

Metodi di Newton proiettato nella ricostruzione di immagini

Anastasia Cornelio

26 ottobre 2009

In questo lavoro si analizza il metodo di Newton proiettato proposto da Bertsekas per problemi di ottimizzazione con vincoli di positività e lo si applica al problema della ricostruzione di immagini. Poiché tale problema è malposto, sono applicati i metodi di regolarizzazione di Tikhonov e della variazione totale. Sono considerate immagini astronomiche perturbate con due diverse PSF e con rumore bianco di Poisson.

1 Metodo di Bertsekas

Si consideri il problema di ottimizzazione con vincoli di positività

$$\begin{aligned} \min \varphi(x) \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile con continuità.

Nel metodo di Newton proiettato proposto da Bertsekas in [4] la soluzione approssimata è calcolata con un metodo iterativo in cui l'iterazione è:

$$x_{k+1} = [x_k - \alpha_k D_k \nabla \varphi(x_k)]^+, \quad (1)$$

dove:

- $\forall z \in \mathbb{R}^n$

$$[z]^+ = [\max\{0, z_1\}, \dots, \max\{0, z_n\}]$$

indica la proiezione sull'ortante positivo;

- $\alpha \in \mathbb{R}^+$ è il passo scelto con la regola di Armijo [3], cioè

$$\alpha_k = \beta^{m_k} s,$$

dove m_k è il primo intero non negativo m tale che

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k(\beta^m)) \geq \sigma \left(\beta^m \sum_{i \notin \mathcal{I}_k^+} \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_i} (p_k)_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_k^+} \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_i} ((x_k)_i - (x_k)_i(\beta^m)) \right); \quad (2)$$

- D_k è una matrice definita positiva parzialmente diagonale.

Una matrice A , $n \times n$, di elementi $(A)_{ij}$ si dice *diagonale rispetto all'insieme di indici* $I \subset \{1, \dots, n\}$ se

$$(A)_{ij} = 0 \quad \forall i \in I, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i.$$

In particolare, la matrice D_k in (1) deve essere diagonale rispetto all'insieme dei vincoli attivi, definito per ogni $x \geq 0$ da

$$\mathcal{I}^+(x) = \left\{ i \mid x_i = 0, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} > 0 \right\}.$$

In realtà l'insieme $\mathcal{I}^+(x)$ ha delle discontinuità sul bordo dell'insieme dei vincoli, quindi per evitare che venga modificata la velocità di convergenza si considera l'insieme

$$\mathcal{I}_k^+ = \left\{ i \mid 0 \leq (x_k)_i \leq \varepsilon_k, \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_i} > 0 \right\} \supset \mathcal{I}^+(x),$$

dove

$$\varepsilon_k = \min\{\varepsilon, w_k\}, \quad w_k = \|x_k - [x_k - \nabla \varphi(x_k)]^+\| \quad (3)$$

e $\varepsilon > 0$ è uno scalare tipicamente piccolo.

La direzione di discesa è $p_k = D_k \nabla \varphi(x_k)$. In [4] si dimostra che, supponendo φ due volte differenziabile con continuità, se D_k è tc

$$D_k = B_k^{-1},$$

dove gli elementi $(B_k)_{ij}$ di B_k sono dati da

$$(B_k)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \text{ e } i \in \mathcal{I}_k^+ \text{ oppure } j \in \mathcal{I}_k^+ \\ \frac{\partial^2 \varphi(x_k)}{\partial x_i \partial x_j} & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (4)$$

allora il metodo ha convergenza superlineare.

Quindi il calcolo della direzione di discesa p_k equivale alla risoluzione di un sistema la cui matrice $B = D^{-1}$ è definita in (4) e si ottiene dall'hessiana di φ .

Si scrive quindi l'algoritmo.

Algoritmo 1. Assegnato un vettore iniziale x :

ripeti finché ($\nabla\varphi_i(x) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ oppure $\nabla\varphi_i(x) = 0$ se $x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$)

1. Determinare l'insieme dei vincoli attivi e la matrice B ;
2. Calcolare la direzione di discesa attraverso la risoluzione del sistema $Bp = -\nabla\varphi$;
3. Calcolare il passo α con la regola di Armijo, sostituire x con $x + \alpha p$ e aggiornare $\nabla\varphi$.

2 Problemi di ricostruzione di immagini

Un'immagine è un segnale che fornisce informazioni su un oggetto non direttamente osservabile. La rappresentazione dell'oggetto che si ottiene nella realtà presenta due tipi di deteriorazione: quella legata alla formazione dell'immagine, chiamata *blurring*, e quella legata alla registrazione dell'immagine, detta *rumore*, dovuta ad esempio a errori di misurazione.

Di seguito si indicherà con $x = (x_1, x_2)$ il vettore delle coordinate nello spazio delle immagini e con $y = (y_1, y_2)$ il vettore delle coordinate nello spazio degli oggetti.

Se $f(y)$ è la funzione che descrive l'oggetto, il processo di blurring può essere descritto matematicamente dal modello

$$g_0(x) = \int K(x, y)f(y)dy,$$

dove $K(x, y)$ è la *funzione di dispersione puntuale* (PSF), che rappresenta gli effetti del particolare strumento di acquisizione utilizzato, $g_0(x)$ è la funzione dell'*immagine perturbata*.

Successivamente l'effetto del processo di registrazione dà un ulteriore contributo di errore e l'immagine registrata $g(x)$, detta *immagine perturbata con rumore*, è data da

$$g(x) = \int K(x, y)f(y)dy + w(x). \quad (5)$$

In molti casi i sistemi di formazione di immagini godono della proprietà di invarianza per traslazioni. Pertanto $K(x, y) = K(x - y)$ e la (5) diventa

$$g(x) = \int K(x - y)f(y)dy + w(x) = K * f + w,$$

dove $*$ indica il prodotto di convoluzione tra funzioni.

Pertanto *un problema di ricostruzione di immagini è il problema di determinare una stima di un oggetto incognito f essendo data la sua immagine g e la PSF dello strumento utilizzato.*

Nella realtà le immagini sono *discretizzate*: un'immagine in bianco e nero è costituita da una matrice bidimensionale i cui elementi, i pixel, rappresentano l'intensità di luce. Quindi le funzioni f e g diventano matrici $N \times N$ oppure, equivalentemente, vettori di dimensione N^2 .

La funzione K viene utilizzata per determinare invece una matrice $N^2 \times N^2$, che descrive il processo di formazione dell'immagine. Il prodotto di convoluzione viene sostituito da una sommatoria di termini finiti: i pixel dell'immagine perturbata si determinano attraverso una somma pesata del corrispondente pixel dell'immagine esatta e i suoi circostanti. Gli elementi della PSF indicano questi pesi.

Il problema di ricostruzione di immagini si riconduce alla risoluzione del sistema lineare

$$Af = g.$$

La matrice A , detta *matrice di convoluzione*, è determinata dalla PSF, che definisce la deformazione di ogni pixel, e dalle condizioni al bordo, che descrivono come si ipotizza l'oggetto al di fuori dell'immagine registrata (queste informazioni sono necessarie per determinare i pixel di confine dell'immagine perturbata).

Formulazione del problema

Il problema della ricostruzione di immagini si formula come un problema di ottimizzazione con vincoli di positività:

$$\begin{aligned} \min \varphi(x) &= \frac{1}{2} \|Af - g\|_2^2 + \lambda R(f) \\ f &\geq 0, \end{aligned}$$

dove A è una matrice $N^2 \times N^2$, f e g sono vettori di \mathbb{R}^{N^2} , $\lambda \in \mathbb{R}^+$ è il parametro di regolarizzazione e $R(f)$ il termine di regolarizzazione.

Si osservi che, poiché φ è una funzione quadratica, la matrice hessiana (e di conseguenza B) è simmetrica definita positiva.

In questo lavoro sono stati considerati due metodi di regolarizzazione:

1. il metodo di Tikhonov, in cui in cui $R(f) = \|f\|_2^2$;
2. il metodo della variazione limitata, in cui $R(f) = \int \sqrt{|\nabla f|^2 + \beta^2} df$, dove β è un parametro positivo tipicamente piccolo.

3 Note di implementazione

- Le condizioni al bordo determinano la struttura della matrice di convoluzione [5]. Assumendo condizioni nulle, si ottiene una matrice di Toeplitz a blocchi di Toeplitz ma, al fine di abbassare il costo computazionale, la matrice di convoluzione viene approssimata con una matrice circolante a blocchi circolanti. In questo caso infatti i prodotti matrice-vettore possono essere calcolati nello spazio di Fourier [1]. La trasformata di Fourier e la sua inversa sono calcolate attraverso l'algoritmo FFT (Fast Fourier Trasformazione), tramite le funzioni di Matlab `fft` e `ifft` rispettivamente.
- La matrice D è stata approssimata, come proposto in [7], nel modo seguente:

$$D = D_{\mathcal{A}} + D_{\mathcal{I}}AD_{\mathcal{I}},$$

dove $D_{\mathcal{A}}$ e $D_{\mathcal{I}}$ sono matrici diagonali di proiezione sull'insieme \mathcal{A} e \mathcal{I} dei vincoli rispettivamente attivi e inattivi.

Gli elementi $(D_{\mathcal{I}})_{ii}$ di $D_{\mathcal{I}}$ sono definiti da

$$(D_{\mathcal{I}})_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \mathcal{A} \\ 1 & \text{se } i \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Analogamente $D_{\mathcal{A}}$ è diagonale con elementi uguali a zero per gli indici corrispondenti a vincoli inattivi. Per gli indici attivi invece gli elementi di $D_{\mathcal{A}}$ sono positivi:

$$(D_{\mathcal{A}})_{ii} = \alpha \quad \text{se } i \in \mathcal{A},$$

dove α in generale dipende dagli autovalori di A . Nei risultati presenti nel prossimo capitolo α è stato scelto pari a 1.

- Nel caso del metodo di regolarizzazione della variazione limitata si dimostra [8] che la soluzione approssimata

$$f_{\lambda,\beta} = \min \|Af - g\|^2 + \lambda \int \sqrt{|\nabla f|^2 + \beta^2} df$$

è soluzione dell'equazione alle derivate parziali non lineare del secondo ordine

$$f - \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{|\nabla f|^2 + \beta^2}} \right) - g = 0.$$

Introducendo l'operatore

$$K(f) = (1 + \lambda L_\beta(f))f = g,$$

dove

$$L_\beta(f)v = -\nabla \cdot (k_\beta(f)\nabla v)$$

con

$$k_\beta(f) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2 + \beta^2}},$$

la matrice hessiana A si può scrivere nella forma

$$A(f) = 1 + \lambda L_\beta(f) + \lambda L'_\beta(f)f = K(f) + \lambda L'_\beta(f)f,$$

dove $'$ indica l'operazione di differenziazione rispetto a f .

Si considererà il parametro β pari a 0.1.

- La direzione di discesa si ottiene con la risoluzione del sistema

$$Bp = \nabla\varphi \tag{6}$$

attraverso il metodo del gradiente coniugato. Il sistema (6) risulta lineare nel caso in cui il problema non sia regolarizzato e in quello in cui si applica la regolarizzazione di Tikhonov, non lineare nel caso della regolarizzazione della variazione totale.

4 Risultati numerici

I risultati riportati sono stati ottenuti attraverso l'implementazione del metodo in `Matlab`, nella versione 7.0. I parametri nelle equazioni (2) e (3) sono stati fissati ai seguenti valori: $\beta = \frac{1}{2}$, $\sigma = 10^{-10}$, $\varepsilon = 10^{-16}$. Sono stati considerati tre problemi test con tre oggetti (mostrati in Figura 1):

- la nebulosa NGC7027 [6] (PbTest1);
- la galassia NGC6946 [2] (PbTest2);
- il cluster (PbTest3).

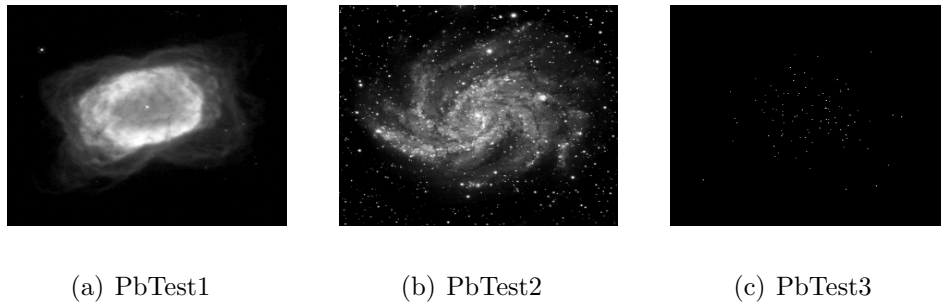


Figura 1: Immagini esatte della nebulosa, della galassia e del cluster

Sono state utilizzate due diverse PSF: la prima (KPSF) simula il comportamento ideale dell'ottica del telescopio, la seconda (AOPSF) ha una parte additiva che tiene conto di alcune correzioni con SR (Strehl Ratio) pari circa al 43%. In Figura 2 sono rappresentate le due diverse PSF utilizzate.

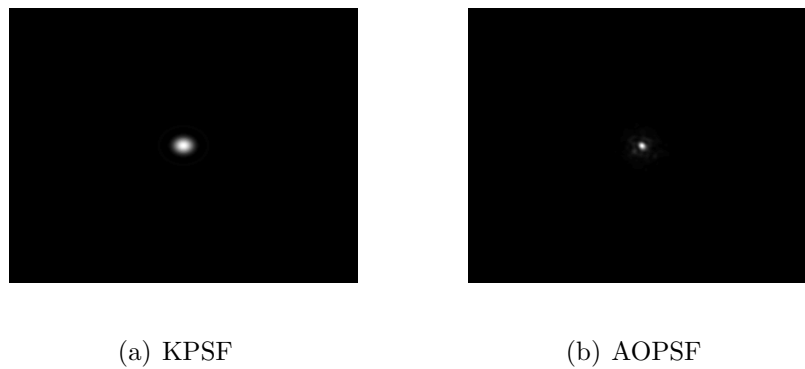


Figura 2: Rappresentazione delle due PSF

Infine in queste prove è stato considerato rumore bianco, in valori basso (a), medio (b) e alto (c). In Figura 3 sono rappresentate le immagini dei tre problemi test perturbate con la KPSF e con rumore medio.

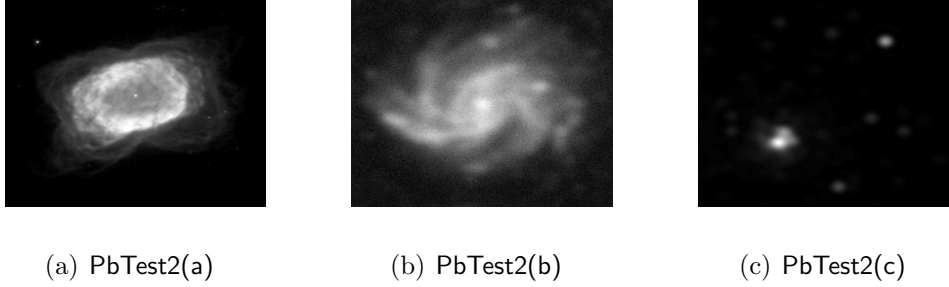


Figura 3: Immagini perturbate con KPSF e rumore medio

Come indicatore della qualità dell'immagine ricostruita viene considerato l'*errore quadratico medio* (eqm), che indica la discrepanza tra i valori dei dati ottenuti e quelli iniziali ed è definito come

$$eqm = \frac{\|f - \tilde{f}\|_2}{\|f\|_2},$$

dove f è l'oggetto e \tilde{f} l'immagine ricostruita.

I criteri di arresto riferiti all'Algoritmo 1 sono:

1. numero massimo di iterazioni k ;
2. $\frac{\partial f(\tilde{f}^*)}{\partial \tilde{f}_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$;
3. $\frac{\partial f(\tilde{f}^*)}{\partial \tilde{f}_i} = 0 \quad \text{se } \tilde{f}_i^* > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Si osservi che i criteri 2 e 3 sono le condizioni necessarie per l'ottimizzazione nel caso di vincoli di positività [3] (\tilde{f}^* è il punto di minimo locale).

La direzione di discesa p è calcolata invece con il metodo CG, i cui criteri di arresto sono:

1. numero massimo di iterazioni l ;
2. $\|r\| = \|g - Af\| \leq 10^{-10}$.

Per una stima del costo computazionale viene contato il numero di `fft` (e `ifft`) effettuate.

Nelle tabelle che seguono sono riportati il valore di eqm minimo, il numero delle iterazioni esterne k e di `fft` calcolate.

Nel paragrafo 4.1 sono riportati i risultati ottenuti nella ricostruzione delle immagini della nebulosa e della galassia, nel caso non regolarizzato e con la regolarizzazione di Tikhonov, utilizzando le due diverse PSF. Nel paragrafo 4.2 è stato applicato il metodo della variazione limitata alle immagini della galassia e del cluster.

4.1 Risultati con la regolarizzazione di Tikhonov

In Figura 4 si nota come non applicando la regolarizzazione nei problemi PbTest1(a) e PbTest1(b) si verifica il fenomeno della semiconvergenza dell'eqm.

Nelle Tabelle 1 e 2, in cui sono riportati i risultati ottenuti applicando la regolarizzazione di Tikhonov, i valori del parametro λ che corrispondono all'eqm migliore sono quelli centrali.

Si noti dall'andamento dell'eqm in Figura 5 che con un valore di λ troppo piccolo non si corregge la semiconvergenza.

	eqm	k	fft
$\lambda = 10^{-4}$	0.0611	2	446
$\lambda = 10^{-3}$	0.0611	6	798
$\lambda = 10^{-2}$	0.0671	3	246

Tabella 1: Risultati per PbTest1(a) con la regolarizzazione di Tikhonov

	eqm	k	fft
$\lambda = 10^{-3}$	0.0872	11	346
$\lambda = 10^{-2}$	0.0724	10	226
$\lambda = 10^{-1}$	0.1287	2	58

Tabella 2: Risultati per PbTest1(b) con la regolarizzazione di Tikhonov

L'immagine della galassia presenta stelle isolate su uno sfondo nero. Applicando la PSF queste sorgenti di luce si sfocano.

Poiché il processo di rumore è casuale, perturbando l'immagine con rumore basso è improbabile che vengano coinvolti questi pixel chiari.

Per questo motivo l'andamento dell'eqm per PbTest2(a) non presenta il fenomeno della semiconvergenza, di conseguenza questo problema non è stato regolarizzato.

	$\lambda = 0$			regolarizzazione di Tikhonov			
	eqm	k	fft	λ	eqm	k	fft
PbTest1(a)	0.0611	2	390	10^{-3}	0.0611	6	798
PbTest1(b)	0.0872	10	166	10^{-2}	0.0724	10	266
PbTest1(c)	0.2724	3	54	10^{-1}	0.1393	6	102
PbTest2(a)	0.3045	6	1046	-	-	-	-
PbTest2(b)	0.3228	13	214	10^{-3}	0.3206	16	370
PbTest2(c)	0.4889	3	54	10^{-2}	0.3816	13	210

Tabella 3: Risultati migliori di eqm di PbTest1 e PbTest2 con KPSF

	KPSF				AOPSF			
	λ	eqm	k	fft	λ	eqm	k	fft
PbTest1(a)	10^{-3}	0.0611	6	798	0	0.0630	2	118
PbTest1(b)	10^{-2}	0.0724	10	266	10^{-2}	0.0728	4	118
PbTest2(a)	0	0.3045	6	1046	10^{-3}	0.2531	4	618
PbTest2(b)	10^{-3}	0.3206	16	370	10^{-3}	0.2711	15	318

Tabella 4: Confronto risultati migliori di eqm con KPSF e AOPSF

Per PbTest2(b) i risultati migliori di eqm con e senza regolarizzazione sono simili, mentre con rumore maggiore regolarizzando si ottiene un risultato notevolmente migliore.

Per visualizzare meglio la qualità della ricostruzione, è riportato il negativo della differenza tra l'immagine esatta e l'immagine ricostruita (Figura 6).

In Tabella 3 sono riassunti i migliori risultati di eqm per tutte le immagini.

Per l'immagine della nebulosa con la AOPSF i valori di eqm sono più alti e le immagini ricostruite meno precise.

I risultati ottenuti nella ricostruzione della galassia, invece, sono migliori con la AOPSF (Figura 7). In Tabella 4 sono riportati i risultati migliori di PbTest1 e PbTest2 per le due PSF e in Figura 8 sono confrontate le ricostruzioni di PbTest2(b).

	eqm	k	fft
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$	0.2872	10	1046
$\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$	0.2826	6	934
$\lambda = 10^{-7}$	0.3171	3	374
$\lambda = 10^{-6}$	0.2965	10	1474
$\lambda = 10^{-5}$	0.3142	10	1466

Tabella 5: Risultati di PbTest2(b) regolarizzato col metodo TV

4.2 Risultati con la regolarizzazione della variazione limitata

Il termine di regolarizzazione nel metodo di Tikhonov è una funzione liscia. Per questo motivo nella ricostruzione delle immagini con questo metodo una sorgente di colore viene diffusa nei pixel circostanti, quindi un pixel chiaro su uno sfondo scuro viene ricostruito come una macchia di colore (Figura 6 (c)).

Per la ricostruzione della galassia e del cluster è più adatto il metodo di regolarizzazione della variazione limitata.

In Tabella 5 sono riportati i risultati per la regolarizzazione del PbTest2(b) perturbato con la AOPSF. Il valore del parametro di regolarizzazione λ per cui l'eqm è minimo è pari a $2 \cdot 10^{-7}$. Tuttavia la qualità dell'immagine ricostruita non è buona e il numero di **fft** molto alto in tutti i casi.

In Figura 9 sono riportate le immagini ricostruite nei casi di $\lambda = 10^{-5}$ e $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$, i rispettivi negativi degli errori e gli andamenti dell'eqm. Nel caso di $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ le immagini si riferiscono all'iterazione esterna $k = 6$.

Si considera ora l'immagine del cluster che presenta degli ammassi stellari su uno sfondo nero. In questo caso si costruisce una maschera 3×3 di cui il pixel colorato rappresenta l'elemento centrale, recuperando i pixel circostanti dall'immagine intera e l'eqm viene calcolato solo su questi valori, non considerando quindi il contributo della parte nera dell'immagine che è poco significativo.

Sono state considerate immagini perturbate dalla AOPSF, che simula con più precisione, rispetto alla KPSF, il processo di formazione dell'immagine. In Figura 10 sono riportate le immagini perturbate dalle due diverse PSF e quelle con l'aggiunta di rumore alto.

Sono riportati solo i risultati di PbTest3(c), cioè dell'immagine con rumore alto, perché per PbTest3(b), il cui livello di rumore è medio, il parametro di regolarizzazione è molto piccolo. Inoltre il numero di **fft** effettuate è

	eqm	k	fft
$\lambda = 10^{-8}$	0.9340	5	230
$\lambda = 10^{-7}$	0.9441	10	602
$\lambda = 10^{-6}$	0.9612	10	758

Tabella 6: Risultati di `PbTest3(c)` regolarizzato col metodo TV

molto alto, quindi è più conveniente ricostruire l'immagine senza applicare la regolarizzazione.

Per `PbTest3(c)` invece il minor valore di eqm corrisponde ad una buona qualità dell'immagine ricostruita. In Tabella 6 sono riportati i risultati della regolarizzazione. In Figura 11 sono rappresentati i risultati ottenuti con il miglior parametro di regolarizzazione.

5 Conclusioni

In questo lavoro è stato analizzato e implementato in `Matlab` il metodo di Newton proiettato proposto da Bertsekas.

Esso è stato poi applicato alla ricostruzione di tre immagini astronomiche, per le quali sono state modificate la PSF e la regolarizzazione per adattarsi alle diverse caratteristiche di ognuna.

Per la regolarizzazione sono stati utilizzati due metodi: i metodi di Tikhonov e della variazione totale e la determinazione in modo inesatto della direzione di discesa.

Questo secondo metodo è stato utilizzato solo nei problemi con livello di rumore basso, mentre al crescere del rumore è stato necessario introdurre il termine di regolarizzazione.

Per l'immagine della nebulosa i risultati migliori sono stati ottenuti con il metodo di regolarizzazione di Tikhonov, che risulta efficiente nel caso di immagini con zone di colore compatto.

Per quanto riguarda invece le immagini della galassia e del cluster è stato necessario utilizzare una PSF, che tenendo conto di informazioni sperimentali, simula meglio il processo di blurring.

Infine, se per la galassia i due metodi di regolarizzazione hanno fornito risultati simili, per il cluster è risultato migliore il metodo della variazione limitata, che è ottimale per immagini con sorgenti di luce isolate.

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Bertero, P. Boccacci / Introduction to inverse problem in imaging - Institute of Physics Publishing, Bristol, 1998.
- [2] M. Bertero, P. Boccacci / Boundary effects - Astronomy and Astrophysics.
- [3] D. P. Bertsekas / Constrained optimization and Lagrange multiplier methods - Academic Press, Inc. , New York-London, 1982.
- [4] D. P. Bertsekas / Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints - SIAM J. Control Optim. 20 (1982), no. 2, 221–246.
- [5] P. C. Hansen, J. G. Nagy, D. P. O’Leary / Deblurring images. Matrices, spectra and filtering - SIAM, Philadelphia, 2006.
- [6] The Genoa group and C. Arcidiacono / Advances in the reconstruction of LTB LINC-NIRVANA images - Astronomy and Astrphysics, 2006.
- [7] C. R. Vogel / Solution of linear systems arising in nonlinear image deblurring - Scientific computing (Hong Kong, 1997), 148–156, Springer, Singapore, 1997.
- [8] C. R. Vogel, M. E. Oman / iterative methods for total variation denoising - SIAM J. Sci. Comput, 17 (1996), 227–238.

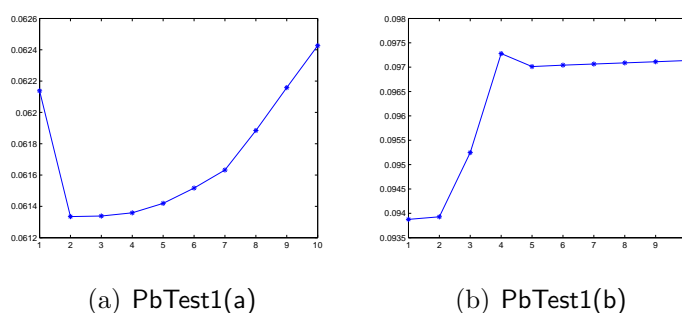


Figura 4: Fenomeno della semiconvergenza nell’andamento dell’eqm

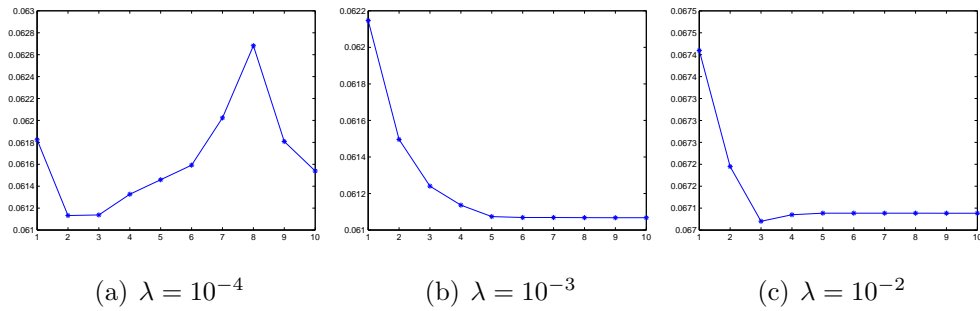
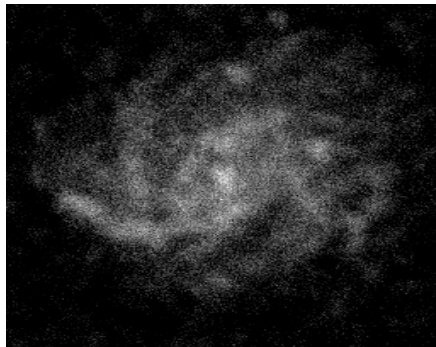
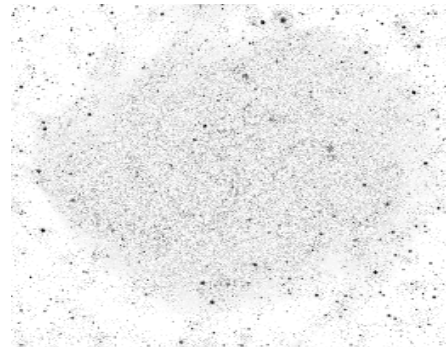


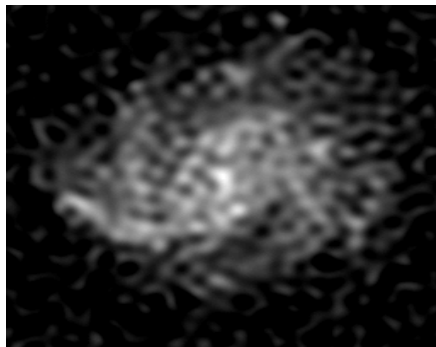
Figura 5: Andamento dell'eqm per PbTest1(a) al variare del parametro di regolarizzazione λ



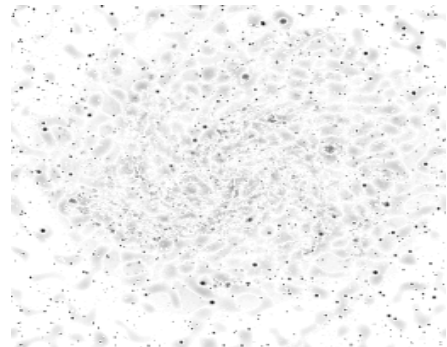
(a) Immagine ricostruita per $\lambda = 0$



(b) Negativo dell'errore

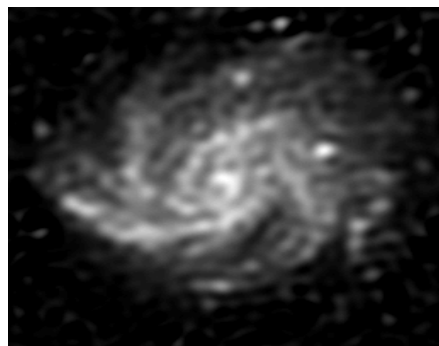
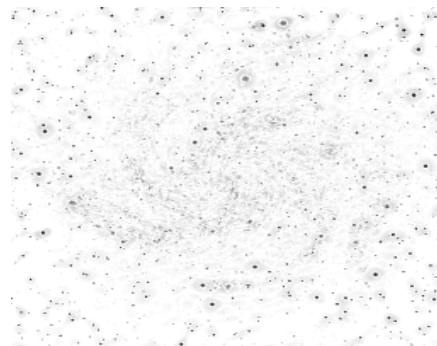


(c) Immagine ricostruita per $\lambda = 10^{-2}$

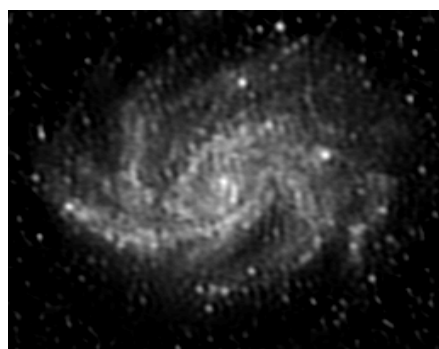
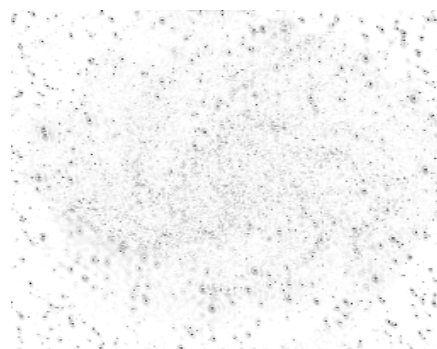


(d) Negativo dell'errore

Figura 6: Immagini ricostruite e negativi degli errori di PbTest2(c)

(a) Ricostruzione con KPSF con $\lambda = 0$ 

(b) Negativo dell'errore

(c) Ricostruzione con AOPSF con $\lambda = 10^{-3}$ 

(d) Negativo dell'errore

Figura 7: Confronto delle migliori immagini ricostruite e dei negativi di PbTest2(a) con le due PSF

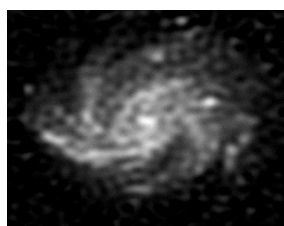
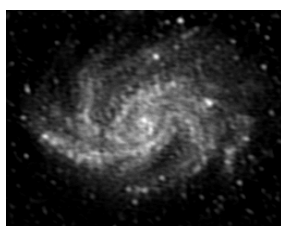
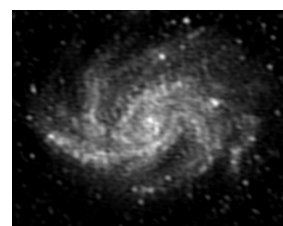
(a) KPSF con $\lambda = 10^{-3}$ (b) AOPSF con $\lambda = 0$ (c) AOPSF con $\lambda = 10^{-3}$

Figura 8: Confronto delle migliori immagini ricostruite di PbTest2(b) con le due PSF

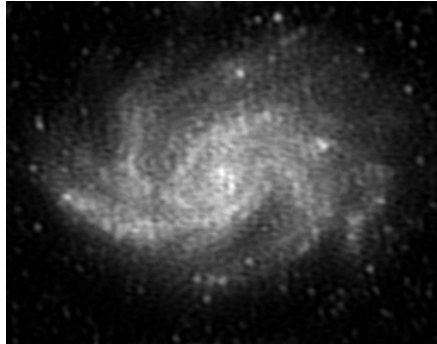
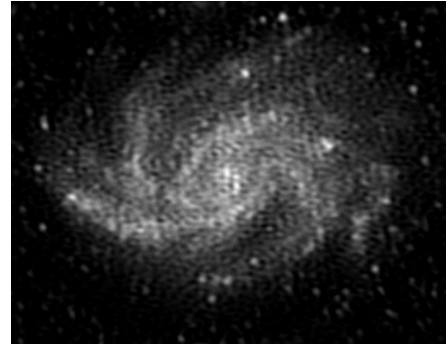
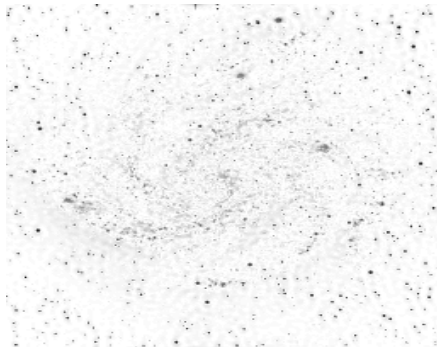
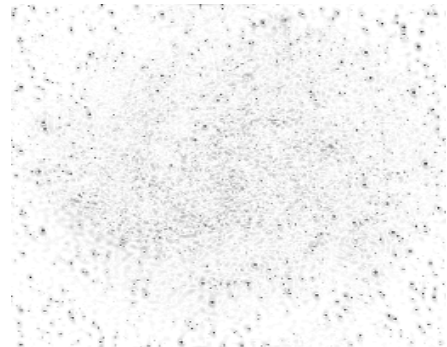
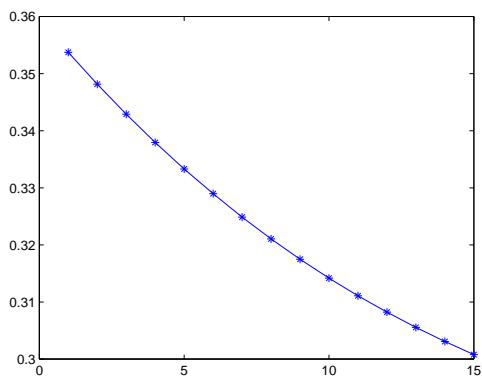
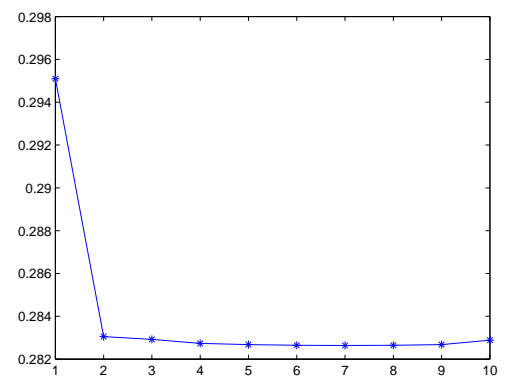
(a) Immagine ricostruita per $\alpha = 10^{-5}$ (b) Immagine ricostruita per $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ (c) Negativo dell'errore per $\alpha = 10^{-5}$ (d) Negativo dell'errore per $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ (e) Andamento dell'eqm per $\alpha = 10^{-5}$ (f) Andamento dell'eqm per $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$

Figura 9: Risultati per PbTest2(b) con la regolarizzazione della variazione limitata

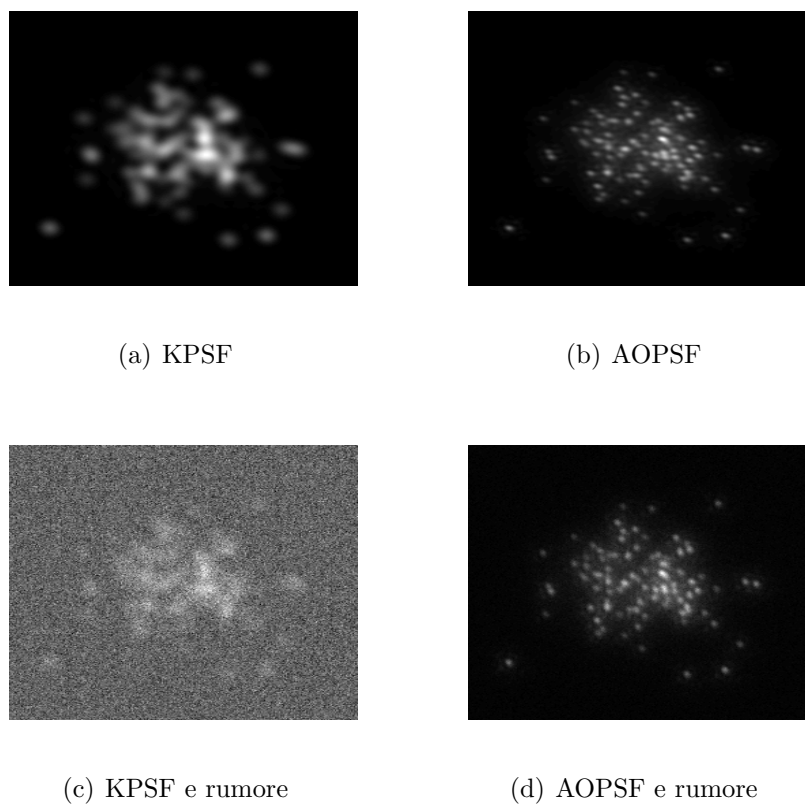


Figura 10: Immagini perturbate dalle due PSF e quelle con livello di rumore alto

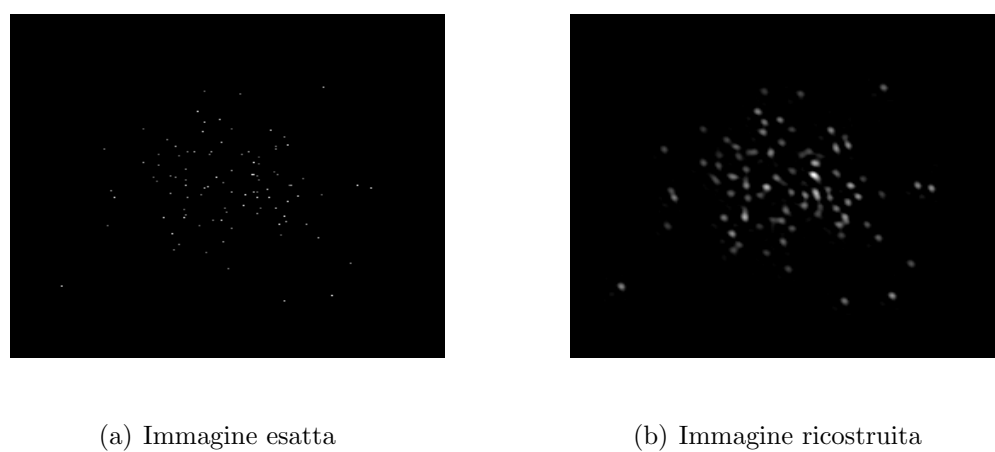


Figura 11: Risultati di PbTest3(c) per $\alpha = 10^{-8}$