# QUANDO I LAVORATORI RISPARMIANO: SOVRACCUMULAZIONE DEL CAPITALE ED EUTANASIA DEI CAPITALISTI

Renato Balducci e Vincenzo Denicolò

Gennaio 1984

N. 5

## 1. Introduzione.

1.1 Il presupposto di questo lavoro è che le leggi di movimento del capitalismo possono essere considerate come il risultato di un conflitto permanente tra le due classi sociali antagoniste - lavoratori e capitalisti; un conflitto che riguarda in primo luogo la distribuzione del reddito ma anche la ripartizione delle risorse disponibili tra consumo e accumulazione. La conseguenza di questa impostazione è la possibilità di studiare la dinamica del capitalismo formulando un gioco differenziale non-cooperativo giocato dai capitalisti da un lato e dai lavoratori dall'altro.

La strada che intendiamo percorrere è poco battuta, con l'eccezione di alcuni lavori di K. Lancaster (1973), M.Hoel (1978), M. Pohjola (1983).[1] Crediamo che ciò sia dovuto al seguente motivo. Da un lato, gli economistidi ispirazione marxista o radicale non prediligono, in generale, impostare i problemi in termini di ottimizzazione.[2] Dall'altro, i teorici neoclassici sono riluttanti ad ammettere l'esistenza di classi sociali permanenti, anche come semplice ipotesi di lavoro.[3] Ancora maggiori sono quindi le perplessità di fronte ad una impostazione che veda in tali classi sociali dei centri decisionali autonomi e razionali, che massimizzano funzioni obiettivo esattamente definite.

---

[1] Allo stesso motivo ispiratore possono essere ricondotti anche i contributi di R. Selten e W. Guth (1982) e di R. Balducci, G. Candela e G. Ricci (1984), che pure utilizzano modelli per certi aspetti molto diversi dal nostro.
Per una discussione sui fondamenti metodologici della applicazione della teoria dei giochi alla problematica della lotta di classe si veda G.E. Rusconi(1983).

[2] A questo proposito J.Elster (1982),p.477 , afferma che :".....
virtually all Marxist have reyected rational-choice theory in general and game theory in particular".

[3] P. Samuelson e F. Modigliani (1966) sono espliciti su questo punto. Si veda anche C. Bliss (1975), cap. VI.

Anche se condividiamo alcune delle perplessità che abbiamo ricordato, è nostra convinzione che le potenzialità euristiche dell'approccio che abbiamo deciso di seguire siano notevoli, e che quindi valga la pena di sviluppare l'analisi in questa direzione.

1.2 La prima analisi formale che si ispira allo schema delineato per sommi capi nel precedente paragrafo è contenuta in un originale articolo di Lancaster. Questo autore assume che la distribuzione del reddito sia sotto il diretto controllo dei lavoratori, che possono determinare la quota dei salari sul reddito nazionale v sotto i vincoli: $0 < c \leq v \leq b < 1$. Il limite inferiore c alla quota dei salari è introdotto per indicare il livello minimo al di sotto del quale il consumo dei lavoratori non può scendere, mentre il limite superiore b assicura che la quota dei profitti non possa scendere fino a 0. L'accumulazione del capitale è invece controllata dai capitalisti, perchè si suppone che i lavoratori consumino interamente il proprio reddito, mentre i capitalisti possono scegliere la propria propensione al risparmio $s_c$ nell'intervallo: $0 \leq s_c \leq 1$.[4]

Per semplificare il modello, Lancaster assume inoltre che il rapporto capitale/prodotto sia costante e pari ad 1; che il capitale non sia soggetto a deprezzamento; che l'economia non raggiunga mai la piena occupazione, per cui la disponibilità di lavoro non pone vincoli alla produzione; infine, che il saggio al quale capitalisti e lavoratori scontano i consumi futuri sia nullo.

Dato un orizzonte temporale prefissato T, le due classi massimizzano i rispettivi consumi. L'equilibrio dinamico del sistema risulta dalla interazione dei programmi ottimali dei capitalisti e dei lavoratori. In particolare, la nozione di equilibrio adottata è quella di Nash: in equilibrio,nessun giocatore può migliorare la propria situazione, data la strategia scelta dal rivale.

---

[4] Poiché non si prevede la possibilità di impieghi del risparmio finanziario alternativi all'investimento di capitale produttivo, necessariamente le decisioni di risparmio vengono ad identificarsi con quelle di accumulazione. Questo limite del modello di Lancaster sarà condiviso anche dal modello che proporremo nei paragrafi seguenti.

Formalmente, il problema dei lavoratori consiste nel determinare v(t) in modo da massimizzare:

$$C_w = \int_0^T vK \; dt \tag{1.1}$$

sotto i vincoli:

$$\dot{K} = s_c (1-v)K, \quad K(0) = \bar{K} \tag{1.2}$$

$$c \leq v \leq b \tag{1.3}$$

dove K indica lo stock di capitale e $\dot{K} = dK/dt$.

La funzione obiettivo dei capitalisti è invece:

$$C_c = \int_0^T (1-s_c)(1-v)K \; dt \tag{1.4}$$

e viene massimizzata sotto il vincolo:

$$0 \leq s_c \leq 1 \tag{1.5}$$

mentre la dinamica dello stock di capitale è sempre descritta dall'equazione differenziale (1.2).

Lancaster dimostra che la soluzione di questo gioco differenziale consiste di due fasi: una fase iniziale di accumulazione spinta, con v=c ed $s_c = 1$, ed una fase finale di puro consumo, con v=b e $s_c$=0.[5] La fase iniziale dura dal tempo 0 al tempo $t_1$, dove $t_1$ è dato da:

$$t_1 = T - 1/(1-b) \tag{1.6}$$

mentre la fase finale da $t_1$ a T.

Lancaster considera poi il programma che massimizza il consumo complessivo delle due classi, e che quindi definisce il sentiero di accumulazione socialmente ottimale. Formalmente, si tratta di massimizzare:

$$C = \int_0^T (1-s)K \; dt \tag{1.7}$$

sotto i vincoli:

$$\dot{K} = sk, \quad K(0) = \bar{K} \tag{1.8}$$

$$0 \leq s \leq (1-c) \tag{1.9}$$

---

[5] Questo nell'ipotesi che b≤1/2. Se invece fosse b>1/2, la soluzione del gioco prevederebbe anche una fase intermedia con v=b ed $s_c$=1.
Cfr. K. Lancaster (1973), nota 11 .

dove s indica la propensione media al risparmio ed il vincolo $s \leq (1-c)$ è introdotto per catturare l'idea di un limite inferiore al consumo dei lavoratori.

Si può facilmente mostrare che il sentiero che risulta da questo programma consiste di due fasi: una fase di massima accumulazione con $s=1-c$ seguita da una fase di puro consumo con $s=0$. Il passaggio dalla prima alla seconda fase avviene al tempo $t^* = T-1$.

E' chiaro allora che la soluzione del modello conflittuale è inefficiente. L'inefficienza è dovuta ad una insufficiente accumulazione di capitale, perchè, essendo $t^* > t_1$, i capitalisti passano troppo presto alla fase di puro consumo. Il motivo di questo comportamento dei capitalisti è il seguente. Nella fase finale di puro consumo, la valutazione sociale di una unità aggiuntiva di capitale disponibile al tempo t è data dalla somma della sua "produttività marginale", pari ad 1, dal tempo t fino alla conclusione del gioco, e cioè T-t; la valutazione dei capitalisti, essendo proporzionale alla quota dei profitti sul reddito, è invece $(T-t)(1-b)$, e quindi è inferiore. Ed è chiaro che l'accumulazione proseguirà tanto più a lungo quanto maggiore è la valutazione che si dà di una unità aggiuntiva di capitale; in effetti, proseguirà fino a quando tale valutazione eguaglia la valutazione del consumo cui si rinuncia (che è evidentemente sempre uguale ad 1).

M. Hoel (1978) ha generalizzato il modello di Lancaster in tre direzioni, assumendo funzioni di produzione e di utilità concave anzichè lineari, e introducendo un saggio di sconto positivo che può essere diverso per i due giocatori. La logica economica del modello, tuttavia, resta sostanzialmente invariata, ma è proprio questa che ci sembra debba essere messa in discussione.

1.3 Il modello di Lancaster presenta a nostro avviso fondamentalmente due punti deboli. Esso infatti attribuisce ai lavoratori un potere per un verso eccessivo, e per un altro verso eccessivamente limitato.

Eccessivo è il potere attribuito ai lavoratori quando si suppone, come fa Lancaster, che essi possono controllare direttamente la quota distributiva. Limitare tale potere introducendo un limite superiore alla quota dei salari può eliminare il problema, ma presenta il grave inconveniente di lasciare del tutto inspiegato uno dei parametri fondamentali del modello.

Ai lavoratori è invece attribuito un potere chiaramente troppo limitato per quanto riguarda le decisioni di accumulazione. Non potendo risparmiare direttamente, i lavoratori sono costretti nella fase iniziale a praticare quella strana forma di "risparmio" che consiste nel regalare una parte del reddito ai capitalisti.

Per quanto riguarda il primo punto, noi proponiamo di adattare al nostro problema uno schema di analisi che è largamente impiegato nella teoria tradizionale del mercato del lavoro. Trattando di situazioni di monopolio, si suppone generalmente che il sindacato dei lavoratori fronteggi una curva di domanda di lavoro decrescente. Essa può allora indifferentemente fissare il salario oppure l'occupazione; data una delle due variabili, l'altra resta fissata alla curva di domanda. Quando questo schema è applicato ad un modello macroeconomico, la quota dei salari viene a dipendere, in generale, dal saggio di salario, dalla forma della funzione di produzione, e infine dalla quantità degli altri fattori impiegati. L'associazione dei lavoratori controlla direttamente solo la prima di queste variabili, e quindi non ha un potere assoluto sulla quota distributiva.

Per applicare questo schema al nostro caso, dobbiamo assumere che oltre a capitalisti e lavoratori vi siano nel sistema economico delle imprese concorrenziali. Esse sono depositarie delle conoscenze tecnologiche e realizzano la produzione usando il capitale che è loro dato in gestione e acquistando lavoro dall'associazione dei lavoratori. Le imprese si comportano passivamente nel senso che non partecipano al gioco, ma per così dire, costituiscono l'ambiente nel quale il gioco si svolge. Il loro obiettivo è la massimizzazione istantanea dei profitti, che vengono distribuiti ai proprietari del capitale. Questo comportamento dà origine ad una curva di domanda di lavoro che entra come vincolo nel problema di massimizzazione dei lavoratori.

Passando al secondo punto, e cioè le decisioni di accumulazione, ci sembra molto più convincente l'ipotesi che i lavoratori, come i capitalisti, possano risparmiare e guadagnare i frutti dell'accumulazione del proprio capitale. In una gara a chi accumula più rapidamente, i lavoratori possono allora sopravanzare i capitalisti, fino a che la quota del capitale complessivo controllata da questi ultimi non tenda a zero. E' pertanto possibile una estinzione della classe dei capitalisti, nel pieno rispetto dei diritti di proprietà privata dei mezzi di produzione. Naturalmente, questa estinzione lenta e graduale non è certo identificabile con il processo di rottura rivoluzionaria che Marx aveva in mente quando parlava di "espropriazione degli espropriatori".

L'estinzione, in termini relativi, della classe dei capitalisti, è una caratteristica delle posizioni di steady state definite "duali" (o anti-Pasinetti) da F. Modigliani e P. Samuelson (1966). Ma mentre in quel modello, come già nei precedenti contributi di Kaldor e Pasinetti, le propensioni al risparmio sono trattate come parametri esogeni ed inspiegati, noi le consideriamo come strumenti del conflitto di classe tra capitalisti e lavoratori. La differenza è sostanziale, perchè nel nostro modello l'estinzione dei capitalisti, se e quando si verifica, non è il risultato di automatismi ciechi, ma delle decisìoni razionali delle due classi, rivolte all'ottenimento del massimo consumo.

Posto che i lavoratori possono risparmiare, ci sono varie forme in cui potrebbero impiegare il loro capitale. Una prima ipotesi è che lo lascino in gestione alle imprese concorrenziali, assieme al capitale dei capitalisti, e quindi partecipino alla distribuzione dei profitti. Una ipotesi alternativa, che come vedremo è più conveniente per i lavoratori, è la formazione di imprese "cooperative", gestite direttamente dai lavoratori in modo autonomo rispetto alle imprese concorrenziali. La ragione per cui questa seconda alternativa è più conveniente per i lavoratori (a prescindere da differenze nella tecnologia che sono escluse per ipotesi) è che la costituzione di imprese cooperative permette di accrescere il potere monopolistico dell'associazione dei lavoratori sul mercato del lavoro. Così formulato, il nostro modello può essere visto come una estensione dinamica della teoria del monopolio sul mercato del lavoro.

## 2. Il programma socialmente ottimale.

Cominciamo descrivendo il programma di accumulazione socialmente ottimale, che ci servirà come termine di confronto rispetto a cui valutare l'efficienza dei sentieri di accumulazione "conflittuali", in quanto ottenuti risolvendo giochi differenziali non-cooperativi, che studieremo in seguito. Il programma socialmente ottimale può essere interpretato come la soluzione cooperativa di quei giochi. Se sono ammessi side-payments, infatti, la soluzione cooperativa richiede in primo luogo che siano massimizzati i consumi complessivi delle due classi; in seguito, la loro ripartizione potrà essere effettuata in un modo qualunque, secondo gli accordi presi dai giocatori.

Le seguenti ipotesi tecnologiche verranno mantenute fino alla sezione 6. Assumiamo una funzione di produzione del tipo Cobb-Douglas, con rendimenti di scala costanti, due input (capitale e lavoro) ed un solo output, che può essere usato indifferentemente per il consumo o per l'investimento:

$$Y = K^a L^{1-a}, \qquad 0<a<1 \tag{2.1}$$

Trascuriamo progresso tecnico e deperimento del capitale, ed assumiamo che la popolazione lavorativa N sia finita e costante nel tempo.[1]

Il programma di accumulazione socialmente ottimale si ottiene allora risolvendo un problema standard di ottimizzazione dinamica:

$$\max \qquad C = \int_0^T (1-s)Y\,dt \tag{2.2}$$

sotto i vincoli:

$$\dot{K} = sY, \quad K(0) = \bar{K} \tag{2.3}$$

$$0 \leq L \leq N \tag{2.4}$$

$$0 \leq s \leq 1 \tag{2.5}$$

dove Y è dato dalla (2.1).

---

[1] Non vi sarebbero difficoltà ad estendere l'analisi al caso di deperimento radioattivo del capitale. Anche il progresso tecnico e la crescita della popolazione (come pure un tasso di sconto positivo) potrebbero essere introdotti nello schema, ma ci è sembrato che la maggiore generalità così ottenuta non compensasse la necessaria complicazione delle nostre formule.

La linearità della funzione obiettivo rispetto ad s semplifica notevolmente la soluzione di questo problema. Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 2.1 Il programma di accumulazione socialmente ottimale comprende due fasi: nella prima non vi è consumo (s=1) e nella seconda non vi è risparmio (s=0). La popolazione lavorativa è sempre pienamente occupata (L=N). Il passaggio dalla prima alla seconda fase avviene al tempo

$$t^* = aT - \left(\frac{\overline{K}}{N}\right)^{1-a} \qquad (2.6)$$

Al tempo t*, infatti, la valutazione sociale di un'unità aggiuntiva di capitale p(t*) è uguale alla valutazione del consumo cui si rinuncia, sempre pari ad uno per la forma della funzione di utilità. La legge di variazione del prezzo assegnato all'accumulazione del capitale è la seguente:

2.7 $$\dot{p}(t) = -(1-s+ps) \quad a(N/K(t))^{1-a}$$

Nella fase iniziale, essendo s=1 ed L=N, si avrà:

2.8 $$\dot{K} = K^a N^{1-a}$$

da cui integrando si ottiene:

2.9 $$K(t) = \left((1-a)N^{1-a}t + \overline{K}^{1-a}\right)^{1/(1-a)}$$

Nella fase finale, invece, lo stock di capitale resta costante al valore raggiunto al tempo t*: K(t*) ; inoltre, poichè l'orizzonte di controllo è finito, il prezzo attribuito all'incremento del capitale al tempo finale è supposto nullo: p(T) = 0.

E' allora possibile calcolare la lunghezza della fase finale integrando la 2.7 tra gli estremi t* e T:

2.10 $$p(T) - p(t^*) = -a(N/K(t^*))^{1-a}(T-t^*)$$

da cui si ottiene:

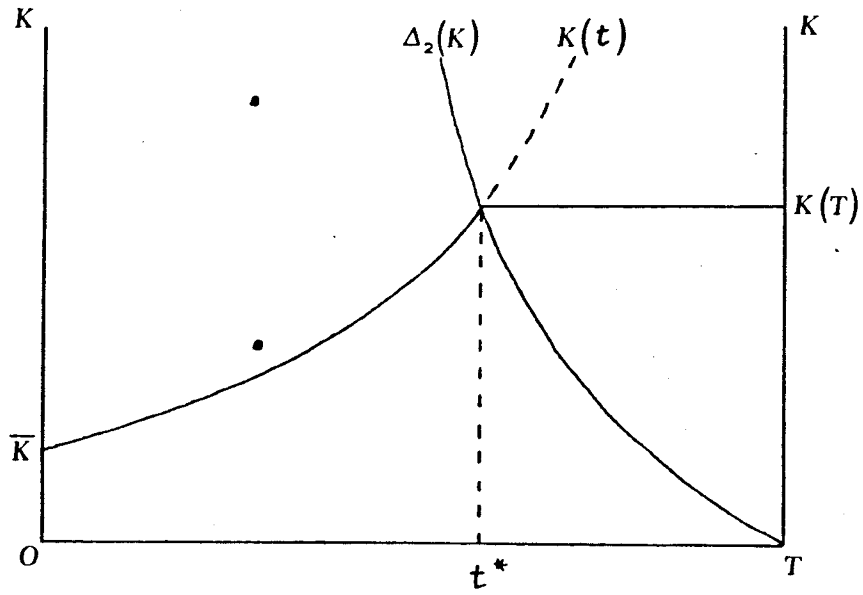
2.11 $$\Delta_2 = T-t^* = (1/a)(K(t^*)/N)^{1-a}$$

Infine, sostituendo a K(t*) il suo valore dato dalla 2.9, è immediato ritrovare il tempo di passaggio dalla prima alla seconda fase definito dalla 2.6.

Le curve di equazione (2.9) e (2.11) possono essere tracciate su uno stesso grafico come nella figura 1. La loro intersezione individua allora l'istante t* in cui si passa dalla fase iniziale a qeulla finale.

Dati $\overline{K}$, N e T, potrebbe verificarsi il caso in cui la strategia ottima prevede solo la fase di puro consumo (ciò sarebbe segnato da un valore negativo di t*), mentre ovviamente non può mai essere ottimale prolungare la fase di pura accumulazione per l'intero orizzonte temporale (il consumo così ottenuto sarebbe infatti nullo).

fig. 1




3. I lavoratori non possono risparmiare.

3.1 Per formulare un gioco dinamico occorre specificare: a) il numero dei giocatori (nel nostro caso due, capitalisti e lavoratori), b) una funzione obiettivo per ciascun giocatore, c) le equazioni dinamiche delle variabili di stato, d) il concetto di equilibrio o di soluzione del gioco, e) l'insieme delle strategie ammissibili ed infine f) la struttura delle informazioni di cui dispongono i giocatori.

I primi tre punti non richiedono spiegazioni particolari: i giocatori e le funzioni obiettivo sono gli stessi del modello di Lacaster, mentre la dinamica delle variabili di stato verrà specificata dettagliatamente in ciascuna sezione. Anche il concetto di equilibrio è lo stesso adottato da Lancaster, e cioè il concetto di equilibrio di Nash. In sostanza, ciò significa che ciascun giocatore considera la strategia del suo rivale come un datonel definire la propria; l'equilibrio è allora definito come una posizione in cui le congetture di ciascun giocatore relative al comportamento del rivale sono confermate, e quindi nessuno ha motivo di modificare la propria situazione. Il concetto di equilibriodi Nash si adatta bene a problemi nei quali i giocatori sono posti sullo stesso piano e nessuno annuncia in anticipo la propria strategia assumendo il ruolo di leader.

La struttura delle informazioni che ipotizziamo è del tipo open-loop, cioè si suppone che ciascun giocatore conosca solo i valori iniziali delle variabili di stato per cui le strategie saranno funzioni unicamente del tempo.[1]

Per quanto riguarda infine l'insieme delle strategie ammissibili, procederemo alla costruzione di giochi via via più complessi, espandendo gradualmente l'insieme delle strategie dei lavoratori. Cominciamo in questa sezione dal caso in cui i lavoratori non possono risparmiare e quindi i capitalisti hanno il pieno controllo dell'accumulazione del capitale.

---

[1] Si possono formulare ipotesi alternative sulle informazioni di cui dispongono i giocatori. Tra queste, le più usuali sono le ipotesi di feed-back o closed loop, e l'altra diametralmente opposta di assenza di memoria degli stati passati dell'economia, memoryless.
E' opporutno ricordare che le scelte strategiche dei giocatori sono estremamente sensibili rispetto alla struttura delle informazioni ipotizzata.

3.2 Più precisamente, la variabile di controllo dei capitalisti è la propensione al risparmio $s_c$, il cui campo di variazione è definito dall'intervallo:

$$0 \leq s_c \leq 1 \qquad (3.1)$$

Per definire l'insieme delle strategie dei lavoratori, assumiamo l'esistenza di un gruppo di imprese concorrenziali che gestiscono lo stock di capitale ed esprimono una curva di domanda di lavoro massimizzando istantaneamente i propri profitti[2] (che saranno poi distribuiti ai capitalisti) sulla base della funzione di produzione (2.1). La curva di domanda di lavoro che si ottiene in tal modo è:

$$L^d = K \left(\frac{1-a}{w}\right)^{1/a} \qquad (3.2)$$

o anche in forma inversa:

$$w = (1-a) \left(\frac{K}{L}\right)^a \qquad (3.3)$$

dove w è il saggio di salario.

La (3.2) (o, equivalentemente, la (3.3)) è il primo vincolo sulla strategia dei lavoratori. Il secondo vincolo è:

$$0 \leq L \leq N \qquad (3.4)$$

cioè la condizione che l'occupazione sia non negativa e non ecceda la disponibilità di lavoro.

In ciascun istante, dato lo stock di capitale K, l'insieme delle strategie possibili dei lavoratori è rappresentato dall'area tratteggiata della figura 2. In un contesto statico,

---

[2] Le imprese concorrenziali esprimeranno anche una domanda di capitale ottenuta con un analogo processo di massimizzazione dei profitti. Tuttavia, poichè la funzione di produzione è a rendimenti di scala costanti, per qualsiasi combinazione di w ed L che genera un profitto non negativo, le imprese saranno disposte ad impiegare l'intero stock di capitale che viene messo a loro disposizione dai capitalisti.

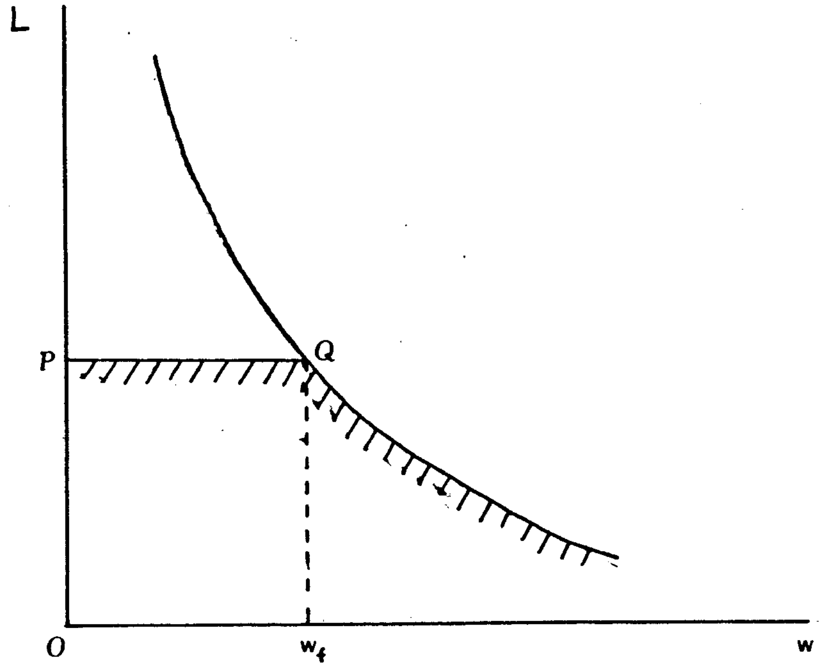



fig. 2

se l'obiettivo dei lavoratori è la massimizzazione del monte-salari $W = wL$, la strategia ottimale è data chiaramente dal punto Q. Infatti lungo la curva di domanda di lavoro la quota dei salari sul prodotto totale è costante (e precisamente 1-a); il monte salari cresce allora con la produzione, e raggiunge il massimo nel punto di piena occupazione. Tuttavia, in un contesto dinamico anche altri punti della regione tratteggiata possono essere ottimali, almeno per certe fasi del gioco.

Ci sono vari modi di assegnare ai lavoratori variabili di controllo e vincoli su tali variabili in modo che la regione tratteggiata della figura 2 coincida con l'insieme delle strategie possibili. Da un punto di vista statico queste descrizioni sono equivalenti, e lo sarebbero anche in un contesto dinamico se i capitalisti fossero leader nel senso di Stackelberg. Ma ai fini della definizione di un equilibrio di Nash non è così, perchè le congetture dei capitalisti relative al comportamento dei lavoratori dipendono da quali variabili sono considerate variabili di controllo.

Una prima descrizione dell'insieme delle strategie dei lavoratori è la seguente. I lavoratori fissano l'occupazione L sotto il vincolo (3.4). Dalla (3.3) otteniamo il corrispondente salario. I lavoratori possono però decidere di rinunciare ad una quota x del loro salario, con

$$0 \leq x \leq 1 \qquad (3.5)$$

In questo caso, le variabili di controllo dei lavoratori sono L ed x.

Una descrizione alternativa consiste nel supporre che i lavoratori fissino il saggio di salario w sotto il vincolo:

$$w_f \leq w \qquad (3.6)$$

dove

$$w_f = (1-a) \left( \frac{K}{N} \right)^a \qquad (3.7)$$

è il salario di piena occupazione. Il vincolo (3.6) corrisponde alla condizione $L \leq N$. Le imprese decidono l'occupazione sulla base del salario fissato dai lavoratori, i quali possono poi scegliere di trasferire ai capitalisti una quota x del monte salari, con x compreso nell'intervallo (3.5). In questo caso le variabili di controllo dei lavoratori sono w ed x.

Nel paragrafo seguente esamineremo la soluzione del gioco in questa alternativa perchè la considerazione del controllo w, in luogo di L, consente di ottenere alcune conclusioni in modo univoco. Occorre però ricordare che l'insieme dei valori ammissibili di w, ed in particolare il limite inferiore del salario aumenta con l'accumulazione del capitale, ma le nostre ipotesi implicano che i capitalisti non percepiscono la dipendenza strategica di w(t) da K(t).

3.3 Indicando con $R_w$ ed $R_c$ rispettivamente i redditi dei lavoratori e dei capitalisti, avremo:

$$R_w = (1-x)\ (1-a)K\ g(w) \qquad (3.8)$$

$$R_c = (a + (1-a)x)K\ g(w) \qquad (3.9)$$

dove:

$$g(w) = \left(\frac{1-a}{w}\right)^{(1-a)/a} \tag{3.10}$$

$$\dot{K} = s_c R_c \qquad , K(0)=\bar{K} \tag{3.11}$$

Il gioco differenziale può allora essere formulato nel modo seguente:

<u>Lavoratori</u>

$$\max_{\{x,w\}} \quad C_w = \int_0^T R_w \, dt$$

$$\text{s.t;} \quad \dot{K} = s_c R_c \quad , K(0)=\bar{K} \tag{3.12}$$

$$w_f \leqslant w$$

$$0 \leqslant x \leq 1$$

<u>Capitalisti</u>

$$\max_{\{s_c\}} \quad C_c = \int_0^T (1-s_c) R_c \, dt$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{K} = s_c R_c \quad , K(0)=\bar{K} \tag{3.13}$$

$$0 \leq s_c \leq 1$$

E' possibile allora dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 3.1 La soluzione del gioco (3.12) e (3.13) comprende le seguenti tre fasi:

$w=w_f$, $x=1$, $s_c=1$ per $0 \leq t < t_1$

$w=w_f$, $x=0$, $s_c=1$ per $t_1 < t < t_2$

$w=w_f$, $x=0$, $s_c=0$ per $t_2 < t \leq T$

dove: $$t_1 = a(1-a)T - \frac{1-a+a^2}{(1+a)(1-a)} \left(\frac{\bar{K}}{N}\right)^{1-a} \tag{3.14}$$

$$t_2 = a\,T - \frac{1}{1+a} \left(\frac{\bar{K}}{N}\right)^{1-a} \tag{3.15}$$

Dunque, per tutta la durata del gioco i lavoratori scelgono condizioni di piena occupazione, accettando la dinamica salariale definita dal sentiero di accumulazione del capitale.

Come nel programma socialmente ottimale, esistono una fase iniziale in cui tutte le risorse sono utilizzate per l'accumulazione ed una fase finale dedicata interamente al consumo. Ora però queste due fasi sono sempre separate da una fase intermedia in cui i lavoratori trattengono il proprio salario per il consumo mentre i capitalisti stanno ancora accumulando.

La spiegazione di questo aspetto della soluzione va ricercata, come si è anticipato, nella natura delle congetture dei capitalisti sul comportamento dei lavoratori. I capitalisti soffrono, infatti, di una particolare forma di miopia. Essi sanno che l'aumento di produzione che consegue ad un aumento dello stock di capitale va ripartito con i lavoratori, ma tale aumento di produzione non è più valutato dalla produttività marginale del capitale. Ciò perchè i capitalisti considerano dato il sentiero temporale del salario, ma credono anche che le imprese concorrenziali siano in grado di ottenere tutto il lavoro desiderato al salario quotato dai lavoratori.[3] Di conseguenza, credono che un aumento dello stock di capitale, a parità di salario, provochi un aumento della occupazione.

Rispetto alla valutazione sociale di un'unità aggiuntiva di capitale, il prezzo attribuito dai capitalisti all'accumulazione:

$$q(T) - q(t_2) = -a(N/K(t_2))^{1-a}\,(T - t_2) \qquad 3.16$$

$$\text{con} \qquad q(T) = 0$$

presenta, in questo caso, due distorsioni, che però operano in senso opposto compensandosi esattamente: da un lato, i capitalisti sanno che a loro spetterà solo una quota (a) dell'aumento della produzione, dall'altro sovrastimano tale aumento pensando che vi sarà anche un aumento dell'occupazione.

---

3 Questo errore di congettura dei capitalisti non potrebbe verificarsi se ai lavoratori si assegnasse il controllo $L(t) \leq N$, in luogo di $w_f \leq w(t)$. In questo caso, supposto anche che la quota del capitale (a) sia inferiore o uguale ad 1/2, la soluzione del gioco differenziale segnala la presenza di due sole fasi, una iniziale di pura accumulazione e una finale di puro consumo, esattamente come il programma socialmente ottimale. Ora, però, i capitalisti cessano la accumulazione troppo presto:

$$t_c = \frac{1}{a^2 - a + 1}\left[a^2 T - \left(\frac{\bar{K}}{N}\right)^{1-a}\right] < t^*$$

Analogamente (o conseguentemente?) anche i lavoratori bloccano anzitempo il trasferimento del loro monte salari ai capitalisti. Il risultato è una insufficiente accumulazione di capitale, che rende inefficiente la soluzione del gioco.
Questo tipo di inefficienza è del tutto simile a quello analizzato da Lancaster e ciò non può sorprendere perchè la sola differenza rispetto a quel modello è rappresentato dalla funzione di produzione utilizzata, la quale definisce il limite superiore della quota del lavoro.
Quindi, anche la spiegazione dell'inefficienza è la stessa: nella fase finale, la valutazione sociale dell'accumulazione è data dalla produttività marginale del capitale per il tempo che deve trascorrere prima della fine del gioco, mentre la valutazione dei capitalisti è ottenuta moltiplicando questo valore per (a); ciò perchè i capitalisti sanno che la quota (1-a) della produzione aggiuntiva ottenibile andrà ai lavoratori.
Se a>1/2, come in Lancaster ed in Hoel, anche nel nostro caso si avrebbe una fase intermedia nella quale i lavoratori cessano di trasferire i loro monte-salari ai capitalisti anche se questi seguitano ad accumulare.

Dunque, la miopia dei capitalisti deriva in sostanza dal fatto che essi non considerano la limitatezza della disponibilità di lavoro.

Tale vincolo è invece esplicitamente preso in considerazione dai lavoratori [4], ai quali può essere perciò attribuito solo il primo tipo di distorsione; il prezzo attribuito all'accumulazione dai lavoratori sarà perciò il seguente:

$$p(T) - p(t_2) = -(1-a)a\left[\frac{N}{K(t_2)}\right]^{1-a}(T-t_2) \qquad 3.17$$

E' facile accertare, conforntando le (3.16) e (3.17), che nella fase finale ($x=0$, $s_c=0$) il tasso di variazione della $p(t)$ è inferiore a quello della $q(t)$. Ne segue che i lavoratori bloccano il trasferimento del monte dei salari ai capitalisti troppo presto rispetto a quanto sarebbe richiesto per la realizzazione del programma socialmente ottimale. Da ciò discende una sottoaccumulazione del capitale, compensata solo in parte dal prolungamento della fase di accumulazione dei capitalisti oltre $t^*$ (infatti: $t_1 < t^* < t_2$), provocata dal fatto che ad uno stock finale di capitale inferiore corrisponde una produttività marginale del capitale più elevata nella fase finale.

La soluzione del gioco descritto è rappresentata nella figura 3.

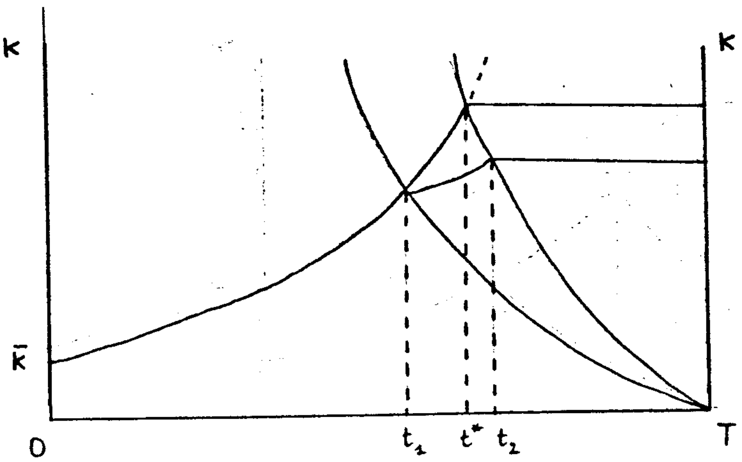



fig. 3

[4] Se anche i lavoratori fossero affetti da una analoga forma di miopia, o meglio se $w(t)$ avesse una sua dinamica non direttamente controllata dai lavoratori, allora la soluzione del gioco non-cooperativo verrebbe a coincidere la soluzione del programma socialmente ottimale. In questo caso però occorrerebbe spiegare da chi e in che modo viene fissato $w(t)$.

## 4. Anche i lavoratori risparmiano

4.1 Nella precedente sezione si è supposto che tutto il capitale fosse sempre di proprietà dei capitalisti. L'unica forma di "risparmio" concessa ai lavoratori consisteva nella possibilità di cedere una parte del proprio reddito ai capitalisti nella speranza che venisse accumulato. In ogni caso sarebbero stati solo i capitalisti a godere del profitto sul capitale così costituito.

Ora invece supporremo che anche ai lavoratori sia concesso di risparmiare e di investire. Questa possibilità è stata recentemente studiata da M. Pohjola (1983), nel contesto di un modello per il resto simile a quello di Lancaster. Pohjola, però, assume che la quota del reddito che va ai lavoratori conservi il limite superiore $b<1$ di quel modello.[1] Se i lavoratori possono risparmiare e dunque possedere capitale, questa ipotesi ci sembra quanto meno discutibile. Si consideri ad esempio il caso, estremo ma pur sempre possibile, in cui tutto il capitale è posseduto dai lavoratori; perchè mai i capitalisti dovrebbero ricevere una quota positiva della produzione, visto che si suppone che capitale e lavoro siano i soli fattori di produzione?

Per questa ragione preferiamo ipotizzare che, se i lavoratori prestano il proprio capitale alle imprese concorrenziali (come supporremo in questa sezione), essi ricevono una quota di profitti uguale alla quota del capitale che controllano.[2] Ne segue che quando tutto il capitale è di proprietà dei lavoratori, ad essi spetta l'intera produzione.

Si potrebbe obiettare che una situazione in cui tutto il capitale è posseduto dai lavoratori è incompatibile con la logica di fondo del modello che presuppone l'esistenza di due classi sociali in lotta tra loro. Questa obiezione, però, sarebbe valida solo se l'assenza di capitalisti puri venisse ipotizzata come condizione iniziale del modello, mentre noi supporremo sempre che $K_c(0)$, cioè lo stock di capitale iniziale dei capi-

---

1 Ipotesi analoga è fatta anche da M.Hoel (1978), p. 336 , nota 1

2 Ciò presuppone che il tasso di rendimento ottenuto dai lavoratori sul loro capitale sia uguale a quello ottenuto dai capitalisti.
Questa è l'ipotesi più usuale, ma certamente non la sola possibile.

talisti, sia positivo. Se invece l'obiezione venisse riferita anche ad istanti successivi, allora si deve ribattere che l'estinzione di una delle due classi è uno dei possibili esiti del loro conflitto.

4.2 La nostra nuova ipotesi relativa al risparmio dei lavoratori implica che una ulteriore variabile di controllo venga aggiunta al set di strumenti di cui questi dispongono, e cioè la frazione $s_w$ del proprio reddito che decidono di risparmiare. Il campo di variazione di tale variabile è:

$$0 \leqslant s_w \leqslant 1 \qquad (4.1)$$

In questa sezione supporremo che le altre variabli di controllo dei lavoratori siano w ed x; la variabile di controllo dei capitalisti è sempre $s_c$. Il campo dei valori ammissibili di questi strumenti resta quello definito nella precedente sezione.

Il reddito delle due classi deve ora essere ridefinito. Quello dei lavoratori consiste dei salari e dei profitti sul capitale di loro proprietà, il tutto al netto della quota trasferita ai capitalisti:

$$R_w = (1-x)(W+P_w) \qquad (4.2)$$

dove:

$$W = (1-a)\ Kg(w) \qquad (4.3)$$

e

$$P_w = aK_w g(w) \qquad (4.4)$$

dove $K_c$ e $K_w$ indicano rispettivamente il capitale di proprietà dei capitalisti e dei lavoratori (ovviamente $K=K_c+K_w$), mentre g(w) è sempre definito dalla (3.16). Sostituendo nella (4.2) otteniamo:

$$R_w = (1-x)\Big[\ (1-a)K_c + K_w\Big]g(w) \qquad (4.5)$$

mentre il reddito dei capitalisti è dato da:

$$R_c = \Big(aK_c + x\Big[(1-a)K_c + K_w\Big]\Big)g(w) \qquad (4.6)$$

La dinamica degli stock di capitale è descritta dalle seguenti equazioni:

$$\dot{K}_w = s_w R_w, \quad K_w(0) = \bar{K}_w \geq 0 \qquad (4.7)$$

$$\dot{K}_c = s_c R_c, \quad K_c(0) = \bar{K}_c > 0 \qquad (4.8)$$

Il gioco dinamico diventa pertanto:

<u>Lavoratori</u>

$$\max_{\{w,x,s_w\}} \quad C_w = \int_0^T (1-s_w)R_w \, dt$$

s.t. (4.7), (4.8) e

$$w_f \leq w \qquad (4.9)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq s_w \leq 1$$

<u>Capitalisti</u>

$$\max_{\{s_c\}} \quad C_c = \int_0^T (1-s_c)R_c \, dt \qquad (4.10)$$

s.t. (4.7), (4.8) e

$$0 \leq s_c \leq 1$$

4.3 Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 4.1 La soluzione del gioco (4.9) –(4.10) comprende le seguenti tre fasi:

$w=W_f$, $x=0$, $s_w=1$ ed $s_c=1$ per $0 \leqslant t < t_1$

$w=w_f$, $x=0$, $s_w=1$ ed $s_c=0$ per $t_1 < t < t_2$

$w=w_f$, $x=0$, $s_w=0$ ed $s_c=0$ per $t_2$ $t \leqslant T$

Si noti innanzitutto che i lavoratori scelgono anche in questo caso la piena occupazione per tutta la durata del gioco, accettando la dinamica salariale corrispondente alla crescita delle stock di capitale.

In secondo luogo, la strategia ottimale per i lavoratori consiste nel porre sempre x=0. La spiegazione di questa scelta è ovvia: dando ai lavoratori la possibilità di risparmiare direttamente, non c'è più motivo perchè essi continuino ad utilizzare il surrogato rappresentato dal trasferimento di reddito ai capitalisti. E' interessante osservare che, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, la compartecipazione dei lavoratori ai profitti, in quanto proprietari di capitale, non provoca una riduzione delle richieste salariali; al contrario, ora non vi è più alcun incentivo che possa indurre i lavoratori a rinunciare ad una parte anche minima del massimo reddito ottenibile.

Infine, oltre alla fase iniziale di pura accumulazione ed a quella finale di puro consumo, la soluzione comprende una fase intermedia in cui i lavoratori stanno ancora accumulando, mentre i capitalisti sono già passatiad un regime di puro consumo. I lavoratori, dunque, accumulano più a lungo dei capitalisti, e ciò indipendentemente dal valore di a.[3]

4.4. Anche se il calcolo diretto dei valori di $t_1$ e $t_2$ è in questo caso piuttosto complicato, si può dimostrare il seguente teorema. Indichiamo con $\Delta_1=t_1$, $\Delta_2=t_2-t_1$ e $\Delta_3=T-t_2$ la lunghezza delle tre fasi.

TEOREMA 4.2 Per $T \to \infty$, sia $(\Delta_1+\Delta_2)$ che $\Delta_3$ crescono senza limite finito.

Il teorema 4.2 ha un interessante corollario. Abbiamo già accennato nell'introduzione alla possibilità che i lavoratori, accumulando più rapidamente dei capitalisti, provochino l'eutanasia di questi ultimi. Ebbene, in questo caso quel processo si verifica effettivamente.

COROLLARIO 4.1 Per $T \to \infty$, la quota del capitale complessivo controllata dai capitalisti tende a 0.

Vediamo di spiegare in modo intuitivo le motivazioni di questo risultato. Quando i capitalisti hanno il controllo esclusivo dell'accumulazione, come nel modello di Lancaster o nel gioco analizzato nella sezione 3, la relazione tra capitalisti e lavoratori ha un aspetto conflittuale ma anche un aspetto cooperativo: i lavoratori hanno bisogno dell'accumulazione svolta dai capitalisti, perchè solo per tramite dei capitalisti essi possono trasformare il consumo presente in maggiore consumo futuro. Quando però anche i lavoratori possono risparmiare questo incentivo alla collaborazione viene a mancare e prevale l'aspetto conflittuale. A questo punto, l'e-

---

[3] In M.Pohjola (1983), p.274 , un risultato analogo si poteva ottenere solo se il limite superiore della quota del lavoro fosse inferiore ad 1/2.

stinzione dei capitalisti, se può essere raggiunta, diviene ottimale per i lavoratori.

Due precisazioni sono d'obbligo, per inquadrare correttamente il risultato espresso dal corollario 4.1. La prima è che se di eutanasia dei capitalisti si può parlare, è solo in termini relativi: la quota del capitale complessivo controllata dai capitalisti tende a 0, ma lo sotck di capitale dei capitalisti non solo non tende ad annullarsi, ma anzi tende a crescere senza limite finito per $T \to \infty$. Il fatto è che il capitale dei capitalisti cresce più lentamente, e per un periodo più breve, di quanto non faccia il capitale dei lavoratori.
La seconda precisazione è che il nostro è un risultato asintotico; in altri termini, anche se la quota del capitale dei capitalisti tende a zero, essa non si può annullare in un tempo finito.

4.5 Questo paragrafo è dedicato ad un confronto tra il programma di accumulazione conflittuale che risulta dalla soluzione del gioco (4.9)-(4.10) ed il programma socialmente ottimale descritto nella sezione 2. Perchè il confronto abbia senso occorre naturalmente far riferimento a programmi definiti per sistemi economici con la stessa tecnologia, popolazione, dotazione iniziale di capitale (non importa come ripartita tra capitalisti e lavoratori) e con lo stesso orizzonte temporale. Fatte queste precisazioni, possiamo enunciare il seguente risultato.

TEOREMA 4.3 Il programma di accumulazione conflittuale conduce ad uno stock complessivo di capitale al tempo T maggiore rispetto al programma socialmente ottimale. Inoltre:

$t_1 < t^* < t_2$.

Il contenuto di questo teorema è rappresentato graficamente nella figura 4.

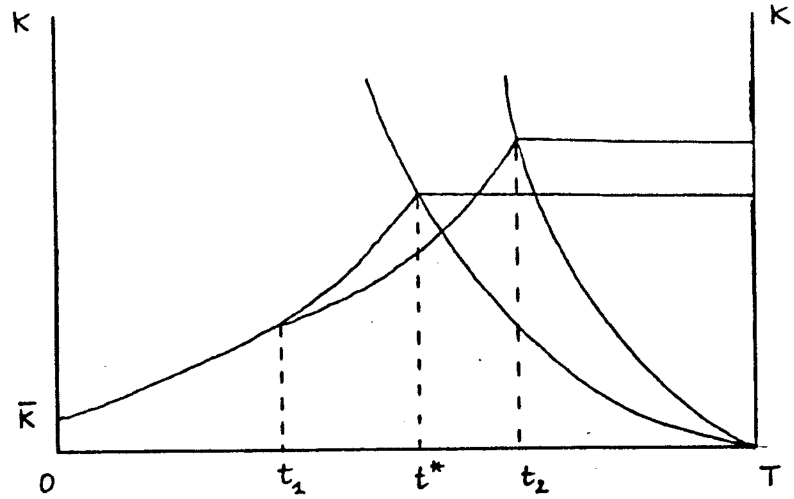



fig. 4

In questo caso il programma di accumulazione conflittuale è inefficiente a causa di una sovraccumulazione del capitale. E' chiaro allora che quelli messi in luce da Lancaster non sono i soli meccanismi che tendono a provocare l'inefficienza dinamica del capitalismo.

L'ipotesi che le variabili di controllo dei lavoratori siano w ed x permette di identificare le ragioni dell'inefficienza esclusivamente nel comportamento dei lavoratori. Infatti, i capitalisti, il cui comportamento è caratterizzato dalla miopia che abbiamo descritto nella precedente sezione, danno una valutazione di una unità aggiuntiva di capitale coincidente con quella socialmente ottimale:

$$q_1(T) - q_1(t_2) = -a(N/K(t_2))^{1-a}\left(T-t_2\right) \qquad (4.11)$$ [5]

mentre il prezzo assegnato all'accumulazione del capitale di proprietà dei lavoratori è costantemente nullo:

$$q_2(T)=0, \text{ per ogni } t \qquad (4.12)$$

I capitalisti tuttavia arrestano l'accumulazione prima di t*, ma ciò avviene solo perchè l'eccesso di capitale, rispetto al programma socialmente ottimale, provoca una sua minore produttività marginale, e quindi un più basso incentivo all'accumulazione. In altri termini, è il comportamento dei lavoratori che induce i capitalisti a discostarsi dal sentiero socialmente ottimale: se i lavoratori passassero alla fase di puro consumo in t*, anche i capitalisti farebbero lo stesso.

Per spiegare il comportamento dei lavoratori, è necessario considerare gli effetti sul loro reddito di un incremento di capitale, scrivendo anzitutto le leggi di variazione del prezzo attribuito ad un'unità aggiuntiva di $K_w$:

$$P_1(T) - P_1(t_2) = -\left(\frac{N}{K(t_2)}\right)^{1-a} (T - t_2) \qquad (4.13)$$

e del prezzo assegnato ad un'unità aggiuntiva di $K_c$:

$$p_2(T) - p_2(t_2) = -(1-a)\left(\frac{N}{K(t_2)}\right)^{1-a} (T-t_2) \qquad (4.14)$$ [5]

con $p_1(T) = p_2(T) = 0$

Anzitutto, si osservi come, diversamente dai capitalisti, la valutazione assegnata dai lavoratori all'incremento di $K_c$ è positiva, seppure inferiore a quella attribuita al capitale proprio. Ciò perchèdall'incremento di produzione dovuto all'aumento di $K_c$ i lavoratori ottengono la quota (1-a) sotto forma di salari; viceversa, dall'incremento di produzione dovuto all'aumento di $K_w$ i capitalisti non ottengono nulla.

In secondo luogo, grazie all'ipotesi di rendimenti di scala costanti, possiamo immaginare che la produzione sia divisa in due parti: quella ottenuta utilizzando $K_c$ e quella ottenuta utilizzando $K_w$. Naturalmente il rapporto capitale/lavoro in questi due fittizi settori è lo stesso. Indicando con $Y_c$ ed $Y_w$ queste due produzioni, è chiaro che: $R_w = (1-a)\, Y_c + Y_w$.

Un aumento di $K_w$ provoca: 1) un aumento di $Y_w$ pari alla produttività marginale di capitale; 2) una redistribuzione del lavoro tra due "settori" in modo da mantenere uguale il rapporto capitale/lavoro. Questo spostamento di lavoro provoca un aumento di $Y_w$ ed una diminuzione di $Y_c$ (e quindi anche dei profitti dei capitalisti), ma nel complesso $R_w$ aumenta. E' questo secondo effetto la causa della tendenza dei lavoratori a proseguire l'accu-

---

[5] Nella equazione 4.11, come pure in quelle successive, si sono già sostituiti i valori delle strategie ottime: $x = 0$ e $w = w_f$.
Inoltre, $K(t_2)$ è sempre costante, poichè nella fase finale non si ha accumulazione.

mulazione anche oltre $t^*$ . Si noti anche che questo effetto può essere nullo solo nel caso banale in cui tutto il capitale è di proprietà dei lavoratori, caso nel quale è evidente che la soluzione del gioco non può che coincidere con il programma socialmente ottimale.[6]

---

[6] Che cosa accadrebbe se la variabile di controllo dei lavoratori fosse L invece di $w(t)$ ?
La soluzione del gioco diventerebbe alquanto più complessa, ma i meccanismi operanti possono comunque essere precisati.
In primo luogo, i capitalisti sarebbero consapevoli della limitata disponibilità di lavoro, e ciò produrrebbe una riduzione della lunghezza della loro fase di accumulazione. Vi è poi un altro motivo che induce i capitalisti ad accumulare meno. Infatti, se essi accumulano, aumenteranno i profitti futuri, ma anche i salari dei lavoratori; se anche i lavoratori stanno accumulando, l'aumento dei salari si traduce immediatamente in una crescita più rapida del capitale dei lavoratori e tale crescita, come abbiamo visto, ha un effetto negativo sui profitti dei capitalisti. Come si vede, in questa ipotesi l'interazione dinamica dei comportamenti delle due classi diventa alquanto sofisticata.
Naturalmente tutto ciò che può indurre i capitalisti ad accumulare di meno non può che rafforzare il risultato enunciato nel corollario 4.1 e cioè l'eutanasia dei capitalisti. Diventa però ambiguo, ora, il giudizio relativo all'efficienza del programma conflittuale. Se i lavoratori accumulano troppo, i capitalisti accumulano troppo poco. Non siamo in grado di dire quale sia, in generale, la tendenza prevalente.

## 5. Le imprese cooperative

5.1 Nella precedente sezione abbiamo supposto che i lavoratori potessero risparmiare e quindi diventare proprietari di capitale, ma con la condizione che il loro capitale, come anche quello dei capitalisti, fosse lasciato in gestione alle imprese concorrenziali. Ora, allargando ulteriormente il set di strategie dei lavoratori, supporremo che essi possano gestire autonomamente il proprio capitale costituendo imprese "cooperative". Alle imprese concorrenziali resta pertanto solo il capitale dei capitalisti; inoltre la fissazione del salario da parte dei lavoratori determina, data la curva di domanda di lavoro delle imprese concorrenziali, solo l'occupazione in tali imprese, e non l'occupazione complessiva.

Che questa ipotesi costituisca effettivamente un allargamento delle strategie dei lavoratori, è chiaro per il fatto che essi possono sempre fissare il salario ad un livello tale che il rapporto capitale/lavoro nelle imprese cooperative sia uguale a quello delle imprese concorrenziali, riconducendosi così alla situazione già analizzata nella precedente sezione. Ma per quale motivo potrebbe essere conveniente per i lavoratori discostarsi da quella situazione?

Potrebbero esservi, naturalmente, ragioni tecnologiche. La possibilità di utilizzare tecniche diverse, o la presenza di rendimenti di scala decrescenti possono di per sè rendere conveniente la costituzione di imprese cooperative. Tuttavia, per mettere in maggiore evidenza il punto che ci interessa, supporremo che la tecnologia sia la stessa per i due tipi di imprese, e che i rendimenti di scala siano costanti.

Anche trascurando fattori tecnologici, la costituzione di imprese cooperative può essere conveniente per i lavoratori perchè permette loro di sfruttare il potere monopolistico di cui godono sul mercato del lavoro. Nei giochi considerati nelle precedenti sezioni i lavoratori non avevano avuto la possibilità di sfruttare tale potere: le proprietà della curva di domanda di lavoro derivata da una funzione di produzione Cobb-Douglas rendevano infatti sempre conveniente la scelta della piena occupazione. La piena occupazione resta conveniente anche in questo caso (basta pensare che la produttività marginale del lavoro nelle imprese cooperative è sempre positiva), ma ora l'allocazione del lavoro più conveniente può essere tale che il rapporto capitale/lavoro sia diverso per i due tipi di imprese.

Per chiarire questo punto, consideriamo un semplice problema di massimizzazione statica. Il reddito dei lavoratori è dato dalla somma della produzione delle imprese cooperative:

$$Y_w = K_w^a \, L_w^{1-a} \qquad (5.1)$$

(dove $L_w$ è l'occupazione nelle imprese cooperative) e del monte salari pagato dalle imprese concorrenziali:

$$W = w \, K_c \, \left(\frac{1-a}{w}\right)^{1/a} \qquad (5.2)$$

essendo:

$$L_c = K_c \left(\frac{1-a}{w}\right)^{1/a} \qquad (5.3)$$

la curva di domanda di lavoro delle imprese concorrenziali.

Poichè $L_w = N-L_c$, dalle precedenti equazioni si ottiene:

$$R_w = K_w^a \left[ N-K_c \left(\frac{1-a}{w}\right)^{1/a} \right]^{1-a} + w \, K_c \left(\frac{1-a}{w}\right)^{1/a} \qquad (5.4)$$

Si supponga ora che i lavoratori desiderino massimizzare $R_w$. La condizione di primo ordine per un massimo implica che la produttività marginale del lavoro nelle imprese cooperative venga uguagliata al ricavo marginale corrispondente alla curva di domanda di lavoro delle imprese concorrenziali, e non alla produttività marginale del lavoro in queste ultime, come sarebbe richiesto per una allocazione efficiente delle risorse. Da un altro punto di vista, detti $k_w=K_w/L_w$ e $k_c=K_c/L_c$ i rapporti capitale/lavoronei due tipi di imprese, la condizione di primo ordine per la massimizzazione della (5.4) implica:

$$k_w = (1-a)^{1/a} \, k_c \qquad (5.5)$$

e quindi uno scostamento dall'allocazione efficiente del lavoro, che comporterebbe $k_w = k_c$.

La costituzione delle imprese cooperative apre dunque la possibilità che il conflitto tra capitalisti e lavoratori dia origine ad una soluzione inefficiente non solo dinamicamente (e cioè in riferimento alle decisioni di accumulazione) ma anche staticamente (e cioè in riferimento all'allocazione statica dei fattori). Con una tecnologia diversa da quellada noi ipotizzata, questa possibilità si sarebbe potuta presentare (nella forma di una non piena occupazione del lavoro) già nelle ipotesi delle sezioni 3 e 4.

Naturalmente questo non significa che la relazione tra $k_w$ e $k_c$ sia per tutta la durata del gioco quella data dalla (5.5). Vedremo che i lavoratori si comportano come se massimizzassero istantaneamente il proprio reddito solo nella ultima fase del gioco; in precedenza, il loro comportamento è più complesso e verrà discusso in seguito.

5.2 Veniamo ora alla formulazione del gioco. Il reddito dei lavoratori è già stato definito nel precedente paragrafo dalla (5.4); il reddito dei capitalisti è:

$$R_c = a\, K_c\, g(w) \tag{5.6}$$

proprio come nella precedente sezione.

Le variabili di controllo sono $s_c$ per i capitalisti ed $s_w$ e $w$ per i lavoratori. [1] Il campo dei valori ammissibili delle propensioni al risparmio è come al solito rappresentato dall'intervallo (0,1), mentre sarebbe superfluo in questo caso porre dei vincoli su $w$ perchè si verifica facilmente che la soluzione è sempre interna.

Tenendo conto della diversa definizione di $R_w$ ed $R_c$, la dinamica degli stock di capitale resta descritta dalle stesse equazioni - si tratta delle (4.7) e (4.8) - della sezione precedente. I problemi di ottimizzazione delle due classi diventano allora i seguenti.

---

1 In questo caso, la variabile di controllo $x$ non è esplicitamente considerata; ed è del tutto evidente, infatti, che la strategia ottima dei lavoratori consiste nel porre sempre $x = 0$.

<u>Lavoratori</u> $\max\limits_{\{s_w,\, w\}} \quad C_w = \int_0^T (1-s_w)R_w \, dt$

s.t. (4.7), (4.8) e $0 \leqslant s_w \leqslant 1$ (5.7)

<u>Capitalisti</u> $\max\limits_{\{s_c\}} \quad C_c = \int_0^T (1-s_c)R_c \, dt$

s.t. (4.8) e $0 \leqslant s_c \leqslant 1$ (5.8)

la soluzione del gioco è descritta dal seguente teorema.

TEOREMA 5.1 La soluzione del gioco (5.7)-(5.8) comprende le seguenti tre fasi:

$s_w = 1$ ed $s_c = 1$ per $0 \leqslant t < t_1$

$s_w = 1$ ed $s_c = 0$ per $t_1 \leqslant t < t_2$

$s_w = 0$ ed $s_c = 0$ per $t_2 \leqslant t \leqslant T$

Nella seconda e terza fase il saggio di salario è definito implicitamente dalla condizione (5.5).

Nella fase iniziale il rapporto $k_w/k_c$ è decrescente ed è compreso nel seguente intervallo:

$(1-a)^{1/a} < k_w/k_c < 1.$

Anche in questo caso, quindi, i lavoratori risparmiano più a lungo dei capitalisti e ciò fa sì che vi sia una fase intermedia, oltre alla usuali fasi iniziali di pura accumulazione e finali di puro consumo. Fondamentalmente, il fatto che i lavoratori accumulino più a lungo si spiega considerando che il rapporto capitale/lavoro nelle imprese cooperative è più basso che nelle imprese concorrenziali, e conseguentemente la produttività marginale del capitale è più alta.

A sua volta, la differenza nei rapporti capitale/lavoro indica, come accennavamo nel primo paragrafo di questa sezione, la convenienza per i lavoratori a sfruttare il potere monopolistico che hanno sul mercato del lavoro. La cosa interessante da osservare è il fatto che i lavoratori fissano il salario in modo da massimizzare istantaneamente il proprio reddito solo nella seconda e terza fase del gioco, cioè quando i capitalisti hanno già smesso di accumulare. Nella prima fase, quando ancora i capitalisti accumulano, i lavoratori preferiscono collocarsi in una posizione intermedia tra quella che rappresenta la massimizzazione istantanea del loro reddito e quella che risulta efficiente dal punto di vista della allocazione del lavoro. E man mano che l'istante in cui i capitalisti cessano di accumulare si avvicina, i lavoratori si allontanano dall'allocazione efficiente del lavoro, spostandosi verso quella più immediatamente conveniente.

Il fatto è che, quando i capitalisti accumulano, i lavoratori ne traggono vantaggio perchè la curva di domanda di lavoro delle imprese concorrenziali si sposta verso l'alto. Naturalmente, il vantaggio dei lavoratori non è tale da in-durli a cedere una parte del proprio reddito ai capitalisti (come avveniva quando non era loro concesso di risparmiare), ma bisogna ricordare che nel caso di inefficienza allocativa i lavoratori possono, rinunciando ad una unità di reddito, far aumentare il reddito dei capitalisti in masura maggiore di 1. In altri termini, nella fase iniziale i lavoratori si accontentano di una quota distributiva più bassa, pur di fare aumentare la produzione complessiva. L'inefficienza allocativa, che pure in certa misura permane, è però minore di quella prevista da un modello completamente statico. Un comportamento miope dei lavoratori, rivolto fin dall'inizio alla massimizzazione istantanea dei propri redditi, alla lunga sarebbe sub-ottimale dal loro stesso punto di vista.

5.3 Come già era capitato nella precedente sezione, il calcolo di $t_1$ e $t_2$ si rivela alquanto laborioso. E' comunque possibile dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 5.2 Per $T \to \infty$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ e $\Delta_3$ crescono senza limite finito.

Dal teorema 5.2 segue un corollario del tutto analogo al corollario 4.1.

COROLLARIO 5.1 Per $T \to \infty$, la quota del capitale complessivo controllata dai capitalisti tende a zero.

A proposito di questo corollario tornano valide le precisazioni fatte nel paragrafo 4.4.

5.4 Che la soluzione del gioco (5.7)-(5.8) sia inefficiente è evidente già per il fatto che l'allocazione del lavoro è inefficiente nella fase iniziale. Non siamo però in grado di dire se lo stock finale di capitale sia più grande o più piccolo rispetto al programma socialmente ottimale. Da un lato, infatti, c'è tendenza dei lavoratori ad accumulare più a lungo non solo dei capitalisti, ma anche di quanto sarebbe socialmente ottimale. Dall'altro lato, però, vi è da mettere in conto il fatto che nella fase iniziale la produzione complessiva, a causa dell'inefficiente allocazione del lavoro, è minore rispetto al programma socialmente ottimale. Non è chiaro, almeno a noi, quale sia l'effetto prevalente.

## 6. Diverse ipotesi sulla tecnologia.

6.1 La robustezza del nostro modello potrebbe essere indagata in diverse direzioni, dalla scelta di un orizzonte di controllo finito alla linearità delle funzioni di utilità, dall'assenza di uno sconto dei consumi futuri, all'uso di funzioni di produzione Cobb-Douglas, alla struttura delle informazioni ipotizzate per ciascun giocatore. Abbiamo già dovuto prendere atto, nella sezione 3, della estrema sensibilità delle scelte strategiche di ciascun giocatore in relazione al grado di percezione delle interdipendenze dinamiche che costituiscono la struttura del modello. In questo paragrafo vogliamo invece considerare la dipendenza delle conclusioni raggiunte dal tipo di funzione di produzione utilizzata, e mostrare come anche il risultato ritenuto più generale (e cioè l'inefficienza dinamica del capitalismo) possa non valere in alcuni casi estremi.

Anche restringendo l'attenzione alla classe di funzioni di produzione CES, è prevedibile che si possono ottenere, come soluzioni del gioco dinamico, sentieri di accumulazione sensibilmente diversi da quelli ottenuti nel caso della Cobb-Douglas. Intuintivamente, è chiaro che valori più elevati dell'elasticità di sostituzione comportano un indebolimento del potere monopolistico dei lavoratori; l'opposto accade per valori dell'elasticità di sostituzione inferiori all'unità.

L'analisi del caso generale è complessa e le conclusioni non sempre sono definibili univocamente. Nei due casi estremi di elasticità di sostituzione infinita e nulla, invece, il problema si semplifica sensibilmente fino a diventare banale. In questi casi, infatti, le scelte delle due classi non sono più dinamicamente interdipendenti, e la soluzione del gioco si riduce alla soluzione di problemi standard di ottimizzazione dinamica. Ciononostante l'analisi di questi casi può essere utile per formarsi un'idea intuitiva di come il valore dell'elasticità di sostituzione influenzi le soluzioni. In quanto segue considereremo solo la versione più complessa del gioco, che prevede anche la possibilità di imprese cooperative.

6.2 Cominciamo considerando una funzione di produzione ad elasticità di sostituzione infinita:

$$Y_i = K_i + L_i \qquad i = w,\ c \qquad (6.1)$$

In questo caso, per i lavoratori è del tutto indifferente impiegare il lavoro nelle imprese cooperative oppure offrirlo alle imprese concorrenziali ad un salario pari ad 1 (ciò implica, tra l'altro, che la possibilità di costituire imprese cooperative non rappresenta un effettivo allargamento del set di strategie dei lavoratori). Si può quindi supporre, per fissare le idee, che $L_w = N$ ed $L_c = 0$. Le variabili di controllo restano dunque $s_w$ ed $s_c$; il gioco differenziale è banale, essendo dato dall'accostamento di due problemi di ottimizzazione tra loro indipendenti.

La soluzione del gioco comprende due fasi, come si può facilmente dimostrare: nella prima entrambe le classi non consumano ($s_w=1$ ed $s_c=1$), nella seconda entrambe non accumulano ($s_w=0$ ed $s_c=0$). Il passaggio dalla prima alla seconda fase avviene al tempo T-1. E' immediato poi accertare che in questo caso la soluzione del gioco coincide con il programma socialmente ottimale, e che quest'ultimo è identico (tranne che per la presenza di un certo ammontare di lavoro) al programma corrispondente del modello di Lancaster. Infine, per $T \to \infty$, il rapporto $K_w/K_c$ tende verso un limite finito pari a $(\bar{K}_w + N)/\bar{K}_c$ e quindi non si verifica l'eutanasia dei capitalisti.

Queste conclusioni non possono sorprendere perchè, essendo la funzione di produzione separabile, viene meno l'interdipendenza dinamica del comportamento delle due classi.

6.3 Consideriamo ora il caso opposto, in cui l'elasticità di sostituzione è nulla ed il potere dei lavoratori è massimo.
La funzione di produzione assume la forma seguente:

$$Y_i = \min\ (K_i,\ L_i) \qquad i=w,c \qquad (6.2)$$

Ora vi sarà un elemento di indeterminatezza nella soluzione del gioco, perchè per w=1 il profitto delle imprese è massimo (e pari a zero) per ogni valore di $L_c$ compreso tra 0 e $K_c$, e w=1 è chiaramente la strategia ottimale dei lavoratori. Possiamo risolvere tale indeterminatezza, ad esempio, supponendo che le preferenze dei manager siano lessicografiche: prima di tutto essi massimizzano il profitto, ma a parità di profitti scelgono il massimo livello di produzione. Questa ipotesi rende il gioco perfettamente determinato.

Poichè tuttavia il reddito dei capitalisti sarebbe sempre nullo, il gioco non vedrebbe più la partecipazione dei due giocatori, ma si ridurrebbe ad un normale problema di ottimizzazione dinamica, la cui soluzione prevederà comunque due fasi: nella prima si accumula ($s_w$=0) e nella seconda si consuma ($s_w$=1) l'intero prodotto. Il passaggio dalla prima alla secoda fase si avrà quando il lavoro diventa il fattore limitazionale (supposto che all'inizio il fattore limitazionale fosse il capitale).

E' ovvio che il programma di accumulazione è efficiente, così come è ovvio che in questo caso si possa parlare di eutanasia dei capitalisti in un senso molto più forte rispetto agli altri casi da noi analizzati.

Ci sembra evidente che nel caso di elasticità di sostituzione nulla le nostre ipotesi finiscono con l'attribuire ai lavoratori un potere eccessivo. In effetti, si ricorderà come eravamo partiti criticando Lancaster per la sua ipotesi che i lavoratori potessero fissare direttamente la quota distributiva, ma in questo caso estremo la fissazione del salario equivale alla fissazione diretta della quota distributiva.

Nel caso di elasticità di sostituzione nulla, pertanto, sembrerebbe necessario ritornare all'originaria proposta di K. Lancaster di fissare, in qualche modo non specificato, la quota massimadel lavoro.

Tuttavia, anche altre strade potrebbero essere percorse. Un approccio alternativo, ad esempio, consiste nel supporre che il salario sia determinato dalla soluzione di un processo di bargaining condotto periodo per periodo, mentre le sue scelte strategiche relative all'accumulazione possono essere fissate dalla soluzione di un gioco differenziale.

Bibliografia


Arrow K.-Kurz M.(1970),Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy, J.Hokins Press, London .

Balducci R.-Candela G.-Ricci G.(1984),A generalization of R.Goodwin model with rational behaviour of economic agents, in

Bliss C.(1975), Capital theory and income distribution, North Holland, Amsterdam.

Elster J.(1982), Marxism,functionalism, and game theory: the case for methodological iddividualism, Theory and Society,vol.II,4 .

Hoel M.(1978), Distribution and growth as a differential game between workers and capitalists, International Economic Review,19,335-350 .

Lancaster K.(1973), The dynamic inefficiency of capitalism, Journal of Political Economy, 81,1092-1009 .

Modigliani F.-Samuelson P.A.(1966), The Pasinetti paradox in neoclassical and more general models, Review of Economic Studies, 33,269-301 .

Pohjola M.(1983), Workers' investment funds and the dynamic inefficiency of capitalism, Journal of Public Economics,20, 271-279 .

Selten R.-Guth W.(1982), Game theoretical analysis and wage bargaining in a simple business cycle model, Journal of Mathematical Economics, 177-195 .

Rusconi G.E.(1983), Teoria dei giochi e spiegazione sociologica, Stato e Mercato, 8, 251-270 .