

# Metodi per la ricostruzione della posizione d'impatto per immagini planari provenienti da una gamma camera

27 ottobre 2009

La stima della posizione di interazione dei fotoni su una gamma camera per medicina nucleare presenta tipicamente dei problemi vicino ai bordi del rivelatore. Questo fenomeno è dovuto sicuramente alla perdita dei contributi delle code delle distribuzioni di luce che, avvicinandosi ai bordi, cadono al di fuori del rivelatore stesso.

In questo lavoro si analizzano e si confrontano i risultati di vari metodi per cercare di migliorare l'errore che si commette nel calcolo della posizione d'impatto.

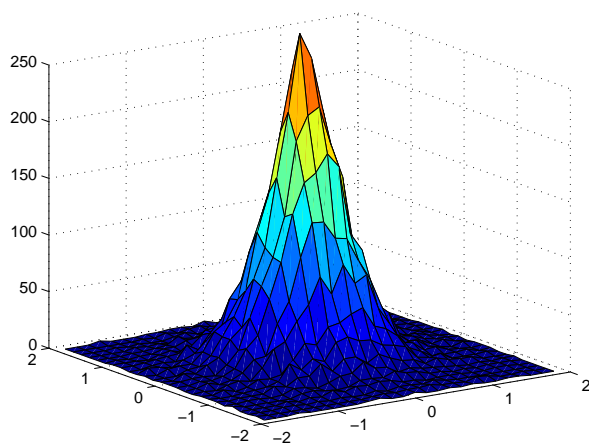


Figura 1: Distribuzione della matrice ottenuta simulando il lancio di 1000 fotoni diretti normalmente verso il centro del rivelatore

## 1 Introduzione

Si consideri una gamma camera in cui lo scintillatore è collegato ad un photodetector formato da fotomoltiplicatori.

Il rivelatore è costituito da  $d_x \times d_y$  elementi.

Ogni simulazione Monte Carlo prevede il lancio di 1000 fotoni perpendicolari alla superficie del rivelatore, ad una distanza di 4 cm.

Il risultato di ogni simulazione è una matrice  $d_x \times d_y$ , i cui elementi rappresentano il numero di fotoni ottici catturati da ogni elemento del rivelatore. In Figura 1 è rappresentata la distribuzione di una matrice ottenuta con una simulazione con alta statistica.

Un primo metodo per la determinazione della posizione d'impatto consiste nel calcolare il baricentro

dei fotoni ottici rilevati:

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j) v_{x_{ij}} \\ b_y &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j) v_{y_{ij}}, \end{aligned} \quad (1)$$

dove  $m = \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j)$ ,  $(v_{x_{ij}}, v_{y_{ij}})$  sono le coordinate del centro dell'elemento  $A(i, j)$  nel sistema di riferimento che ha per origine il centro del rivelatore.

La perdita di dati verso i bordi però fa sì che le coordinate del baricentro  $(b_x, b_y)$  vengano deviate verso l'interno del rivelatore.

Un secondo metodo consiste nel considerare il quadrato della carica dei fotoni, quindi le

coordinate della posizione ricostruita sono:

$$\begin{aligned} b2_x &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j)^2 v_{x_{ij}} \\ b2_y &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j)^2 v_{y_{ij}}, \end{aligned} \quad (2)$$

dove  $q = \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j)^2$ .

## 2 Metodo combinato baricentro-skewness

Spostando il punto di lancio vicino ai bordi del rivelatore, si nota che le distribuzioni delle matrici dei fotoni ottici hanno asimmetria differente, in particolare la skewness lungo gli assi aumenta avvicinandosi ai bordi.

La skewness di una distribuzione 1-dimensionale è definita da:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j) (v_{x_{ij}} - b_x)^3}{\left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j) (v_{x_{ij}} - b_x)^2 \right)^{3/2}} \\ s_y &= \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j) (v_{y_{ij}} - b_y)^3}{\left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{d_x} \sum_{j=1}^{d_y} A(i, j) (v_{y_{ij}} - b_y)^2 \right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

Le distribuzioni 1-dimensionali del baricentro e della skewness sono state utilizzate per ricostruire la posizione d'impatto con il **metodo di massima verosimiglianza**.

In generale conoscendo la funzione di densità di probabilità  $f_\theta$  di una famiglia di distribuzioni che dipendono dal parametro incognito  $\theta$ , si definisce la *funzione di verosimiglianza* come

$$\mathcal{L}(\theta) = f_\theta(x_1, \dots, x_n),$$

dove  $x_1, \dots, x_n$  sono i dati osservati.

Il metodo di massima verosimiglianza stima il valore dell'incognita  $\theta$  come il massimo di  $\mathcal{L}(\theta)$ . Tipicamente si assume che i dati osservati siano indipendenti e identicamente distribuiti, in modo da riscrivere la funzione di verosimiglianza come

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i).$$

Poiché i punti di massimo sono invarianti per trasformazioni monotone, si possono semplificare i calcoli passando al logaritmo e considerando

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(\theta) &= \log \mathcal{L}(\theta) = \log \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \\ &= \log \sum_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \sum_{i=1}^n \log f_\theta(x_i). \end{aligned}$$

Il metodo di verosimiglianza quindi consiste nel risolvere il problema di ottimizzazione

$$\max \sum_{i=1}^n \log f_\theta(x_i).$$

In questo caso il parametro incognito da stimare è la posizione d'impatto  $b-s = (b-s_x, b-s_y)$  e le distribuzioni sono quella del baricentro e quella della skewness.

I risultati delle simulazioni mostrano che le distribuzioni dei baricentri e della skewness sono normali, come rappresentato nelle Figure 2 e 3. Tali distribuzioni quindi possono essere scritte nella coordinata  $x$  rispettivamente come:

$$f_b(b_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b(x)} \exp\left(-\frac{(b_x - \mu_b(x))^2}{2\sigma_b^2(x)}\right) \quad (3)$$

$$f_s(s_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s(x)} \exp\left(-\frac{(s_x - \mu_s(x))^2}{2\sigma_s^2(x)}\right) \quad (4)$$

dove  $\mu_b(x)$ ,  $\sigma_b(x)$ ,  $\mu_s(x)$ ,  $\sigma_s(x)$  sono rispettivamente la media e la varianza del baricentro e della skewness e  $x$  è la posizione d'impatto esatta.

I valori di  $\mu_b(x)$ ,  $\sigma_b(x)$ ,  $\mu_s(x)$ ,  $\sigma_s(x)$  sono stati calcolati attraverso delle simulazioni lungo l'asse  $x$ , al centro di ogni elemento del rivelatore. I risultati sono riportati nelle Figure 4 e 5. Gli andamenti dei grafici mostrano come avvicinandosi ai bordi la media del baricentro si discosti dalla diagonale e i parametri della skewness crescano rapidamente.

Applicando il metodo della massima verosimiglianza, si calcola la posizione d'impatto nella coordinata  $x$  come il massimo di

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(b-s_x) &= \log f_b(b_x) + \log f_s(s_x) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left( \ln \sigma_b(x) + \ln \sigma_s(x) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(b_x - \mu_b(x))^2}{2\sigma_b^2(x)} + \frac{(s_x - \mu_s(x))^2}{2\sigma_s^2(x)} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

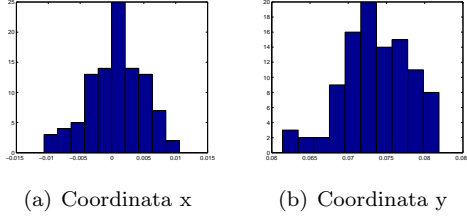


Figura 2: Distribuzioni del baricentro con 100 fotoni nel punto (0.0, 0.075)

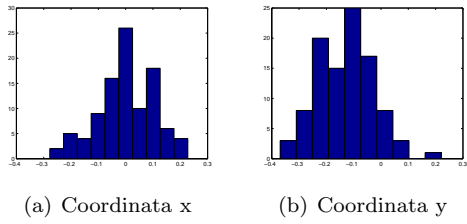


Figura 3: Distribuzioni della skewness con 100 fotoni nel punto (0.0, 0.075)

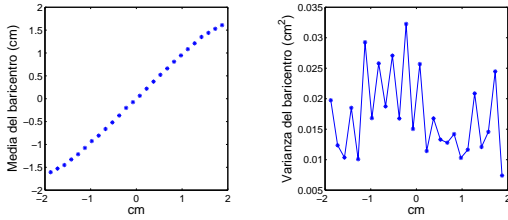


Figura 4: Media e varianza della distribuzione del baricentro lungo l'asse  $x$

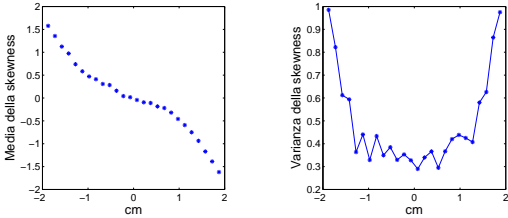


Figura 5: Media e varianza della distribuzione della skewness lungo l'asse  $x$

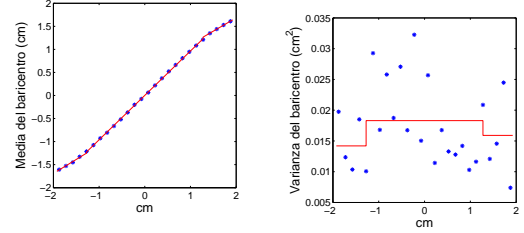


Figura 6: Approssimazione di media e varianza della distribuzione del baricentro lungo l'asse  $x$

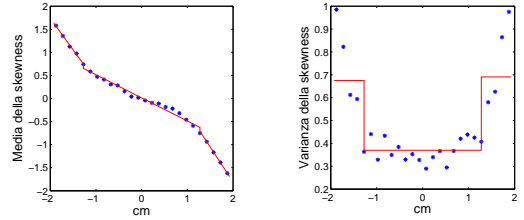


Figura 7: Approssimazione di media e varianza della distribuzione della skewness lungo l'asse  $x$

Analogamente per la coordinata  $y$ .

## 2.1 Soluzione implicita

L'equazione (5) può essere risolta implicitamente.

In particolare, visto che l'andamento dei grafici varia notevolmente verso i bordi, il rivelatore lungo l'asse  $x$  è stato suddiviso in tre intervalli:  $[-1.925, -1.275]$ ,  $(-1.275, 1.275)$  e  $[1.275, 1.925]$ . In ognuno di essi, si è assunto che  $\mu_b$  e  $\mu_s$  fossero lineari e che  $\sigma_b$  e  $\sigma_s$  costanti (in particolare, pari al valor medio dei dati nel rispettivo intervallo):

$$\begin{aligned}\mu_b(x) &= a_0 + a_1x \\ \mu_s(x) &= b_0 + b_1x \\ \sigma_b(x) &= \sigma_b \\ \sigma_s(x) &= \sigma_s.\end{aligned}\tag{6}$$

I parametri in (6) sono stati determinati sperimentalmente e i risultati sono riportati nelle Figure 6 e 7.

La (5) diventa

$$\mathcal{L}^*(b-s_x) = -\frac{1}{2\pi\sigma_b\sigma_s} \left( \frac{(b_x - a_0 - a_1x)^2}{2\sigma_b^2} + \frac{(s_x - b_0 + b_1x)^2}{2\sigma_s^2} \right)$$

e può essere risolta analiticamente. Ponendo la derivata nulla si ha:

$$-\frac{1}{2\pi\sigma_b\sigma_s}\left(\frac{(b_x - a_0 - a_1x)a_1}{\sigma_b^2} + \frac{(s_x - b_0 - b_1x)b_1}{\sigma_s^2}\right) = 0$$

da cui si ottiene che la posizione d'impatto stimata è

$$b\text{-}s_x = \frac{a_1\sigma_s^2b_x + b_1\sigma_b^2s_x - a_0a_1\sigma_s^2 - b_0b_1\sigma_b^2}{a_1^2\sigma_s^2 + b_1^2\sigma_b^2}. \quad (7)$$

Analogamente per la coordinata  $y$ .

La suddivisione in intervalli nelle due coordinate definisce 9 zone del rivelatore. Quindi per ogni matrice ottenuta da una simulazione, si calcolano il baricentro  $(b_x, b_y)$  e la skewness  $(s_x, s_y)$ ; i valori di  $b_x$  e  $b_y$  permettono poi di individuare una delle 9 zone, in cui sono definiti i relativi parametri delle equazioni (6), utilizzati per calcolare la posizione d'impatto dalla (7).

## 2.2 Soluzione iterativa

La suddivisione in intervalli però fa sì che la funzione di massima verosimiglianza sia discontinua, causando una disuniformità nella ricostruzione dell'immagine.

Per questo motivo le funzioni  $\mu_b(x)$ ,  $\sigma_b(x)$ ,  $\mu_s(x)$ ,  $\sigma_s(x)$  sono state approssimate lungo l'intero intervallo  $[-1.925, 1.925]$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mu_b(x) &= a_0x^3 + a_1x \\ \mu_s(x) &= b_0x^4 + b_1 \\ \sigma_b(x) &= c_0 \\ \sigma_s(x) &= d_0x^4 + d_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Anche in questo caso i parametri in (8) sono stati determinati sperimentalmente e i risultati sono riportati nelle Figure 8 e 9. Il problema (5) è quindi risolto iterativamente con il metodo del gradiente coniugato.

## 3 Metodo dei minimi quadrati

Un ulteriore metodo indagato si basa su un problema dei minimi quadrati.

Esso consiste infatti in un algoritmo iterativo che minimizza, attraverso il metodo del gradiente, la

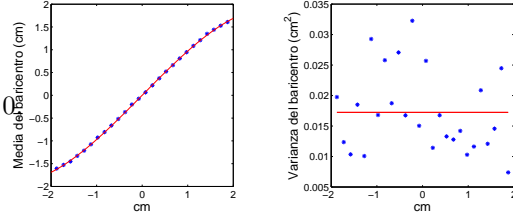


Figura 8: Approssimazione di media e varianza della distribuzione del baricentro lungo l'asse  $x$

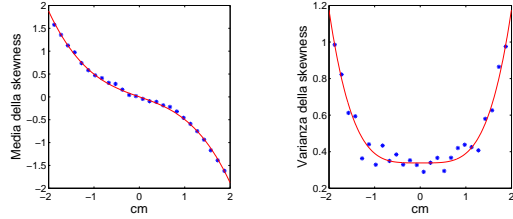


Figura 9: Approssimazione di media e varianza della distribuzione della skewness lungo l'asse  $x$

norma della distanza, punto per punto, della matrice  $A$  da una funzione discreta  $g$  che rappresenta un comportamento ideale. Il problema può essere definito come segue:

$$\min_{(x,y,h,r)} \|A - g(x, y, h, r)\|^2, \quad (9)$$

dove  $g$  è definita da

$$g(x, y, h, r) = \frac{h}{1 + r(rx^2 + ry^2)},$$

in cui  $rx$  e  $ry$  sono le distanze rispettivamente di  $x$  e  $y$  dal centro del sistema di riferimento. In Figura 3 è rappresentato l'andamento della funzione  $g$ . La funzione da minimizzare è  $f(x, y, h, r)$ , definita come la norma della distanza tra  $A$  e  $g$ .

La direzione di discesa è

$$d = -\nabla f = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial h}, \frac{\partial f}{\partial r}\right),$$

le cui componenti sono determinate attraverso il calcolo del gradiente discreto di  $f$ . Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x - dd, y, h, r) - f(x + dd, y, h, r)}{2dd},$$

dove  $dd$  è un intervallo positivo. Analogamente per le altre componenti del gradiente.

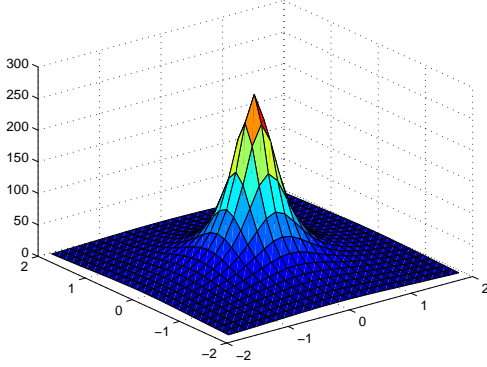


Figura 10: Rappresentazione della funzione  $g$  con  $h = 277$ ,  $r = 0.6$ ,  $x = y = 0$ .

Il passo invece è scelto tramite la regola di Armijo, secondo la quale, dati  $\beta, \sigma \in (0, 1)$ , il passo è  $\alpha = \beta^m$ , dove  $m$  è il primo intero non negativo tale che

$$f(x) - f(x + \beta^m d) \geq -\sigma \beta^m \nabla f(x)^T d.$$

Il ciclo iterativo si arresta quando la norma del gradiente  $\|\nabla f\|$  diventa minore di un valore di tolleranza fissato euristicamente. A questo criterio si aggiunge un controllo sul numero di iterazioni che prevede l'arresto del ciclo quando si raggiunge un numero massimo fissato.

Si riporta di seguito l'algoritmo del metodo:

**Algoritmo 1.** • *Assegnare i valori iniziali*  $(x, y, h, r)$ ;

- *Calcolare il gradiente*  $(dx, dy, dh, dr)$ ;
- $k = 1$ ;
- *Finché*  $(\|(dx, dy, dh, dr)\|) > \text{tolleranza}$  oppure  $k > \text{maxit}$

1. *calcolare il passo*  $\alpha$  *attraverso la regola di Armijo*;

2. *Aggiornare la soluzione*

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha dx \\ y &= y + \alpha dy \\ h &= h + \alpha dh \\ r &= r + \alpha dr; \end{aligned}$$

3. *Aggiornare il gradiente*  $(dx, dy, dh, dr)$ ;
4.  $k = k + 1$

In questo lavoro il problema (9) è stato semplificato e modificato in

$$mq = \min_{(x,y)} \|A - g(x, y)\|^2,$$

in cui  $h$  è fissato per ogni ricostruzione al massimo della matrice  $A$  ed  $r$  è fissato ad un valore preventivamente ottenuto da una ricostruzione in cui, insieme a  $x$  e  $y$ , si ottimizza anche lo stesso parametro  $r$ .

Le caratteristiche principali che influenzano il valore ottimo di  $r$  sono l'energia dei fotoni e lo spessore del cristallo.

## 4 Confronto

Nelle tabelle e nei grafici seguenti sono riportati i risultati delle ricostruzioni dei vari metodi, confrontati in base all'errore, la risoluzione spaziale e l'uniformità dell'immagine.

L'**errore** è calcolato come differenza tra la posizione d'impatto ricostruita e quella esatta; la **risoluzione spaziale** è stimata attraverso la fwhm della distribuzione (che risulta normale) delle soluzioni.

In Figura 11, 12 e 13 sono rappresentati i risultati dell'errore e della risoluzione spaziale calcolati per simulazioni perpendicolari al rivelatore e dirette lungo l'asse  $x$  e lungo la diagonale, al centro di ogni elemento del rivelatore.

In Figura 14 sono rappresentate le ricostruzioni di una simulazione di 1000000 di fotoni lanciati uniformemente e perpendicolarmente al rivelatore con i metodi analizzati. Per stimare l'**uniformità** dell'immagine ricostruita sono usati 3 indici:

- **coefficiente di variazione:**  $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ , dove  $\sigma$  e  $\mu$  sono rispettivamente la deviazione standard e la media delle distribuzioni delle soluzioni;
- **uniformità integrale:**  $IU = \frac{x_{MAX} - x_{MIN}}{x_{MAX} + x_{MIN}}$ ;
- **uniformità differenziale:**  $DU = \frac{D_{MAX}}{\mu}$ , dove  $D_{MAX}$  è la differenza massima tra valori circostanti.

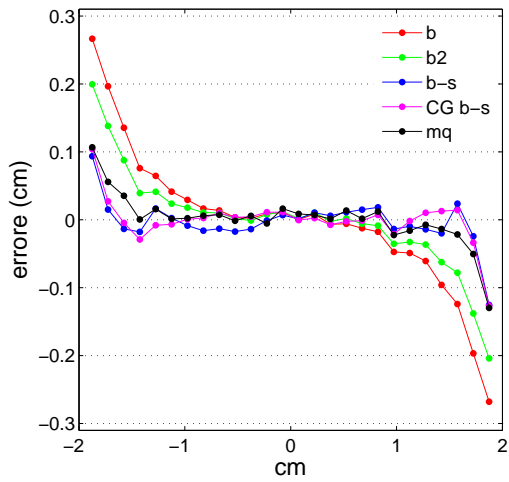


Figura 11: Errore lungo l'asse  $x$

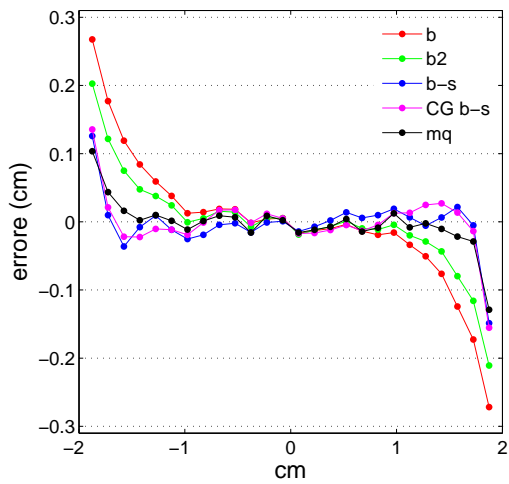


Figura 12: Errore lungo la diagonale

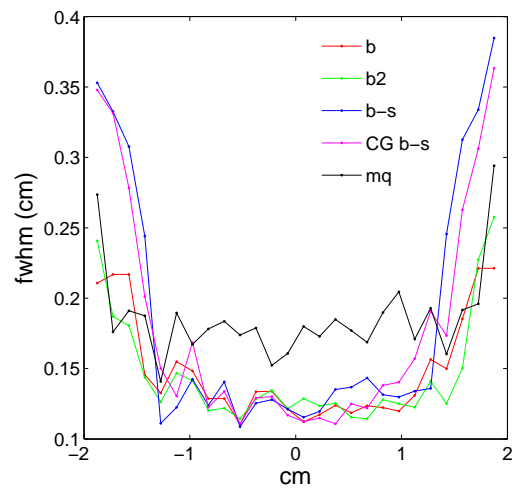


Figura 13: Fwhm lungo l'asse  $x$

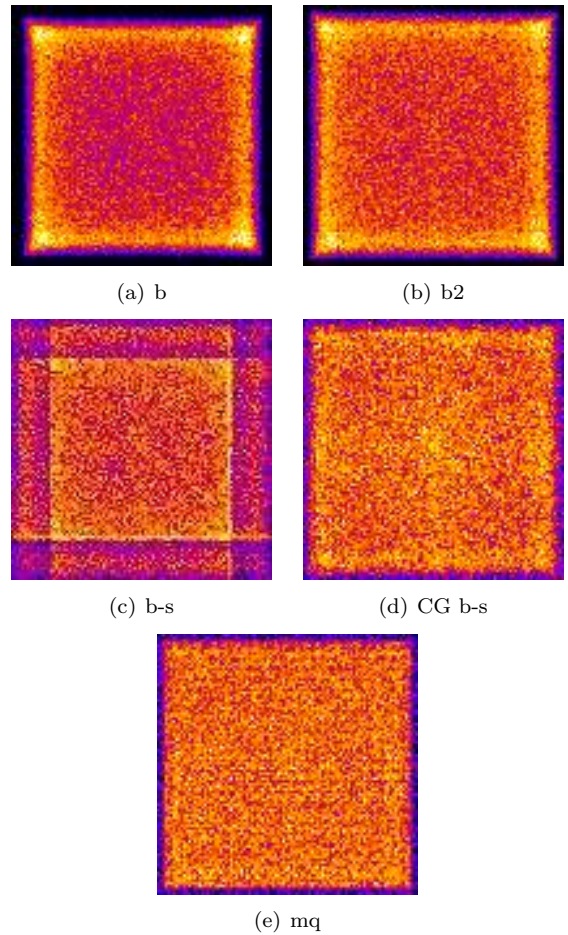


Figura 14: Ricostruzione di una distribuzione uniforme di 10000000 fotoni con i vari metodi: centro di massa (a), centro di massa pesato con carica al quadrato (b), metodo combinato baricentro-skewness (c), metodo combinato baricentro-skewness con soluzione iterativa (d), metodo ai minimi quadrati (e).

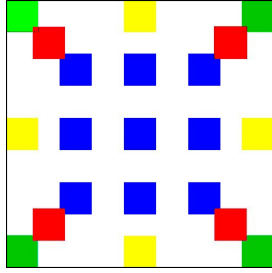


Figura 15: Individuazione della zona  $\mathcal{A}$  (blu),  $\mathcal{B}$  (giallo),  $\mathcal{C}$  (verde) e  $\mathcal{D}$  (rosso).

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
b	$0,13 \pm 0,01$	$0,94 \pm 0,09$	$1,37 \pm 0,11$	$0,20 \pm 0,01$
b2	$0,17 \pm 0,01$	$0,68 \pm 0,01$	$0,97 \pm 0,01$	$0,20 \pm 0,01$
b-s	$0,17 \pm 0,01$	$0,23 \pm 0,02$	$0,25 \pm 0,02$	$0,32 \pm 0,02$
CG b-s	$0,17 \pm 0,01$	$0,28 \pm 0,01$	$0,35 \pm 0,01$	$0,18 \pm 0,01$
mq	$0,19 \pm 0,01$	$0,35 \pm 0,01$	$0,43 \pm 0,01$	$0,18 \pm 0,01$

Tabella 1: Coefficiente di variazione

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
b	$0,41 \pm 0,04$	1	1	$0,46 \pm 0,04$
b2	$0,44 \pm 0,05$	1	1	$0,48 \pm 0,03$
b-s	$0,44 \pm 0,03$	$0,55 \pm 0,04$	$0,57 \pm 0,04$	$0,68 \pm 0,06$
CG b-s	$0,43 \pm 0,06$	$0,68 \pm 0,10$	$0,72 \pm 0,04$	$0,45 \pm 0,04$
mq	$0,46 \pm 0,05$	$0,80 \pm 0,04$	$0,80 \pm 0,04$	$0,47 \pm 0,05$

Tabella 2: Uniformità integrale

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
b	$0,75 \pm 0,10$	$1,41 \pm 0,23$	$2,16 \pm 0,07$	$0,64 \pm 0,04$
b2	$0,76 \pm 0,09$	$1,12 \pm 0,08$	$1,44 \pm 0,12$	$0,71 \pm 0,09$
b-s	$0,77 \pm 0,06$	$0,87 \pm 0,08$	$0,91 \pm 0,18$	$1,05 \pm 0,14$
CG b-s	$0,77 \pm 0,08$	$0,84 \pm 0,05$	$0,99 \pm 0,08$	$0,78 \pm 0,10$
mq	$0,86 \pm 0,11$	$1,00 \pm 0,11$	$1,08 \pm 0,07$	$0,77 \pm 0,07$

Tabella 3: Uniformità differenziale

Nelle Tabelle 1, 2 e 3 sono riportati i risultati di uniformità ottenuti con i vari metodi, relativi alle zone  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , definite dalle ROI individuate in Figura 4.