UN'ANALISI DISAGGREGATA DELLE SPESE PER CONSUMO IN ITALIA

Anna Stagni

Ottobre 1986

N. 29

I risultati di questo lavoro sono frutto dello sforzo congiunto dell'autore e di Roberto Golinelli, che ha curato la predisposizione della banca dati e l'elaborazione delle stime econometriche.

Introduzione

I mutamenti nella composizione della spesa per consumi sono uno degli elementi di maggior rilievo che nel medio periodo possono provocare variazioni di struttura nelle branche produttive. Affinchè un modello possa cogliere questo tipo di effetti è essenziale che esso analizzi, accanto al consumo aggregato, anche la sua allocazione su un numero sufficientemente ampio di categorie di beni, consentendo di individuare il più correttamente possibile gli elementi che modificano nel tempo l'evoluzione delle singole voci di spesa.

Ciò impone il ricorso ai modelli di analisi della domanda che si richiamano alla teoria neoclassica del consumatore. Come è noto, la letteratura sul tema ha dedicato ampio spazio allo sviluppo e alla verifica empirica di sistemi completi di domanda che risultassero coerenti con i postulati della teoria(1) e incorporassero in modo corretto le ipotesi a priori richieste dalla realizzabilità delle stime econometriche. Poichè ciascuno di essi presenta pregi e limiti al tempo stesso, non è possibile esprimere un giudizio di preferibilità assoluta dell'uno o dell'altro. Quando l'obiettivo dell'indagine è la stima econometrica si può solamente sottolineare che la scelta di una specifica forma funzionale dovrebbe seguire alcuni principi generali, talora sfortunatamente conflittuali tra loro. In primo luogo la forma funzionale deve consentire di incorporare le nozioni a priori – teoriche e non – che si ritengono rilevanti. Deve essere inoltre sufficientemente semplice da consentire la stima econometrica. Deve infine adattarsi in modo soddisfacente ai dati. Quando inoltre occorre inserire un sistema di domanda all'interno di un modello macroeconomico, sorgono condizionamenti particolari, imposti dalla natura dei dati e dal grado di disaggregazione richiesto dal modello.

Le necessità di ottenere stime econometriche statisticamente accettabili utilizzando serie temporali di natura aggregata induce a privilegiare forme funzionali flessibili, che permettono di sottoporre a verifica empirica l'accettabilità anche a livello aggregato delle ipotesi suggerite dalla teoria microeconomica del consumatore. Inoltre l'impiego di modelli fortemente disaggregati non sempre si concilia con la realizzabilità empirica[2]. La numerosità dei parametri da stimare spesso si scontra infatti con l'esiguità dei dati campionari disponibili. Inoltre la forte correlazione tra l'evoluzione dei prezzi dei singoli beni nel tempo può essere causa di gravi imprecisioni nella stima della sostituibilità. Una soluzione di frequente usata per superare tali problemi si fonda sul ricorso a forme funzionali che ammettano l'introduzione dell'ipotesi di separabilità sulla struttura delle preferenze: essa infatti può consentire, dati certi presupposti, di suddividere il processo decisionale, e quello di stima, in più stadi, riducendo drasticamente il numero di parametri da stimare in modo simultaneo.

Ai criteri ora ricordati ha dovuto ispirarsi anche questo lavoro, il quale si propone di analizzare l'allocazione del consumo aggregato su 15 voci di spesa, con l'obiettivo esplicito di inserire il sistema di equazioni stimate in un modello macroeconomico di medio termine[3]. In tale contesto, come sempre accade in queste circostanze, la teoria della domanda ha prevalentemente una funzione strumentale, in quanto serve a dare una precisa coerenza interna alla determinazione di un sistema completo di domanda stimato per un aggregato di consumatori e aggregati di beni. Non trattandosi di un lavoro fine a se stesso, ma destinato a un utilizzo specifico in un contesto più ampio[4], è stato inoltre particolarmente rilevante aver ottenuto un modello che, pur perfettibile, desse risultati soddisfacenti in termini di adattamento ai dati e plausibilità dei parametri stimati.

Poichè la numerosità delle categorie di spesa richieste dal modello, unita alla dimensione scarsa del campione (1954-1983) si è rivelata in realtà un ostacolo insormontabile alla realizzabilità delle stime, la scelta della forma funzionale impiegata nelle stime econometriche - avvenuta dopo un faticoso lavoro di ricerca - di fatto ha dovuto privilegiare non tanto l'elemento di novità delle specificazioni quanto la loro capacità di incorporare in modo soddisfacente l'ipotesi di separabilità delle preferenze e di semplificare la stima attraverso una procedura a due stadi. Il modello utilizzato è infatti un sistema di domanda Rotterdam che, in presenza di separabilità debole delle preferenze, offre una soluzione abbastanza soddisfacente alla individuazione separata dei sistemi di domanda che caratterizzano i due stadi di decisione: lo stadio superiore alloca la spesa totale su un numero limitato di panieri di beni opportunamente aggregati, mentre lo stadio inferiore esplicita l'allocazione di questi ultimi sulle singole voci di spesa.

Pur consapevoli che l'introduzione dei vincoli di separabilità rappresenta in linea di principio una soluzione subottimale, riteniamo tuttavia che essa costituisca una forzatura meno grave di tante altre di frequente accettate nel momento della verifica empirica[(5)]. Inoltre poichè nell'ambito di questo lavoro consideriamo entrambi gli stadi decisionali, eviteremo le distorsioni nelle stime della sostituibilità che si introducono quando invece ci si concentra sullo stadio aggregato o su sottoinsiemi di beni [(6)]. Nel primo caso infatti si trascura la diversificazione dei comportamenti della domanda all'interno degli aggregati, mentre nel secondo si ignorano le interrelazioni esistenti fra gli aggregati in quanto tali. Nel nostro caso invece saremo in grado di disegnare correttamente e completamente le interrelazioni esistenti tra le singole categorie di beni prese in esame, dal momento che è possibile, come vedremo, risalire dai parametri delle equazioni di domanda stimate nei diversi stadi ai parametri delle equazioni originarie del sistema generale e alle corrispondenti misure della elasticità reddito e prezzi.

1. Il modello

Uno dei meriti principali del modello noto come Rotterdam proposto da Theil (1965) sulla base delle premesse sviluppate da Barten (1964) è stato lo stimolo che esso ha fornito alla verifica empirica delle restrizioni richieste dalla teoria.

A differenza di altri modelli esso non è dedotto infatti da una funzione di utilità predeterminata ma parte dalla specificazione diretta delle equazioni di domanda, costruite in maniera tale di poter soddisfare i vincoli teorici. Questi ultimi possono perciò essere imposti solo a livello statistico, verificandone empiricamente l'accettabilità attraverso l'impiego di tests adeguati. Se pur brevemente, occorre ricordarne le caratteristiche principali.

Sotto il profilo della specificazione, il sistema Rotterdam considera le funzioni di domanda marshalliane in termini di differenziali delle quote di bilancio w_i esplicitandone la componente endogena, ovvero la variazione della componente di quantità.

Se indichiamo con q_i, p_i e x rispettivamente le quantità, i prezzi e la spesa complessiva, possiamo scrivere un sistema di equazioni del tipo:

$$w_i \, d\ln q_i = b_i \left(d \ln x - \sum_k^n w_k \, d \ln p_k\right) + \sum_k^n k_{ik} \, d \ln p_k \tag{1}$$

La (1) rappresenta la specificazione del modello Rotterdam nota come versione in prezzi assoluti[7] in cui i parametri k_{ij} sono riconducibili agli effetti di sostituzione di Slutsky $s_{ij} = \partial q_i / \partial p_j$ ad utilità costante secondo la relazione:

$$k_{ij} = \frac{p_i p_j \, s_{ij}}{x} = \frac{p_i p_j}{x} \left(\lambda \, u_{ij}^{-1} - x \, \phi \, \frac{\partial q_i}{\partial x} \, \frac{\partial q_j}{\partial x}\right) \tag{2}$$

I parametri b_i, definiti come quote di bilancio marginali, riflettono la propensione marginale alla spesa:

$$b_i = p_i \frac{\partial q_i}{\partial x} \tag{3}$$

Il termine $(d \ln x - \sum_k^n w_k \, d \ln p_k)$ si può considerare come un indice che rappresenta con un grado accettabile di approssimazione la variazione della spesa totale. A fini di verifica empirica è opportuno utilizzare l'approssimazione che discende dal vincolo di bilancio:

$$d \ln x - \sum_k^n w_k \, d \ln p_k \simeq \sum_k^n w_k \, d \ln q_k = d \ln Q$$

Il sistema di domanda Rotterdam può dunque scriversi come:

$$w_i \; d \ln q_i = b_i \; d \ln Q + \sum_j^n k_{ij} \; d \ln p_j \tag{4}$$

I parametri[8] saranno coerenti con i requisiti imposti dalla teoria se saranno soddisfatte le seguenti restrizioni:

aggregazione	$\sum_i b_i = 1 \qquad \sum_i k_{ij} = 0$	
omogeneità	$\sum_j k_{ij} = 0$	(5)
simmetria	$k_{ij} = k_{ji}$	
negatività	$x' K x \leq 0$	

Dai parametri b_i e k_{ij} è possibile dedurre le elasticità alla spesa e ai prezzi sulla base delle definizioni che seguono:

elasticità alla spesa	$e_i = \dfrac{b_i}{w_i}$	
elasticità di sostituzione compensata (Slutsky)[9]	$e^*_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{w_i}$	(6)
elasticità di sostituzione non compensata	$e_{ij} = e^*_{ij} - e_i w_j = \dfrac{k_{ij}}{w_i} - \dfrac{b_i}{w_i} w_j$	

Il modello definito dalla (4) è suscettibile di verifica empirica trasformando i differenziali in differenze finite[10] e considerando b e k come parametri costanti.

I vincoli di aggregazione, nell'ipotesi che le variabili dipendenti assommino a d ln Q, saranno soddisfatti automaticamente dalle stime. I vincoli di omogeneità, simmetria e negatività possono invece essere imposti ai parametri sequenzialmente verificandone opportunamente l'accettabilità empirica.

Il modello Rotterdam può anche essere riformulato imponendo ai parametri delle equazioni di domanda i vincoli di separabilità nelle diverse accezioni: additività fra beni, separabilità forte e separabilità debole. Quest'ultima appare almeno in prima istanza da preferirsi poiché impone restrizioni meno forti alla sostituibilità tra i beni pur consentendo, come vedremo, numerosi vantaggi in termini di procedure di stima.

Sotto il profilo teorico, uno degli aspetti critici del modello Rotterdam è costituito dal fatto che la costanza dei parametri b e k impedisce il soddisfacimento delle condizioni di integrabilità, necessarie affinché le equazioni in differenze siano riconducibili a funzioni di domanda esplicitate in livelli, a meno che non si introducano vincoli assurdamente restrittivi sulle elasticità reddito e prezzi tali da dar luogo alla costanza delle quote distributive[11]. Occorre tuttavia sottolineare che il sistema Rotterdam costituisce una approssimazione e come tale quindi – al pari di tutte le forme funzionali approssimate – non è appropriata in modo esatto per nessuna particolare funzione di utilità[12].

2. Separabilità debole e specificazione del modello a due stadi

Fra le diverse nozioni di separabilità delle preferenze che sono state introdotte nell'analisi della domanda, quella di separabilità debole appare la meno restrittiva. Trattandosi di concetti ben noti, ne richiameremo le caratteristiche con estrema brevità. In generale, data una funzione di utilità, definendo con q_i la quantità consumata del bene i, avremo:

$$U = u(q_1, \;\ldots.\; q_n) \tag{7}$$

Si ipotizza di poter scomporre l'insieme degli n beni di consumo in un certo numero di gruppi, all'interno dei quali il saggio marginale di sostituzione fra beni che appartengono al gruppo stesso non dipende dalle quantità consumate negli altri gruppi.

In tal caso la funzione di utilità descritta dalla (7) assume la forma [13]:

$$U = u(u^1(q_1), \ldots u^g(q_g), \ldots u^h(q_h)) \tag{8}$$

dove u è una funzione di h variabili e $u^h(q_h)$ è funzione dei beni che appartengono al gruppo q_h. La combinazione ottimale all'interno di ogni gruppo q_g è indipendente dagli altri aggregati q_h, mentre q_g non lo è. Si tratta evidentemente di un'ipotesi in qualche misura restrittiva, poiché le interrelazioni tra i beni appartenenti a gruppi diversi sono condizionate dalle interrelazioni tra gli aggregati [14].

Il concetto di separabilità debole può analogamente definirsi in termini di effetti di sostituzione di Slutsky.

Data una funzione di domanda marshalliana:

$$q_i = q_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, x) \tag{9}$$

dove p_i sono i prezzi e x la spesa complessiva, si può infatti dimostrare che in tal caso i termini di sostituzione di Slutsky saranno:

$$s_{ij} \begin{cases} = s_{ij}^g + H_{gg} \dfrac{\partial q_i}{\partial x} \dfrac{\partial q_j}{\partial x} & i, j \in g \\ \\ = H_{gh} \dfrac{\partial q_i}{\partial x} \dfrac{\partial q_j}{\partial x} & i \in g,\ j \in h,\ g \neq h \end{cases} \tag{10}$$

dove s_{ij}^g è il termine di Slutsky all'interno del gruppo g (per u^g costante) e H_{gh} è un fattore di proporzionalità che dipende solo da g e h e riflette le relazioni di sostituibilità fra i gruppi g e h nel loro complesso [15].

L'esistenza di separabilità debole delle preferenze ha implicazioni di rilievo. Essa è infatti condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di aggregati [16]. Inoltre può consentire di scomporre il processo decisionale in due stadi: nello stadio inferiore si determina la combinazione ottimale delle singole voci di spesa all'interno degli aggregati mentre l'allocazione della spesa totale sugli aggregati si realizza separatamente nello stadio superiore. L'esistenza degli aggregati consente direttamente di descrivere lo stadio inferiore di decisione attraverso funzioni marshalliane di domanda condizionali alla spesa x_g per l'aggregato g:

$$q_i = q_i^g (x_g, p_i \dots p_j) \qquad i, j \in g \qquad (11)$$

La descrizione esatta dello stadio superiore di decisione attraverso un sistema di funzioni di domanda aggregate, le cui variabili esplicative siano la spesa totale e indici di prezzo aggregati, richiede invece il soddisfacimento di restrizioni ulteriori, tali da rendere le funzioni di aggregazione dei prezzi indipendenti dal livello di utilità: occorre in altre parole che gli aggregati siano omotetici nelle componenti e pertanto che all'interno dei gruppi le elasticità della spesa x_g siano unitarie. E' possibile tuttavia evitare l'introduzione dell'ipotesi di omoteticità, tutto sommato irrealistica, ricorrendo a soluzioni approssimate, che implicitamente o esplicitamente assumono la quasi omoteticità delle preferenze (17). Uno degli esempi più noti di soluzione approssimata al problema della descrizione dei due stadi decisionali è fornita dal modello Rotterdam nella versione di dipendenza a blocchi(18), proposto in tale versione da Barten (1970) e sviluppato da Theil (1975), soluzione a cui faremo riferimento in questo lavoro.

Occorre ricordare innanzitutto che in presenza di separabilità debole è possibile individuare sistemi di domanda per lo stadio inferiore di decisione, come suggerisce la (11). Essi saranno descritti da un insieme di equazioni di domanda condizionali, i cui argomenti saranno la spesa complessiva x_g dedicata al gruppo e i prezzi dei beni che ad esso appartengono. Nella specificazione Rotterdam avremo, per ogni gruppo di beni g, un sistema di equazioni del tutto analoghe alla (4):

$$w_i^g \, d \ln q_i = b_i^g \, d \ln q_g + \sum_{j \in g} k_{ij}^g \, d \ln p_j \qquad (12)$$

dove $w_i^g = \dfrac{p_i q_i}{x_g}$, $d \ln q_g = d \ln x_g - \sum_{j \in g} w_j^g \, d \ln q_j \simeq \sum_{i \in g} w_i^g \, d \ln q_i$

I parametri b_i^g e k_{ij}^g saranno inoltre definiti come:

$$b_i^g = p_i \frac{\partial q_i}{\partial x_g}$$

$$k_{ij}^g = \frac{p_i p_j}{x_g} \; \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \Big| u^g = \text{cost.} \qquad = \frac{p_i p_j}{x_g} \; s_{ij}^g \tag{13}$$

Ai parametri della (12) si applicano i vincoli usuali:

aggregazione	$\sum_{i \in g} b_i^g = 1$	$\sum_{i \in g} k_{ij}^g = 0$	
omogeneità	$\sum_{j \in g} k_{ij}^g = 0$		
simmetria	$k_{ij}^g = k_{ji}^g$		(14)
negatività	$x' K^g x \leqq 0$		

Poiché all'interno dei gruppi le preferenze per i singoli beni possono essere descritte indipendentemente dagli altri gruppi, possiamo definire le cosiddette elasticità condizionali:

elasticità alla spesa	$e_i^g = \dfrac{b_i^g}{w_i^g}$	
elasticità di sostituzione compensata	$e_{ij}^{*g} = \dfrac{k_{ij}^g}{w_i^g}$	(15)

Il problema della descrizione dello stadio superiore di decisione viene risolto utilizzando i vincoli che la separabilità debole impone sulla matrice degli effetti di sostituzione del sistema di domanda completo. La domanda q_i sarà influenzata dai prezzi dei beni che appartengono a gruppi diversi attraverso gli effetti che essi esercitano su x_g. In particolare, per $i \in g$, $j \in h$, $g \neq h$, gli effetti di sostituzione di Slutsky saranno definiti da:

$$s_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \Big| U = \text{cost.} \quad = \frac{\partial q_i}{\partial x_g} \frac{\partial x_g}{\partial p_j} \Big| U = \text{cost.} \tag{16}$$

La proprietà di simmetria di s_{ij} ci consente di verificare che:

$$\frac{\partial x_g}{\partial p_j} = C_{gh} \frac{\partial q_j}{\partial x_h}$$

dove C_{gh} è un fattore di proporzionalità che dipende da g e da h. Pertanto si avrà(19):

$$s_{ij} = C_{gh} \frac{\partial q_i}{\partial x_g} \frac{\partial q_j}{\partial x_h} \qquad i \in g,\ j \in h,\ g \neq h \tag{17}$$

I prezzi dei beni che appartengono a g eserciteranno due influenze diverse sulla quantità q_i: una diretta attraverso gli effetti di sostituzione condizionali al gruppo s_{ij}^g e una indiretta attraverso gli effetti che nello stadio superiore essi esercitano sulla allocazione della spesa complessiva fra x_g e la spesa dedicata agli altri gruppi:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \Big| u^g = \text{cost.} \quad + \frac{\partial q_i}{\partial x_g} \frac{\partial x_g}{\partial p_j} \Big| U = \text{cost.} \\ &= s_{ij}^g + C_{gg} \frac{\partial q_i}{\partial x_g} \frac{\partial q_j}{\partial x_g} \qquad i,j \in g \end{aligned} \tag{18}$$

Utilizzando le definizioni (13), i parametri k_{ij} del sistema Rotterdam potranno dunque scriversi come:

$$k_{ij} = \frac{p_i p_j \, s_{ij}}{x} \begin{cases} = k_{ij}^g w_g + k_{gg} b_i^g b_j^g & i,j \in g \\ = k_{gh} b_i^g b_j^h & i \in g,\ j \in h,\ g \neq h \end{cases} \tag{19}$$

dove $\quad w_g = \dfrac{x_g}{x} \quad$ e $\quad k_{gh} = \dfrac{C_{gh}}{x}$

Le quote di bilancio marginali b_i sono a loro volta proporzionali alle quote marginali b_i^g del sistema condizionale secondo la relazione:

$$b_i = b_i^g \, b_g \tag{20}$$

dove $\quad b_g = \sum_{i \in g} b_i = \dfrac{\partial x_g}{\partial x}$

Sostituendo le equazioni (19) e la (20) nel sistema (4) otteniamo la specificazione del sistema non condizionale, in cui la singola equazione avrà la forma:

$$\begin{aligned} w_i \, d \ln q_i = b_i^g \, b_g \, d \ln Q + w_g \sum_{j \in g} k_{ij}^g \, d \ln p_j \, + \\ + \, b_i^g \sum_h k_{gh} \sum_{j \in h} b_j^h \, d \ln p_j \end{aligned} \tag{21}$$

Occorre osservare che questa particolare specificazione del modello differisce dalla formulazione generale (4) non solo perché impone i vincoli di separabilità ma anche perché attenua l'ipotesi di costanza dei parametri di sostituzione k_{ij}. Infatti la parametrizzazione utilizzata nelle equazioni di domanda condizionali (12) ha come effetto che i parametri k_{ij}, per i, j $\in$ g, siano funzione della quota di spesa dedicata al gruppo w_g.

Sommando le equazioni (21) per i $\in$ g otteniamo:

$$\sum_{i \in g} w_i \, d \ln q_i = w_g \sum_{i \in g} w_i^g \, d \ln q_i = b_g \, d \ln Q + \sum_h k_{gh} \sum_{j \in h} b_j^h \, d \ln p_j$$

Ricordando che $d \ln q_g = \sum_{i \in g} w_i^g \, d \ln q_i$, se inoltre definiamo:

$$d \ln p_g = \sum_{j \in g} b_j^g \, d \ln p_j \tag{22}$$

le equazioni di domanda per i gruppi possono scriversi:

$$w_g \, d \ln q_g = b_g \, d \ln Q + \sum_h k_{gh} \, d \ln p_h \qquad (23)$$

I vincoli di aggregazione, omogeneità, simmetria e negatività, applicandosi simultaneamente a b_i, k_{ij} e a b_i^g, k_{ij}^g, valgono necessariamente anche per b_g e k_{gh}. Avremo pertanto:

aggregazione	$\sum_g b_g = 1 \qquad \sum_g k_{gh} = 0$	
omogeneità	$\sum_h k_{gh} = 0$	
simmetria	$k_{gh} = k_{hg}$	(24)
negatività	$x' \, K_{gh} \, x \leq 0$	

Analogamente si applicheranno ai gruppi le medesime definizioni di sostituibilità e complementarietà che si applicano ai singoli beni. Possiamo perciò definire:

elasticità alla spesa	$e_g = \dfrac{b_g}{w_g}$	
elasticità di sostituzione compensata:	$e^*_{gh} = \dfrac{k_{gh}}{w_g}$	(25)

In sintesi dunque l'ipotesi di separabilità giustifica sia l'applicazione di sistemi di domanda ad aggregati di beni, sia l'analisi separata della domanda di particolari gruppi di beni.

Osserviamo tuttavia come ciò che in realtà consente l'aggregazione fra i beni nel sistema definito dalla (23) è la presenza degli indici di prezzo p_g i cui pesi sono le quote marginali di bilancio che compaiono nelle equazioni di domanda condizionali (12). La stima del sistema (23) presuppone quindi la conoscenza dei parametri dello stadio inferiore [20].

D'altra parte se ci si limita a considerare le equazioni condizionali di domanda per particolari gruppi di beni, le valutazioni che si possono ottenere circa le relazioni di sostituibilità o complementarietà tra le singole voci di spesa appaiono quanto meno incomplete. Ricordiamo infatti che, come suggerisce la (18), le relazioni di sostituibilità all'interno dei gruppi non riflettono solamente gli effetti di sostituzione condizionali ma anche gli effetti di sostituzione fra i gruppi. La stima della elasticità di sostituzione netta – o non condizionale – così come dell'elasticità alla spesa totale, presuppone quindi la conoscenza dei parametri dell'intero sistema. In particolare si avrà:

elasticità prezzi compensata

per $i, j \in g$:

$$e^{*}_{ij} = e^{*g}_{ij} + e^{*}_{gg} e_i^{\,g} e_j^{\,g} w_j^{\,g} = \frac{k_{ij}^{g} w_g + k_{gg} b_i^{\,g} b_j^{\,g}}{w_i} \tag{26.1}$$

per $i \in g$, $j \in h$, $g \neq h$:

$$e^{*}_{ij} = e^{*}_{gh} e_i^{g} e_j^{h} w_j^{h} = \frac{k_{gh} b_i^{\,g} b_j^{\,h}}{w_i} \tag{26.2}$$

elasticità alla spesa

$$e_i = e_i^{\,g} e_g = \frac{b_i^{\,g} b_g}{w_i} \tag{27}$$

La definizione (26.1) offre lo spunto ad alcune osservazioni. In virtù della negatività della matrice K_{gh}, $e^{*}_{gg} < 0$, pertanto, se escludiamo l'esistenza di beni inferiori, l'elasticità al prezzo proprio e^{*}_{ii} è senz'altro maggiore in valore assoluto della corrispondente elasticità condizionale e^{*g}_{ii} (algebricamente $e^{*}_{ii} < e^{*g}_{ii}$), che di fatto è misurata assumendo invariate le quantità consumate negli altri gruppi. Inoltre, può verificarsi che due beni appartenenti allo stesso gruppo risultino sostituti all'interno del gruppo, cioè $e^{*g}_{ij} > 0$ mentre, se e^{*}_{gg} è abbastanza grande in valore assoluto, possono rivelarsi globalmente complementari ($e^{*}_{ij} < 0$).

Tutto ciò suggerisce l'opportunità non solo di considerare le funzioni di domanda di entrambi i livelli ma anche e soprattutto di procedere alla ricostruzione dei parametri del sistema non condizionale, i quali soltanto offrono una visione completa delle interrelazioni che sussistono fra le singole voci di spesa.

3. Stima del modello a due stadi

La stima dei parametri del modello completo viene effettuata attraverso una procedura e due stadi che consiste in:

1) Stima degli h sistemi di equazioni condizionali (12). Utilizzando le stime dei parametri b_i^g si ottengono le variabili di prezzo $d \ln p_h$ definiti dalla (22) che entrano come argomenti nello stadio successivo.

2) Stima del sistema (23)

La formulazione stocastica prevede l'aggiunta ai modelli di cui sopra dei relativi termini di errore e_{it}^g ed E_{gt} per i quali si assume

$$e_{it}^g \sim N(0, \Omega_i) \; ; \quad E_{gt} \sim N(0, \Omega_g)$$

I vincoli di aggregazione implicano che in ogni t la somma dei disturbi sia nulla. Ω_i e Ω_g sono singolari e non diagonali.

Condizione per la consistenza delle stime ottenute attraverso la procedura a due stadi (21) è l'indipendenza stocastica tra gli h+1 modelli di domanda, la quale consente di considerare la spesa allocata ai gruppi, x_g, come variabile predeterminata nei sistemi condizionali. Tale requisito sarà soddisfatto se inoltre si può dimostrare che:

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(e_{it}^g, e_{jt}^h) = 0 && i \in g,\ j \in h,\ g \neq h \\ &\operatorname{cov}(e_{it}^g, E_{ht}) = 0 && i \in g,\ g,h = 1 \ldots h \end{aligned} \qquad (28)$$

La dimostrazione fornita da Theil (1975) circa il soddisfacimento delle condizioni (28) fa riferimento tuttavia a una diversa specificazione dei modelli, la quale presuppone che i vincoli sulla sostituibilità mantengano la costanza dei parametri k_{ij} (22):

$$k_{ij} = \bar{k}_{ij}^{g} + k_{gg}\, b_i^{g}\, b_j^{g} \qquad i, j \in g$$

In tal caso i modelli dei due stadi sono riconducibili a un modello non condizionale che rappresenta una versione vincolata nested nel modello descritto dalla (4) e tra i disturbi dei sistemi condizionali $\bar{e}_{it}^{g}$ e i disturbi dei sistemi non condizionali e_{it} sussiste la relazione:

$$\bar{e}_{it}^{g} = e_{it} - b_i^{g}\, E_{gt}$$

Nel nostro caso invece la particolare parametrizzazione utilizzata per le domande condizionali (12) introduce, come si rileva dalla (19), la variabilità di k_{ij} per $i, j \in g$ e dà luogo al modello non condizionale (21) che non si può ritenere nested nel modello (4). Coerentemente, i disturbi delle equazioni (12) sono definiti da:

$$e_{it}^{g} = \bar{e}_{it}^{g} / w_{gt} = (e_{it} - b_i^{g}\, E_{gt})/w_{gt}$$

Il soddisfacimento delle condizioni (28) non è dunque immediato, e richiede l'ipotesi aggiuntiva che le variabili w_{gt} siano non stocastiche.

La parametrizzazione utilizzata nella (12) ha anche altre implicazioni.

Poiché il modello (21) non è una versione vincolata del modello generale (4) ma differisce da esso per la diversità delle ipotesi sulla variabilità dei parametri di sostituzione, viene meno la possibilità anche teorica di sottoporre a verifica empirica l'ipotesi di separabilità effettuando la stima del modello non vincolato e utilizzando tests di confronto tra modelli nested. E' doveroso peraltro aggiungere che la verifica empirica dell'ipotesi di separabilità nel nostro caso è impedita anche da ragioni di realizzabilità, quelle stesse che impongono la scelta della procedura a due stadi ovvero numerosità delle voci di spesa e limitato numero di osservazioni.

Il nostro obiettivo infatti è di stimare un modello di allocazione di 15 categorie di consumo (23), descritte nella tab. 1, su dati annuali relativi al periodo 1953-1984. Le categorie individuate assommano alla spesa complessiva delle famiglie per consumi interni più la spesa per turismo all'estero (24).

La riaggregazione delle voci di spesa in gruppi separabili, necessaria per la applicazione della procedura a due stadi, non discende dall'impiego di tests statistici, ma è stata ottenuta effettuando una serie di esperimenti alternativi. La composizione di cinque gruppi prescelti è descritta nella medesima tab. 1. Tale scelta, a nostro avviso, si giustifica sia sulla base di un criterio di plausibilità economica – si cerca di separare i beni che sappiamo essere eterogenei (25) – sia sulla base della qualità dei risultati ottenuti dalle stime.

Come si rileva dalla tab. 1, la spesa per il gruppo 3 viene in realtà allocata attraverso uno stadio ulteriore di decisione. L'ipotesi di separabilità può essere infatti estesa a più di due stadi se si suppone che gli aggregati di beni q_g siano a loro volta debolmente separabili in altri sottogruppi q_{gs}. Le caratteristiche di questo ulteriore livello di separabilità e la relativa specificazione delle equazioni di domanda Rotterdam per i tre stadi di decisione sono illustrati in appendice.

In ciascuno degli stadi e in ciascuno dei gruppi tutti i vincoli richiesti dalla teoria, inclusa la negatività, sono stati sottoposti a verifica empirica (26), stimando, a partire dalla specificazione libera che ingloba già la condizione di aggregazione, una sequenza di specificazioni _nested_ e valutando via via la loro coerenza con i dati attraverso tests basati sul rapporto di verosimiglianza (LR).

In maniera analoga si è verificata l'accettabilità della presenza di un'intercetta. Ad esclusione del gruppo 4 la costante è stata accettata in tutti i modelli.

Le tecniche di stima utilizzate sono sempre riconducibili a metodi di massima verosimiglianza utilizzate da Barten (1969) e Barten e Geyskens (1975) (27). Le stime dei modelli liberi e dei modelli con omogeneità, che non impongono particolari vincoli sulla matrice di varianze e covarianze Ω – a parte la singolarità – sono ottenute massimizzando la funzione di verosimiglianza concentrata. Nei modelli con simmetria e quelli con negatività, che comportano invece interdipendenza tra le stime di Ω e dei coefficienti di sostituzione k_{ij}, la massimizzazione della verosimiglianza avviene attraverso una procedura iterativa.

I risultati utili per il confronto tra i modelli che incorporano sequenzialmente vincoli addizionali sono sintetizzati nella tab. 2, che riporta i valori massimi ottenuti per il logaritmo della funzione di verosimiglianza nonché, per i modelli vincolati, i tests basati sul rapporto di verosimiglianza. E' necessario osservare che nello stadio inferiore i modelli per i gruppi 2, 3, 4 allocano la spesa su due beni. In tal caso, essendo soddisfatto in partenza il vincolo di aggregazione, l'imposizione del vincolo di omogeneità comporta automaticamente il soddisfacimento del vincolo di simmetria.

Nelle verifiche empiriche del modello Rotterdam assai di frequente i vincoli imposti dalla teoria, già a partire dal vincolo di omogeneità, sono stati rifiutati dai dati. Dalla tab. 2 osserviamo invece che in tutti i modelli i vincoli imposti dalla teoria di rivelano statisticamente accettabili. Guardando alle variazioni del valore del logaritmo della funzione di verosimiglianza, notiamo che nei modelli a più di due beni esso risente maggiormente dell'introduzione del vincolo di omogeneità che non del vincolo di simmetria. Il rapporto di verosimiglianza si mantiene però nei limiti dei valori di accettazione a un livello di significatività di 0.05.

Rileviamo inoltre che i modelli stimati imponendo il vincolo di simmetria rispettano anche quello di negatività senza che siano esplicitamente imposti vincoli sulla matrice K.

Le tabb. 3-8 riportano i valori delle stime dei parametri – con relativi tests statistici – relativamente ai modelli accettati dopo la sequenza di esperimenti <u>nested</u>, vale a dire i modelli che incorporano per ogni stadio e per ogni gruppo i vincoli di aggregazione, omogeneità, simmetria, e soddisfano autonomamente i vincoli di negatività. Accanto ai tests usuali si riportano i risultati di un'analisi multivariata dei residui(28), i quali suggeriscono l'assenza di autocorrelazione del primo e del secondo ordine per tutti i modelli considerati.

I risultati delle stime ci paiono tutto sommato soddisfacenti, almeno con riferimento agli standard abitualmente raggiunti in questo tipo di analisi.

Ci sembra infatti di poter nutrire un minimo di fiducia nella accettabilità delle specificazioni prescelte, che paiono superare tutti i tests di coerenza con i dati, inclusa l'assenza di autocorrelazione. I problemi di significatività dei parametri, sempre presenti nella stima di sistemi vincolati di equazioni, non appaiono drammatici, e non toccano comunque i parametri più rilevanti, ovvero quelli che definiscono le elasticità alla spesa e al prezzo proprio. Sono invece necessarie molte cautele nel valutare le misure delle elasticità implicate dalle stime, riportate nelle medesime tabelle, che possono soltanto fornire alcune indicazioni di massima sulle risposte delle domande a variazioni di reddito e prezzi [29].

Per quanto riguarda le elasticità, in realtà le stime contenute nelle tabb. 3-8 non forniscono un contributo informativo di grande rilievo poiché fanno riferimento solo alle relazioni che sussistono tra i gruppi. Abbiamo perciò ricostruito, combinando i parametri stimati nei diversi modelli e nei diversi stadi secondo le definizioni (26) e (27), le stime delle elasticità non condizionali, che tengono conto dell'interdipendenza fra i gruppi. I risultati sono presentati nella tab. 9, che descrive i parametri del modello completo e nella tab. 10, che riporta, con riferimento al 1984, le elasticità alla spesa e tutte le elasticità compensate ai prezzi per le 15 categorie in esame. Notiamo immediatamente come il quadro delle relazioni di sostituibilità-complementarietà appaia modificato rispetto all'immagine offerta dai modelli parziali, e non solo in termini di dimensione: osserviamo infatti come in cinque casi le relazioni di sostituibilità all'interno di un gruppo si trasformano in complementarietà quando si tiene conto dell'interdipendenza tra i gruppi.

Inoltre è tranquillizzante osservare che dimensionalmente le stime ottenute hanno connotati di ragionevolezza. L'elasticità rispetto al reddito è significativamente superiore all'unità per cinque voci: vestiario, mobilio, mezzi di trasporto, servizi domestici e turismo all'estero, e fra queste il massimo (0,5) è toccato dalla voce vestiario. Significativo è il fatto che invece il minimo (0,08) è toccato dall'elasticità delle spese per abitazione, quale riflesso delle rigidità che caratterizzano tale mercato [30].

Per quanto riguarda invece la sensibilità a variazioni del proprio prezzo, tutte le domande paiono senza eccezioni caratterizzate da rigidità. Si va dal minimo (in valore assoluto) delle spese per abitazione (-0,07) al massimo delle spese per turismo (-0,92). Aumenti di prezzo paiono dunque destinati, a parità delle altre condizioni, a far aumentare la quota di spesa.

Considerando le relazioni incrociate fra i beni, 20 sulle 105 che caratterizzano il modello suggeriscono l'esistenza di complementarietà. Alcune di esse risultano del tutto coerenti con le attese: si veda ad esempio la complementarietà riscontrata tra spese per l'abitazione e mobilio e quella tra acquisto di mezzi di trasporto e spese per l'esercizio dei medesimi. In tutti i casi, sia che si abbia sostituibilità che complementarietà, le elasticità incrociate ai prezzi sono di dimensioni contenute (nella maggioranza dei casi inferiori a 0,5) e, come è lecito attendersi, talora prossime a zero.

Nel complesso dunque i risultati delle stime escludono l'esistenza di reattività troppo forti delle domande ai prezzi relativi e descrivono modelli di comportamento dei consumatori caratterizzati da una certa stabilità.

Tab. 1 - CATEGORIE DI CONSUMO FINALE

<u>Le voci di spesa</u>

C1	Generi alimentari, bevande, tabacco
C2	Vestiario e calzature
C3	Abitazione
C4	Combustibili
C5	Energia elettrica
C6	Servizi domestici
C7	Mobili, artic. di arredam., appar. e utens. per la casa
C8	Acquisto di mezzi di trasporto
C9	Spese di esercizio di mezzi di trasporto
C10	Acquisto di servizi di trasporto
C11	Comunicazioni
C12	Servizi sanitari e spese per la salute
C13	Ricreazione, spettacoli, istruzione e cultura
C14	Altri beni e servizi
C15	Consumi all'estero dei residenti in Italia

<u>Gli aggregati separabili</u>

I stadio	II stadio	III stadio
G1	C1, C2, C4, C5	-
G2	C3, C12	-
G3	C7+C13, C8	C7, C13
G4	C9, C10	-
G5	C6, C11, C14, C15	-

Tab. 2 - TESTS LR DEI VINCOLI TEORICI

Modelli di domanda degli aggregati

Modello		Log della funz. di verosimiglianza	Test rapp. verosimigl.
I.	non vincolato	681.1	-
II.	omogeneità	676.5	9.2
III.	omogen. + simmetria	673.8	5.4
IV.	omogen.+ simm.+ negativ.	673.8	0.0

Modelli di domanda condizionali

Modello	gruppo 1		gruppo 2		gruppo 3	
	L-like.	LR	L-like.	LR	L-like.	LR
I.	508.9	-	137.252	-	107.801	-
II.	506.5	4.8	137.246	.01	107.250	1.1
III.	504.7	3.6	137.246	0	107.250	0
IV.	504.7	0	137.246	0	107.250	0

Modello	gruppo 3.1*		gruppo 4		gruppo 5	
	L-like.	LR	L-like.	LR	L-like.	LR
I.	115.631	-	96.73	-	484.79	-
II.	113.902	3.4	96.68	.10	482.83	3.9
III.	113.902	-	96.68	-	482.40	0.9
IV.	113.902	-	96.68	-	482.40	-

* tests riferiti al III stadio

Tab. 3 I stadio: risultati del modello scelto (IV)

3a - Stime dei parametri (fra parentesi gli errori standard)

	a_i	b_i	k_{i1}	k_{i2}	k_{i3}	k_{i4}	k_{i5}	dum_i	R^2	DW	MDV	w_{i83}
G1	-.0056 (.0005)	.590 (.019)	-.170 (.043)	.0343 (.0122)	.0851 (.0316)	.0123 (.0114)	.0387 (.0174)	-.0087 (.0033)	.94	1.893	.0205	.424
G2	.0024 (.0005)	.0215 (.0102)		-.0289 (.0066)	-.0347 (.0106)	.0031 (.0040)	.0262 (.0062)		.69	1.767	.0046	.141
G3		.193 (.013)			-.0542 (.0345)	-.0021 (.0100)	.0059 (.0143)	.0054 (.0030)	.77	1.789	.0077	.173
G4	.0011 (.0003)	.0663 (.0055)				-.0143 (.0054)	.0010 (.0054)		.65	1.793	.0033	.085
G5	.0021 (.0005)	.129 (.011)					-.0718 (.0183)	.0033 (.0012)	.88	1.621	.0066	.177

Analisi multivariata dei residui M(1): 5.24 M(2): 8.63

3b - 1984: elasticità al reddito (e_i), elast. ai prezzi non compensata (e_{ij}) e compensata (e^*_{ij})

	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e_{i5}	e^*_{i1}	e^*_{i2}	e^*_{i3}	e^*_{i4}	e^*_{i5}
G1	1.391	-.992	-.115	-.040	-.090	-.154	-.402	.081	.201	.029	.091
G2	.153	.179	-.227	-.273	.009	.160	.243	-.206	-.247	.022	.187
G3	1.116	.018	-.358	-.507	-.107	-.163	.491	-.201	-.313	-.012	.034
G4	.776	-.185	-.073	-.158	-.234	-.126	.145	.036	-.024	-.168	.011
G5	.729	-.090	.046	-.093	-.057	-.536	.219	.149	.034	.005	-.407

Tab. 4 II stadio - Gruppo 1 (beni non durevoli): risultati del modello scelto (IV)

4a - Stime dei parametri (fra parentesi gli errori standard)

	a_i	b_i	k_{i1}	k_{i2}	k_{i3}	k_{i4}	R^2	DW	MDV	w_{i83}
C1	.0030 (.0014)	.5475 (.0281)	-.0742 (.0227)	.0779 (.0217)	.0001 (.0065)	-.0039 (.0034)	.953	1.72	.0269	.698
C2	-.0046 (.0014)	.3934 (.0280)		-.0945 (.0225)	.0092 (.0069)	.0073 (.0032)	.889	2.00	.0067	.196
C4	.0005 (.0002)	.0497 (.0073)			-.0094 (.0043)	.0001 (.0013)	.359	2.19	.0019	.068
C5	.0011 (.0002)	.0093 (.0046)				-.0036 (.0013)	.425	1.72	.0018	.038

Analisi multivariata dei residui M(1): 3.78 M(2): 6.23

4b - 1984: elasticità al reddito (e_i), elast. ai prezzi non compensata (e_{ij}) e compens. (e^*_{ij})

	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e^*_{i1}	e^*_{i2}	e^*_{i3}	e^*_{i4}
C1	.784	-.653	-.042	-.053	-.036	-.106	.112	.0001	-.006
C2	2.012	-1.005	-.877	-.090	-.040	.398	-.483	.047	.037
C4	.729	-.507	-.008	-.188	-.026	.001	.134	-.138	.002
C5	.243	-.270	.143	-.013	-.102	-.101	.190	.003	-.093

Tab. 5 II stadio - Gruppo 2 (abitazione e spese mediche): risultati del modello scelto (IV)

5a - Stime dei parametri (fra parentesi gli errori standard)

	a_i	b_i	k_{i1}	k_{i2}	R^2	DW	MDV	w_{i83}	
C3	.0035 (.0016)	.37 (.05)	-.0208 (.0134)	.0208 (.0134)		.799	1.62	.021	.659
C12	-.0035 (.0016)	.63 (.05)		-.0208 (.0134)		.848	1.62	.017	.341

Analisi multivariata dei residui M(1): 6.12 M(2): 8.93

5b - 1984: elasticità al reddito (e_i), elast. ai prezzi non compens. (e_{ij}) e compens. (e^*_{ij})

	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e^*_{i1}	e^*_{i2}
C3	.56	-.401	-.16	-.032	.032
C12	1.85	-1.16	-.691	.061	-.061

Tab. 6 II e III stadio - Gruppo 3(beni durevoli): risultati del modello scelto (IV)

6a - Stime dei parametri (fra parentesi gli errori standard)

	a_i	b_i	k_{i1}	k_{i2}	dum_i	R^2	DW	MDV	w_{i83}
C7+C13	-.0013 (.0049)	.587 (.047)	-.0775 (.0527)	.0775 (.0527)	.0237 (.0110)	.90	2.211	.039	.787
C8	.0013 (.0049)	.413 (.047)		-.0775 (.0527)	-.0237 (.0110)	.74	2.211	.012	.213
C7	-.0104 (.0023)	.651 (.041)	-.139 (.054)	.139 (.054)	.0231 (.0097)	.91	2.099	.020	.448
C13	.0104 (.0023)	.349 (.041)		-.139 (.054)	-.0231 (.0097)	.74	2.099	.025	.552

Analisi multivariata dei residui M(1): 4.2 M(2): 5.64

6b - 1984: elasticità al reddito (e_i), elast. ai prezzi non compens. (e_{ij}) e compens. (e^*_{ij})

	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e^*_{i1}	e^*_{i2}
C7+C13	.746	-.686	-.061	-.098	.098
C8	1.934	-1.158	-.776	.363	-.363
C7	1.46	-.962	-.494	-.310	.310
C13	.631	-.031	-.600	.251	-.251

Tab. 7 II stadio - Gruppo 4 (spese per trasporti): risultati del modello scelto (IV)

7a - Stime dei parametri (fra parentesi gli errori standard)

	b_i	k_{i1}	k_{i2}	dum_i	R^2	DW	MDV	w_{i83}
C9	.804 (.033)	-.0444 (.0376)	.0444 (.0376)	-.0614 (.0144)	.855	1.59	.053	.759
C10	.196 (.033)		-.0444 (.0376)	.0614 (.0144)	.612	1.59	.013	.241

Analisi multivariata dei residui M(1): 5.75 M(2): 8.93

7b - 1984: elasticità al reddito (e_i), elast. ai prezzi non compens. (e_{ij}) e compens. (e^*_{ij})

	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e^*_{i1}	e^*_{i2}
C9	1.06	-.863	-.197	-.058	.058
C10	.812	-.432	-.380	.184	-.184

Tab. 8 II stadio - Gruppo 5 (servizi): risultati del modello scelto (IV)

8a - Stime dei parametri (fra parentesi gli errori standard)

	a_i	b_i	k_{i1}	k_{i2}	k_{i3}	k_{i4}	dum_i	R^2	DW	MDV	w_{i83}
C6		.051 (.006)	-.0047 (.0092)	.0048 (.0035)	-.0039 (.0114)	.0038 (.0073)		.68	2.338	.0020	.031
C11	.0015 (.0004)	.037 (.006)		-.0118 (.0024)	.0102 (.0052)	-.0032 (.0038)		.68	1.657	.0032	.064
C14		.807 (.012)			-.0492 (.0219)	.0429 (.0152)	.0223 (.0034)	.98	2.047	.042	.853
C15	-.0015 (.0004)	.105 (.011)				-.0436 (.0138)	-.0223 ((.0034)	.76	2.091	.003	.052

Analisi multivariata dei residui M(1): 2.32 M(2): 5.41

8b - 1984: elasticità al reddito (e_i), elast. ai prezzi non compens. (e_{ij}) e compens. (e^*_{ij})

	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e^*_{i1}	e^*_{i2}	e^*_{i3}	e^*_{i4}
C6	1.655	-.203	.049	-1.539	.039	-.152	.154	-.128	.125
C11	.577	.056	-.221	-.333	-.080	.074	-.184	.160	-.050
C14	.946	-.034	-.048	-.865	-.0009	-.005	.012	-.057	.050
C15	2.009	.012	-.189	-.892	-.940	.074	-.061	.822	-.835

Tab. 9 - 1984: Parametri del modello vincolato (*)

	a(i)	b(i)	k(i1)	k(i2)	k(i3)	k(i4)	k(i5)	k(i6)	k(i7)	k(i8)	k(i9)	k(i10)	k(i11)	k(i12)	k(i13)	k(i14)	k(i15)
C1	-0.186	32.321	-8.257	-0.363	0.695	-0.460	-0.252	0.108	1.782	1.924	0.544	0.132	0.078	1.184	0.953	1.709	0.222
C2	-0.417	23.221		-6.645	0.499	0.057	0.248	0.078	1.280	1.382	0.391	0.095	0.056	0.851	0.685	1.228	0.160
C3	0.139	0.796			-0.688	0.063	0.012	0.049	-0.491	-0.530	0.092	0.022	0.036	-0.383	-0.263	0.784	0.102
C4	-0.008	2.933				-0.441	-0.002	0.010	0.162	0.175	0.049	0.012	0.007	0.107	0.087	0.155	0.020
C5	0.041	0.552					-0.153	0.002	0.030	0.033	0.009	0.002	0.001	0.020	0.016	0.029	0.004
C6	0.011	0.656						-0.101	0.012	0.012	0.004	0.001	0.070	0.084	0.006	-0.365	0.030
C7	-0.157	7.387							-3.252	0.017	-0.064	-0.015	0.008	-0.837	1.160	0.183	0.024
C8	0.023	7.975								-2.266	-0.069	-0.017	0.009	-0.903	0.009	0.198	0.026
C9	0.086	5.337									-1.306	0.154	0.003	0.156	-0.034	0.063	0.008
C10	0.021	1.297										-0.434	0.001	0.038	-0.008	0.015	0.002
C11	0.034	0.475											-0.218	0.061	0.004	-0.034	-0.084
C12	0.105	1.357												-1.443	-0.448	1.337	0.174
C13	0.134	3.952													-2.279	0.098	0.013
C14	0.177	10.391														-5.550	0.149
C15	-0.093	1.351															-0.849

(*) Per rendere meglio leggibili i corrispondenti valori, i parametri sono stati moltiplicati per 100.

Tab. 10 - 1984: Elasticita' reddito ed elasticita' prezzi compensata

	e(i)	e(i1)	e(i2)	e(i3)	e(i4)	e(i5)	e(i6)	e(i7)	e(i8)	e(i9)	e(i10)	e(i11)	e(i12)	e(i13)	e(i14)	e(i15)
C1	1.092	-0.279	-0.012	0.023	-0.016	-0.008	0.004	0.060	0.065	0.018	0.004	0.003	0.040	0.032	0.058	0.008
C2	2.799	-0.044	-0.801	0.060	0.007	0.030	0.009	0.154	0.167	0.047	0.011	0.007	0.103	0.083	0.148	0.019
C3	0.086	0.075	0.054	-0.074	0.007	0.001	0.005	-0.053	-0.057	0.010	0.002	0.004	-0.041	-0.028	0.085	0.011
C4	1.014	-0.159	0.020	0.022	-0.153	-0.001	0.003	0.056	0.060	0.017	0.004	0.002	0.037	0.030	0.054	0.007
C5	0.339	-0.154	0.152	0.007	-0.001	-0.094	0.001	0.019	0.020	0.006	0.001	0.001	0.012	0.010	0.018	0.002
C6	1.206	0.198	0.143	0.091	0.018	0.003	-0.186	0.021	0.023	0.007	0.002	0.129	0.155	0.011	-0.671	0.055
C7	1.213	0.293	0.210	-0.081	0.027	0.005	0.002	-0.534	0.003	-0.010	-0.003	0.001	-0.137	0.190	0.030	0.004
C8	2.159	0.521	0.374	-0.143	0.047	0.009	0.003	0.005	-0.614	-0.019	-0.005	0.002	-0.244	0.002	0.054	0.007
C9	0.823	0.084	0.060	0.014	0.008	0.001	0.001	-0.010	-0.011	-0.201	0.024	0.000	0.024	-0.005	0.010	0.001
C10	0.630	0.064	0.046	0.011	0.006	0.001	0.000	-0.008	-0.008	0.075	-0.211	0.000	0.018	-0.004	0.007	0.001
C11	0.421	0.069	0.050	0.032	0.006	0.001	0.062	0.007	0.008	0.003	0.001	-0.193	0.054	0.004	-0.030	-0.074
C12	0.283	0.247	0.177	-0.080	0.022	0.004	0.018	-0.174	-0.188	0.033	0.008	0.013	-0.301	-0.093	0.279	0.036
C13	0.526	0.127	0.091	-0.035	0.012	0.002	0.001	0.154	0.001	-0.005	-0.001	0.001	-0.060	-0.303	0.013	0.002
C14	0.690	0.114	0.082	0.052	0.010	0.002	-0.024	0.012	0.013	0.004	0.001	-0.002	0.089	0.007	-0.369	0.010
C15	1.465	0.241	0.173	0.111	0.022	0.004	0.032	0.026	0.028	0.009	0.002	-0.091	0.188	0.014	0.162	-0.921

NOTE

(1) Vaste rassegne dei contributi sul tema possono trovarsi in Brown e Deaton (1972), Barten (1977), Deaton e Muellbauer (1980).

(2) Gli esempi di applicazioni empiriche dei sistemi di domanda a disaggregazioni molto numerose di serie temporali sono abbastanza rari. Un classico è costituito da Barten (1969). Più di recente, per l'Italia, si veda Bollino (1981) e Rossi (1983).

(3) Si tratta di un modello macrosettoriale stimato su dati annuali, originariamente promosso dalla Comunità Europea e destinato alla formulazione di scenari a medio termine.

(4) In questo senso questo lavoro si differenzia da molti degli studi effettuati con riferimento all'Italia, che per lo più hanno avuto l'obiettivo di verificare l'applicabilità di talune forme funzionali specifiche. Per l'applicazione di sistemi LES si veda Leoni (1967), Schianchi (1979) e, in una versione multistadio, Bollino (1981). Sistemi Rotterdam sono impiegati da Vinci (1967), Leoni (1969), Viviani (1979), Vernizzi (1980) e Rossi (1982). Infine Rossi (1983) utilizza sistemi AIDS, mentre Bollino (1985) pone a confronto una serie di forme funzionali alternative. Un'eccezione è costituita da Rossi e Schiantarelli (1983), che stimano un sistema Rotterdam per determinare la struttura del consumo all'interno di un modello macroeconomico.

(5) Ricordiamo inoltre che l'ipotesi di separabilità è implicitamente usata nella totalità delle verifiche empiriche. Infatti tutti i modelli, per quanto disaggregati, non fanno mai riferimento ai beni elementari ma gruppi più o meno ampi di voci di spesa. Parimenti si fa ricorso all'idea di separabilità quando si considera il comportamento di macrovariabili, ad esempio la funzione del consumo aggregata o, alternativamente, quando si analizza l'allocazione di una particolare voce di spesa – ad esempio l'alimentazione – nelle sue componenti.

(6) Tali distorsioni nelle stime dell'elasticità di sostituzione hanno forse trovato maggiore attenzione nel contesto dell'analisi della produzione, che spesso a livello empirico si è concentrata sulla sostituibilità tra lavoro e capitale, assumendo implicitamente l'esistenza di separabilità tra questi ultimi e il complesso degli altri inputs produttivi.

(7) La versione in prezzi assoluti risale a Barten (1967) ed è uno sviluppo della versione originaria formulata in termini di prezzi relativi. Quest'ultima esplicita i parametri riconducibili agli effetti di sostituzione specifici (a utilità marginale del reddito costante) e assume la forma:
$w_i \; d \ln q_i = b_i \; d \ln Q + \sum_j n_{ij} \; (d \ln p_j - \sum_k b_k \; d \ln p_k)$

(8) Alle equazioni è possibile anche aggiungere una costante a_i che riflette variazioni graduali nelle preferenze. Ad essa è possibile dare anche un'interpretazione in termini di utilità (Theil, 1975). Il vincolo di aggregazione richiederà che $\sum_j a_i = 0$.

(9) Le elasticità di sostituzione di Allen σ_{ij} saranno invece ottenibili come $\sigma_{ij} = (k_{ij}/w_i w_j)$.

(10) In tal caso le quote di bilancio w_{it} saranno definite attraverso una media mobile su due periodi $\bar{w}_{it} = 1/2(w_{it}+w_{it-1})$. Per una discussione degli errori di approssimazione che si introducono si veda Theil (1975).

(11) Il problema venne inizialmente sottolineato da McFadden (1964) e Goldberger (1969).

(12) La natura approssimata del modello, sottolineata in prima istanza dagli autori (in Theil, 1967 e in Barten, 1974) non ne pregiudica l'accettabilità, ma suggerisce semmai l'opportunità di sottoporre a verifica empirica la costanza dei parametri (Byron, 1984). Sotto il profilo teorico Barnett (1979) argomenta inoltre che costanza dei parametri del modello a livello aggregato non implica costanza dei parametri a livello micro.

(13) Tale caratterizzazione della separabilità, così come quella descritta di seguito, si ritrovano in Goldman e Uzawa (1964).

(14) In particolare si ha, per $i \in g$, $i \in h$, $g \neq h$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(p_i q_i)\ \partial(p_j q_j)} = a_{gh}$$

In altri termini, una lira addizionale spesa in uno qualunque dei beni del gruppo ha ha la medesima influenza su qualsiasi bene del gruppo g. E' da osservare tuttavia che questa ipotesi può ritenersi meno restrittiva di quanto non sembri, se si pensa che nella realtà le quantità q_i sono misurate tutte in lire costanti.

(15) In presenza di separabilità forte l'effetto di sostituzione specifico $\lambda\ u_{ij}^{-1}$ fra beni che appartengono a gruppi diversi è uguale a zero. Pertanto in tal caso

$$s_{ij} = H \frac{\partial q_i}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} .$$

(16) Cfr. Berndt e Christensen (1973).

(17) Mentre l'omoteticità comporta curve di Engel lineari, la quasi-omoteticità (Gorman, 1961) implica che le curva di Engel, pur essendo lineari, non passano attraverso l'origine. Pertanto le elasticità alla spesa tendono all'unità al crescere della spesa stessa.

(18) La versione di indipendenza a blocchi (Barten e Turnovsky, 1966 e Barten, 1968) incorpora invece l'ipotesi di separabilità forte caratterizzata dalla diagonalità a blocchi della matrice Hessiana della funzione di utilità.

(19) La (17) ripropone ovviamente la caratterizzazione della separabilità debole in termini di effetti di Slutsky descritta in precedenza dalla (10). Si ha pertanto:

$$C_{gh} = H_{gh} \frac{\partial x_g}{\partial x} \frac{\partial x_h}{\partial x} .$$

Il fattore di proporzionalità C_{gh} riflette la sostituibilità fra i gruppi nel loro complesso. Si può infatti verificare che

$$C_{gh} = \sum_{j \in h} p_j \frac{\partial x_g}{\partial p_j}$$

(20) Qualora non sia possibile estendere l'analisi allo stadio inferiore, occorre ricorrere ad altre approssimazioni. Barten e Turnowsky (1966) costruiscono i pesi per i prezzi aggregati sulla base delle informazioni ottenute da indagini sui bilanci familiari, e, confrontando i risultati con quelli ottenuti sulla base degli indici Divisia: $d \ln p_g = \sum_{i \in g} w_i^g \, d \ln p_i$, concludono che in assenza di forti modificazioni dei prezzi relativi questi ultimi possono costituire una proxy accettabile.

(21) Poiché i parametri b_i^g sono presenti in entrambi gli stadi, l'efficienza delle stime richiederebbe invece un approccio simultaneo. Ciò evidentemente farebbe venir meno i vantaggi che la separabilità delle decisioni arreca alla procedura di stima.

(22) In tal caso i sistemi di domanda condizionali dovranno scriversi:

$$w_{it} \, d \ln q_{it} = b_i^g \, w_{gt} \, d \ln q_{gt} + \sum_{j \in g} \bar{k}_{ij}^g \, d \ln p_{jt} + \bar{e}_{it}^g$$

La parametrizzazione impiegata nella (12) del testo presuppone la costanza non di $\bar{k}_{ij}^g$ ma di $k_{ij}^g = \bar{k}_{ij}^g / w_{gt}$. Analogamente la stima del sistema (12) presuppone la costanza della matrice di covarianza contemporanea non di $\bar{e}_{it}^g$ ma di $e_{it}^g = \bar{e}_{it}^g / w_{gt}$.

(23) L'individuazione delle 15 categorie è stata dettata dai requisiti del modello macroeconomico di cui il modello discusso in questo lavoro rappresenta una parte. Le voci di spesa e i relativi prezzi sono state ottenute utilizzando i dati di contabilità nazionale dell'Istat circa i consumi finali delle famiglie per categoria a prezzi correnti e costanti.

(24) Figurano dunque anche le spese per servizi sanitari, che alcuni studi (Rossi 1983) escludono dall'analisi perché, inglobando i trasferimenti pubblici per la protezione sociale, rifletterebbero più scelte collettive che individuali. Va osservato tuttavia che circa il 33% di questa voce riguarda l'acquisto di farmaci e servizi non mutualistici e che la parte rimanente a carico dello Stato esclude comunque le spese per ricoveri ospedalieri (classificate come consumi collettivi). Se pure con le limitazioni del caso, tale voce riflette in qualche misura una scelta individuale ed è stata perciò considerata in un gruppo separato unitamente alle spese per l'abitazione, che rappresentano anch'esse una voce peculiare, dati i vincoli esistenti sulle locazioni.

(25) La scomposizione è più articolata di quella tradizionale che distingue non durevoli, durevoli e servizi. Il gruppo 3 contiene in prevalenza beni durevoli, se si osserva che la categoria ricreazione, spettacoli, comprende per circa il 65% beni durevoli per la ricreazione. I servizi invece sono stati ripartiti in vari gruppi, di cui uno isola quelle voci – abitazione e salute – che, come si è rilevato in precedenza, hanno connotazioni istituzionali peculiari.

(26) La verifica empirica dei vincoli teorici è stato uno degli obiettivi più di frequente seguiti nell'applicazione del modello Rotterdam. Barten (1967, 1969) verifica i vincoli di omogeneità e simmetria mentre la verifica della negatività, effettuata attraverso una decomposizione di Cholesky della matrice K, è stata successivamente realizzata da Barten e Geyskens (1975).

(27) Tutte le stime sono state effettuate con il programma DENMOD di Barten e Zonderman che permette di stimare con metodi di massima verosimiglianza la versione in prezzi assoluti del modello Rotterdam e di imporre sui parametri tutti i vincoli desiderati.

(28) Dato $e_t = (e_{1t}, e_{2t})$, si suppone $e_t = \Phi_1 e_{t-1} + \Phi_2 e_{t-2} + a_t$ dove Φ_1, Φ_2 sono matrici di ordine $m = 2$.

Si vuole verificare H_0: $\Phi_j = 0$ contro H_1: $\Phi_j \neq 0$ per $j = 1,2$. Si può costruire un test asintotico del tipo "likelihood ratio" (Bartlett, 1938) mediante la statistica:

$$M(j) = -w \log E \sim \chi^2_g \text{ sotto } H_0 (g = m^2 = 4)$$

dove: $w = (N - p - 1) - jm - \frac{1}{2}$ (essendo p l'ordine del processo autoregressivo analizzato); E = DET $S(j)$/DET $S(j-1)$ e $S(j)$ = matr.cov.(a_t).

(29) Dimensionalmente i risultati ottenuti sono anche certamente condizionati dall'avere ignorato la possibilità di divergenze tra gli aggiustamenti di breve e di lungo periodo.

(30) Nel modello stimato da Rossi (1983), un sistema R.A.I. (Rationed Almost Ideal) le spese per abitazione sono infatti trattate come una voce razionata.

APPENDICE: Il modello a tre stadi.

Si hanno tre stadi di decisione se gli aggregati di beni q_g sono a loro volta debolmente separabili in sottogruppi q_{gs}. In tal caso le funzioni di utilità parziali u^g che compaiono nella (8) del testo possono scriversi:

$$u^g = v(u^{g1}(q_{g1}),\ u^{g2}(q(_{g2}),\dots,\ u^{gs}(q(_{gs})) \qquad \text{(A1)}$$

dove v è funzione di gs variabili e $u^{gs}(q_{gs})$ è funzione dei beni che appartengono al sottogruppo q_{gs}.

Corrispondentemente gli effetti di sostituzione di Slutsky condizionali all'aggregato g (per u^g costante) saranno definiti come segue:

per $i,j \in gs$, $gs \in g$

$$s_{ij}^{g} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\Big|_{u_{gs}=\text{cost.}} + \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial x_{gs}}{\partial p_j}\Big|_{u_g=\text{cost.}}$$

per $i \in gs$, $j \in gr$, $gs \neq gr$, $gs,gr \in g$

$$s_{ij}^{g} = \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial x_{gs}}{\partial p_j}\Big|_{u_g=\text{cost.}}$$

Applicando la proprietà di simmetria di s_{ij}^g si può dimostrare che:

per $i,j \in gs$, $gs \in g$

$$s_{ij}^{g} = s_{ij}^{gs} + C_{ss}^{g} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{gs}}$$

(A2)

per $i \in gs$, $j \in gr$, $gs \neq gr$, $gs,gr \in g$

$$s_{ij}^{g} = C_{sr}^{g} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{gr}}$$

dove C_{sr} è un fattore di proporzionalità che dipende solo da gs e gr e riflette la sostituibilità fra i gruppi gs e gr nel loro complesso. Omogeneità e simmetria implicano che: $\sum_r C_{sr}^{g} = 0$, $C_{sr}^{g} = C_{rs}^{g}$.

I termini di Slutsky non condizionali, che per il modello a due stadi sono descritti dalla (17) e dalla (18) del testo, nel modello a tre stadi saranno pertanto: per $i,j \in gs$, $gs \in g$

$$s_{ij} = s_{ij}^{gs} + C_{ss}^{g} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{gs}} + C_{gg} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{gs}} \left(\frac{\partial x_{gs}}{\partial x_g}\right)^2$$

per $i \in gs$, $j \in gr$, $gs \neq gr$, $gs,gr \in g$

$$s_{ij} = C_{sr}^{g} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{gr}} + C_{gg} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{gr}} \frac{\partial x_{gs}}{\partial x_g} \frac{\partial x_{gr}}{\partial x_g} \tag{A3}$$

per $i \in gs$, $j \in hs$, $gs \in g$, $hs \in h$, $g \neq h$

$$s_{ij} = C_{gh} \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} \frac{\partial q_j}{\partial x_{hs}} \frac{\partial x_{gs}}{\partial x_g} \frac{\partial x_{hs}}{\partial x_h}$$

La separabilità di u^g nei sottogruppi u^{gs} consente di individuare le funzioni di domanda condizionali alla spesa x_{gs}. Definendo:

$$b_i^{gs} = p_i \frac{\partial q_i}{\partial x_{gs}} , \quad k_{ij}^{gs} = \frac{p_i p_j}{x_{gs}} s_{ij}^{gs}$$

le equazioni di domanda Rotterdam per lo stadio inferiore di decisione saranno:

$$w_i^{gs} \, d \ln q_i = b_i^{gs} \, d \ln q_{gs} + \sum_{j \in gs} k_{ij}^{gs} \, d \ln p_j \tag{A4}$$

dove $w_i^{gs} = \dfrac{p_i q_i}{x_{gs}}$, $d \ln q_{gs} = \sum_{i \in gs} w_i^{gs} \, d \ln q_i$

Ai parametri della (A4) si applicano i vincoli usuali di aggregazione, omogeneità, simmetria e negatività.

Per ricavare le funzioni di domanda per lo stadio intermedio di decisione occorre partire dalle funzioni di domanda condizionali a x_g

descritte dalla (12) del testo, sostituendo nelle definizioni (13) dei relativi parametri le relazioni descritte dalla (A2).

In tal modo otteniamo:

$$w_i^{gs}\, w_{gs}^{\,g}\, d \ln q_i = b_i^{gs}\, b_{gs}^{\,g}\, d \ln q_g + w_{gs}^{\,g} \sum_{j \in gs} k_{ij}^{gs}\, d \ln p_j + \\ + b_i^{gs} \sum_{r \in g} k_{sr}^{\,g} \sum_{j \in gr} b_j^{gr}\, d \ln p_j \tag{A5}$$

dove: $w_{gs}^{\,g} = \dfrac{x_{gs}}{x_g}$, $b_{gs}^{\,g} = \dfrac{\partial x_{gs}}{\partial x_g}$, $k_{sr}^{\,g} = \dfrac{C_{sr}^{\,g}}{x_g}$

Se sommiamo le equazioni (A5) per $i \in gs$, applicando le proprietà di aggregazione e omogeneità ai parametri b_i^{gs} e k_{ij}^{gs} otteniamo le equazioni dello stadio intermedio di decisione:

$$w_{gs}^{\,g}\, d \ln q_{gs} = b_{gs}^{\,g}\, d \ln q_g + \sum_{r \in g} k_{sr}^{\,g}\, d \ln p_{gr} \tag{A6}$$

dove: $d \ln q_{gs} = \sum_{i \in gs} w_i^{gs}\, d \ln q_i$ e $d \ln p_{gr} = \sum_{j \in gr} b_j^{gr}\, d \ln p_j$

I vincoli di aggregazione, omogeneità, simmetria e negatività valgono anche per $b_{gs}^{\,g}$ e $k_{sr}^{\,g}$.

Le equazioni di domanda dello stadio superiore di decisione saranno del tutto identiche alle equazioni (23) del testo che ripetiamo per memoria, e i relativi parametri saranno sottoposti ai medesimi vincoli (24):

$$w_g\, d \ln q_g = b_g\, d \ln Q + \sum_h k_{gh}\, d \ln p_h \tag{A7}$$

In questo caso tuttavia:

$$d \ln q_g = \sum_{i \in g} w_i^{g}\, d \ln q_i = \sum_{s \in g} w_{gs}^{\,g} \sum_{i \in gs} w_i^{gs}\, d \ln q_i$$

$$d \ln p_h = \sum_{j \in h} b_j^{h}\, d \ln p_j = \sum_{r \in h} b_{hr}^{\,h} \sum_{j \in hr} b_j^{hr}\, d \ln p_j$$

I parametri del modello non condizionale saranno infine definiti come segue:

$$b_i = b_i^{gs}\ b_{gs} b_g \qquad \text{(A8)}$$

$$k_{ij} \begin{cases} = k_{ij}^{gs}\ w_{gs} + b_i^{gs}\ b_j^{gs}\ [k_{ss}^{g}\ w_g + k_{gg}\ (b_s^g)^2] & i,j \in gs \\ & gs \in g \\ = b_i^{gs}\ b_j^{gr}\ (k_{sr}^{g}\ w_g + k_{gg}\ b_s^g\ b_r^g) & i \in gs,\ j \in gr \\ & gs,\ gr \in g \\ = b_i^{gs}\ b_s^{g}\ b_j^{hs}\ b_s^{h}\ k_{gh} & i \in gs,\ j \in hs \\ & gs \in g,\ hs \in h,\ g \neq h \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

BARNETT W.A. (1979), "Theoretical Foundations for the Rotterdam Model", Review of Economic Studies, vol.46, pp.109-130.

BARTEN A.P. (1964), "Consumer Demand Equations under conditions of Almost Additive Preferences..", Econometrica, vol. 32, pp. 1-38.

BARTEN A.P. (1967), "Evidence on the Slutsky Conditions for Demand Equations", Review of Economics and Statistics, vol. 49, pp. 77-84.

BARTEN A.P. (1968), "Estimating Demand Equations", Econometrica, vol.36, pp.213-251.

BARTEN A.P. (1969), "Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations", European Economic Review, vol. 1, pp. 7-73.

BARTEN A.P. (1970), "Réflections sur la Construction d'un Système Empirique des Fonctions de Demande", Cahiers du Séminaire d'Econométrie, Parigi, n.12, pp.67-80.

BARTEN A.P. (1974), "Complete Systems of Demand Equations: some Thoughts about Aggregation and Functional Form", Recherches Economiques de Louvain, vol. 40, pp. 3-20.

BARTEN A.P. (1977), "The Systems of Consumer Demand Functions Approach: a Review", Econometrica, vol. 45, pp. 23-51.

BARTEN A.P., GEYSKENS E. (1975), "The Negativity Condition in Consumer Demand", European Economic Review, vol. 6, pp. 227-260.

BARTEN A.P., TURNOVSKY S.J. (1966), "Some Aspects of the Aggregation Problem for Composite Demand Equations", International Economic Review, vol. 7, pp. 231-259.

BARTLETT M.S.(1938), "Further Aspects of the Theory of Multiple Regression", Proceedings of Cambridge Philosophical Society, vol.34.

BERNDT E.R., CHRISTENSEN L.R. (1973): "The Internal Structure of Functional Relationships: Separability, Substitution and Aggregation", Review of Economic Studies, vol. 60, pp. 403-410.

BOLLINO C.A. (1981), "Domanda di beni di Consumo in Italia: una analisi econometrica", Giornale degli Economisti e Annali di Economia, vol. 40, pp. 145-165.

BOLLINO C.A. (1985), "Sistemi completi di domanda di beni di consumo in Italia: confronto fra diverse forme funzionali", Contributi alla Ricerca Economica, Banca d'Italia, pp. 75-102.

BROWN J.A.C., DEATON A.S. (1972), "Models of Consumer Behaviour: a Survey", Economic Journal, vol. 82, pp. 1145-1236.

BYRON R.P. (1984), "On the Flexibility of the Rotterdam Model", European Economic Review, vol. 24, pp. 273-283.

DEATON A., MUELLBAUER J. (1980), Economics and Consumer Behaviour, Cambridge University Press, Cambridge.

GOLDBERGER A.S. (1969), "Directly Additive Utility and Constant Marginal Budget Shares", Review of Economic Studies, vol. 36, pp. 251-254.

GOLDMAN S.M., UZAWA H. (1964), "A Note on Separability in Demand Analysis", Econometrica, vol. 32, pp. 387-398.

GORMAN W.M. (1961), "A Class of Preference Fields", Metroeconomica, vol. 13, pp. 53-56.

LEONI R. (1967), "An Analysis of Expenditures on Private Consumption", Rivista di Politica Economica n.3, pp. 319-339.

LEONI R. (1969), "A proposito dell'impiego del modello Theil-Barten nell'analisi della domanda di beni di consumo in Italia", Statistica, vol. 29, pp. 227-86.

MC FADDEN D. (1964), "Existence Conditions for Theil-type Preferences", Discussion Paper, Berkeley.

ROSSI N. (1982), "La domanda per consumi alimentari: un'applicazione dell'approccio differenziale", Ricerche Economiche, vol. 36, pp. 229-257.

ROSSI N. (1983), "Sistemi di domanda condizionali e non: un esperimento disaggregato. 1960-76", in Ricerche di economica applicata: il caso italiano, a cura di N. Rossi e P. Rovelli, F. Angeli, Milano.

ROSSI N., SCHIANTARELLI F. (1982), "Domanda di beni e servizi da parte dei consumatori", Quaderni ISE n. 3, LUISS, Roma.

SCHIANCHI A. (1979), "Le spese per consumi privati in Italia. Una applicazione del modello lineare di spesa", Rivista di Economia e Politica industriale, n. 2, pp. 283-294.

THEIL H. (1965), "The Information Approach to Demand Analysis", Econometrica, vol. 33, pp. 67-87.

THEIL H. (1967), Economics and Information Theory, Amsterdam, North Holland.

THEIL H. (1975) (1976), Theory and Measurement of Consumer Demand, vol. I, vol. II, Amsterdam, North-Holland.

VERNIZZI A. (1980), "Un'analisi del consumo: il modello di Rotterdam nel contesto delle quattro ripartizioni italiane dal 1951 al 1973", Rivista internazionale di Scienze sociali, vol. 88, pp. 440-467.

VINCI S. (1967), "La domanda dei beni di consumo in Italia dal 1953 al 1964. Analisi econometrica", Giornale degli economisti e Annali di economia, vol. 26, pp. 361-400.

VIVIANI A. (1979), "Sull'impiego del modello di Theil-Barten per l'analisi della domanda di beni di consumo in Italia", Note Economiche, vol. 6, pp. 107-134.