Università degli Studi di Bologna
Dipartimento di Matematica

Seminario di Analisi Matematica
Coordinatore Prof. B. Pini

Francescopaolo Montefalcone

Alcune formule integrali nei Gruppi di Carnot

26 Aprile 2005

1. – Introduzione

Negli ultimi anni vi è stato un notevole sforzo nell'estendere i metodi del Calcolo delle Variazioni e della Teoria Geometrica della Misura (TGM) a spazi metrici generali ed, in particolare, alle cosidette geometrie *sub-Riemanniane* o di *Carnot-Carathèodory*. Questo tipo di studio, in un certo senso, già preannunciato nel classico trattato di Federer (cfr. [18]), ha ricevuto recentemente nuovi stimoli, tra gli altri, dai lavori di Ambrosio e Kirchheim, [3, 4], Cheeger [10], De Giorgi, [17], Gromov, [26, 27], David e Semmes, [16].

Sotto questo aspetto, i *Gruppi di Carnot* divengono di particolare interesse e, in effetti, sono molti i filoni di ricerca in cui essi rivestono un ruolo importante: PDE's, TGM, Calcolo delle Variazioni, Teoria del Controllo, etc.

Una delle principali ragioni di ciò è che essi costituiscono una classe molto vasta da cui attingere esempi concreti di geometrie sub-Riemanniane. Referenze specifiche, per quanto concerne la geometria sub-Riemanniana, sono [27], [40] e [46]. Come referenze significative per quanto attiene alcuni dei filoni di ricerca sopra menzionati, citiamo inoltre i lavori [1], [7], [13], [16], [19, 20, 22], [23], [40], [48], [49]. È pure da sottolineare il fatto che, in virtù di un teorema dovuto a Mitchell [36], il *cono tangente* (nel senso di *Gromov-Hausdorff*) in un punto regolare di una varietà sub-Riemanniana è un opportuno gruppo di Carnot. Questo giustifica ulteriormente l'interesse verso lo studio dei Gruppi di Carnot, i quali svolgono, per le geometrie sub-Riemanniane, un ruolo analogo a quello degli spazi Euclidei in geometria Riemanniana.

Tra i risultati che maggiormente hanno alimentato le recenti ricerche di TGM in tale contesto, ricordiamo il *Teorema di Rettificabiltà* per insiemi di *H-perimetro finito*, ottenuto da Franchi, Serapioni e Serra Cassano in [20] nel caso del *Gruppo di Heisenberg*, poi generalizzato al caso dei gruppi di passo 2 in [22]. Citiamo infine, come ottime introduzioni a molte tematiche di TGM e Calcolo delle Variazioni, le Tesi di Dottorato [33] e [41].

Oggetto del presente seminario è la presentazione di alcuni aspetti di TGM nel contesto dei Gruppi di Carnot e, in particolare, di alcuni risultati di base concernenti la Geometria Integrale dei Gruppi di Carnot. Il lavoro a cui faremo riferimento per la maggior parte dei risultati che verranno esposti nel seguito è [37], ma presenteremo anche alcuni argomenti che sono stati oggetto della mia tesi di dottorato (cfr. [38, 39]).

Illustriamo brevemente il piano del seminario. Dopo aver richiamato le notazioni e le principali nozioni necessarie all'esposizione dei risultati, stabiliremo un teorema *tipo-Fubini* per ipersuperfici H-regulari. Passeremo poi in rassegna alcune applicazioni di esso: slicing di funzioni HBV, caratterizzazioni Integral-Geometriche per volume ed H-perimetro e, dopo aver introdotto la nozione di H-convessità geometrica, stabiliremo una formula di tipo Cauchy valida per insiemi *H-convessi.* Esporremo poi una generalizzazione ai Gruppi di Carnot di una ben nota formula di Santalò (cfr. [44]). Di questa mostreremo alcune applicazioni e, tra le altre, come dedurne stime dal basso per il primo autovalore λ_1 del problema agli autovalori di Dirichlet relativo al laplaciano sub-ellittico Δ_H. Nell'ultima parte introdurremo alcune nozioni di tipo geometrico-differenziale, finalizzate allo studio delle ipersuperfici immerse non-caratteristiche. In particolare, mostreremo come è possibile dedurre formule di integrazione per parti. Infine enunceremo la formula per la variazione prima della misura H-perimetro.

1.1. – *Preliminari.* – Molte delle seguenti nozioni sono ben note nella recente letteratura e per esse rimandiamo ai lavori [7], [20, 21, 22], [23], [26, 27], [33], [37], [41].

Tuttavia per alcuni argomenti riguardanti i gruppi di Lie, suggeriamo il classico libro di Helgason [29].

Un *gruppo di Carnot di passo k* $(\mathbb{G}, \bullet)$ è un gruppo di Lie (rispetto all'operazione $\bullet$)

n-dimensionale, connesso, semplicemente connesso, nilpotente e statificato la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}(\cong \mathbb{R}^n)$ soddisfa:

(1) $$\mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \quad [V_1, V_{i-1}] = V_i \quad (i = 2, ..., k), \quad V_{k+1} = \{0\}.$$

Denotiamo con 0 l'identità di $\mathbb{G}$ e quindi risulta $\mathfrak{g} \cong T_0\mathbb{G}$. Il sottofibrato V_1 del fibrato tangente $T\mathbb{G}$ è detto *orizzontale* e denotato con la lettera H. Posto $V := V_2 \oplus ... \oplus V_k$, diremo *verticale* il sottofibrato V di $T\mathbb{G}$. Assumeremo che $dim\, V_i = m_i$ $(i = 1, ..., k)$ e che H sia generato da una base di campi vettoriali invarianti a sinistra $\underline{X_H} := \{X_1, ..., X_{m_1}\}$. Questa può completarsi ad una base globale (frame) di sezioni invarianti a sinistra

$$\underline{X} := \{X_i : i = 1, ..., n\}$$

che sia *adattata alla stratificazione.* Cioè, posto $h_l := m_1 + ... + m_l$ e $m_0 = h_0 := 0$, si ha:

$$V_l = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_i : h_{l-1} < i \leq h_l\}.$$

Se $\{\mathrm{e}_i : i = 1, ..., n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$ adattata alla stratificazione, le sezioni X_i del frame $\underline{X}$ si ottengono mediante il differenziale della traslazione a sinistra $L_p\,(p \in \mathbb{G})$ di e_i, cioè $X_{ip} := L_{p*}\mathrm{e}_i\,(i = 1, ..., n)$.

Le fibre orizzontali possono munirsi di una metrica $g_H = \langle\cdot,\cdot\rangle_H$ ed in tal caso, $\mathbb{G}$ si dice avere una *struttura sub-Riemanniana.* È importante osservare che si può sempre definire una metrica Riemanniana $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, invariante a sinistra, per cui il frame $\underline{X}$ risulti *ortonormale* in ogni punto e tale che $g_{|H} = g_H$. Infatti, a tal fine, è sufficiente definire un prodotto Euclideo su $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{G}$ il quale, mediante traslazione a sinistra, si estende a tutto il fibrato tangente. È da notare che in tal modo, la somma diretta in (1) diventa una *somma diretta ortogonale.*

L'introduzione della metrica g consente di inquadrare in un ambito Riemanniano lo studio di alcune questioni riguardanti i gruppi di Carnot.

Mediante la metrica g, si può definire il co-frame $\underline{\omega} := \{\omega_i : i = 1, ..., n\}$ duale di $\underline{X}$. In particolare, le 1-forme invarianti a sinistra[1] ω_i sono determinate dalla condizione

$$\omega_i(X_j) = \langle X_i, X_j\rangle = \delta_i^j \quad \text{(Kroneker)} \quad (i, j = 1, ..., n).$$

Ricordiamo anche che le *costanti di struttura*[2] di $\mathfrak{g}$ relative al frame $\underline{X}$ sono definite come

$$C_{ij}^r := \langle [X_i, X_j], X_r\rangle \quad (i, j, r = 1, ..., n).$$

Se $p \in \mathbb{G}$ ed $X \in \mathfrak{g}$ poniamo $\gamma_p^X(t) := exp\,[tX](p)\,(t \in \mathbb{R})$, cioè γ_p^X è la curva integrale del campo X di punto iniziale p e risulta essere un *sottogruppo ad un parametro* di $\mathbb{G}$. La *mappa esponenziale* è allora definita come $exp : \mathfrak{g} \longmapsto \mathbb{G}$, $exp\,(X) := exp\,[X](1)$. Risulta che exp è un diffeomorfismo analitico tra $\mathfrak{g}$ e $\mathbb{G}$ la cui inversa sarà denotata come log. Inoltre si ha

$$\gamma_p^X(t) = p \bullet exp\,(tX) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

D'ora in avanti fisseremo su $\mathbb{G}$ le cosidette *coordinate esponenziali di prima specie*, cioè le coordinate associate alla mappa log.

[1] Cioè, $L_p^*\omega_i = \omega_i$ per ogni $p \in \mathbb{G}$.

[2] Esse soddisfano le usuali proprietà: *(1)* $C_{ij}^r + C_{ji}^r = 0$, *(2)* $\sum_{j=1}^n C_{jl}^i C_{rm}^j + C_{jm}^i C_{lr}^j + C_{jr}^i C_{ml}^j = 0$. Inoltre vale: *(3)* $X_i \in V_l$, $X_j \in V_m \Longrightarrow [X_i, X_j] \in V_{l+m}$. In particolare, si ha: $C_{ij}^i = C_{ij}^j = 0$ $(i, j = 1, ..., n)$.

La distanza di *Carnot-Carathéodory* d_H relativa a g_H è definita, per $p, q \in \mathbb{G}$, come

$$d_H(p,q) := \inf \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_H \, dt,$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le curve orizzontali, regolari a tratti, congiungenti p a q. Essa rende $\mathbb{G}$ uno spazio metrico completo in cui ogni coppia di punti si connette con (almeno una) d_H-geodetica.

Ogni gruppo di Carnot è naturalmente munito di un gruppo ad un parametro di automorfismi $\delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ $(t > 0)$ che lo rendono un *gruppo omogeneo.* In coordinate esponenziali, se $p = exp\,(\sum_{j,i_j} p_{i_j} \mathrm{e}_{i_j})$, si ha che $\delta_t p = exp\,(\sum_{j,i_j} t^j\, p_{i_j} \mathrm{e}_{i_j})$ per ogni $p \in \mathbb{G}$.[3]

La *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$ è l'intero $Q := \sum_{i=1}^{k} i\, m_i$, coincidente con la *dimensione di Hausdorff* di $(\mathbb{G}, d_H)$ come spazio metrico. Con $\mathcal{H}^m_{\mathbf{cc}}$ si indicherà la misura di Hausdorff m-dimensionale relativa a d_H, mentre con $\mathcal{H}^m_{\mathbf{e}}$ si indicherà l'usuale misura di Hausdorff m-dimensionale Euclidea in $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{G}$[4].

Su $\mathbb{G}$ la *forma volume Riemanniana* (invariante a sinistra) è definita come

$$\sigma^n := \bigwedge_{i=1}^{n} \omega_i \in \Lambda^n(\mathbb{G}).$$

Osservazione **1** *Integrando σ^n si ottiene la misura di Haar di $\mathbb{G}$. Poiché il determinante Jacobiano di L_{p_*} vale 1, questa eguaglia la misura indotta su $\mathbb{G}$ dal push-forward della misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ su $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$. Ricordiamo che essa coincide anche, a meno di una costante di normalizzazione, con la misura di Hausorff Q-dimensionale $\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}$ di $\mathbb{G}$*[5].

Definizione **1** *Se $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ è aperto ed $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, allora $\nabla^H f$ denota l'unica sezione orizzontale data da $\nabla^H f := \sum_{i=1}^{m_1} (X_i f)\, X_i$, mentre se $\psi = (\psi_1, ..., \psi_{m_1})$ è una sezione orizzontale $\mathbf{C}^\infty$, $div_H \psi$ indica la funzione a valori reali $div_H \psi := \sum_{i=1}^{m_1} X_i \psi_i$. Infine, $\mathbf{C}^1_H(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, continue in Ω e tali che $\nabla^H f$ (nel senso delle distribuzioni) sia una sezione orizzontale continua in Ω.*

Definizione **2** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto ed $f \in L^1(\Omega)$. Allora f ha H-**variazione limitata** in Ω se risulta*

$$|\nabla^H f|(\Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega f\, div_H Y \, d\,\mathcal{L}^n : Y \in \mathbf{C}^1_0(\Omega, H),\ |Y|_H \leq 1 \right\} < \infty.$$

*$HBV(\Omega)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni di H-variazione limitata in Ω. Segue dal Teorema di Riesz che $|\nabla^H f|$ è una **misura di Radon** in Ω e che esiste una sezione orizzontale $|\nabla^H f|$-misurabile ν_f tale che $|\nu_f| = 1$ per $|\nabla^H f|$-q.o. $p \in \Omega$ e che*

$$\int_\Omega f\, div_H Y \, d\,\mathcal{L}^n = \int_\Omega \langle Y, \nu_f \rangle_H \, d\,|\nabla^H f| \quad \forall\ Y \in \mathbf{C}^1_0(\Omega, H).$$

*Si dice che un insieme misurabile $E \subset \mathbb{G}$ ha H-perimetro finito in Ω se $\chi_E \in HBV(\Omega)$. L'H-**perimetro** di E in Ω è la misura di Radon $|\partial E|_H(\Omega) := |\nabla^H \chi_E|(\Omega)$. Si chiama H-**normale generalizzata interna lungo** ∂E la $\mathbb{R}^{m_1}$-misura di Radon $\nu_E := -\nu_{\chi_E}$.*

[3]Qui, $j \in \{1, ..., k\}$ mentre $i_j \in \{h_{j-1} + 1, ..., h_j\}$.

[4]Qui, come spesso in seguito, $\mathbb{G}$ si identifica ad $\mathbb{R}^n$ tramite la mappa esponenziale.

[5]Ciò discende dal fatto che, essendo entrambe misure di Haar per $\mathbb{G}$, sono uguali, a meno di una costante moltiplicativa (cfr., [34], [40]). Tale costante è qui assunta uguale ad 1.

Osservazione **2 (Ipersuperfici)** [6] *In questo seminario, come nella maggior parte della letteratura (cfr. [7], [20, 21, 22], [23], [33]), trattiamo le sottovarietà di codimensione 1 dei gruppi di Carnot, per i molti legami che tali oggetti hanno con l'Analisi e la TGM. Si osservi che, ogni ipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^n (\cong \mathfrak{g})$, si identifica, tramite la mappa esponenziale, ad una ipersuperficie di $\mathbb{G}$, ovvero S si identifica con $\exp S$. Chiameremo* **ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare** *$(r = 1, ..., \infty)$ ogni ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare di $\mathbb{R}^n$, vista come ipersuperficie di $\mathbb{G}$. Nel seguito tuttavia considereremo anche un'altra classe di "ipersuperfici". Più precisamente, chiameremo* **ipersuperficie H-regolare**, *ogni sottinsieme di $\mathbb{G}$ che sia localmente il luogo degli zeri di una funzione $\mathbf{C}^1_H$ avente gradiente orizzontale non nullo (cfr. Definizione 5). Questi oggetti sono, in un certo senso, più naturali da un punto di vista sub-Riemanniano, in quanto la regolarità richiesta è puramente "orizzontale".*

La seguente proposizione è ben nota (cfr. [7]) e fornisce una rappresentazione esplicita della misura H-perimetro nel caso delle ipersuperfici regolari.

Proposizione **3** *Sia $E \subset \mathbb{G}$ un insieme con frontiera $\mathbf{C}^2$ e di H-perimetro finito nell'aperto Ω. Allora*

$$|\partial E|_H(\Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} \sqrt{\langle X_1, n_{\mathbf{e}} \rangle^2_{\mathbb{R}^n} + ... + \langle X_{m_1}, n_{\mathbf{e}} \rangle^2_{\mathbb{R}^n}} \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}, \tag{2}$$

dove $n_{\mathbf{e}}$ denota la normale unitaria Euclidea a ∂E[7]*. La H-normale generalizzata lungo ∂E è data da*

$$\nu_E = \frac{(\langle X_1, n_{\mathbf{e}} \rangle_{\mathbb{R}^n}, ..., \langle X_{m_1}, n_{\mathbf{e}} \rangle_{\mathbb{R}^n})}{\sqrt{\langle X_1, n_{\mathbf{e}} \rangle^2_{\mathbb{R}^n} + ... + \langle X_{m_1}, n_{\mathbf{e}} \rangle^2_{\mathbb{R}^n}}}.$$

Osservazione **4** *Precisiamo che nella precedente Proposizione 3, la normale Euclidea $n_{\mathbf{e}}$ lungo ∂E ed i vettori $X_i \, (i = 1, ..., m_1)$ del frame orizzontale $\underline{X_H}$, sono intesi come vettori di $\mathbb{R}^n$, munito del prodotto interno canonico $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$. Quando tuttavia parleremo di* **normale unitaria** *ν lungo ∂E, intenderemo sempre la sua rappresentazione rispetto al frame globale $\underline{X}$ per $\mathbb{G}$, cioè $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i X_i$, ove $|\nu| = 1$. Più precisamente, ν è data dall'espressione*

$$\nu(p) = \frac{(L_p \circ \exp)_* n_{\mathbf{e}}(\log p)}{|(L_p \circ \exp)_* n_{\mathbf{e}}(\log p)|} \quad (p \in \partial E \subset \mathbb{G}).$$

Nello studio delle ipersuperfici dei gruppi di Carnot è necessaria la seguente nozione.

Definizione **3** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ una ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare $(r = 1, ..., \infty)$. Si dice che S è* **caratteristica** *in $p \in S$ se $\dim H_p = \dim(H_p \cap T_pS)$ o, equivalentemente, se $H_p \subset T_pS$. L'***insieme caratteristico** *di S è denotato come C_S, cioè*

$$C_S := \{p \in S : \dim H_p = \dim(H_p \cap T_pS)\}.$$

[6]Una *sottovarietà immersa* M di una varietà n-dimensionale N è un sottinsieme M di N dotato di una di una topologia di m-varietà (non necessariamente la topologia di sottospazio) e con una struttura differenziabile tale che l'inclusione $\imath_M : M \longrightarrow N$ è un'immersione regolare, ossia il push-forward $\imath_{M*}$ è iniettivo in ogni punto. Un'*ipersuperficie* $S \subset N$ di una varietà n-dimensionale N, è una sottovarietà immersa di codimensione 1 di N. La regolarità $\mathbf{C}^r \, (r = 1, ..., \infty)$ di una sottovarietà immersa, se non specificata, è intesa essere $\mathbf{C}^\infty$.

[7]Se $S \subset \mathbb{R}^n$ ammette una $\mathbf{C}^2$-parametrizzazione, $\Phi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, si ha

$$n_{\mathbf{e}}(\Phi(\xi)) := \pm \frac{\Phi_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge \Phi_{\xi_{n-1}}}{|\Phi_{\xi_1} \wedge \ldots \wedge \Phi_{\xi_{n-1}}|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Da un punto di vista geometrico, un'ipersuperficie $S \subset \mathbb{G}$, avente normale unitaria ν, è *non-caratteristica* se, e solo se, il sottofibrato orizzontale è *trasversale* ad S (in simboli, $H \pitchfork TS$). Si ha quindi:

$$H_p \pitchfork T_pS \Longleftrightarrow proj_H \nu_p \neq 0 \Longleftrightarrow \exists\, X \in H : \langle X_p, \nu_p \rangle \neq 0 \qquad (p \in S)$$

Osservazione 5 **(Misura di Hausdorff di C_S)** *Se $S \subset \mathbb{G}$ è un'ipersuperficie $\mathbf{C}^1$-regolare, si può dimostrare (cfr. [33]) che la misura di Hausorff $Q-1$-dimensionale dell'insieme caratteristico C_S, relativa alla metrica d_H, è nulla. Cioè, risulta*

$$\mathcal{H}^{Q-1}_{\mathbf{cc}}(C_S) = 0.$$

Osservazione 6 **(Misura Riemanniana su Ipersuperfici)** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare e ν denoti la normale unitaria ad S. Allora la* **misura Riemanniana** $n-1$**-dimensionale** *relativa ad S si definisce come*

$$\sigma^{n-1} \llcorner S := (\nu \rfloor \sigma^n)|_S, \tag{3}$$

dove il simbolo $\rfloor$ denota l'operazione di "contrazione" di una forma differenziale[8].

Nel caso di ipersuperfici non-caratteristiche, la misura H-perimetro si ottiene dall' integrazione di una "opportuna" forma differenziale (cfr. [38, 39]).

Definizione 4 **(Forma H-perimetro σ_H)** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare non-caratteristica e si denoti con ν la sua normale unitaria. Chiameremo H*-**normale** *ad S la proiezione su H, normalizzata, del vettore ν, cioè*

$$\nu_H := \frac{proj_H \nu}{|proj_H \nu|_H}.$$

Definiamo quindi la **forma H-perimetro** σ_H *su S come la $n-1$-forma differenziale su S data dalla contrazione della forma volume di $\mathbb{G}$ con la normale orizzontale ν_H. Cioè*

$$\sigma_H \llcorner S := (\nu_H \rfloor \sigma^n)|_S. \tag{4}$$

Osservazione 7 *Dalla precedente Definizione 4 si ottiene che*

$$\sigma_H \llcorner S = \sum_{i=1}^{m_1} \nu_{H\,i}\, (X_i \rfloor \sigma^n)|_S = \sum_{i=1}^{m_1} (-1)^{m_1+1} \nu_{H\,i}\, \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega}_i \wedge ... \wedge \omega_n|_S,$$

dove $\nu_{H\,i} := \langle \nu_H, X_i \rangle_H$ $(i = 1, ..., m_1)$. *Osserviamo esplicitamente che*

$$\sigma_H \llcorner S = |proj_H \nu|_H \cdot \sigma^{n-1} \llcorner S.$$

Il confronto tra differenti nozioni di misura su ipersuperfici è un problema interessante e recentemente molto studiato. Per un'introduzione a queste problematiche rimandiamo a [33]. Ad esempio, nel caso di alcuni particolari gruppi di Carnot, la misura H-perimetro coincide, a meno di una costante, con la misura di Hausdorff $Q-1$-dimensionale associata a d_H. In generale, mediante l'uso di un notevole teorema di rappresentazione provato in [1], si può dimostrare il risultato seguente.

[8] Cioè, la mappa lineare $\rfloor : \Lambda^k(\mathbb{G}) \to \Lambda^{k-1}(\mathbb{G})$ definita, per $X \in T\mathbb{G}$ e $\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{G})$, come $(X \rfloor \omega^k)(Y_1, ..., Y_{k-1}) = \omega^k(X, Y_1, ..., Y_{k-1})$; cfr. [29].

Teorema **8** *Se $S \subset \mathbb{G}$ è un'ipersuperficie $\mathbf{C}^1$-regolare che è localmente frontiera di un aperto E avente H-perimetro localmente finito, allora*

$$|\partial E|_H \llcorner \mathcal{B} = k_{Q-1}(\nu_E)\, \mathcal{S}^{Q-1}_{\mathbf{cc}} \llcorner (S \cap \mathcal{B}) \quad \forall\, \mathcal{B} \in \mathcal{B}or(\mathbb{G}) \text{ (Boreliani)} \tag{5}$$

dove $\mathcal{S}^{Q-1}_{\mathbf{cc}}$ è la misura[9] *di Hausdorff sferica $Q-1$-dimensionale relativa a d_H e k_{Q-1} è una funzione dipendente da ν_E, detta* **fattore metrico***; cfr. [33].*

Se $\overset{\circ}{H} := H \setminus \{0_H\}$, dove 0_H è la sezione nulla di H, UH denoterà il quoziente di $\overset{\circ}{H}$ mediante dilatazioni positive. UH è detto *sottofibrato orizzontale unitario* di $\mathbb{G}$. La sua fibra è identificata alla sfera unitaria $\mathbb{S}^{m_1-1}(\subset \mathbb{R}^{m_1})$ munita dell'usuale misura sferica $d\,\sigma_s^{m_1-1}$. In seguito, se $\pi_W : W \to \mathbb{G}$ è un sottofibrato vettoriale di $T\mathbb{G}$ ed $A \subset \mathbb{G}$, denoteremo con WA la restrizione della struttura di W ad A.

Notazione **9 (Iperpiani Verticali)** *Fissati $p_0 \in \mathbb{G}$ ed $X \in UH$, poniamo*

$$\mathcal{I}_{p_0}(X) := L_{p_0}(\exp(X_0^{\perp})), \tag{6}$$

dove $X_0^{\perp}$ è il complemento g-ortogonale in $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{G}$ di X_0. Se $X_0 = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \mathrm{e}_i$, si ha

$$\mathcal{I}_{p_0}(X) = \Big\{ q \in \mathbb{G} : \sum_{i=1}^{m_1} (q_i - p_{0i})\, a_j = 0 \Big\}.$$

$\mathcal{I}_{p_0}(X)$ è detto **iperpiano verticale per p_0 e g-ortogonale ad X**. *$\mathcal{V}_{p_0}$ indica la classe di tutti gli iperpiani verticali per p_0, cioè $\mathcal{V}_{p_0} := \{\mathcal{I}_{p_0}(X) : X \in UH\}$. È opportuno ricordare che $\exp(X_0^{\perp})$ risulta essere un* **sottogruppo massimale di $\mathbb{G}$**. *È anche un ideale, come è facile verificare.*

Osservazione **10 (H-perimetro ed Iperpiani Verticali)** *Risulta*

$$|\partial \mathcal{I}_{p_0}(X)|_H(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(\mathcal{I}_{p_0}(X) \cap \Omega) = \sigma^{n-1} \llcorner (\mathcal{I}_{p_0}(X) \cap \Omega)$$

per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto. Ciò segue dal fatto che, per definizione di $\mathcal{I}_{p_0}(X)$, la normale unitaria (Riemanniana) ad $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ coincide col vettore orizzontale X.

2. – Geometria Integrale nei gruppi di Carnot

Tutti i risultati originali presentati in questa sezione possono trovarsi in [37].

2.1. – *Un teorema di tipo Fubini.* – Stabiliremo nel seguito un teorema di integrazione che si può interpretare come una *Formula dell'Area* per sottovarietà di codimensione 1 *H-regolari* (cfr. Definizione 5) dei gruppi di Carnot. Prima di enunciare tale risultato, premettiamo la seguente definizione:

[9] Ricordiamo che $\mathcal{S}^{Q-1}_{\mathbf{cc}}(S) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{S}^{Q-1}_{\mathbf{cc},\delta}(S)$ dove, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\mathcal{S}^{Q-1}_{\mathbf{cc},\delta}(S) = \inf \Big\{ \sum_i (\mathrm{diam}_H(B_i))^{Q-1} : \; S \subset \bigcup_i B_i;\; \mathrm{diam}_H(B_i) < \delta \Big\}$$

e l'estremo inferiore è preso al variare delle d_H-palle B_i.

Definizione **5** (**[21]**) *Si dice che $S \subset \mathbb{G}$ è una* **ipersuperficie** ***H*-regolare** *se per ogni $p \in S$ esistono un intorno aperto Ω di p ed $f \in \mathbf{C}^1_H(\Omega)$ tali che $S \cap \Omega = \{q \in \Omega : f(q) = 0\}$ e $\nabla^H f(q) \neq 0$ per ogni $q \in \Omega$.*

Tale definizione si è rivelata cruciale nello stabilire un notevole risultato di rettificabilità per insiemi di H-perimetro finito, in gruppi di Carnot di passo 2; cfr. [20, 22]. Inoltre, in [21] si dimostra, usando questa definizione, il seguente "Teorema della Funzione Implicita" per gruppi di Carnot:

Teorema **11** (**[21]**) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto contenente $0\,(\in \mathbb{G})$ e sia $f \in \mathbf{C}^1_H(\Omega)$ tale che $f(0) = 0$ e $X_1 f(0) > 0$. Si ponga $E := \{p \in \Omega : f(x) < 0\}$, $S := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, e se $h,\, \delta > 0$, siano $J_h := [-h, h]$ e $I_\delta := \{\xi = (\xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi_j| \leq \delta,\, j = 2, \ldots, n\}$. Se $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t \in J_h$, denotiamo con $\gamma^{X_1}_{(0,\xi)}(t)$ la curva integrale di $X_1 \in \mathit{UH}$ di punto iniziale $\exp(0, \xi) \in \{\exp(0, \eta) \in \mathbb{G} : \eta \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. Allora esistono $\delta,\, h > 0$ tali che la mappa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (t, \xi) \longmapsto \gamma^{X_1}_{(0,\xi)}(t)$ è un diffeomorfismo dell'intorno $J_h \times I_\delta$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$ e, se $U \Subset \Omega$ denota l'immagine di $\mathrm{Int}\{J_h \times I_\delta\}$ tramite questa mappa, si ha che E ha H-perimetro finito in U e $\partial E \cap \Omega = S \cap U$. Se ν_E è la H-normale generalizzata interna lungo ∂E risulta*

$$\nu_E(p) = -\frac{\nabla^H f(p)}{|\nabla^H f(p)|_H} \quad \forall\, p \in S \cap \Omega, \quad |\nu_E|_H = 1 \;\; per \;\; |\partial E|_H\text{-}q.o. \;\; p \in U.$$

Inoltre, esiste un'unica funzione continua $\phi(\xi) : I_\delta \to J_h$ tale che, posto $\Phi(\xi) = \gamma^{X_1}_{(0,\xi)}(\phi(\xi))$ $(\xi \in I_\delta)$, si ha $S \cap U = \{p \in \Omega : p = \Phi(\xi),\, \xi \in I_\delta\}$ e l'H-perimetro è dato dalla formula:

$$|\partial E|_H(U) = \int_{I_\delta} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{m_1} |X_j f(\Phi(\xi))|^2}}{X_1 f(\Phi(\xi))}\, d\xi.$$

Dopo queste premesse generali, possiamo enunciare uno dei principali risultati ottenuti.

Teorema **12** (**[37]**) *Sia S una ipersuperficie H-regolare nel senso della Definizione 5. Supponiamo che $S = \partial E$, dove E ha localmente H-perimetro finito e frontiera $\mathbf{C}^1_H$. In virtù del precedente Teorema 11, tale ipotesi non lede la generalità. Inoltre, sia $X \in \mathit{UH}$ una sezione trasversale ad S e sia γ^X_q la curva integrale di X (X-linea) di punto iniziale $q \in S$. Assumiamo che $\gamma^X_q(\mathbb{R}) \cap S = q$ per ogni $q \in S$. Infine, sia $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ un insieme misurabile che sia "raggiungibile"[10] mediante X-linee che intercettano S. Allora, $\mathcal{D}_q := \gamma^X_q(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è $\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}$-misurabile per $|\partial E|_H$-q.o. $q \in S$. La mappa*

$$S \ni q \longmapsto \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}_q)$$

è $|\partial E|_H$-misurabile su S e, se $pr^X_S : \mathbb{G} \to S$ denota la proiezione[11] su S lungo γ^X_q, si ha

$$\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}) = \int_{pr^X_S(\mathcal{D})} \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}_q)\, |\langle X_q, \nu_{E\,q}\rangle_H|\, d\,|\partial E|_H(q).$$

[10] $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{G}$ è *raggiungibile da S mediante X-linee,* se

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^X_S := \{p \in \mathbb{G} : \exists\, q \in S,\ \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } p = exp[tX](q)\}.$$

[11] Più precisamente, se $X \in \mathit{UH}$ è fissato, $pr^X_S : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^X_S \longmapsto S$ è definita come segue: *se $p \in \mathcal{D}$ e $q \in S$, allora $pr^X_S(p) := q$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $p = \exp[tX](q)$.*

Inoltre, se $\psi \in L^1(\mathcal{D})$, *sia* $\psi_{|\mathcal{D}_q}$ *la restrizione di* ψ *a* $\mathcal{D}_q$, *e definiamo la mappa*

$$\psi_q : (\gamma_q^X)^{-1}(\mathcal{D}_q) \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \qquad \psi_q(t) = (\psi \circ \gamma_q^X)(t).$$

Allora ψ_q *è* $\mathcal{L}^1$*-misurabile in* $\mathbb{R}$ *per* $|\partial E|_H$*-q.o.* $q \in S$ *o, equivalentemente, la restrizione* $\psi_{|\mathcal{D}_q}$ *è* $\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}$*-misurabile per* $|\partial E|_H$*-q.o.* $q \in S$. *Risulta che la mappa*

$$S \ni q \longmapsto \int_{\mathcal{D}_q} \psi \, d\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}} = \int_{\gamma_q^{-1}(\mathcal{D}_q)} \psi_q(t)\, dt$$

è $|\partial E|_H$*-misurabile su* S *e vale la seguente formula:*

$$\int_{\mathcal{D}} \psi \, d\,\mathcal{L}^n = \int_{pr_S^X(\mathcal{D})} \Big(\int_{(\gamma_q^X)^{-1}(\mathcal{D}_q)} \psi_q(t)\, dt \Big) \, |\langle X_q, \nu_{E\,q}\rangle_H| \, d\,|\partial E|_H(q).$$

Osservazione **13** *Vorremmo sottolineare che in [37], la prova di questo risultato, viene effettuata in due passi. Nel primo si prova che la tesi è valida per ipersuperfici* $\mathbf{C}^1$ *che siano trasversali alla direzione orizzontale* X. *Nel secondo passo, se ne estende la validità alla classe delle ipersuperfici* H*-regolari, mediante una procedura di approssimazione, ispirata ad un metodo utilizzato in [19].*

2.2. – *Slicing 1-dimensionali di funzioni HBV.* – Esponiamo ora una caratterizzazione delle funzioni *HBV* in termini di restrizioni a fibrazioni 1-dimensionali con X-linee. Questo tipo di risultato, generalizza una classica caratterizzazione Euclidea per funzioni *BV*, per la quale rimandiamo a [2]. A tal fine, dobbiamo premettere alcune definizioni.

Definizione **6** *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ *aperto ed* $X \in H$. *Allora* $f \in L^1(\Omega)$ *ha* X**-variazione limitata** *in* Ω *se*

$$|Xf|(\Omega) := \sup \Big\{ \int_\Omega f X\varphi \, d\,\mathcal{L}^n : \varphi \in \mathbf{C}^1_0(\Omega), \ |\varphi| \le 1 \Big\} < \infty.$$

$|Xf|(\Omega)$ *è detta* X*-variazione di* f *in* Ω. *Inoltre,* $BV_X(\Omega)$ *denota lo spazio vettoriale delle funzioni di* X*-variatione limitata in* Ω.

Definizione **7** *Sia* $X \in H$ *fissato e si denoti con* γ *la* X*-linea di punto iniziale* $p \in \mathbb{G}$, *cioè* $\gamma(t) := \exp[tX](p)$ $(t \in \mathbb{R})$. *Siano inoltre* $\mathcal{U} \subset \gamma$ *un aperto ed* $f \in L^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}} \llcorner \gamma)$[12]. *Poniamo allora*

$$var^1_X[f](\mathcal{U}) := |D(f \circ \gamma)|(\gamma^{-1}(\mathcal{U})),$$

dove

$$|D(f \circ \gamma)|(\gamma^{-1}(\mathcal{U})) = \sup \Big\{ \int_\gamma f \, d\psi, \ \psi \in \mathbf{C}^1_0(\mathcal{U}), |\psi| \le 1 \Big\}.$$

In altre parole, $var^1_X[f](\mathcal{U})$ *denota l'usuale "variazione 1-dimensionale" in* $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}$ *della funzione* $f \circ \gamma$ *(cfr. [2], [47]).*

L'annunciata caratterizzazione dello spazio *HBV* seguirà come corollario del seguente risultato di interesse autonomo.

[12] È lo spazio delle funzioni $\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}$-sommabili definite nell'aperto $\mathcal{U} \subset \gamma$.

Teorema **14 ([37])** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ una ipersuperficie H-regolare ed assumiamo che $S = \partial E$, dove $E \subset \mathbb{G}$ è un insieme che ha localmente H-perimetro finito e frontiera $\mathbf{C}^1_H$. Inoltre, sia $X \in \mathit{UH}$ una sezione trasversale ad S e sia γ_q la curva integrale (X-linea) di X di punto iniziale $q \in S$. Assumiamo che $\gamma_q(\mathbb{R}) \cap S = q$ per ogni $q \in S$. Infine, sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un insieme misurabile che sia raggiungibile mediante X-linee che intercettano S. Allora*

$$|Xf|(\Omega) = \int_{pr^X_S(\Omega)} var^1_X[f_{\gamma_q}](\Omega_q)\,|\langle X_q, \nu_{E\,q}\rangle_H|\,d\,|\partial E|_H(q)$$

dove $f_{\gamma_q} := f \circ \gamma_q$ e $\Omega_q := \gamma_q \cap \Omega$.

Corollario **15 ([37])** *Siano $\underline{X_H} = \{X_1, ..., X_{m_1}\}$ un frame per H e $j \in \{1, ...m_1\}$. Sia $S_j \subset \mathbb{G}$ una ipersuperficie H-regolare ed assumiamo che $S_j = \partial E_j$, dove $E_j \subset \mathbb{G}$ è un insieme di H-perimetro localmente finito e frontiera $\mathbf{C}^1_H$. Supponiamo che X_j è trasverso ad S_j e che ogni X_j-linea γ^j_q di punto iniziale $q \in S_j$ sia tale che $\gamma^j_q(\mathbb{R}) \cap S_j = q$. Infine, sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un insieme misurabile che sia raggiungibile mediante X_j-linee intercettanti S_j. Allora $f \in HBV(\Omega)$ se e solo se $f_{\gamma^j_q} \in BV^1_{X_j}(\Omega^{X_j}_q)$ per $|\partial E_j|_{X_j}$-q.o. $q \in pr^{X_j}_{S_j}(\Omega)$ e*

$$\int_{pr^{X_j}_{S_j}(\Omega)} var^1_{X_j}[f_{\gamma^j_q}](\Omega^{X_j}_q)\,d\,|\partial E_j|_{X_j}(q) < \infty \qquad \forall\ j = 1, ..., m_1.$$

Nel risultato sopra enunciato abbiamo usato la notazione sintetica

$$d\,|\partial E_j|_{X_j} := |\langle X, \nu_{E_j}\rangle_H|\,d\,|\partial E_j|_H.$$

È da notare che la precedente caratterizzazione dello spazio HBV si può riformulare in termini abbastanza semplici, utilizzando, al posto di ipersuperfici H-regolari, la classe $\mathcal{V}_{p_0}$ degli iperpiani verticali passanti per un punto assegnato $p_0 \in \mathbb{G}$.

Corollario **16 ([37])** *Siano $\underline{X_H} = \{X_1, ..., X_{m_1}\}$ un frame per H e $j \in \{1, ...m_1\}$. Sia $\mathcal{I}_0(X_j)$ l'iperpiano verticale per $0 \in \mathbb{G}$ e g-ortogonale ad X_j. Sia γ^j_q la X_j-linea di punto iniziale $q \in \mathcal{I}_0(X_j)$. Infine, sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un insieme misurabile. Allora $f \in HBV(\Omega)$ se e solo se $f_{\gamma^j_q} \in BV^1_{X_j}(\Omega^{X_j}_q)$ per $\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}$-q.o. $q \in pr^{X_j}_{\mathcal{I}_0(X_j)}(\Omega)\,(\subseteq \mathcal{I}_0(X_j))$ e*

$$\int_{pr^{X_j}_{\mathcal{I}_0(X_j)}(\Omega)} var^1_{X_j}[f_{\gamma^j_q}](\Omega^{X_j}_q)\,d\,\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(q) < \infty \qquad \forall\ j = 1, ..., m_1.$$

2.3. – *H-perimetro e H-convessità geometrica.* – In questa sezione stabiliamo alcune formule Integral-Geometriche per volume ed H-perimetro.

Osserviamo preliminarmente che, a differenza dalle usuali formule di questo tipo per spazi Euclidei, non considereremo la famiglia dei sottospazi vettoriali $n-1$-dimensionali di $T\mathbb{G}$ passanti per un punto fissato $p_0 \in \mathbb{G}$, ma ci si restringerà a quella dei sottogruppi massimali di $\mathbb{G}$ per p_0[13], precedentemente definita come la classe degli iperpiani verticali $\mathcal{V}_{p_0}$ per p_0. Tale assunzione è suggerita proprio dal contenuto del Teorema 14 unitamente alla semplice osservazione che *ogni sottinsieme di $\mathbb{G}$ è raggiungibile mediante X-linee di punto iniziale $q \in \mathcal{I}_{p_0}(X)$ (p_0 è arbitrario).*

D'ora in avanti gli elementi di UH saranno pensati come coppie ordinate del tipo $(p; X) \in \mathbb{G} \times \mathbb{S}^{m-1} \cong \mathit{UH}$. Inoltre $d\,\mu$ denoterà misura volume di UH, definita come

$$d\,\mu(p; X) := d\,\mathcal{L}^n(p) \otimes d\,\sigma^{m_1-1}_s(X).$$

[13]Più precisamente, i traslati in p_0 dei sottogruppi massimali di $\mathbb{G}$

Più esplicitamente, se $f \in L^1(\mathit{UH})$, si ha

$$\int_{\mathit{UH}} f(p;X)\, d\,\mu(p;X) := \int_{\mathbb{G}} d\,\mathcal{L}^n(p) \int_{\mathit{UH}_p} f(p;X)\, d\,\sigma_s^{m_1-1}(X).$$

Un'immediata conseguenza del Teorema 12 è la seguente formula:

$$\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{O_{m_1-1}} \int_{\mathit{UH}_0} d\,\sigma_s^{m_1-1}(X) \int_{pr^X_{\mathcal{I}_{p_0}(X)}(\mathcal{D})} \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}^X_q)\, d\,\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(q), \tag{7}$$

dove O_{m_1-1} denota la misura m_1-1-dimensionale di superficie di $\mathbb{S}^{m_1-1} \subset \mathbb{R}^{m_1}$.

Diamo ora una caratterizzazione *Integral-Geometrica* della misura H-perimetro.

Teorema **17 ([37])** *Sia $\mathcal{D}$ un insieme di H-perimetro finito ed $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto. Siano $p_0 \in \mathbb{G}$ fissato e $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ l'iperpiano verticale per p_0 e g-ortogonale ad $X \in \mathit{UH}$. Allora*

$$|\partial\mathcal{D}|_H(\Omega) = \frac{1}{2\kappa_{m_1-1}} \int_{\mathit{UH}_{p_0}} d\,\sigma_s^{m_1-1}(X) \int_{pr^X_{\mathcal{I}_{p_0}(X)}(\mathcal{D}\cap\Omega)} var^1_X[\chi_{\mathcal{D}^X_q}](\Omega^X_q)\, d\,\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(q), \tag{8}$$

dove κ_{m_1-1} denota la misura m_1-1-dimensionale della palla di $\mathbb{R}^{m_1-1}$.

Definizione **8** *Siano $p_0 \in \mathbb{G}$, $X \in \mathit{UH}$, e $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ l'iperpiano verticale per p_0 e g-ortogonale ad X. Diciamo allora che $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{G}$ è* **puntualmente X-normale rispetto ad $\mathcal{I}_{p_0}(X)$** *se per ogni $q \in \mathcal{I}_{p_0}(X)$ si ha che $(\gamma^X_q)^{-1}(\gamma^X_q(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D})$ è l'insieme vuoto o un intervallo di $\mathbb{R}$, oppure, equivalentemente, se $\gamma^X_q(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è vuoto o è un sottinsieme connesso di $\gamma^X_q(\mathbb{R})$.*

La nozione di normalità rispetto ad una direzione orizzontale è invariante rispetto alle traslazioni di gruppo. Inoltre questa nozione generalizza quella Euclidea (cfr. [47]).

Definizione **9 (H-convessità geometrica)** *Diciamo che $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{G}$ è* **H-convesso** *se per ogni $p \in \mathbb{G}$ ed ogni $X \in \mathit{UH}$ si ha che $(\gamma^X_p)^{-1}(\gamma^X_p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D})$ è l'insieme vuoto o è un intervallo di $\mathbb{R}$, oppure, equivalentemente, se $\gamma^X_p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è vuoto o è un sottinsieme connesso di $\gamma^X_p(\mathbb{R})$.*

Si noti che tale nozione coincide con quella usuale se il gruppo di Carnot è $(\mathbb{R}^n, +)$. La nozione di *H-convssità* è invariante rispetto alle traslazioni di gruppo ed è *stabile rispetto all'intersezione*, cioè se $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathbb{G}$ sono H-convessi, allora anche $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ è H-convesso.

La nozione di H-convessità geometrica qui formulata risulta essere equivalente alle altre presenti in letteratura (cfr. [32], [15]). Si noti che *l' H-convessità di un insieme risulta equivalente alla X-normalità di esso rispetto a $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ per ogni $X \in \mathit{UH}$ (p_0 è fissato).*

Osservazione **18** *Un insieme $\mathcal{D}$ è H-convesso se e solo se $\log(L_{-q}(H_q \cap \mathcal{D}))$ è stellato in H_0 rispetto allo $0 \in H$ per ogni $q \in \mathcal{D}$. In particolare, se $\log(L_{-q}(H_q \cap \mathcal{D}))$ è un convesso Euclideo (come sottinsieme di H_0) per ogni $q \in \mathcal{D}$, allora $\mathcal{D}$ è H-convesso. Infine, se $q \in \exp(V_k)$, dove V_k è il centro di $\mathfrak{g}$, allora H_q, visto come sottinsieme di $\mathbb{G}(\cong \mathbb{R}^n)$, è un piano affine m_1-dimensionale e se $\mathcal{D}$ è H-convesso, allora $H_q \cap \mathcal{D}$ è stellato in H_q rispetto a q per ogni $q \in \exp(V_k)$.*

Osservazione **19 (H-convessità nei gruppi di Carnot di passo 2)** *Se $\mathbb{G}$ ha passo 2, allora le sue X-linee ($X \in H$) sono rette Euclidee. Pertanto gli insiemi convessi Euclidei sono anche H-convessi, ma in generale il viceversa non è vero, come mostrato sotto.*

Esempio **20 (Un H-convesso in $\mathbb{H}^1$ che non è convesso)** *Consideriamo il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \bullet)$, dove $(z,t) \bullet (z',t') = (z+z', t+t' + 2\Im(z\bar{z'}))$. Allora, il cono troncato C_α di apertura $\alpha > 0$, definito come*

$$C_\alpha = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z| \leq \alpha\,|t|,\ |z| \leq 1,\ \alpha\,|t| \leq 1\},$$

risulta H-convesso per ogni $\alpha \geq 2$ ma non convesso. Questo segue osservando che la pendenza massimale di ogni X-linea ($X \in \mathit{UH}$) di punto iniziale appartenente al cilindro $\{(z,t) \in \mathbb{H}^1 : |z| \leq 1\}$ è 2. Pertanto ognuna di esse intercetta C_α in un segmento.

Questa nozione di convessità orizzontale assieme alla formula (8) consente di ottenere la generalizzazione, per i gruppi di Carnot, di un classico teorema di Cauchy (cfr. [44]).

Teorema **21 ([37])** *Sia $p_0 \in \mathbb{G}$ fissato. Sia $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ un insieme H-convesso. Allora si ha*

$$|\partial\mathcal{D}|_H(\mathbb{G}) = \frac{1}{\kappa_{m_1-1}} \int_{\mathit{UH}_{p_0}} \mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(pr^X_{\mathcal{I}_{p_0}(X)}(\mathcal{D}))\, d\,\sigma_s^{m_1-1}(X).$$

2.4. – *Formula di tipo Santalò ed applicazioni.* – Generalizziamo ad arbitrari gruppi di Carnot una ben nota formula di Santalò [44], già provata da Pansu nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$; cfr. [43]. Come conseguenza dimostriamo alcune stime dal basso per il primo autovalore positivo λ_1 del problema agli autovalori di Dirichlet relativo al laplaciano sub-ellittico $\Delta_H = \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2$. Per semplicità, in questa sezione tutti gli oggetti in considerazione saranno supposti regolari.

Poniamo

$$\ell_p(X) := \sup\Big\{s \in \mathbb{R}_+ : \gamma_p^X(t) \in \mathcal{D},\ \forall\, t \in (0,s)\Big\},$$

dove γ_p^X è l'unica X-linea tale che $\gamma_p^X(0) = p,\ \dot{\gamma}_p^X(0) = X$. Si noti che

$$\ell_p(X) = \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\gamma_p^X(\,]0, \ell_p(X)[\,)).$$

Inoltre si ponga

$$\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D} := \Big\{X \in \mathit{UH}\overline{\mathcal{D}} : p = \pi_{\mathit{UH}}(X) \in \partial\mathcal{D},\ \langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle_H > 0\Big\},$$

dove π_{UH} denota la proiezione canonica associata al fibrato UH. In altre parole, $\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}$ è l'insieme dei *vettori orizzontali unitari "entranti" lungo* $\partial\mathcal{D}$ e, identificando la generica fibra di UH con $\mathbb{S}^{m_1-1}$, esso coincide con l'emisfero $\mathbb{U}^{m_1-1}$ determinato dalla H-normale unitaria $\nu_{\mathcal{D}}$ lungo $\partial\mathcal{D}$. Equipaggiamo inoltre $\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}$ con la misura

$$d\,\sigma(p;X) := d\,|\partial\mathcal{D}|_H(p) \otimes d\,\sigma_s^{m_1-1}(X),$$

dove $(p;X) \in \partial\mathcal{D} \times \mathbb{U}^{m_1-1} \cong \mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}$. Vale allora il seguente risultato.

Teorema **22 ([37])** *Se $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ è un insieme relativamente compatto, $\mathbf{C}^\infty$-regolare ed $f \in L^1(\mathit{UH}\mathcal{D})$, si ha*

$$\int_{\mathit{UH}\mathcal{D}} f(q;Y)\, d\,\mu(q;Y) = \int_{\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}} \int_0^{\ell_p(X)} f(\gamma_p^X(t);X)\, \langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle_H\, dt\, d\,\sigma(p;X)$$

$$= \int_{\partial\mathcal{D}} \int_{\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}_p} \int_0^{\ell_p(X)} f(\gamma_p^X(t);X)\, \langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle_H\, dt\, d\,\sigma_s^{m_1-1}(X)\, d\,|\partial\mathcal{D}|_H(p).$$

Da questo si deduce immediatamente una formula Integral-Geometrica per il volume di domini regolari nei gruppi di Carnot.

Corollario **23** *Nelle precedenti ipotesi, si ha*

$$(9)\qquad \mathcal{H}^{Q}_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{O_{m_1-1}}\int_{\partial\mathcal{D}}\int_{UH^+\partial\mathcal{D}_p} \ell_p(X)\,\langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle_H\, d\,\sigma_s^{m_1-1}(X)\, d\,|\partial\mathcal{D}|_H(p),$$

dove O_{m_1-1} *indica la misura* m_1-1*-dimensionale di* $\mathbb{S}^{m_1-1}$.

Definiamo ora la *taglia orizzontale* di un dominio $\mathcal{D}$ come segue:

$$\mathrm{breadth}_H(\mathcal{D}) := \sup_{(q;Y)\in UH^+\partial\mathcal{D}} \ell_q(Y).$$

Denotando poi con $\mathrm{diam}_H(\mathcal{D})$ il diametro di $\mathcal{D}$ rispetto alla distanza di Carnot-Carathéodory d_H, risulta ovviamente

$$(10)\qquad \mathrm{breadth}_H(\mathcal{D}) \leq \mathrm{diam}_H(\mathcal{D}).$$

Da (9) si ha subito il seguente

Corollario **24** *Sia* $\mathcal{D}\subset\mathbb{G}$ *un dominio relativamente compatto* $\mathbf{C}^\infty$*-regolare. Allora*

$$(11)\qquad \frac{\mathcal{H}^{Q}_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D})}{|\partial\mathcal{D}|_H(\mathbb{G})} \leq \frac{O_{m_1-2}}{O_{m_1-1}\cdot(m_1-1)}\cdot \mathrm{breadth}_H(\mathcal{D}),$$

dove O_k *denota la misura* k*-dimensionale di superficie di* $\mathbb{S}^k$. *In virtù di (10), in (11) si può sostituire, alla taglia orizzontale* $\mathrm{breadth}_H(\mathcal{D})$*, il* d_H*-diametro* $\mathrm{diam}_H(\mathcal{D})$.

Ricordiamo che il *sub-Lalaciano* di un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è definito come segue:

$$\Delta_H := \sum_{j=1}^{m_1} X_j^2, \quad \Delta_H\psi(p) = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\psi(p\bullet\exp(tX_j)) \quad (\psi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{G})).$$

Si consideri ora il *problema agli autovalori di Dirichlet* per Δ_H su un dominio limitato, $\mathbf{C}^\infty$-regolare $\mathcal{D}$, cioè cerchiamo quei numeri reali λ per cui esistono soluzioni non banali $\phi\in W_H^{1,2}(\mathcal{D})$[14] di

$$(12)\qquad \Delta_H\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}$$

soddisfacenti $\phi_{|\partial\mathcal{D}} = 0$. La classica caratterizzazione di Lord Reileigh del primo autovalore (cfr. [8]) si esprime, nel caso del sub-Laplaciano Δ_H, come segue:

$$\lambda_1(\mathcal{D}) = \inf_{\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathcal{D})} \frac{\int_{\mathcal{D}}|\nabla^H\varphi|_H^2\, d\,\mathcal{L}^n}{\int_{\mathcal{D}}|\varphi|^2\, d\,\mathcal{L}^n}.$$

A partire dal Teorema 22, usando un metodo simile a quello usato nei lavori [11, 12], si possono provare, in modo semplice, stime dal basso per $\lambda_1(\mathcal{D})$.

Teorema **25 ([37])** *Siano* $\mathcal{D}\subset\mathbb{G}$ *e* $\lambda_1(\mathcal{D})$ *come sopra. Allora*

$$\lambda_1(\mathcal{D}) \geq \frac{\pi^2\cdot m_1}{O_{m_1-1}}\cdot\inf_{p\in\mathcal{D}}\int_{UH_p}\frac{1}{\ell_p^2(X)}\, d\,\sigma_s^{m_1-1}(X).$$

Si ha inoltre

$$\lambda_1(\mathcal{D}) \geq \frac{\pi^2\cdot m_1}{[\mathrm{breadth}_H(\mathcal{D})]^2} \geq \frac{\pi^2\cdot m_1}{[\mathrm{diam}_H(\mathcal{D})]^2}.$$

[14] $W_H^{1,2}(\mathcal{D}) := \{\psi\in L^2(\mathcal{D}) : \exists\, X_i\psi$ (nel senso delle distribuzioni), $X_i\psi\in L^2(\mathcal{D}),\ i=1,...,m_1\}$

3. – Integrazione per parti su Ipersuperfici e Variazione prima dell'H-perimetro

3.1. – *Elementi di Geometria Differenziale.* – Introduciamo alcune nozioni finalizzate principalmente allo studio delle ipersuperfici non-caratteristiche dei gruppi di Carnot. Questi argomenti sono stati oggetto di parte della mia tesi di dottorato (cfr. [38]). Occorre qui ricordare che precedentemente e\o contemporaneamente, alcuni tra questi argomenti, sono stati affrontati da altri autori, con un'impostazione abbastanza differente da quella qui presentata. Ricordiamo, in particolare [5], [9], [42], specificamente per quanto attiene allo studio delle superfici nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, ed anche [14] dove viene avviato uno studio generale di varie questioni di analisi su ipersuperfici, per gruppi di Carnot arbitrari.

Definizione **10** *Sia ∇ l'unica connessione di* **Levi-Civita invariante a sinistra** *su $\mathbb{G}$ relativa alla metrica g. Allora, se $X, Y \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{G}, H)$, poniamo $\nabla^{H}_{X}Y := proj_{H}(\nabla_X Y)$, mentre se $X, Y \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{G}, V)$ poniamo $\nabla^{V}_{X}Y := proj_{V}(\nabla_X Y)$. ∇^{H} e ∇^{V} sono dette* **connessioni parziali**. *In particolare, ∇^{H} è detta* **connessione orizzontale**, *mentre ∇^{V} è detta* **connessione verticale**.

Per quanto concerne la teoria delle connessioni sui gruppi di Lie si veda, ad esempio, [29]. Inoltre, per alcune questioni di geometria dei gruppi di Lie nilpotenti equipaggiati con una metrica Riemanniana invariante a sinistra e con l'associata connessione di Levi-Civita, rimandiamo al lavoro di Milnor [35]. Ricordiamo che una definizione equivalente di *connessione parziale* compare in [25]. Si vedano anche [27] e [31] e per ulteriori informazioni rimandiamo all'Appendice A.

Osserviamo esplicitamente che, rispetto al frame globale $\underline{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ di sezioni invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$, riesce (cfr. [35]):

$$\nabla_{X_i} X_j = \frac{1}{2}(C^{r}_{ij} - C^{i}_{jr} - C^{j}_{ri})X_r \qquad \forall\ i,\ j = 1, ..., n, \tag{13}$$

dove C^{r}_{ij} $(i, j, r = 1, ..., n)$ sono le costanti strutturali dell'algebra $\mathfrak{g}$ (cfr. Sezione 1.1).

Ciò consente di effettuare calcoli molto espliciti, in termini di costanti strutturali. Come esempio, da (13) segue immediatamente che la *1ª equazione di struttura di Cartan* (cfr. [8], [29]) per il coframe $\underline{\omega}$, assume la forma seguente:[15]

$$d\omega_r = -\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq h_{l-1}} C^{r}_{ij}\ \omega_i \wedge \omega_j \qquad (h_{l-1} < r \leq h_l,\ l = 1, ..., k). \tag{14}$$

Osservazione **26** *Dalla Definizione 10, usando le proprietà delle costanti strutturali (cfr. Nota 2, pag. 3) e le ben note proprietà di ogni connessione di Levi-Civita (cfr.[8]), si ottiene, in particolare, che ∇^{H} è "piatta" nel senso che $\nabla^{H}_{X_i} X_j = 0\,(i, j = 1, ..., m_1)$.*

[15] In generale, se N^n è una varietà Riemanniana, $\underline{X}$ un frame ortonormale per N ed $\underline{\omega}$ il suo co-frame duale, le *Equazioni di struttura di Cartan* hanno la forma seguente:

$$d\omega_i = -\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_j$$

$$d\omega_{jk} = -\sum_{k=1}^{n} \omega_{jl} \wedge \omega_{lk} - \Omega_{jk},$$

dove $\omega_{ij}(X) := \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle$ $(i, j = 1, ..., n)$ sono le *1-forme di connessione* e Ω_{jk} $(j, k = 1, ..., n)$ sono le *2-forme di curvatura*, definite come $\Omega_{jk}(X, Y) := \omega_k(\mathrm{R}(X, Y)X_j)$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(N))$. Qui R denota il tensore di curvatura Riemanniano. Sia ω_{ij}, che Ω_{ij} risultano anti-simmetriche (negli indici bassi).

Questo motiva l'espressione fornita in precedenza per gli operatori gradiente e divergenza orizzontali (cfr. Definizione 1).

Osservazione **27** *È importante notare che la connessione orizzontale ∇^{H} è "compatibile" con la metrica sub-Riemanniana g_H, cioè*

$$X\langle Y, Z\rangle_H = \langle \nabla^{H}_X Y, Z\rangle_H + \langle Y, \nabla^{H}_X Z\rangle_H \qquad \forall\, X, Y, Z \in H.$$

Ciò segue immediatamente dalla definizione di ∇^{H}, unitamente all'analoga proprietà della connessione di Levi-Civita ∇ di $\mathbb{G}$. Ovviamente, ∇^{H} soddisfa anche la proprietà di non possedere "torsione", ovvero

$$\nabla^{H}_X Y - \nabla^{H}_Y X - proj_H[X, Y] = 0 \qquad \forall\, X, Y \in H.$$

Molte questioni della geometria sub-Riemanniana dei gruppi di Carnot possono essere convenientemente formulate in termini della connessione orizzontale ∇^{H}.

Introduciamo ora alcune definizioni concernenti le ipersuperfici. Precisiamo subito che d'ora in avanti considereremo soltanto *ipersuperfici non-caratteristiche*. Ovvero ci limiteremo a considerare sottinsiemi di un'ipersuperficie S contenuti nel complentare del suo insieme caratteristico C_S.

Definizione **11** *Se ν_H è la normale orizzontale unitaria ad S nei punti $p \in S \setminus C_S$, si ha che $H_p = (\nu_H)_p \oplus HT_pS$, ove si è posto*

$$HT_pS := (\nu_H)_p^{\perp} \cap H_p.$$

HT_pS è detto **spazio tangente orizzontale** *in p ad S. Definiamo quindi, nel modo ovvio, i fibrati vettoriali associati $HTS (\subset TS)$ e $\nu_H S$, detti, rispettivamente,* **fibrato tangente orizzontale** *e* **fibrato normale orizzontale**.

Osserviamo che, indicata con ∇^{S} la connessione indotta su S dalla connessione di Levi-Civita ∇ su $\mathbb{G}$[16], essa induce una connessione parziale ∇^{HTS} relativa al sottofibrato HTS di TS, definita nel modo seguente[17]:

$$\nabla^{HTS}_X Y := proj_{HTS}(\nabla^{S}_X Y) \quad (X, Y \in HTS).$$

A partire dalla decomposizione di H in somma diretta ortogonale (cfr. Definizione 11), la costruzione di ∇^{HTS} si potrebbe anche fare mimando l'usuale definizione di connessione indotta su una sottovarietà (cfr. [8]). Infatti, risulta che

$$\nabla^{HTS}_X Y = \nabla^{H}_X Y - \langle \nabla^{H}_X Y, \nu_H\rangle_H \nu_H \quad (X, Y \in HTS).$$

Definizione **12** *Chiameremo HTS-***gradiente** *di $\psi \in \mathbf{C}^{\infty}(S)$, l'unico vettore tangente orizzontale ad S, $\nabla^{HTS}\psi$, soddisfacente*

$$\langle \nabla^{HTS}\psi, X\rangle_H = d\psi(X) = X\psi \quad \forall\, X \in HTS.$$

Indicheremo con div_{HTS} l'operatore di divergenza su HTS, cioè se $X \in HTS$ e $p \in S$,

$$div_{HTS}X(p) := \mathrm{Trace}\Big(Y \longrightarrow \nabla^{HTS}_Y X\Big) \ (Y \in HT_pS).$$

Infine, denoteremo con Δ_{HTS}, l' HTS-**Laplaciano**, *cioè l'operatore differenziale dato da*

$$\Delta_{HTS}\psi := div_{HTS}(\nabla^{HTS}\psi) \quad (\psi \in \mathbf{C}^{\infty}(S)). \tag{15}$$

[16] Pertanto, ∇^{S} è la connessione di Levi-Civita per S (cfr. [8]).

[17] La mappa $proj_{HTS}$ denota la proiezione ortogonale di TS su HTS.

D'ora in poi, per semplicità, assumeremo che $\mathbb{G}$ sia di passo 2.
Useremo pertanto la seguente convenzione sugli indici:

$$I, J, ... = 1, ..., n; \ \ i, j, ... = 1, ..., m_1; \ \ \alpha, \beta, ... = m_1 + 1, ..., n.$$

Se $U \subset \mathbb{G}$ è aperto, porremo $\mathcal{U} := U \cap S$. Inoltre assumeremo che $\mathcal{U}$ è non-caratteristica.

DEFINIZIONE **13** *Definiamo* **frame H-adattato ad $\mathcal{U}$ in** U *ogni frame ortonormale in* U $\underline{\tau} := (\tau_1, ..., \tau_n)$ *tale che:*

$$(i)\, \tau_1|_{\mathcal{U}} := \nu_{H}; \quad (ii)\, HT_p\mathcal{U} = \mathrm{span}\{(\tau_2)_p, ..., (\tau_{m_1})_p\}\, (p \in \mathcal{U}); \quad (iii)\, \tau_\alpha := X_\alpha.$$

DEFINIZIONE **14** *Chiamiamo II^a* **forma fondamentale sub-Riemanniana** *di S la mappa* $\mathtt{b}_H : HTS \times HTS \rightarrow \nu_{H}S$ *data da*

$$\mathtt{b}_H(X, Y) := \langle \nabla^{H}_X Y, \nu_{H} \rangle_H \, \nu_H \quad (X, Y \in HTS).$$

Sia $\mathrm{H} \in \nu_{H}S$ *la* **curvatura media orizzontale di** S*, definita come la traccia di* $\mathtt{b}_H$*. Equivalentemente, si ha*

$$\mathrm{H} = -\sum_{j=2}^{m_1} \langle \nabla^{H}_{\tau_j} \nu_{H}, \tau_j \rangle_H \, \nu_{H}.$$

Mediante ragionamenti del tutto simili al caso Riemanniano, si può provare che la seconda forma fondamentale sub-Riemanniana $\mathtt{b}_H(X, Y)$ è una forma $\mathbf{C}^\infty(S)$-bilineare in X e Y. Tuttavia essa **non è simmetrica**.

OSSERVAZIONE **28** *Si osservi che la mappa $HTS \ni X \longrightarrow \nabla^{H}_X \nu_{H}$, è, in effetti, l'analogo sub-Riemanniano della mappa di Weingarten (cfr. [30], Cap. 2). Usando la compatibilità di ∇^{H} con la metrica g_H si ottiene che $(\nabla^{H}_X \nu_{H})_p \in HT_pS$. Infatti,*

$$0 = X \langle \nu_{H}, \nu_{H} \rangle_H = 2 \langle \nabla^{H}_X \nu_{H}, \nu_{H} \rangle_H.$$

In seguito, indicheremo con $\mathcal{C}^\alpha\, (\alpha = m_1 + 1, ..., n)$ gli operatori lineari associati alle matrici delle costanti strutturali $[C^\alpha_{ik}]\, (i, k = 1, ..., m_1)$.

3.2. – *Integrazione per parti orizzontale su Ipersuperfici.* – Scopo di questa sezione è la determinazione di formule di integrazione per parti sulle ipersuperfici non-caratteristiche di un gruppo di Carnot, munite della misura H-perimetro.

Sia dunque $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Dalla definizione di σ_{H}, con un semplice calcolo, basato sulla classica *Formula della Divergenza Riemanniana* (cfr. [45], ad esempio) e sulla definizione di σ_{H}, si ottiene

$$\begin{aligned} d(X \,\lrcorner\, \sigma_{H})|_{\mathcal{U}} &= d(|proj_H \nu|_H \, X \,\lrcorner\, \sigma^{n-1}) = div_{\mathcal{U}}(|proj_H \nu|_H \, X)\, \sigma^{n-1} \\ &= \left\{ div_{\mathcal{U}} X + \left\langle X, \frac{\nabla^{\mathcal{U}} |proj_H \nu|_H}{|proj_H \nu|_H} \right\rangle \right\} \sigma_{H} \llcorner \mathcal{U}, \end{aligned}$$

dove $\nabla^{\mathcal{U}}$ e $div_{\mathcal{U}}$ sono gli usuali operatori di gradiente e divergenza tangenziali su $\mathcal{U}$.

Il difetto di questa formula è che non è "esplicita", nel senso che non emergono in modo chiaro le quantità geometriche sub-Riemanniane realmente coinvolte. Per aggirare tale inconveniente, abbiamo sopra introdotto la nozione di frame adattato ad una ipersuperficie.

Sia dunque $\underline{\tau}$ un frame adattato ad $\mathcal{U} \subset S$ in U e denotiamo con $\underline{\phi} := \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ il suo *co-frame duale*, ottenuto per mezzo della metrica g. È immediato riconoscere che la forma H-perimetro σ_H su $\mathcal{U}$ è data da

$$\sigma_H \llcorner \mathcal{U} = (\nu_H \lrcorner \sigma^n)|_{\mathcal{U}} = (\tau_1 \llcorner \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}} = (\phi_2 \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}}.$$

Mediante calcoli diretti con forme differenziali, basati principalmente sulla *1^a equazione di struttura di Cartan* relativa al co-frame $\underline{\phi}$, si possono ottenere formule di tipo divergenza "adattate". Enunceremo ora alcuni risultati ottenuti per il caso di campi vettoriali tangenti orizzontali di HTS.

TEOREMA **29 (Teorema della Divergenza orizzontale)** *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo 2. Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa ed $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico. Supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà $\mathbf{C}^\infty$-regolare, $n-2$-dimensionale con normale unitaria uscente η. Allora, per ogni $X \in \mathbf{C}^\infty(S, HTS)$ vale*

$$\int_{\mathcal{U}} div_{_{HTS}} X \, \sigma_H + \int_{\mathcal{U}} \Big\langle \sum_\alpha \nu_\alpha \, \mathcal{C}^\alpha \nu_H, X \Big\rangle_H \sigma^{n-1} = \int_{\partial\mathcal{U}} \langle X, \eta \rangle \, |proj_H \nu|_H \, \sigma^{n-2}.$$

Da questa si possono dedurre formule di tipo Green e, più precisamente, quanto segue.

TEOREMA **30 (Formule di Green orizzontali)** *Sotto le ipotesi del Teorema 29, siano ϕ_1, $\phi_2 \in \mathbf{C}^\infty(S)$, ed almeno una di esse sia compattamente supportata in $\mathcal{U}$. Allora*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(\phi_1 \, \Delta_{_{HTS}} \phi_2 + \langle \nabla^{HTS} \phi_1, \nabla^{HTS} \phi_2 \rangle_H \Big) \sigma_H + \int_{\mathcal{U}} \phi_1 \Big\langle \sum_\beta n_\beta \, \mathcal{C}^\beta \nu_H, \nabla^{HTS} \phi_2 \Big\rangle_H \sigma^{n-1}$$

$$= \int_{\partial\mathcal{U}} \phi_1 \, \langle \nabla^{HTS} \phi_2, \eta \rangle \, |proj_H \nu|_H \, \sigma^{n-2}.$$

Inoltre, si ha

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(\phi_1 \, \Delta_{_{HTS}} \phi_2 - \phi_2 \, \Delta_{_{HTS}} \phi_1 \Big) \sigma_H + \int_{\mathcal{U}} \Big\langle \sum_\beta n_\beta \, \mathcal{C}^\beta \nu_H, \Big(\phi_1 \, \nabla^{HTS} \phi_2 - \phi_2 \, \nabla^{HTS} \phi_1 \Big) \Big\rangle_H \sigma^{n-1} = 0.$$

3.3. – *Variazione prima dell'H-perimetro.* – In quest'ultima sezione, mostriamo come poter effettuare il calcolo esplicito della variazione prima di σ_H, usando il formalismo geometrico-differenziale sopra introdotto. Come referenze classiche per queste tematiche, affrontate con i metodi della Geometria Differenziale, citiamo il libro di Spivak [45], oltreché il lavoro di Hermann [28].

Come in precedenza, siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo 2 ed $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa. Inoltre, sia $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà $\mathbf{C}^\infty$-regolare, $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η.

DEFINIZIONE **15** *Siano $\imath : \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ l'inclusione di $\mathcal{U}$ in $\mathbb{G}$ e $\vartheta : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ una mappa $\mathbf{C}^\infty$. Allora ϑ è una* **deformazione liscia** *di $\imath$ se:*

(i) ogni $\vartheta_t := \vartheta(t, \cdot) : \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ è un'immersione;

(ii) $\vartheta_0 = \imath$;

(iii) $\vartheta_t|_{\partial\mathcal{U}} = \imath|_{\partial\mathcal{U}}$ *per ogni* $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Il **vettore variazione** *di* ϑ*, è definito come*

$$W := \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\Big|_{t=0} = \vartheta_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

Se $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, denotiamo con ν_t la normale unitaria lungo $\mathcal{U}_t := \vartheta_t(\mathcal{U})$. Se $\mathcal{U}$ ed ϵ sono scelti opportunamente piccoli, allora $\mathcal{U}_t = \vartheta_t(\mathcal{U})$ risulta essere immersa e non-caratteristica, per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Definiamo quindi la $n-1$-forma $\sigma_{_{H,t}}$ su $\mathcal{U}_t$, come

$$(\sigma_{_{H,t}})|_{\mathcal{U}_t} = (\nu_{_{H,t}} \lrcorner\, \sigma^n)|_{\mathcal{U}_t} \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_t),$$

per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ove

$$\nu_{_{H,t}} := \frac{proj_H\, \nu_t}{|proj_H\, \nu_t|_H}.$$

Posto

$$\Gamma(t) := \vartheta_t^* \sigma_{_{H,t}} \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}), \qquad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

si ha che $\Gamma(t)$ è una $\mathbf{C}^\infty$-famiglia ad un parametro di $n-1$-forme su $\mathcal{U}$. Per determinare la variazione prima $I_{\mathcal{U}}(\sigma_{_H})$ di $\sigma_{_H}$ su $\mathcal{U}$, si deve allora calcolare

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_{_H}) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\mathcal{U}} \Gamma(t) = \int_{\mathcal{U}} \dot{\Gamma}(0). \tag{16}$$

Quindi ci basterà determinare $\dot{\Gamma}(0)$[18]. Sia pertanto $\underline{\zeta}$ un frame ortonormale nell'aperto U soddisfacente:

$$(i)\ \zeta_1|_{\mathcal{U}_t} := \nu_{_{H,t}}; \quad (ii)\ HT_p\mathcal{U}_t = \mathrm{span}\{(\zeta_2)_p, ..., (\zeta_{m_1})_p\}\ (p \in \mathcal{U}_t); \quad (iii)\ \tau_\alpha := X_\alpha.$$

Sia $\underline{\varphi}$ il suo relativo co-frame. In tal modo, si ottiene che

$$\sigma_{_{H,t}} \llcorner\, \mathcal{U}_t = (\zeta_1 = \nu_{_{H,t}} \lrcorner\, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)|_{\mathcal{U}_t} = (\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)|_{\mathcal{U}_t},$$

e quindi anche che $\Gamma(t) = \vartheta_t^*(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. A partire da questa espressione, ci si riconduce quindi al calcolo della *derivata di Lie* secondo la direzione $\widetilde{W} := \frac{\partial\vartheta}{\partial t}$, della $n-1$-forma $\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n$. Ciò si può effettuare tramite la *Formula di Cartan* (cfr. [29], [28], [45]):

$$\mathcal{L}_{\widetilde{W}}(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = \widetilde{W} \lrcorner\, d(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) + d(\widetilde{W} \lrcorner\, \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n).$$

Si può in tal modo dimostrare il seguente risultato.

Teorema **31 (Variazione prima dell'H-perimetro)** *Sotto le precedenti ipotesi, si ha*

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_{_H}) = -\int_{\mathcal{U}} \langle \mathrm{H}, \nu_{_H} \rangle_H\ \langle proj_H\, W, \nu_{_H} \rangle_H\ \sigma_{_H} - \int_{\mathcal{U}} \langle \mathrm{H}, \nu_{_H} \rangle_H\ \langle proj_V\, W, proj_V\, \nu \rangle\ \sigma^{n-1}$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{U}} \langle W, \eta \rangle\ |proj_H\, \nu|_H\ \sigma^{n-2}.$$

Si osservi che la *curvatura media orizzontale scalare* $\langle \mathrm{H}, \nu_{_H} \rangle_H$ compare in entrambi gli integrali fatti su $\mathcal{U}$. Pertanto, condizione necessaria alla *minimalità* di una ipersuperficie non-caratteristica è data dall'annullamento di $\langle \mathrm{H}, \nu_{_H} \rangle_H$.

[18] Il passaggio della derivata sotto il segno di integrale si può effettuare grazie alla ben nota *Regola di Leibniz* (cfr. [45], pag. 417).

4. – Appendice A: *Connessioni e Connessioni parziali*

Definizione **16** *Una* **connessione affine** ∇ *su una* $\mathbf{C}^\infty$*-varietà* M *è una regola che assegna ad ogni* $X \in \mathfrak{X}(M)(:= \mathbf{C}^\infty(M, TM))$ *una mappa* $\mathbb{R}$*-lineare*

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

chiamata **derivata covariante rispetto ad** X*, tale che per ogni* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *ed ogni* $f, g \in \mathbf{C}^\infty(M)$ *valgano le seguenti:*

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(2) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

Se inoltre $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *è una varietà Riemanniana, allora* ∇ *è l'unica* **connessione di Levi-Civita di** M**,** *se per ogni* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*, valgono le seguenti proprietà:*

(3) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$;

(4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Per un'accurata esposizione del concetto di connessione, rimandiamo, ad esempio, ai classici testi [8], [30], [29], [45]. Una generalizzazione del concetto di connessione è suggerita dalla seguente definizione; cfr. [25], [26], [31].

Definizione **17** *Sia* M *una varietà Riemanniana, e siano* (E, π_E, M)*,* (F, π_F, M)*, due sottofibrati di* TM*. Una* E**-connessione** $\nabla^{(E,F)}$ **su** F *è una regola che assegna ad ogni* $X \in \mathbf{C}^\infty(M, E)$ *una mappa* $\mathbb{R}$*-lineare*

$$\nabla_X^{(E,F)} : \mathbf{C}^\infty(M, F) \longrightarrow \mathbf{C}^\infty(M, F)$$

tale che per ogni $X, Y \in \mathbf{C}^\infty(M, E)$*, ogni* $Z \in \mathbf{C}^\infty(M, F)$*, ed ogni* $f, g \in \mathbf{C}^\infty(M)$ *si ha*

(1) $\nabla_{fX+gY}^{(E,F)} Z = f\nabla_X^{(E,F)} Z + g\nabla_Y^{(E,F)} Z$;

(2) $\nabla_X^{(E,F)} fY = f\nabla_X^{(E,F)} Y + (Xf)\, Y$.

Se $E = F$ *poniamo* $\nabla^E := \nabla^{(E,E)}$*, e chiamiamo* ∇^E *una* **connessione parziale relativa ad** E*, od* E**-connessione**. *Notare che se* $proj_E$ *indica la proiezione ortogonale su* E*, una* E*-connessione si può sempre definire, a partire da una connessione* ∇ *su* TM*, nel seguente modo:*

$$\nabla_X^E Y := proj_E(\nabla_X Y) \qquad (X, Y \in \mathbf{C}^\infty(M, E)).$$

5. – Appendice B: *Gruppo di Heisenberg* $\mathbb{H}^1$

Sia $(\mathbb{H}^1, \bullet)$ il *Gruppo di Heisenberg* 3-dimensionale. Esso si può descrivere nel seguente modo. Fissiamo coordinate esponenziali su $\mathbb{H}^1$, in modo che $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}^1$. Un frame di campi invarianti a sinistra su $\mathbb{H}^1$ è dato da (X, Y, T), dove assumiamo che

$$X_p := \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_p := \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad T_p := \frac{\partial}{\partial t}.$$

L'algebra di Lie di $\mathbb{H}^1$ soddisfa $\mathfrak{h} = H \oplus T$, dove $H := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X, Y\}$. È immediato verificare che

$$[X, Y] = T, \quad [X, T] = [Y, T] = 0.$$

Pertanto, $expT$ è il centro di $\mathbb{H}^1$. L'operazione di gruppo $\bullet$, in queste notazioni, è definita come segue. Dati $p = (x, y, t)$ e $p' = (x', y', t')$ in $\mathbb{H}^1$, allora

$$p \bullet p' := (x + x', y + y', t + t' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

Notare che

$$L_{p_*} = \frac{\partial}{\partial p'}\Big|_{p'=0} p \bullet p' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix} = [X, Y, T].$$

Le *1-forme invarianti a sinistra*, duali dei campi X, Y, T, sono date, rispettivamente da:

$$X^* = dx, \quad Y^* = dy, \quad T^* := \theta = dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy).$$

La forma volume σ^3 di $\mathbb{H}^1$ si scrive pertanto come

$$\sigma^3 = dx \wedge dy \wedge \theta.$$

Sia ora $S \subset \mathbb{H}^1$ una superficie $\mathbf{C}^1$ e ν denoti la sua normale unitaria. Allora si ha che $\nu = \nu_X X + \nu_Y Y + \nu_T T$, dove

$$\nu_X := \frac{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\sqrt{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle T, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3}}}, \quad \nu_Y := \frac{\langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\sqrt{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle T, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3}}},$$

$$\nu_T := \frac{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\sqrt{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle T, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3}}}.$$

La forma volume Riemanniana σ^2 su S è data da

$$\begin{aligned} \sigma^2 \llcorner S &= \nu \lrcorner\, dx \wedge dy \wedge \theta \\ &= \nu_X dy \wedge \theta - \nu_Y dx \wedge \theta + \nu_T dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Siano $S \subset \mathbb{H}^1$ una superficie non-caratteristica e ν_H la sua H-normale. Allora, dalla definizione data in precedenza, segue che $\nu_H = \nu_{H_X} X + \nu_{H_Y} Y$, dove

$$\nu_{H_X} := \frac{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\sqrt{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3}}}, \quad \nu_{H_Y} := \frac{\langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\sqrt{\langle X, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3} + \langle Y, \mathrm{n}_\mathbf{e}\rangle^2_{\mathbb{R}^3}}}.$$

La forma H-perimetro è quindi data da

$$\begin{aligned} \sigma_H \llcorner S &= \nu_H \lrcorner\, dx \wedge dy \wedge \theta \\ &= \nu_{H_X} dy \wedge \theta - \nu_{H_Y} dx \wedge \theta. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Ambrosio, *Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces*, Adv. in Math., 2001.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara, *"Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems"*, Oxford University Press, 2000.

[3] L. Ambrosio & B. Kircheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math.Ann. **318**, 527-555, 2000.

[4] ———, *Current in metric spaces*, Acta Math.**185**, 1-80, 2000.

[5] N. Arcozzi & F. Ferrari, *Metric normal and distance function in the Heisenberg group,* Preprint, 2003.

[6] V.I. Arnold, *Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces*, Adv. in Math., 2001.

[7] L. Capogna, D. Danielli, & N. Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. Anal. Geom. **12**, 1994.

[8] I. Chavel, *"Riemannian Geometry: a modern introduction"*, Cambridge University Press, 1994.

[9] J.J Cheng, J.F. Hwang, A. Malchiodi, & P. Yang, *Minimal surfaces in pseudohermitian geometry,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, vol. IV, 129-179, 2005.

[10] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom.Funct.An., **9**, 428-517, 1999.

[11] C.B. Crooke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., Paris **13**, 419-435, 1980.

[12] C.B. Crooke & A. Derdziński, *A lower bound for λ_1 on manifolds with boundary*, Comment. Math. Helv. **59**, 187-192, 1984.

[13] T. Coulhon & L. Saloff-Coste, *Isopérimétrie pour les groupes et les variétés,*, Rev. Math. Iberoamericana, **9**, 293-314, 1993.

[14] D. Danielli, N. Garofalo, & D.M. Nhieu, *Minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature and isoperimetry in Carnot groups*, preprint 2001.

[15] ———, *Notions of Convexity in Carnot groups*, preprint 2002.

[16] G. David & S. Semmes, *"Fractured Fractals and Broken Dreams. Self-Similar Geometry through Metric and Measure"*, Oxford University Press, 1997.

[17] E.De Giorgi,*Un progetto di teoria delle correnti, forme differenziali e varietà non orientate in spazi metrici*, in *Variational Methods, Non Linear Analysys and Differential Equations in Honour of J.P. Cecconi*, M.Chicco et al. Eds. ECIG, Genova, 67-71, 1993.

[18] H. Federer, *"Geometric Measure Theory"*, Springer Verlag, 1969.

[19] B. Franchi, R. Serapioni, & F.S. Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, Houston Journal of Math. Vol. 22, **4**, 1996.

[20] ———, *Rectifiability and Perimeter in the Heisenberg Group*, Math. Annalen, **321**, 479-531, 2001.

[21] ———, *Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups*, Comm. Anal. Geom., to appear.

[22] ———, *On the structure of finite perimeter sets in step 2 Carnot groups*, J.Geometric Anal., to appear.

[23] N. Garofalo & D.M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **49**, 1081-1144, 1996.

[24] N. Garofalo & S. Pauls, *The Berstein problem in the Heisenberg group,* arXiv:math.DG/0209065.

[25] Z. Ge, *Betti numbers, characteristic classes and sub-Riemannian geometry* Illinois Journal of Mathematics, vol. **36**, no.3, 1992.

[26] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *"Subriemannian Geometry"*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, 1996.

[27] ——, *"Metric structures for Riemannian and Non Riemannian Spaces"*, Progress in Mathematics, **153**, Birkhauser Verlag, Boston, 1999.

[28] R. Hermann , *The Second Variation for Minimal Submanifolds*, Jour.Math.Mech., **16**, 1966.

[29] S. Helgason, *"Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces"*, Academic Press, New York, 1978.

[30] N.J Hicks, *"Notes on Differential geometry"*, Van Nostrand Reinholds Company, London, 1971.

[31] J. Koiller, P.R. Rodrigues & P. Pitanga, *Non-holonomic connections following Élie Cartan*, An. Acad. Bras. Cienc. 2001, **7** (2), pp. 165-190.

[32] G. Lu, J. J. Manfredi, & B. Stroffolini, *Convex functions on the Heisenberg group*, Calculus of Variations, to appear.

[33] V. Magnani, *"Elements of Geometric Measure Theory on sub-Riemannian groups"*, PHD Thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, (2002).

[34] P. Mattila, *"Geometry of sets and measures in euclidean spaces"*, Cambridge University Press, 1995.

[35] J. Milnor, *Curvatures of left invariant Riemannian metrics*, Adv. Math., **21**, 293–329, 1976.

[36] J. Mitchell, *On Carnot-Carathèodory metrics*, J.Differ. Geom. **21**, 35-45, 1985.

[37] F. Montefalcone, *Some relations among volume, intrinsic perimeter and one-dimensional restrictions of BV functions in Carnot groups*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, vol. IV, 79-128, 2005.

[38] ——, *"Some Remarks in Differential and Integral Geometry of Carnot Groups"*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Bologna, 2004.

[39] ——, *Alcune osservazioni sulla Geometria Differenziale ed Integrale dei Gruppi di Carnot*, Bollettino UMI, Fascicolo Tesi di Dottorato, 2005 (in corso di stampa).

[40] R. Montgomery, *"A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications"*, AMS, Math. Surveys and Monographs, Vol. 91, 2002.

[41] R. Monti, *"Distances, Boundaries and surface measures in Carnot Carathéodory Spaces"*, PhD Thesis, Univerity of Trento, 2001.

[42] S.D. Pauls, *Minimal surfaces in the Heisenberg group*, Geom. Dedicata, **104**, 201-231, 2004.

[43] P. Pansu, *"Geometrie du Group d'Heisenberg"*, These pour le titre de Docteur, 3ème cycle, Universite Paris VII, 1982.

[44] L.A. Santaló, *"Integral Geometry and Geometric Probability"*, Enc. Math., **1**, 1976.

[45] M. Spivak, *"Differential Geometry"*, vol. IV, Publisch or Perish, 1964.

[46] R.S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry*, J. Diff. Geom., **24**, 221-263, 1986. Corrections: J. Diff. Geom., **30**, 595-596, 1989.

[47] G. Talenti, *The standard isoperimetric theorem*, in Handbook of Convexity, Vol. **A**, P.M.Gruber & J.M.Wills, eds, 73-123. Amsterdam:North Holland, 1993.

[48] N.Th. Varopoulos, *Analysis on Lie groups*, J. Funct.Anal., **76**, 346-410, 1988.

[49] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, & T. Coulhon, *"Analysis and Geometry on Groups"*, Cambridge University Press, 1992.

Francescopaolo Montefalcone:

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna,

Piazza di P.ta S.Donato, 5, 40126 Bologna, Italia

E-mail address: montefal@dm.unibo.it