività Generale sappiamo che le forze gravitazionali sono generate non solo dalla materia e dalla energia ma anche dalla pressione che esse esercitano. Nel caso di una pressione negativa avremo una forza di repulsione, cioè una forza antigravitazionale e quindi una espansione anziché una contrazione.

Si stima che il 68% di cui sopra sia costituito da energia oscura la quale avendo la pressione negativa tende a far espandere l'Universo. Resta comunque che l'energia oscura è l'elemento più misterioso nell'Universo.

Ringraziamenti

Sono grato al Dott. Daniele Melini e al Prof. Giorgio Spada per avere trascritto in LaTeX le mie note scritte a mano. Ringrazio il collega Francesco Mainardi per i preziosi aiuti dati in tutte le fasi di questa edizione e per essersi poi interessato per la stampa di alcune copie ottenendo il necessario codice ISBN. Infine sono grato al Prof. Spada, che come docente di ruolo di UNIBO ha sottomesso queste note alla Biblioteca Digitale (ALMA DL) di UNIBO permettendo a possibili interessati di venirne a conoscenza.

Riferimenti bibliografici

[1] J. E. Bode. *Astronomisches Jahrbuch*. 1826.

[2] H. Bondi. *Cosmology*. Cambridge University Press, 1961.