Alessandra Luati e Paolo Paruolo

Nota sulla distribuzione di una base di norma unitaria del complemento ortogonale di un vettore gaussiano: il caso bidimensionale

Serie Ricerche 1997, n.3

Dipartimento di Scienze Statistiche "Paolo Fortunati"
Università degli studi di Bologna

Finito di stampare nel mese di Giugno 1997
presso le Officine Grafiche TECNOPRINT S.N.C.
Via del Legatore 3, Bologna

1 Introduzione[1]

Diversi modelli statistici utilizzano la nozione di complemento ortogonale. Di recente, ad esempio, essa è stata impegata nei modelli autoregressivi a rango ridotto e a rango ridotto annidato di Velu Reinsel e Wichern (1986) e Ahn e Reinsel (1988), e nei modelli a componente scalare di Tiao e Tsay (1989). Inoltre tale nozione ha trovato applicazione anche in modelli cointegrati nella definizione di 'attrattore' e 'trend comuni', si veda ad esempio Johansen (1995), Ahn e Reinsel (1990), Reinsel e Ahn (1992) e Paruolo (1997).

In questi modelli si utilizza la nozione di complemento ortogonale con riferimento allo spazio generato da matrici di parametri, la cui distribuzione asintotica è gaussiana o una mistura di gaussiane. La conoscenza della distribuzione di una base del complemento ortogonale nel caso gaussiano è pertanto basilare per problemi di inferenza in tali modelli.

In questa nota si deriva la distribuzione di una base del complemento ortogonale di un vettore aleatorio bidimensionale gaussiano. La stessa distribuzione si ottiene nel caso più generale di una distribuzione ellittica.

Per ogni base di uno spazio si pone un problema di identificazione statistica; in Paruolo (1997) è stata data una soluzione al problema della distribuzione di tali basi quando queste siano identificate mediante restrizioni del tipo "forma ridotta" in sistemi econometrici di equazioni simultanee. Nella presente nota si affronta il caso in cui la base del complemento ortogonale è normalizzata imponendone norma unitaria.

Il resto della presente nota è così organizzato: nella sezione 2 si definisce il problema e si enunciano le distribuzioni trovate; nella sezione 3 si riportano le dimostrazioni e nella sezione 4 si commentano i risultati.

2 Problema e risultati

Si consideri un vettore 2×1 $x = (x_1, x_2)'$ distribuito secondo una legge gaussiana $x \sim N(0, \sigma^2\Omega)$ con

$$\Omega = \begin{pmatrix} k & \rho\sqrt{k} \\ \rho\sqrt{k} & 1 \end{pmatrix},$$

dove ρ è il coefficiente di correlazione e k è il rapporto della varianza di x_1 rispetto a quella di x_2. Si indichi con $y = (y_1, y_2)'$ la base del complemento

[1] I risultati presentati in questa nota sono estratti dalla tesi di laurea di Alessandra Luati in 'Scienze statistiche ed economiche' presso l'Università di Bologna, di cui Paolo Paruolo è stato correlatore.

ortogonale di x di norma unitaria, $||y|| = 1$, dove $||\cdot||$ indica la norma euclidea. E' semplice verificare che $y_1 = x_2/||x||$, $y_2 = -x_1/||x||$, o, $y_1 = \sin\theta$, $y_2 = -\cos\theta$, dove r e θ indicano le coordinate polari corrispondenti a x_1 e a x_2. Si osservi che il vincolo su y di norma unitaria rende la distribuzione di y singolare; in altri termini la distribuzione di y è unidimensionale ed è sufficiente la distribuzione di y_1 o di y_2 a caratterizzarla unicamente. Si osservi inoltre che il campo di variazione di y_1 e y_2 è l'intervallo $[-1,1]$. Con queste avvertenze vale pertanto la seguente

Proposizione 1 *La funzione di densità di probabilità di y_1 è data da*

$$f_{y_1}(u) = h(u,k,\rho) \qquad u \in [-1,1] \tag{1}$$

dove

$$h(u,k,\rho) = \frac{\sqrt{k}}{\pi}\left(\frac{g_1(\rho)}{g_1(u)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{g(u,k)}{(g(u,k))^2 - 4\rho^2 g_1(u) g_2(u,k)}$$

e

$$g_1(u) = (1-u^2) \qquad g_2(u,k) = ku^2 \qquad g(u,k) = g_1(u) + g_2(u,k).$$

Alternativamente, la funzione di densità di probabilità di y_2 è pari a $f_{y_2}(u) = h(u,1/k,\rho)$, $u \in [-1,1]$.

Si osservi che la distribuzione in (1) non dipende da σ^2. Questa osservazione è sufficiente a garantire che la distribuzione (1) rimanga inalterata anche assumendo che la distribuzione di x sia ottenuta come mistura di scala di normali, ossia di tipo ellittico con rappresentazione $x = \sigma z$ dove $z \sim N(0,\Omega)$ e σ è una qualsiasi variabile aleatoria positiva; si veda il seguente lemma 3.

3 Dimostrazioni

La dimostrazione della proposizione 1 è preceduta dal seguente lemma, che riporta un ben noto risultato relativo alla distribuzione gaussiana.

Lemma 2 *La funzione di densità di probabilità di θ è data da*

$$f_\theta(v) = (2\pi)^{-1}(kg_1(\rho))^{\frac{1}{2}}(1 - 2\rho\sqrt{k}\sin v\cos v + (k-1)\sin^2 v)^{-1}. \tag{2}$$

per $\theta \in [0, 2\pi)$.

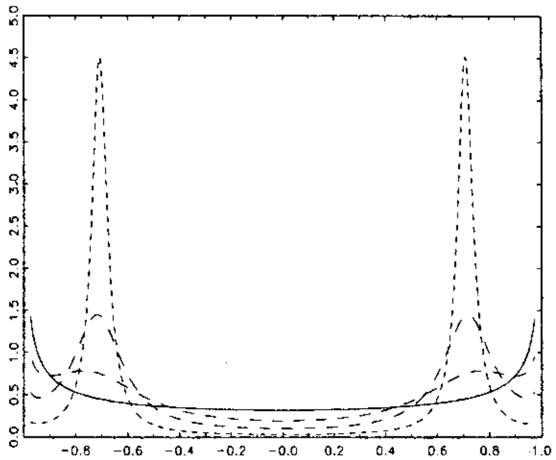

Figura 1: Densità di probabilità $h(u,k,\rho)$ per $k=1$ e $\rho = 0, 0{,}8, 0{,}95, 0{,}995$.

Si osservi che anche tale distribuzione non dipende da σ^2.

Dim. lemma 2. La densità bivariata di r e θ è data da

$$f_{r,\theta}(r,v) = (2\pi)^{-1}\sigma^{-2}(kg_1(\rho))^{-\frac{1}{2}} r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\sigma^{-2}(kg_1(\rho))^{-1}a\right)$$

dove lo jacobiano della traformazione da x a (r,θ) è pari a r e $a = 1 - 2\rho\sqrt{k}\sin v\cos v + (k-1)\sin^2 v$. La distribuzione marginale di θ si ottiene integrando $f_{r,\theta}(r,v)$ rispetto a r; l'integrale è del tipo $c_1\int_0^\infty r\exp(-\frac{1}{2}c_2r^2)dr = c_1/c_2$, dove $c_1 = (2\pi)^{-1}\sigma^{-2}(kg_1(\rho))^{-\frac{1}{2}}$ e $c_2 = \sigma^{-2}(kg_1(\rho))^{-1}a$. Dividendo c_1 per c_2 si ottiene la (2). □

Si dimostra ora la proposizione 1.

Dim. proposizione 1. Sia $1\{\cdot\}$ la funzione indicatrice e si divida il supporto della distribuzione di θ nei sottointervalli $A_1 = \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$, $B = 3\pi/2 < \theta < 2\pi$, $C = 0 \le \theta < \pi/2$. Si osservi che $\theta = \arcsin(y_1)$ è una funzione biunivoca negli intervalli disgiunti A_1 e $A_2 = B \cup C$. Pertanto

$$f_{y_1}(u) = (g_1(u))^{-1/2}\sum_{i=1}^{2} f_\theta(\arcsin(u))1\{\arcsin(u) \in A_i\},$$

dove $(g_1(y_1))^{-1/2}$ è lo jacobiano della trasformazione da θ a y_1. Sostituendo e semplificando si ottiene la (1); analogamente si procede per y_2. □

Si vuole infine dimostrare che il risultato ottenuto è valido anche per distribuzioni ellittiche.

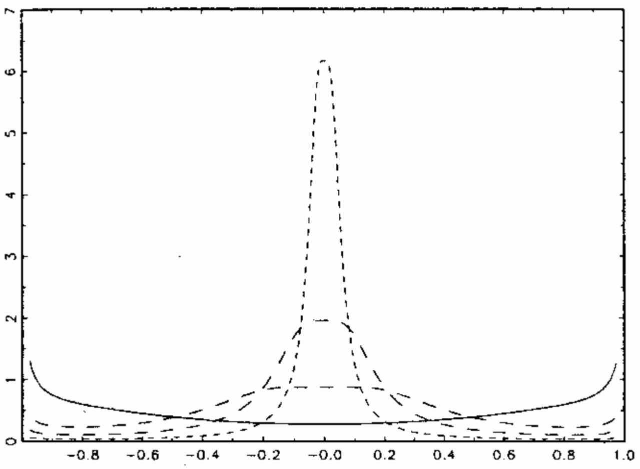

Figura 2: Densità di probabilità $h(u,k,\rho)$ per $\rho = 0{,}5$ e $k = 1, 10, 50, 500$.

Lemma 3 *La funzione di densità* (1) *rimane immutata se x ha distribuzione ellittica.*

Dim. lemma 3. Se x ha distribuzione ellittica, ha rappresentazione $x = \sigma z$ con $z \sim N(0,\Omega)$ e σ una qualsiasi variabile aleatoria positiva, vedi Fang et al. (1990). La distribuzione (1) è la distribuzione di y_1 condizionata a σ. Essendo (1) indipendente da σ, essa coincide anche con la distribuzione marginale di y_1. $\square$

4 Commento

I grafici in fig. 1 - 2 rappresentano la densità $h(u,k,\rho)$ al variare di k e ρ. Si ricordi che per $k = 1$ e $\rho = 0$, θ ha distribuzione uniforme sul cerchio di raggio unitario; la corrispondente distribuzione $h(u,1,0) = \pi^{-1}(1-u^2)^{-1/2}$ ha forma 'ad U'. Il grafico in fig. 1 mostra la densità $h(u,k,\rho)$ per k fisso ($k = 1$) al variare di ρ, $\rho = 0$, 0,8, 0,95, 0,995. Al crescere del valore del coefficiente di correlazione lo scatter bidimensionale si concentra attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante; le ascisse corrispondenti del vettore base del complemento ortogonale si addensano corrispondentemente attorno ai punti $\pm\sqrt{2}/2$, caratterizzanti l'intersezione della bisettrice del secondo e del quarto quadrante con il cerchio unitario.

Si consideri ora la densità $h(u,k,\rho)$ per ρ fisso al variare del rapporto delle varianze k. Il grafico in fig. 2 riporta il caso $\rho = 0{,}5$ con $k = 1$, 10, 50, 500. All'aumentare della differenza fra le varianze, misurata dal rapporto

k, lo scatter dei punti si 'allunga' sempre più attorno all'asse delle ascisse. Corrispondentemente, la prima coordinata della base del complemento ortogonale si addensa sempre più attorno a 0, valore dell'ascissa dell'intersezione dell'asse delle ordinate con il cerchio unitario.

5 Bibliografia

Ahn S. K., Reinsel G. C. (1988), Nested reduced-rank autoregressive model for multiple time series, *Journal of American Statistical Association*, 83, 849-856.

Ahn S. K., Reinsel G.C. (1990), Estimation for partially non-stationary multivariate autoregressive models , *Journal of American Statistical Association*, 85, 813-23.

Fang K. T., Kotz S., Ng K.W. (1990), *Symmetric multivariate and related distributions*, Chapman and Hall.

Johansen S. (1995) *Likelihood based inference in cointegrated vector autoregressie models*, Advanced texts in econometrics, Oxford University Press.

Paruolo P. (1997) Asymptotic inference on the moving average impact matrix in cointegrated I(1) VAR systems, *Econometric Theory* 13, 79-118.

Reinsel G.C. e Ahn S. K. (1992) Vector autoregressive models with unit roots and reduced rank stucture: estimation, likelihood ratio test, and forecasting, *Journal of Time Series Analysis*, 13: 353-75.

Tiao G. C., Tsay R.S. (1989), Model Specification for multiple time series, *Journal of the Royal Statistical Society*, B 51, 157-213.

Velu R. P., Reinsel G. C., Wichern D. W. (1986), Reduced-Rank Models for Multiple Time Series, *Biometrika*, 73, 105-118.

Riassunto

Questa nota illustra la distribuzione della base di norma unitaria del complemento ortogonale di un vettore aleatorio bidimensionale gaussiano. Si mostra inoltre che si ottiene la stessa distribuzione nel caso più generale di una distribuzione ellittica.