Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell' Università di Bologna

Anno Accademico 2004-05

Francescopaolo Montefalcone

Alcune formule integrali nei Gruppi di Carnot

26 Aprile 2005

Abstract

Let $\mathbb{G}$ a k-step Carnot group. In the first part of this talk we are concerned about Integral Geometry in the setting of Carnot groups. We start by illustrating an interplay between volume and H-perimeter, using one-dimensional horizontal slicing. This result is a kind of Fubini Theorem for H-regular hypersurfaces. Some applications are given: slicing of HBV functions, integral geometric formulae for volume and H-perimeter and, making use of a suitable notion of convexity, we state a Cauchy type formula for this class of convex sets. We then state a sub-Riemannian Santaló formula showing some related applications: in particular we find two lower bounds for the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the Carnot sub-Laplacian Δ_H on smooth domains. In the second part we introduce some differential-geometric tools useful in the study of regular non-characteristic hypersurfaces. In particular, we state divergence-type theorems and integration by parts formulas with respect to the intrinsic measure σ_H^{n-1} on hypersurfaces. Finally we give a general formula for the first variation of the H-perimeter measure σ_H^{n-1}.

1. – Introduzione

Negli ultimi anni vi è stato un notevole sforzo nell'estendere i metodi del Calcolo delle Variazioni e della Teoria Geometrica della Misura (TGM) a spazi metrici generali ed, in particolare, alle cosidette geometrie *sub-Riemanniane* o di *Carnot-Carathèodory.* Questo tipo di studio, in un certo senso, già preannunciato nel classico trattato di Federer (cfr. [16]), ha ricevuto recentemente nuovi stimoli, tra gli altri, dai lavori di Ambrosio e Kirchheim, [3, 4], Cheeger [9], De Giorgi, [15], Gromov, [24, 25], David e Semmes, [14].

Sotto questo aspetto, i *Gruppi di Carnot* divengono di particolare interesse e, in effetti, sono molti i filoni di ricerca in cui essi rivestono un ruolo importante: PDE's, TGM, Calcolo delle Variazioni, Teoria del Controllo, etc.

Una delle principali ragioni di ciò è che essi costituiscono una classe molto vasta da cui attingere esempi concreti di geometrie sub-Riemanniane. Referenze specifiche, per quanto concerne la Geometria Sub-Riemanniana, sono [25], [37] e [43]. Come referenze significative per quanto attiene alcuni dei filoni di ricerca sopra menzionati, citiamo inoltre i lavori [1], [6], [14], [17, 18, 20], [21], [37], [45], [46]. È pure da sottolineare il fatto che, in virtù di un teorema dovuto a Mitchell [34], il *cono tangente* (nel senso di *Gromov-Hausdorff*) in un punto regolare di una varietà sub-Riemanniana è un opportuno gruppo di Carnot. Questo giustifica ulteriormente l'interesse verso lo studio dei Gruppi di Carnot, i quali svolgono, per le geometrie sub-Riemanniane, un ruolo analogo a quello degli spazi Euclidei in geometria Riemanniana.

Tra i risultati che maggiormente hanno alimentato le recenti ricerche di TGM in tale contesto, ricordiamo il *Teorema di Rettificabiltà* per insiemi di *H-perimetro finito*, ottenuto da Franchi, Serapioni e Serra Cassano in [18] nel caso del *Gruppo di Heisenberg*, poi generalizzato al caso dei gruppi di passo 2 in [20]. Citiamo infine, come ottime introduzioni a molte tematiche di TGM e Calcolo delle Variazioni, le Tesi di Dottorato [31] e [38].

Oggetto del presente seminario è la presentazione di alcuni aspetti di TGM nel contesto dei Gruppi di Carnot e, in particolare, di alcuni risultati di base concernenti la Geometria Integrale dei Gruppi di Carnot. Il lavoro a cui faremo riferimento per la maggior parte dei risultati che verranno esposti nel seguito è [35], ma presenteremo anche alcuni argomenti che sono stati oggetto della mia tesi di dottorato (cfr. [36]).

Illustriamo brevemente il piano del seminario. Dopo aver richiamato le notazioni e le principali nozioni necessarie all'esposizione dei risultati, stabiliremo un teorema *tipo-Fubini* per ipersuperfici H-regulari. Passeremo poi in rassegna alcune applicazioni di esso: slicing di funzioni HBV, caratterizzazioni Integral-Geometriche per volume ed H-perimetro e, dopo aver introdotto la nozione di H-convessità geometrica, stabiliremo una formula di tipo Cauchy valida per insiemi *H-convessi.* Esporremo poi una generalizzazione ai Gruppi di Carnot di una ben nota formula di Santalò (cfr. [41]). Di questa mostreremo alcune applicazioni e, tra le altre, come dedurne stime dal basso per il primo autovalore λ_1 del problema agli autovalori di Dirichlet relativo al laplaciano sub-ellittico Δ_H. Nell'ultima parte introdurremo alcune nozioni di tipo geometrico-differenziale, finalizzate allo studio delle ipersuperfici immerse non-caratteristiche. In particolare, mostreremo come è possibile dedurre formule di integrazione per parti. Infine enunceremo la formula per la variazione prima della misura H-perimetro.

1.1. – *Preliminari.* – Molte delle seguenti nozioni sono ben note nella recente letteratura e per esse rimandiamo ai lavori [6], [18, 19, 20], [21], [24, 25], [31], [35], [38].

Tuttavia, per alcune delle nozioni più propriamente geometriche riguardanti i gruppi di Lie, suggeriamo il classico libro di Helgason [27].

Un *gruppo di Carnot di passo k* $(\mathbb{G}, \bullet)$ è un gruppo di Lie (rispetto all'operazione $\bullet$)

n-dimensionale, connesso, semplicemente connesso, nilpotente e statificato la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}(\cong \mathbb{R}^n)$ soddisfa:

$$(1) \qquad \mathfrak{g} = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \quad [V_1, V_{i-1}] = V_i \quad (i = 2, ..., k), \quad V_{k+1} = \{0\}.$$

Si denoterà con 0 l'identità di $\mathbb{G}$ e quindi risulta $\mathfrak{g} \cong T_0\mathbb{G}$. Il sottofibrato V_1 del fibrato tangente $T\mathbb{G}$ è detto *orizzontale* e denotato con la lettera H. Posto $V := V_2 \oplus ... \oplus V_k$, diremo *verticale* il sottofibrato V di $T\mathbb{G}$. Assumeremo che $dim\, V_i = m_i$ $(i = 1, ..., k)$ e che H sia generato da una base di campi vettoriali invarianti a sinistra $\underline{X_H} := \{X_1, ..., X_{m_1}\}$. Questa può completarsi ad una base globale (frame) di sezioni invarianti a sinistra

$$\underline{X} := \{X_i : i = 1, ..., n\}$$

che sia *adattata alla stratificazione.* Cioè, posto $h_l := m_1 + ... + m_l$ e $m_0 = h_0 := 0$, si ha:

$$V_l = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_i : h_{l-1} < i \leq h_l\}.$$

Se $\{\mathrm{e}_i : i = 1, ..., n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$ adattata alla stratificazione, le sezioni X_i del frame $\underline{X}$ si ottengono mediante il differenziale della traslazione a sinistra $L_p\, (p \in \mathbb{G})$ di e_i, cioè $X_{ip} := L_{p*}\mathrm{e}_i\, (i = 1, ..., n)$.

Le fibre orizzontali possono munirsi di una metrica $g_H = \langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ed in tal caso, $\mathbb{G}$ si dice avere una *struttura sub-Riemanniana.* È importante osservare che si può sempre definire una metrica Riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, invariante a sinistra, per cui il frame $\underline{X}$ risulti *ortonormale* in ogni punto e tale che $g_{|H} = g_H$. Infatti, a tal fine, è sufficiente definire un prodotto Euclideo su $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{G}$ il quale, mediante traslazione a sinistra, si estende a tutto il fibrato tangente. È da notare che in tal modo, la somma diretta in (1) diventa una *somma diretta ortogonale.*

L'introduzione della metrica g consente di inquadrare in un ambito Riemanniano lo studio di alcune questioni riguardanti i gruppi di Carnot.

Mediante la metrica g, si può definire il co-frame $\underline{\omega} := \{\omega_i : i = 1, ..., n\}$ duale di $\underline{X}$. In particolare, le 1-forme invarianti a sinistra[1] ω_i sono determinate dalla condizione

$$\omega_i(X_j) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_i^j \quad \text{(Kroneker)} \quad (i, j = 1, ..., n).$$

Ricordiamo anche che le *costanti di struttura*[2] di $\mathfrak{g}$ relative al frame $\underline{X}$ sono definite come

$$C_{ij}^r := \langle [X_i, X_j], X_r \rangle \quad (i, j, r = 1, ..., n).$$

Se $p \in \mathbb{G}$ ed $X \in \mathfrak{g}$ poniamo $\gamma_p^X(t) := exp\, [tX](p)\, (t \in \mathbb{R})$, cioè γ_p^X è la curva integrale del campo X di punto iniziale p e risulta un *sottogruppo ad un parametro* di $\mathbb{G}$. La *mappa esponenziale* è allora definita come $exp : \mathfrak{g} \longmapsto \mathbb{G},\ exp\,(X) := exp\,[X](1)$. Risulta che exp è un diffeomorfismo analitico tra $\mathfrak{g}$ e $\mathbb{G}$ la cui inversa sarà denotata come log. Inoltre si ha

$$\gamma_p^X(t) = p \bullet exp\,(tX) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

D'ora in avanti fisseremo su $\mathbb{G}$ le cosidette *coordinate esponenziali di prima specie*, cioè le coordinate associate alla mappa log.

La distanza di *Carnot-Carathéodory* d_H relativa a g_H è definita, per $p, q \in \mathbb{G}$, come

$$d_H\,(p, q) := \inf \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_H\, dt,$$

[1]Cioè, $L_p^*\omega_i = \omega_i$ per ogni $p \in \mathbb{G}$.

[2]Esse soddisfano le usuali proprietà: *(1)* $C_{ij}^r + C_{ji}^r = 0$, *(2)* $\sum_{j=1}^n C_{jl}^i C_{rm}^j + C_{jm}^i C_{lr}^j + C_{jr}^i C_{ml}^j = 0$. Inoltre vale: *(3)* $X_i \in V_l,\ X_j \in V_m \Longrightarrow [X_i, X_j] \in V_{l+m}$. In particolare, si ha: $C_{ij}^i = C_{ij}^j = 0$ $(i, j = 1, ..., n)$.

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le curve orizzontali, regolari a tratti, congiungenti p a q. Essa rende $\mathbb{G}$ uno spazio metrico completo in cui ogni coppia di punti si connette con (almeno una) d_H-geodetica.

Ogni gruppo di Carnot è naturalmente munito di un gruppo ad un parametro di automorfismi $\delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ $(t > 0)$ che lo rendono un *gruppo omogeneo*. In coordinate esponenziali, se $p = exp\,(\sum_{j,i_j} p_{i_j} \mathrm{e}_{i_j})$, si ha che $\delta_t p = exp\,(\sum_{j,i_j} t^j\, p_{i_j} \mathrm{e}_{i_j})$ per ogni $p \in \mathbb{G}$.[3]

La *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$ è l'intero $Q := \sum_{i=1}^{k} i\, m_i$, coincidente con la *dimensione di Hausdorff* di $(\mathbb{G}, d_H)$ come spazio metrico. Con $\mathcal{H}^m_{\mathbf{cc}}$ si indicherà la misura di Hausdorff m-dimensionale relativa a d_H, mentre con $\mathcal{H}^m_{\mathbf{e}}$ si indicherà l'usuale misura di Hausdorff m-dimensionale Euclidea in $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{G}$[4].

Su $\mathbb{G}$ la *forma volume Riemanniana* (invariante a sinistra) è definita come

$$\sigma^n_{\mathcal{R}} := \bigwedge_{i=1}^{n} \omega_i \in \Lambda^n(T\mathbb{G}).$$

OSSERVAZIONE **1** *Integrando $\sigma^n_{\mathcal{R}}$ si ottiene la misura di Haar di $\mathbb{G}$. Poiché il determinante Jacobiano di L_{p_*} vale 1, questa eguaglia la misura indotta su $\mathbb{G}$ dal push-forward della misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ su $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$. Ricordiamo che essa coincide anche, a meno di una costante di normalizzazione, con la misura di Hausorff Q-dimensionale $\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}$ di $\mathbb{G}$*[5].

DEFINIZIONE **1** *Se $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ è aperto ed $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, allora $\nabla^{H} f$ denota l'unica sezione orizzontale data da $\nabla^{H} f := \sum_{i=1}^{h_1} (X_i f)\, X_i$, mentre se $\psi = (\psi_1, ..., \psi_{h_1})$ è una sezione orizzontale $\mathbf{C}^\infty$, $div_H \psi$ indica la funzione a valori reali $div_H \psi := \sum_{i=1}^{h_1} X_i \psi_i$. Infine, $\mathbf{C}^1_H(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, continue in Ω e tali che $\nabla^{H} f$ (nel senso delle distribuzioni) è una sezione orizzontale continua in Ω.*

DEFINIZIONE **2** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto ed $f \in L^1(\Omega)$. Allora f ha* H**-variazione limitata** *in Ω se*

$$|\nabla^{H} f|(\Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega f\, div_H Y\, d\mathcal{L}^n : Y \in \mathbf{C}^1_0(\Omega, H),\ |Y|_H \leq 1 \right\} < \infty.$$

$HBV(\Omega)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni di H-variazione limitata in Ω. Segue dal Teorema di Riesz che $|\nabla^{H} f|$ è una **misura di Radon** *in Ω e che esiste una sezione orizzontale $|\nabla^{H} f|$-misurabile ν_f tale che $|\nu_f| = 1$ per $|\nabla^{H} f|$-q.o. $p \in \Omega$ e per cui*

$$\int_\Omega f\, div_H Y\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega \langle Y, \nu_f \rangle\, d\,|\nabla^{H} f| \quad \forall\, Y \in \mathbf{C}^1_0(\Omega, H).$$

Si dice che un insieme misurabile $E \subset \mathbb{G}$ ha H-perimetro finito in Ω se $\chi_E \in HBV(\Omega)$. L'H**-perimetro** *di E in Ω è la misura di Radon $|\partial E|_H(\Omega) := |\nabla^{H} \chi_E|(\Omega)$. Si chiama* H**-normale generalizzata interna lungo** ∂E *la $\mathbb{R}^{m_1}$-misura di Radon $\nu_E := -\nu_{\chi_E}$.*

OSSERVAZIONE **2 (Ipersuperfici)** *In questo seminario, come in molta letteratura (cfr. [6], [18, 19, 20], [21], [31]), studiamo le ipersuperfici dei gruppi di Carnot, per i molti legami che tali oggetti hanno con l'Analisi e la TGM. Si osservi che, ogni ipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^n (\cong \mathfrak{g})$, si identifica, tramite la mappa esponenziale, ad una ipersuperficie di $\mathbb{G}$,*

[3] Qui, $j \in \{1, ..., k\}$ mentre $i_j \in \{h_{j-1} + 1, ..., h_j\}$.

[4] Qui, come spesso in seguito, $\mathbb{G}$ si identifica ad $\mathbb{R}^n$ tramite la mappa esponenziale.

[5] Ciò discende dal fatto che, essendo entrambe misure di Haar per $\mathbb{G}$, sono uguali, a meno di una costante moltiplicativa (cfr., [32], [37]). Tale costante è qui assunta uguale ad 1.

ovvero S si identifica con $\exp S$. Chiameremo **ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare** $(r = 1, ..., \infty)$ *ogni ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare di $\mathbb{R}^n$, vista come ipersuperficie di $\mathbb{G}$. Nel seguito tuttavia considereremo anche un'altra classe di "ipersuperfici". Più precisamente, chiameremo* **ipersuperficie H-regolare**, *ogni sottinsieme di $\mathbb{G}$ che sia localmente il luogo degli zeri di una funzione $\mathbf{C}^1_H$ avente gradiente orizzontale non nullo (cfr. Definizione 5). Questi oggetti sono più naturali da un punto di vista sub-Riemanniano, in quanto la regolarità richiesta è puramente "orizzontale".*

La seguente proposizione è ben nota (cfr. [6]) e fornisce una rappresentazione esplicita della misura H-perimetro.

PROPOSIZIONE **3** *Sia $E \subset \mathbb{G}$ un insieme con frontiera $\mathbf{C}^2$ e di H-perimetro finito nell'aperto Ω. Allora*

$$|\partial E|_H(\Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} \sqrt{\langle X_1, \mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n} + ... + \langle X_{h_1}, \mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n}}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}, \tag{2}$$

dove $\mathrm{n_e}$ indica la normale unitaria Euclidea a ∂E. L'H-normale generalizzata ad ∂E è

$$\nu_E = \frac{(\langle X_1, \mathrm{n_e}\rangle_{\mathbb{R}^n}, ..., \langle X_{h_1}, \mathrm{n_e}\rangle_{\mathbb{R}^n})}{\sqrt{\langle X_1, \mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n} + ... + \langle X_{h_1}, \mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n}}}.$$

OSSERVAZIONE **4** *Precisiamo che nella precedente Proposizione 3, la normale Euclidea $\mathrm{n_e}$ lungo ∂E ed i vettori $X_i\,(i = 1, ..., h_1)$ del frame orizzontale $\underline{X_H}$, sono intesi come vettori di $\mathbb{R}^n$, munito del prodotto interno canonico $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$. Quando tuttavia parleremo di* **normale unitaria** *ν lungo ∂E, intenderemo sempre la sua rappresentazione rispetto al frame globale $\underline{X}$ per $\mathbb{G}$, cioè $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i X_i$, ove $|\nu| = 1$. Più precisamente, ν è data dall'espressione*

$$\nu(p) = \frac{(L_p \circ \exp)_* \mathrm{n_e}(\log p)}{|(L_p \circ \exp)_* \mathrm{n_e}(\log p)|} \quad (p \in \partial E \subset \mathbb{G}).$$

Nello studio delle ipersuperfici dei gruppi di Carnot è necessaria la seguente nozione.

DEFINIZIONE **3** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ una ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare. Si dice che S è* **caratteristica** *in $p \in S$ se $\dim H_p = \dim(H_p \cap T_pS)$ o, equivalentemente, se $H_p \subset T_pS$. L'***insieme caratteristico** *di S è denotato come C_S, cioè $C_S := \{p \in S : \dim H_p = \dim(H_p \cap T_pS)\}$.*

Da un punto di vista geometrico, un'ipersuperficie $S \subset \mathbb{G}$, avente normale unitaria ν, è *non-caratteristica* se, e solo se, il sottofibrato orizzontale è *trasversale* ad S $(H \pitchfork TS)$:

$$H_p \pitchfork T_pS \Longleftrightarrow proj_H\, \nu_p \neq 0 \Longleftrightarrow \exists\, X \in H : \langle X_p, \nu_p\rangle \neq 0 \qquad (p \in S)$$

OSSERVAZIONE **5 (Misura di Hausdorff di C_S)** *Se $S \subset \mathbb{G}$ è un'ipersuperficie $\mathbf{C}^1$-regolare, si può dimostrare (cfr. [31]) che la misura di Hausorff $Q-1$-dimensionale dell'insieme caratteristico C_S, relativa alla metrica d_H, è nulla, ossia $\mathcal{H}^{Q-1}_{\mathbf{cc}}(C_S) = 0$.*

OSSERVAZIONE **6 (Misura Riemanniana su Ipersuperfici)** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare e ν denoti la normale unitaria ad S. Allora la* **misura Riemanniana** $n-1$**-dimensionale** *relativa ad S si definisce come*

$$\sigma^{n-1}_{\mathcal{R}} \llcorner S := (\nu \lrcorner\, \sigma^n_{\mathcal{R}})|_S, \tag{3}$$

dove il simbolo $\lrcorner$ denota l'operazione di "contrazione" di una forma differenziale[6].

[6] Cioè, la mappa lineare $\lrcorner : \Lambda^k(T\mathbb{G}) \to \Lambda^{k-1}(T\mathbb{G})$ definita, per $X \in T\mathbb{G}$ e $\omega^k \in \Lambda^k(T\mathbb{G})$, come $X \lrcorner\, \omega^k(Y_1, ..., Y_{k-1}) = \omega^k(X, Y_1, ..., Y_{k-1})$ (cfr. [27]).

Nel caso di ipersuperfici non-caratteristiche, la misura H-perimetro si ottiene dall' integrazione di una "opportuna" forma differenziale (cfr. [36]).

Definizione 4 **(Forma H-perimetro σ_H^{n-1})** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare non-caratteristica e si denoti con ν la sua normale unitaria. Chiameremo* **H-normale** *ad S la proiezione su H, normalizzata, del vettore ν, cioè*

$$\nu_H := \frac{proj_H \, \nu}{|proj_H \, \nu|_H}.$$

Definiamo quindi la **forma H-perimetro** σ_H^{n-1} *su S come la $n-1$-forma differenziale su S data dalla contrazione della forma volume di $\mathbb{G}$ con la normale orizzontale ν_H. Cioè*

$$\sigma_H^{n-1} \llcorner S := (\nu_H \lrcorner \sigma_{\mathcal{R}}^n)|_S.$$

Osservazione 7 *Dalla precedente Definizione 4 si ottiene che*

$$\sigma_H^{n-1} \llcorner S = \sum_{i=1}^{h_1} \nu_{H\,i} \, (X_i \lrcorner \sigma_{\mathcal{R}}^n)|_S = \sum_{i=1}^{h_1} (-1)^{h_1+1} \nu_{H\,i} \, \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega}_i \wedge ... \wedge \omega_n|_S,$$

dove $\nu_{H\,i} := \langle \nu_H, X_i \rangle$ $(i = 1, ..., h_1)$. Notare che $\sigma_H^{n-1} \llcorner S = |proj_H \, \nu|_H \cdot \sigma_{\mathcal{R}}^{n-1} \llcorner S$.

Il confronto tra differenti nozioni di misura su ipersuperfici è un problema interessante e molto studiato. Per un'introduzione a queste problematiche rimandiamo a [31]. Ad esempio, nel caso di certi gruppi di Carnot, la misura H-perimetro coincide, a meno di una costante, con la misura di Hausdorff $Q-1$-dimensionale associata a d_H. In generale, usando un notevole teorema di rappresentazione provato in [1], si può dimostrare il seguente

Teorema 8 *Se $S \subset \mathbb{G}$ è un'ipersuperficie $\mathbf{C}^1$-regolare che è localmente frontiera di un aperto E avente H-perimetro localmente finito, allora*

$$|\partial E|_H \llcorner \mathcal{B} = k_{Q-1}(\nu_E) \, \mathcal{S}_{\mathbf{cc}}^{Q-1} \llcorner (S \cap \mathcal{B}) \quad \forall \, \mathcal{B} \in \mathcal{B}or(\mathbb{G}) \text{ (Boreliani)} \tag{4}$$

dove $\mathcal{S}_{\mathbf{cc}}^{Q-1}$ è la misura[7] *di Hausdorff sferica $Q-1$-dimensionale relativa a d_H e k_{Q-1} è una funzione dipendente da ν_E, detta* **fattore metrico** *(cfr. [31]).*

Se $\overset{\circ}{H} := H \setminus \{0_H\}$, dove 0_H è la sezione nulla di H, UH denoterà il quoziente di $\overset{\circ}{H}$ mediante dilatazioni positive. UH è detto *sottofibrato orizzontale unitario* di $\mathbb{G}$. La sua fibra è identificata alla sfera unitaria $\mathbb{S}^{h_1-1} (\subset \mathbb{R}^{h_1})$ munita dell'usuale misura sferica $d\sigma_s^{h_1-1}$. In seguito, se $\pi_W : W \to \mathbb{G}$ è un sottofibrato vettoriale di $T\mathbb{G}$ ed $A \subset \mathbb{G}$, denoteremo con WA la restrizione della struttura di W ad A.

Notazione 9 **(Iperpiani Verticali)** *Se $p_0 \in \mathbb{G}$ ed $X \in \mathit{UH}$, sia $\mathcal{I}_{p_0}(X) := L_{p_0}(exp\,(X_0^{\perp}))$, dove $X_0^{\perp}$ è il complemento g-ortogonale in $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{G}$ di X_0. Se $X_0 = \sum_{i=1}^{h_1} a_i \mathrm{e}_i$, si ha*

$$\mathcal{I}_{p_0}(X) = \Big\{ q \in \mathbb{G} : \sum_{i=1}^{h_1} (q_i - p_{0i}) \, a_j = 0 \Big\}.$$

[7]Ricordiamo che $\mathcal{S}_{\mathbf{cc}}^{Q-1}(S) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{S}_{\mathbf{cc},\delta}^{Q-1}(S)$ dove, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\mathcal{S}_{\mathbf{cc},\delta}^{Q-1}(S) = \inf \Big\{ \sum_i (\mathrm{diam}_H\,(B_i))^{Q-1} : \; S \subset \bigcup_i B_i ; \; \mathrm{diam}_H\,(B_i) < \delta \Big\}$$

e l'estremo inferiore è preso al variare delle d_H-palle B_i.

$\mathcal{I}_{p_0}(X)$ *è detto* **iperpiano verticale per** p_0 **e** g**-ortogonale ad** X. $\mathcal{V}_{p_0}$ *indica la classe di tutti gli iperpiani verticali per* p_0*, cioè* $\mathcal{V}_{p_0} := \{\mathcal{I}_{p_0}(X) : X \in \mathit{UH}\}$. *È opportuno ricordare che* $\exp(X_0^{\perp})$ *risulta essere un* **sottogruppo massimale di** $\mathbb{G}$. *È anche un ideale, come è facile verificare.*

Osservazione **10 (H-perimetro ed Iperpiani Verticali)** *Risulta*

$$|\partial \mathcal{I}_{p_0}(X)|_H(\Omega) = \mathcal{H}_{\mathbf{e}}^{n-1}(\mathcal{I}_{p_0}(X) \cap \Omega) = \sigma_{\mathcal{R}}^{n-1} \llcorner (\mathcal{I}_{p_0}(X) \cap \Omega)$$

per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ *aperto. Ciò segue dal fatto che, per definizione di* $\mathcal{I}_{p_0}(X)$*, la normale unitaria (Riemanniana) ad* $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ *coincide col vettore orizzontale* X.

2. – Geometria Integrale nei gruppi di Carnot

Tutti i risultati originali presentati in questa sezione possono trovarsi in [35].

2.1. – *Un teorema di tipo Fubini.* – Stabiliremo nel seguito un teorema di integrazione che si può interpretare come una *Formula dell'Area* per sottovarietà di codimensione 1 *H-regolari* (cfr. Definizione 5) dei gruppi di Carnot. Prima di enunciare tale risultato, premettiamo la seguente:

Definizione **5 ([19])** *Si dice che* $S \subset \mathbb{G}$ *è una* **ipersuperficie H-regolare** *se per ogni* $p \in S$ *esistono un intorno aperto* Ω *di* p *ed* $f \in \mathbf{C}^1_H(\Omega)$ *tali che* $S \cap \Omega = \{q \in \Omega : f(q) = 0\}$ *e* $\nabla^H f(q) \neq 0$ *per ogni* $q \in \Omega$.

Tale definizione si è rivelata cruciale nello stabilire un notevole risultato di rettificabilità per insiemi di H-perimetro finito, in gruppi di Carnot (cfr. [18, 20]) di passo 2. Inoltre, in [19] si mostra come, usando questa definizione, si possa provare il seguente "Teorema della Funzione Implicita" per gruppi di Carnot.

Teorema **11 ([19])** *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ *un aperto contenente* $0\,(\in \mathbb{G})$ *e sia* $f \in \mathbf{C}^1_H(\Omega)$ *tale che* $f(0) = 0$ *e* $X_1 f(0) > 0$. *Si ponga* $E := \{p \in \Omega : f(x) < 0\}$, $S := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, *e se* $h,\, \delta > 0$, *siano* $J_h := [-h, h]$ *e* $I_\delta := \{\xi = (\xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi_j| \leq \delta,\, j = 2, \ldots, n\}$. *Se* $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ *e* $t \in J_h$, *sia* $\gamma^{X_1}_{(0,\xi)}(t)$ *la curva integrale di* $X_1 \in \mathit{UH}$ *di punto iniziale* $\exp(0, \xi) \in \{\exp(0, \eta) \in \mathbb{G} : \eta \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. *Allora esistono* $\delta,\, h > 0$ *tali che la mappa* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (t, \xi) \longmapsto \gamma^{X_1}_{(0,\xi)}(t)$ *è un diffeomorfismo dell'intorno* $J_h \times I_\delta$ *su un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e, se* $U \Subset \Omega$ *denota l'immagine di* $\mathrm{Int}\{J_h \times I_\delta\}$ *tramite questa mappa, si ha che* E *ha H-perimetro finito in* U *e* $\partial E \cap \Omega = S \cap U$. *Se* ν_E *è la H-normale generalizzata interna lungo* ∂E *risulta*

$$\nu_E(p) = -\frac{\nabla^H f(p)}{|\nabla^H f(p)|_H} \quad \forall\, p \in S \cap \Omega, \quad |\nu_E|_H = 1 \;\; per \;\; |\partial E|_H\text{-}q.o.\;\, p \in U.$$

Inoltre, esiste un'unica funzione continua $\phi(\xi) : I_\delta \to J_h$ *tale che, posto* $\Phi(\xi) = \gamma^{X_1}_{(0,\xi)}(\phi(\xi))$ $(\xi \in I_\delta)$, *si ha* $S \cap U = \{p \in \Omega : p = \Phi(\xi),\, \xi \in I_\delta\}$ *e l'H-perimetro è dato da*

$$|\partial E|_H(U) = \int_{I_\delta} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{h_1} |X_j f(\Phi(\xi))|^2}}{X_1 f(\Phi(\xi))}\, d\xi.$$

Dopo queste premesse generali, possiamo enunciare uno dei principali risultati ottenuti.

Teorema **12** (**[35]**) *Sia S una ipersuperficie H-regolare nel senso della Definizione 5. Supponiamo che $S = \partial E$, dove E ha localmente H-perimetro finito e frontiera $\mathbf{C}^1_H$. In virtù del precedente Teorema 11, tale ipotesi non lede la generalità. Inoltre, sia $X \in \mathit{UH}$ una sezione trasversale ad S e sia γ_q^X la curva integrale di X (X-linea) di punto iniziale $q \in S$. Assumiamo che $\gamma_q^X(\mathbb{R}) \cap S = q$ per ogni $q \in S$. Infine, sia $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ un insieme misurabile che sia "raggiungibile"*[8] *mediante X-linee che intercettano S. Allora, $\mathcal{D}_q := \gamma_q^X(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è $\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}$-misurabile per $|\partial E|_H$-q.o. $q \in S$. La mappa $S \ni q \longmapsto \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}_q)$ è $|\partial E|_H$-misurabile su S e, se $Pr_X[S] : \mathbb{G} \longrightarrow S$ denota la proiezione*[9] *su S lungo γ_q^X, si ha*

$$\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}) = \int_{Pr_X[S](\mathcal{D})} \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}_q)\, |\langle X_q, \nu_{E\,q}\rangle|\, d\, |\partial E|_H\,(q).$$

Inoltre, se $\psi \in L^1(\mathcal{D})$, sia $\psi_{|\mathcal{D}_q}$ la restrizione di ψ a $\mathcal{D}_q$, e definiamo la mappa

$$\psi_q : (\gamma_q^X)^{-1}(\mathcal{D}_q) \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \qquad \psi_q(t) = (\psi \circ \gamma_q^X)(t).$$

Allora ψ_q è $\mathcal{L}^1$-misurabile in $\mathbb{R}$ per $|\partial E|_H$-q.o. $q \in S$ o, equivalentemente, la restrizione $\psi_{|\mathcal{D}_q}$ è $\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}$-misurabile per $|\partial E|_H$-q.o. $q \in S$. Risulta che la mappa

$$S \ni q \longmapsto \int_{\mathcal{D}_q} \psi\, d\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}} = \int_{\gamma_q^{-1}(\mathcal{D}_q)} \psi_q(t)\, dt$$

è $|\partial E|_H$-misurabile su S e vale la seguente formula:

$$\int_{\mathcal{D}} \psi\, d\,\mathcal{L}^n = \int_{Pr_X[S](\mathcal{D})} \Big(\int_{(\gamma_q^X)^{-1}(\mathcal{D}_q)} \psi_q(t)\, dt \Big)\, |\langle X_q, \nu_{E\,q}\rangle|\, d\, |\partial E|_H\,(q).$$

Osservazione **13** *Vorremmo sottolineare che, in [35], la prova di questo risultato viene effettuata in due passi: nel primo si prova che la tesi è valida per ipersuperfici $\mathbf{C}^1$ che siano trasversali alla direzione orizzontale X; nel secondo passo, se ne estende la validità alla classe delle ipersuperfici H-regolari, mediante una procedura di approssimazione, ispirata ad un metodo utilizzato in [17].*

2.2. – *Slicing 1-dimensionali di funzioni HBV*. – Esponiamo ora una caratterizzazione delle funzioni HBV in termini di restrizioni a fibrazioni 1-dimensionali con X-linee. Questo tipo di risultato, generalizza una classica caratterizzazione Euclidea per funzioni BV, per la quale rimandiamo a [2]. A tal fine, dobbiamo premettere alcune definizioni.

Definizione **6** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ aperto ed $X \in H$. Allora $f \in L^1(\Omega)$ ha* **X-variazione limitata** *in Ω se $|Xf|(\Omega) := \sup\{ \int_\Omega fX\varphi\, d\mathcal{L}^n : \varphi \in \mathbf{C}^1_0(\Omega),\ |\varphi| \leq 1\} < \infty$. $|Xf|(\Omega)$ è detta X-variazione di f in Ω. Inoltre, $BV_X(\Omega)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni di X-variatione limitata in Ω.*

Definizione **7** *Sia $X \in H$ fissato e si denoti con γ la X-linea di punto iniziale $p \in \mathbb{G}$, cioè $\gamma(t) := \exp[tX](p)$ ($t \in \mathbb{R}$). Siano inoltre $\mathcal{U} \subset \gamma$ un aperto ed $f \in L^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}} \llcorner \gamma)$*[10]. *Poniamo allora*

$$var^1_X[f](\mathcal{U}) := |D(f \circ \gamma)|(\gamma^{-1}(\mathcal{U})),$$

[8] $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{G}$ è *raggiungibile da S mediante X-linee,* se

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^X_S := \{p \in \mathbb{G} : \exists\, q \in S,\ \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } p = exp[tX](q)\}.$$

[9] Più precisamente, se $X \in \mathit{UH}$ è fissato, $Pr_X[S] : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^X_S \longmapsto S$ è definita come segue: *se $p \in \mathcal{D}$ e $q \in S$, allora $Pr_X[S](p) := q$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $p = \exp[tX](q)$.*

[10] È lo spazio delle funzioni $\mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}$-sommabili definite nell'aperto $\mathcal{U} \subset \gamma$.

dove

$$|D(f\circ\gamma)|(\gamma^{-1}(\mathcal{U}))=\sup\Big\{\int_\gamma f\,d\psi,\ \psi\in\mathbf{C}^1_0(\mathcal{U}),|\psi|\leq 1\Big\}.$$

In altre parole, $var^1_X[f](\mathcal{U})$ *denota l'usuale "variazione 1-dimensionale" in* $\gamma^{-1}(\mathcal{U})\subset\mathbb{R}$ *della funzione* $f\circ\gamma$ *(cfr. [2], [44]).*

L'annunciata caratterizzazione dello spazio *HBV* seguirà come corollario del seguente risultato di interesse autonomo.

TEOREMA **14 ([35])** *Sia* $S\subset\mathbb{G}$ *una ipersuperficie* H*-regolare ed assumiamo che* $S=\partial E$, *dove* $E\subset\mathbb{G}$ *è un insieme che ha localmente* H*-perimetro finito e frontiera* $\mathbf{C}^1_H$. *Inoltre, sia* $X\in\mathit{U\!H}$ *una sezione trasversale ad* S *e sia* γ_q *la curva integrale (*X*-linea) di* X *di punto iniziale* $q\in S$. *Assumiamo che* $\gamma_q(\mathbb{R})\cap S=q$ *per ogni* $q\in S$. *Infine, sia* $\Omega\subseteq\mathbb{G}$ *un insieme misurabile che sia raggiungibile mediante* X*-linee che intercettano* S. *Allora*

$$|Xf|(\Omega)=\int_{Pr_X[S](\Omega)} var^1_X[f_{\gamma_q}](\Omega_q)\,|\langle X_q,\nu_{E\,q}\rangle|\,d\,|\partial E|_H(q)$$

dove $f_{\gamma_q}:=f\circ\gamma_q$ *e* $\Omega_q:=\gamma_q\cap\Omega$.

COROLLARIO **15 ([35])** *Siano* $\underline{X_H}=\{X_1,...,X_{h_1}\}$ *un frame per* H *e* $j=1,...h_1$. *Sia* $S_j\subset\mathbb{G}$ *una ipersuperficie* H*-regolare e* $S_j=\partial E_j$, *dove* $E_j\subset\mathbb{G}$ *è un insieme di* H*-perimetro localmente finito e frontiera* $\mathbf{C}^1_H$. *Supponiamo che* X_j *è trasverso ad* S_j *e che ogni* X_j*-linea* γ^j_q *di punto iniziale* $q\in S_j$ *sia tale che* $\gamma^j_q(\mathbb{R})\cap S_j=q$. *Infine, sia* $\Omega\subseteq\mathbb{G}$ *un insieme misurabile che sia raggiungibile mediante* X_j*-linee intercettanti* S_j. *Si ha allora che* $f\in HBV(\Omega)$ *se e solo se* $f_{\gamma^j_q}\in BV^1_{X_j}(\Omega^{X_j}_q)$ *per* $|\partial E_j|_{X_j}$*-q.o.* $q\in Pr_{X_j}[S_j](\Omega)$ *e*

$$\int_{Pr_{X_j}[S_j](\Omega)} var^1_{X_j}[f_{\gamma^j_q}](\Omega^{X_j}_q)\,d\,|\partial E_j|_{X_j}(q)<\infty\qquad\forall\ j=1,...,h_1.$$

Abbiamo qui usato la notazione sintetica $d\,|\partial E_j|_{X_j}:=|\langle X,\nu_{E_j}\rangle|\,d\,|\partial E_j|_H$.

È da notare che la precedente caratterizzazione dello spazio *HBV* si può riformulare in termini abbastanza semplici, utilizzando, al posto di ipersuperfici H-regolari, la classe $\mathcal{V}_{p_0}$ degli iperpiani verticali passanti per un punto assegnato $p_0\in\mathbb{G}$.

COROLLARIO **16 ([35])** *Siano* $\underline{X_H}=\{X_1,...,X_{h_1}\}$ *un frame per* H *e* $j=1,...h_1$. *Sia* $\mathcal{I}_0(X_j)$ *l'iperpiano verticale per* $0\in\mathbb{G}$ *e* g*-ortogonale ad* X_j. *Sia* γ^j_q *la* X_j*-linea che parte da* $q\in\mathcal{I}_0(X_j)$. *Infine, sia* $\Omega\subseteq\mathbb{G}$ *misurabile. Allora* $f\in HBV(\Omega)$ *se e solo se* $f_{\gamma^j_q}\in BV^1_{X_j}(\Omega^{X_j}_q)$ *per* $\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}$*-q.o.* $q\in Pr_{X_j}[\mathcal{I}_0(X_j)](\Omega)\subseteq\mathcal{I}_0(X_j)$ *e*

$$\int_{Pr_{X_j}[\mathcal{I}_0(X_j)](\Omega)} var^1_{X_j}[f_{\gamma^j_q}](\Omega^{X_j}_q)\,d\,\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(q)<\infty\qquad\forall\ j=1,...,h_1.$$

2.3. – *H-perimetro e H-convessità geometrica.* – In questa sezione stabiliamo alcune formule Integral-Geometriche per volume ed H-perimetro.

Osserviamo preliminarmente che, a differenza dalle usuali formule di questo tipo per spazi Euclidei, non considereremo la famiglia dei sottospazi vettoriali $n-1$-dimensionali di $T\mathbb{G}$ passanti per un punto fissato $p_0\in\mathbb{G}$, ma ci si restringerà a quella dei sottogruppi massimali di $\mathbb{G}$ per p_0[11], precedentemente definita come la classe degli iperpiani verticali

[11] Più precisamente, i traslati in p_0 dei sottogruppi massimali di $\mathbb{G}$

$\mathcal{V}_{p_0}$ per p_0. Tale assunzione è suggerita proprio dal contenuto del Teorema 14 unitamente alla semplice osservazione che *ogni sottinsieme di $\mathbb{G}$ è raggiungibile mediante X-linee di punto iniziale $q \in \mathcal{I}_{p_0}(X)$ (p_0 è arbitrario).*

Gli elementi di $U\!H$ sono coppie ordinate $(p; X) \in \mathbb{G} \times \mathbb{S}^{m-1} \cong U\!H$. Inoltre $d\mu$ denoterà misura volume di $U\!H$, definita come

$$d\mu(p; X) := d\mathcal{L}^n(p) \otimes d\sigma_s^{h_1-1}(X).$$

Più esplicitamente, se $f \in L^1(U\!H)$, si ha

$$\int_{U\!H} f(p; X)\, d\mu(p; X) := \int_{\mathbb{G}} d\mathcal{L}^n(p) \int_{U\!H_p} f(p; X)\, d\sigma_s^{h_1-1}(X).$$

Un'immediata conseguenza del Teorema 12 è che

$$\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{O_{h_1-1}} \int_{U\!H_0} d\sigma_s^{h_1-1}(X) \int_{Pr_X[\mathcal{I}_{p_0}(X)](\mathcal{D})} \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}^X_q)\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(q), \tag{5}$$

dove O_{h_1-1} denota la misura $h_1 - 1$-dimensionale di superficie di $\mathbb{S}^{h_1-1} \subset \mathbb{R}^{m_1}$.

Diamo ora una caratterizzazione *Integral-Geometrica* della misura H-perimetro.

Teorema **17 ([35])** *Sia $\mathcal{D}$ un insieme di H-perimetro finito ed $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto. Siano $p_0 \in \mathbb{G}$ fissato e $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ l'iperpiano verticale per p_0 e g-ortogonale ad $X \in U\!H$. Allora*

$$|\partial\mathcal{D}|_H(\Omega) = \frac{1}{2\kappa_{h_1-1}} \int_{U\!H_{p_0}} d\sigma_s^{h_1-1}(X) \int_{Pr_X[\mathcal{I}_{p_0}(X)](\mathcal{D}\cap\Omega)} var^1_X[\chi_{\mathcal{D}^X_q}](\Omega^X_q)\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(q), \tag{6}$$

dove κ_{h_1-1} denota la misura $h_1 - 1$-dimensionale della palla di $\mathbb{R}^{h_1-1}$.

Definizione **8** *Siano $p_0 \in \mathbb{G}$, $X \in U\!H$, e $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ l'iperpiano verticale per p_0 e g-ortogonale ad X. Diciamo allora che $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{G}$ è* **puntualmente X-normale rispetto ad $\mathcal{I}_{p_0}(X)$** *se per ogni $q \in \mathcal{I}_{p_0}(X)$ si ha che $(\gamma^X_q)^{-1}(\gamma^X_q(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D})$ è l'insieme vuoto o un intervallo di $\mathbb{R}$, oppure, equivalentemente, se $\gamma^X_q(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è vuoto o è un sottinsieme connesso di $\gamma^X_q(\mathbb{R})$.*

La nozione di normalità rispetto ad una direzione orizzontale è invariante rispetto alle traslazioni di gruppo. Inoltre questa nozione generalizza quella Euclidea (cfr. [44]).

Definizione **9 (H-convessità geometrica)** *Diciamo che $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{G}$ è* **H-convesso** *se per ogni $p \in \mathbb{G}$ ed ogni $X \in U\!H$ si ha che $(\gamma^X_p)^{-1}(\gamma^X_p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D})$ è l'insieme vuoto o è un intervallo di $\mathbb{R}$, oppure, equivalentemente, se $\gamma^X_p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$ è vuoto o è un sottinsieme connesso di $\gamma^X_p(\mathbb{R})$.*

Si noti che tale nozione coincide con quella usuale se il gruppo di Carnot è $(\mathbb{R}^n, +)$. La nozione di *H-convessità* è invariante rispetto alle traslazioni di gruppo ed è *stabile rispetto all'intersezione*, cioè se $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subseteq \mathbb{G}$ sono H-convessi, allora anche $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ è H-convesso.

La nozione di H-convessità geometrica qui formulata risulta essere equivalente alle altre presenti in letteratura (cfr. [30], [13]). Si noti che *l' H-convessità di un insieme risulta equivalente alla X-normalità di esso rispetto a $\mathcal{I}_{p_0}(X)$ per ogni $X \in U\!H$ (p_0 è fissato).*

Osservazione **18** *Un insieme $\mathcal{D}$ è H-convesso se e solo se $\log(L_{-q}(H_q \cap \mathcal{D}))$ è stellato in H_0 rispetto allo $0 \in H$ per ogni $q \in \mathcal{D}$. In particolare, se $\log(L_{-q}(H_q \cap \mathcal{D}))$ è un convesso Euclideo (come sottinsieme di H_0) per ogni $q \in \mathcal{D}$, allora $\mathcal{D}$ è H-convesso. Infine, se $q \in \exp(V_k)$, dove V_k è il centro di $\mathfrak{g}$, allora H_q, visto come sottinsieme di $\mathbb{G}(\cong \mathbb{R}^n)$, è un piano affine h_1-dimensionale e se $\mathcal{D}$ è H-convesso, allora $H_q \cap \mathcal{D}$ è stellato in H_q rispetto a q per ogni $q \in \exp(V_k)$.*

Osservazione **19** **(H-convessità nei gruppi di Carnot di passo 2)** *Se $\mathbb{G}$ ha passo 2, allora le sue X-linee ($X \in H$) sono rette Euclidee. Pertanto gli insiemi convessi Euclidei sono anche H-convessi, ma in generale il viceversa non è vero, come mostrato nel successivo esempio.*

Esempio **20** **(Un H-convesso in $\mathbb{H}^1$ che non è convesso)** *Si denoti con $\mathbb{H}^1$ il gruppo di Heisenberg, cioè $\mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \bullet)$, dove $(z,t) \bullet (z',t') = (z+z', t+t'+2\Im(z\bar{z'}))$. Allora, il cono troncato C_α di apertura $\alpha > 0$, definito come*

$$C_\alpha = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z| \leq \alpha\,|t|,\ |z| \leq 1,\ \alpha\,|t| \leq 1\},$$

risulta H-convesso per ogni $\alpha \geq 2$ ma non convesso. Questo segue osservando che la pendenza massimale di ogni X-linea ($X \in \mathit{UH}$) avente come punto iniziale un punto nel cilindro $\{(z,t) \in \mathbb{H}^1 : |z| \leq 1\}$ è 2. Pertanto ognuna di esse intercetta C_α in un segmento.

Questa nozione di convessità orizzontale assieme alla formula (6) consente di ottenere la generalizzazione, per i gruppi di Carnot, di un classico teorema di Cauchy (cfr. [41]).

Teorema **21** **([35])** *Sia $p_0 \in \mathbb{G}$ fissato. Sia $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ un insieme H-convesso. Allora si ha*

$$|\partial\mathcal{D}|_H(\mathbb{G}) = \frac{1}{\kappa_{h_1-1}} \int_{\mathit{UH}_{p_0}} \mathcal{H}^{n-1}_{\mathbf{e}}(Pr_X[\mathcal{I}_{p_0}(X)](\mathcal{D}))\, d\sigma_s^{h_1-1}(X).$$

2.4. – *Formula di tipo Santalò ed applicazioni.* – Generalizziamo ad arbitrari gruppi di Carnot una ben nota formula di Santalò [41], già provata da Pansu nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ (cfr.[40]). Come conseguenza dimostriamo alcune stime dal basso per il primo autovalore positivo λ_1 del problema agli autovalori di Dirichlet relativo al laplaciano sub-ellittico $\Delta_H = \sum_{i=1}^{h_1} X_i^2$. Per semplicità, in questa sezione tutti gli oggetti in considerazione saranno supposti regolari.

Poniamo

$$\ell_p(X) := \sup\,\{s \in \mathbb{R}_+ : \gamma_p^X(t) \in \mathcal{D},\ \forall\, t \in (0,s)\},$$

dove γ_p^X è l'unica X-linea tale che $\gamma_p^X(0) = p,\ \dot\gamma_p^X(0) = X$. Si noti che

$$\ell_p(X) = \mathcal{H}^1_{\mathbf{cc}}(\gamma_p^X(\,]0, \ell_p(X)[\,)).$$

Inoltre si ponga $\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D} := \{X \in \mathit{UH}\overline{\mathcal{D}} : p = \pi_{\mathit{UH}}(X) \in \partial\mathcal{D},\ \langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle > 0\}$, dove π_{UH} denota la proiezione canonica associata al fibrato UH. In altre parole, $\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}$ è l'insieme dei *vettori orizzontali unitari "entranti" lungo $\partial\mathcal{D}$* e, identificando la generica fibra di UH con $\mathbb{S}^{h_1-1}$, esso coincide con l'emisfero $\mathbb{U}^{h_1-1}$ determinato dalla H-normale unitaria $\nu_{\mathcal{D}}$ lungo $\partial\mathcal{D}$. Equipaggiamo inoltre $\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}$ con la misura

$$d\sigma(p;X) := d\,|\partial\mathcal{D}|_H(p) \otimes d\sigma_s^{h_1-1}(X),$$

dove $(p;X) \in \partial\mathcal{D} \times \mathbb{U}^{h_1-1} \cong \mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}$. Vale allora il seguente risultato.

Teorema **22** **([35])** *Se $\mathcal{D} \subset \mathbb{G}$ è un insieme relativamente compatto, $\mathbf{C}^\infty$-regolare ed $f \in L^1(\mathit{UH}\mathcal{D})$, si ha*

$$\int_{\mathit{UH}\mathcal{D}} f(q;Y)\, d\mu(q;Y) = \int_{\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}} \int_0^{\ell_p(X)} f(\gamma_p^X(t);X)\, \langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle\, dt\, d\sigma(p;X)$$

$$= \int_{\partial\mathcal{D}} \int_{\mathit{UH}^+\partial\mathcal{D}_p} \int_0^{\ell_p(X)} f(\gamma_p^X(t);X)\, \langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle\, dt\, d\sigma_s^{h_1-1}(X)\, d\,|\partial\mathcal{D}|_H(p).$$

Da questo si deduce immediatamente una formula Integral-Geometrica per il volume di domini regolari nei gruppi di Carnot.

Corollario **23** *Nelle precedenti ipotesi, si ha*

$$\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{O_{h_1-1}}\int_{\partial\mathcal{D}}\int_{UH^+\partial\mathcal{D}_p} \ell_p(X)\,\langle X_p, \nu_{\mathcal{D}p}\rangle d\sigma_s^{h_1-1}(X)\, d\,|\partial\mathcal{D}|_H\,(p), \tag{7}$$

dove O_{h_1-1} *indica la misura* h_1-1*-dimensionale di* $\mathbb{S}^{h_1-1}$.

Definiamo ora la *taglia orizzontale* di un dominio $\mathcal{D}$ come segue:

$$\mathrm{breadth}_H\,(\mathcal{D}) := \sup_{(q;Y)\in UH^+\partial\mathcal{D}} \ell_q(Y).$$

Denotando poi con $\mathrm{diam}_H\,(\mathcal{D})$ il diametro di $\mathcal{D}$ rispetto alla distanza di Carnot-Carathéodory d_H, risulta ovviamente

$$\mathrm{breadth}_H\,(\mathcal{D}) \leq \mathrm{diam}_H\,(\mathcal{D}). \tag{8}$$

Da (7) si ha subito il seguente

Corollario **24** *Sia* $\mathcal{D}\subset\mathbb{G}$ *un dominio relativamente compatto* $\mathbf{C}^\infty$*-regolare. Allora*

$$\frac{\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}(\mathcal{D})}{|\partial\mathcal{D}|_H\,(\mathbb{G})} \leq \frac{O_{h_1-2}}{O_{h_1-1}\cdot(h_1-1)}\cdot \mathrm{breadth}_H\,(\mathcal{D}), \tag{9}$$

dove O_k *denota la misura* k*-dimensionale di superficie di* $\mathbb{S}^k$*. La (8) implica che nella (9)si potrà sostituire il* d_H*-diametro* $\mathrm{diam}_H\,(\mathcal{D})$ *alla taglia orizzontale* $\mathrm{breadth}_H\,(\mathcal{D})$.

Ricordiamo che il *sub-Lalaciano* di un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è definito come segue:

$$\Delta_H := \sum_{j=1}^{h_1} X_j^2, \quad \Delta_H\,\psi(p) = \sum_{j=1}^{h_1} \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\psi(p\bullet\exp(tX_j)) \quad (\psi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{G})).$$

Si consideri ora il *problema agli autovalori di Dirichlet* per Δ_H su un dominio limitato, $\mathbf{C}^\infty$-regolare $\mathcal{D}$, cioè cerchiamo quei numeri reali λ per cui esistono soluzioni non banali $\phi\in W^{1,2}_H(\mathcal{D})$[12] di

$$\Delta_H\,\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \tag{10}$$

soddisfacenti $\phi_{|\partial\mathcal{D}} = 0$. La classica caratterizzazione di Lord Reileigh del primo autovalore (cfr. [7]) si esprime, nel caso del sub-Laplaciano Δ_H, come segue:

$$\lambda_1(\mathcal{D}) = \inf_{\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathcal{D})} \frac{\int_{\mathcal{D}}|\nabla^H\varphi|_H^2\, d\mathcal{L}^n}{\int_{\mathcal{D}}|\varphi|^2\, d\mathcal{L}^n}.$$

A partire dal Teorema 22, usando un metodo simile a quello usato da Crooke nei lavori [10, 11], si possono provare, in modo semplice, stime dal basso per $\lambda_1(\mathcal{D})$. In proposito vale il seguente

Teorema **25 ([35])** *Siano* $\mathcal{D}\subset\mathbb{G}$ *e* $\lambda_1(\mathcal{D})$ *come sopra. Allora*

$$\lambda_1(\mathcal{D}) \geq \frac{\pi^2\cdot h_1}{O_{h_1-1}}\cdot\inf_{p\in\mathcal{D}}\int_{UH_p}\frac{1}{\ell_p^2(X)}\, d\sigma_s^{h_1-1}(X).$$

Si ha inoltre

$$\lambda_1(\mathcal{D}) \geq \frac{\pi^2\cdot h_1}{[\mathrm{breadth}_H\,(\mathcal{D})]^2} \geq \frac{\pi^2\cdot h_1}{[\mathrm{diam}_H\,(\mathcal{D})]^2}.$$

[12] $W^{1,2}_H(\mathcal{D}) := \{\psi\in L^2(\mathcal{D}) : \exists\, X_i\psi$ (nel senso delle distribuzioni), $X_i\psi\in L^2(\mathcal{D}),\ i=1,...,h_1\}$

3. – Integrazione per parti su Ipersuperfici e Variazione prima dell'H-perimetro

3.1. – *Elementi di Geometria Differenziale.* – Introduciamo alcune nozioni finalizzate allo studio delle ipersuperfici non-caratteristiche dei gruppi di Carnot. Questi argomenti sono stati oggetto di parte della mia tesi di dottorato (cfr. [36]). Occorre qui ricordare che precedentemente e\o contemporaneamente, alcuni tra questi argomenti, sono stati affrontati in [5], [8], [39], specificamente per quanto attiene lo studio delle superfici nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, ed anche [12] dove viene avviato uno studio generale di varie questioni di analisi su ipersuperfici, per gruppi di Carnot arbitrari.

Definizione **10** *Sia ∇ l'unica connessione di* **Levi-Civita invariante a sinistra** *su $\mathbb{G}$ relativa alla metrica g. Se $X, Y \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G}, H)$, poniamo $\nabla^H_X Y := proj_H(\nabla_X Y)$, e se $X, Y \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G}, V)$ poniamo $\nabla^V_X Y := proj_V(\nabla_X Y)$. Le connessioni ∇^H e ∇^V sono esempi di* **connessioni parziali**. *In particolare, ∇^H è detta* **connessione orizzontale**, *mentre ∇^V è detta* **connessione verticale**.

D'ora in avanti, per evitare confusioni nelle notazioni, denoteremo con $grad_H$ il gradiente orizzontale.

Per quanto concerne la teoria delle connessioni sui gruppi di Lie si veda, ad esempio, [27]. Inoltre, per alcune questioni di geometria dei gruppi di Lie nilpotenti equipaggiati con una metrica Riemanniana invariante a sinistra e con l'associata connessione di Levi-Civita, rimandiamo al lavoro di Milnor [33]. Ricordiamo che una definizione di *connessione parziale* compare in [23]; si vedano anche [25] e [29]. Rimandiamo all' Appendice per ulteriori dettagli.

Osserviamo esplicitamente che, rispetto al frame globale $\underline{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ di sezioni invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$, riesce (cfr. [33]):

$$\nabla_{X_i} X_j = \frac{1}{2}(C^r_{ij} - C^i_{jr} + C^j_{ri})X_r \qquad \forall\, i,\, j = 1, ..., n, \tag{11}$$

dove $C^r_{ij}\,(i, j, r = 1, ..., n)$ sono le costanti strutturali dell'algebra $\mathfrak{g}$ (cfr. Sezione 1.1).

Ciò consente di effettuare calcoli espliciti, in termini di costanti strutturali.

Come esempio, da (11) segue che la *1ª equazione di struttura di Cartan* (cfr. [7], [27]) per il coframe $\underline{\omega}$, assume la forma seguente:[13]

$$d\omega_r = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq h_{l-1}} C^r_{ij}\; \omega_i \wedge \omega_j \qquad (h_{l-1} < r \leq h_l,\ l = 1, ..., k). \tag{12}$$

Osservazione **26** *Dalla Definizione 10 usando le proprietà delle costanti strutturali e le usuali proprietà della connessione di Levi-Civita (cfr.[7]), si ottiene, in particolare, che ∇^H è "piatta" nel senso che $\nabla^H_{X_i} X_j = 0\,(i, j = 1, ..., h_1)$. Ciò giustifica l'espressione fornita in precedenza per gli operatori gradiente e divergenza orizzontali (cfr. Definizione 1).*

[13] In generale, se N^n è una varietà Riemanniana, $\underline{X}$ un frame ortonormale per N ed $\underline{\omega}$ il suo co-frame duale, le *Equazioni di struttura di Cartan* hanno la forma seguente:

$$d\omega_i = -\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_j \qquad d\omega_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{jl} \wedge \omega_{lk} - \Omega_{jk},$$

dove $\omega_{ij}(X) := \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle\,(i, j = 1, ..., n)$ sono le *1-forme di connessione* e $\Omega_{jk}\,(j, k = 1, ..., n)$ sono le *2-forme di curvatura*, definite come $\Omega_{jk}(X, Y) := \omega_k(\mathrm{R}(X, Y)X_j)\ (X, Y \in \mathfrak{X}(N))$. Qui R denota il tensore di curvatura Riemanniano. Sia le ω_{ij} che le Ω_{ij} risultano anti-simmetriche (negli indici bassi).

Osservazione 27 *Occorre notare che la connessione orizzontale* ∇^H *è "compatibile" con la metrica sub-Riemanniana* g_H*, cioè*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla^H_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^H_X Z\rangle$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G}, H)$. *Ciò segue dalla definizione di* ∇^H*, assieme all' analoga proprietà della connessione di Levi-Civita* ∇ *su* $\mathbb{G}$. *Ovviamente,* ∇^H *soddisfa anche la proprietà di non possedere "torsione", ovvero* $\nabla^H_X Y - \nabla^H_Y X - proj_H[X, Y] = 0$ *per ogni* $X, Y \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G}, H)$.

Molte questioni della geometria sub-Riemanniana dei gruppi di Carnot possono essere formulate in termini della connessione orizzontale ∇^H.

Introduciamo ora alcune definizioni concernenti le ipersuperfici. Precisiamo subito che d'ora in avanti considereremo soltanto *ipersuperfici non-caratteristiche.* Ovvero ci limiteremo a considerare sottinsiemi di un'ipersuperficie S contenuti nel complentare del suo insieme caratteristico C_S.

Definizione 11 *Se* ν_H *è la normale orizzontale unitaria ad* S *nei punti* $p \in S \setminus C_S$*, si ha che* $H_p = (\nu_H)_p \oplus H_pS$*, ove si è posto* $H_pS := (\nu_H)_p^\perp \cap H_p$. *Diciamo che* H_pS *è lo* **spazio tangente orizzontale** *in* p *ad* S. *Definiamo quindi, nel modo ovvio, i fibrati vettoriali associati* $HS(\subset TS)$ *e* $\nu_H S$*, detti, rispettivamente,* **fibrato tangente orizzontale** *e* **fibrato normale orizzontale**.

Osserviamo che, indicata con ∇^S la connessione indotta su S dalla connessione di Levi-Civita ∇ su $\mathbb{G}$[14], essa induce una connessione parziale ∇^{HS} relativa al sottofibrato HS di TS, definita nel modo seguente[15]:

$$\nabla^{HS}_X Y := proj_{HS}(\nabla^S_X Y) \quad (X, Y \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)).$$

A partire dalla decomposizione di H in somma diretta ortogonale (cfr. Definizione 11), la costruzione di ∇^{HS} si potrebbe anche fare mimando la definizione di connessione indotta su una sottovarietà (cfr. [7]). Infatti, risulta che

$$\nabla^{HS}_X Y = \nabla^H_X Y - \langle \nabla^H_X Y, \nu_H\rangle \nu_H \quad (X, Y \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)).$$

Definizione 12 *Chiameremo* ***HS*-gradiente** *di* $\psi \in \mathbf{C}^\infty(S)$*, l'unico vettore tangente orizzontale ad* S*,* $grad_{HS}\psi$*, soddisfacente* $\langle grad_{HS}\psi, X\rangle = d\psi(X) = X\psi$ *per ogni* $X \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)$. *Si denoterà con* div_{HS} *l'operatore di divergenza su HS, cioè se* $X \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)$ *e* $p \in S$*,* $div_{HS}X(p) := \mathrm{Trace}(Y \longrightarrow \nabla^{HS}_Y X)$ $(Y \in H_pS)$. *Infine, con* Δ_{HS} *si denoterà l'* ***HS*-Laplaciano***, ossia* $\Delta_{HS}\psi := div_{HS}(grad_{HS}\psi)$ $(\psi \in \mathbf{C}^\infty(S))$.

Useremo d'ora in poi la seguente convenzione sugli indici:

$$I, J, ... = 1, ..., n; \;\; i, j, ... = 1, ..., h_1; \;\; \alpha, \beta, ... = h_1 + 1, ..., n.$$

Se $U \subset \mathbb{G}$ è un aperto avente intersezione non-vuota con S, porremo $\mathcal{U} := U \cap S$ ed assumeremo che $\mathcal{U}$ è non-caratteristico.

Definizione 13 *Chiameremo* **frame adattato ad** $\mathcal{U}$ **in** U *un qualsiasi frame ortonormale in* U $\underline{\tau} := \{\tau_1, ..., \tau_n\}$ *tale che:*

$$(i)\ \tau_1|_{\mathcal{U}} := \nu_H; \qquad (ii)\ H_p\mathcal{U} = \mathrm{span}\{(\tau_2)_p, ..., (\tau_{h_1})_p\}\ (p \in \mathcal{U}); \qquad (iii)\ \tau_\alpha := X_\alpha.$$

[14] Pertanto, ∇^S è la connessione di Levi-Civita per S (cfr. [7]).

[15] La mappa $proj_{HS}$ denota la proiezione ortogonale di TS su HS.

DEFINIZIONE **14** *Diciamo II^a* **forma fondamentale sub-Riemanniana** *di S la mappa $\mathtt{s}_H : HS \times HS \to \nu_H S$ data da $\mathtt{s}_H(X,Y) := \langle \nabla^H_X Y, \nu_H\rangle\, \nu_H$ $(X, Y \in \mathbf{C}^\infty(S, HS))$. Sia $\mathcal{H}_H \in \nu_H S$ la* **curvatura media orizzontale di** *S, definita come la traccia di $\mathtt{s}_H$. In modo equivale, si ha $\mathcal{H}_H = -\sum_{j=2}^{h_1} \langle \nabla^H_{\tau_j}\nu_H, \tau_j\rangle \nu_H$. Infine la* **curvatura media scalare orizzontale di** *S è definita come $\mathcal{H}^{\mathbf{sc}}_H := \langle \mathcal{H}_H, \nu_H\rangle$.*

Nella precedente definizione, la traccia Tr è calcolata rispetto alla 1^a forma fondamentale sub-Riemanniana $g_{HS} = \langle\cdot,\cdot\rangle$, la quale è semplicemente la restrizione ad S della metrica g_H, ossia $g_{HS} := g_H|_{HS} = g|_{HS}$.

Con ragionamenti del tutto simili al caso Riemanniano, si può provare che la seconda forma fondamentale sub-Riemanniana $\mathtt{s}_H(X,Y)$ è una forma $\mathbf{C}^\infty(S)$**-bilineare in X e Y.** Tuttavia è molto importante notare che $\mathtt{s}_H$ **non è simmetrica**. La ragione è la seguente: si vede facilmente che la simmetria di $\mathtt{s}_H$ risulta equivalente al fatto che

$$X, Y \in HS \Longrightarrow proj_H[X,Y] \in HS.$$

In generale, tuttavia, quest'ultima condizione non è verificata. Ad esempio, nel gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, tale condizione è trivialmente verificata essendo HS un sottofibrato 1-dimensionale di TS. In $\mathbb{H}^n$ $(n > 1)$, tuttavia essa cessa la sua validità, come si può dimostare con un argomento dimensionale. La non-simmetria di $\mathtt{s}_H$ motiva la seguente

DEFINIZIONE **15** *Definiamo* **torsione** T_{HS} *dell' HS-connessione ∇^{HS}, come*

$$\mathrm{T}_{HS}(X,Y) := \nabla^{HS}_X Y - \nabla^{HS}_Y X - proj_H[X,Y] \quad (X, Y \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)).$$

Da questa definizione segue immediatamente che X, $Y \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)$ si ha

$$\mathrm{T}_{HS}(X,Y) = \mathtt{s}_H(Y,X) - \mathtt{s}_H(X,Y) = \langle proj_H[Y,X], \nu_H\rangle \nu_H.$$

Si osservi inoltre che la mappa $HS \ni X \longrightarrow \nabla^H_X \nu_H$, è, in effetti, l'analogo sub-Riemanniano della mappa di Weingarten (cfr. [28], Cap. 2). Usando la compatibilità di ∇^H con la metrica g_H si ottiene che $(\nabla^H_X\nu_H)_p \in H_pS$[16].

NOTAZIONE **28** *In seguito faremo uso delle seguenti notazioni:*

(i) $\varpi_\alpha := \frac{\nu_\alpha}{|proj_H \nu|_H}$ $\qquad (\alpha = h_1 + 1, ..., n)$;

(ii) $C^\alpha_H := [C^\alpha_{ij}]_{i,j=1,\dots,h_1} \in \mathcal{M}_{h_1\times h_1}(\mathbb{R})$ $\qquad (\alpha = h_1 + 1, ..., h_2)$;

(iii) $C_H := \sum_{\alpha=h_1+1}^{h_2} \varpi_\alpha C^\alpha_H$.

3.2. – *Integrazione per parti orizzontale su Ipersuperfici.* – Scopo di questa sezione è la determinazione di formule di integrazione per parti sulle ipersuperfici non-caratteristiche di un gruppo di Carnot, munite della misura H-perimetro. Nel seguito useremo notazioni ed ipotesi date nella precedente sezione.

Sia dunque $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ dove $\mathcal{U}$ è un aperto non-caratteristico di S. Dalla definizione di σ^{n-1}_H, con un semplice calcolo, basato sulla classica *Formula della Divergenza Riemanniana* (cfr. [42], ad esempio) e sulla definizione di σ^{n-1}_H, si ottiene

$$\begin{aligned} d(X \lrcorner\, \sigma^{n-1}_H)|_{\mathcal{U}} &= d(|proj_H \nu|_H\, X \lrcorner\, \sigma^{n-1}) = div_{TS}(|proj_H \nu|_H\, X)\, \sigma^{n-1}_{\mathcal{R}} \\ &= \left\{ div_{TS}\, X + \left\langle X, \frac{grad_{TS}\, |proj_H \nu|_H}{|proj_H \nu|_H} \right\rangle \right\} \sigma^{n-1}_H \llcorner\, \mathcal{U}, \end{aligned}$$

[16]Infatti riesce: $0 = X\langle \nu_H, \nu_H\rangle = 2\langle \nabla^H_X \nu_H, \nu_H\rangle$.

dove $grad_{TS}$ e div_{TS} sono gli usuali operatori di gradiente e divergenza tangenziali su S.

Il difetto di questa formula è che non è "esplicita", nel senso che in essa non emergono in modo chiaro le quantità geometriche realmente coinvolte. Per aggirare tale inconveniente, abbiamo sopra introdotto la nozione di frame adattato ad una ipersuperficie.

Sia dunque $\underline{\tau}$ un frame adattato ad $\mathcal{U} \subset S$ in U e denotiamo con $\underline{\phi} := \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ il suo *co-frame duale*, ottenuto per mezzo della metrica g. È immediato riconoscere che la forma H-perimetro σ_H^{n-1} su $\mathcal{U}$ è data da

$$\sigma_H^{n-1} \llcorner \mathcal{U} = (\nu_H \lrcorner \sigma_{\mathcal{R}}^n)|_{\mathcal{U}} = (\tau_1 \lrcorner \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}} = (\phi_2 \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}}.$$

Mediante calcoli espliciti con forme differenziali, basati sulla *1^a equazione di struttura di Cartan* relativa al co-frame $\underline{\phi}$, si possono ottenere formule di tipo divergenza "adattate".

Osservazione **29 (Misura sulla frontiera $\partial\mathcal{U}$)** *Nello stabilire tali formule occorre fare alcune precisazioni sulla frontiera topologica di $\mathcal{U}$. Innanzi tutto assumeremo, come nel caso Riemanniano, che $\partial\mathcal{U}$ sia una $n-2$-varietà Riemanniana regolare, orientata dal vettore normale unitario η. Denotiamo quindi con $\sigma_{\mathcal{R}}^{n-2}$ l'usuale misura Riemanniana su $\partial\mathcal{U}$, che si può definire come $\sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \llcorner \mathcal{U} = (\eta \lrcorner \sigma_{\mathcal{R}}^{n-1})|_{\mathcal{U}}$. Ciò equivale a dire che se $X \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{U}, T\mathcal{U})$, allora $(X \lrcorner \sigma_H^{n-1})|_{\partial\mathcal{U}} = \langle X, \eta\rangle |proj_H \nu|_H \, \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \llcorner \mathcal{U}$. Sia $\partial\mathcal{U}$* **geometricamente H-regolare***. Ciò significa che la proiezione su HS della normale Riemanniana unitaria η lungo $\partial\mathcal{U}$ è non-singolare, cioè $|proj_{HS}\eta|_{HS} \neq 0$ in ogni punto $p \in \partial\mathcal{U}$. Denoteremo con $C_{\partial\mathcal{U}}$ l'insieme singolare di $\partial\mathcal{U}$, ossia $C_{\partial\mathcal{U}} := \{p \in \partial\mathcal{U} : |proj_{HS}\eta|_{HS} = 0\}$. Poniamo*

$$\sigma_{HS}^{n-2} \llcorner \mathcal{U} := \Big(\frac{proj_{HS}\,\eta}{|proj_{HS}\,\eta|_{HS}} \lrcorner \sigma_H^{n-1} \Big)\Big|_{\mathcal{U}}.$$

Equivalentemente $\sigma_{HS}^{n-2} \llcorner \mathcal{U} = |proj_H \nu|_H \cdot |proj_{HS}\eta|_{HS} \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \llcorner \mathcal{U}$. Inoltre poniamo

$$\eta_{HS} := \frac{proj_{HS}\,\eta}{|proj_{HS}\,\eta|_{HS}}$$

e chiameremo η_{HS} **normale orizzontale unitaria** *lungo $\partial\mathcal{U}$. Si ottiene dunque*

$$(X \lrcorner \sigma_H^{n-1})|_{\partial\mathcal{U}} = \langle X, \eta_{HS}\rangle \sigma_{HS}^{n-2} \llcorner \mathcal{U} \quad \forall\ X \in \mathbf{C}^\infty(S, HS).$$

Si possono provare i seguenti risultati:

Teorema **30 (Teorema della Divergenza orizzontale)** *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k. Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa ed $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico. Supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà $\mathbf{C}^\infty$-regolare, $n-2$-dimensionale con normale unitaria uscente η. Allora, per ogni $X \in \mathbf{C}^\infty(S, HS)$ vale*

$$\int_{\mathcal{U}} (div_{HS}\, X + \langle C_H\, \nu_H, X\rangle)\sigma_H^{n-1} = \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle X, \eta_{HS}\rangle\, \sigma_{HS}^{n-2}.$$

Se inoltre $\partial\mathcal{U}$ è geometricamente H-regolare si ha che $C_{\partial\mathcal{U}} = \emptyset$.

Da questa si possono dedurre le seguenti formule di Green:

Teorema **31** *Sotto le ipotesi del Teorema 30, siano ϕ_1, $\phi_2 \in \mathbf{C}^\infty(S)$, ed almeno una di esse sia compattamente supportata in $\mathcal{U}$. Allora*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(\phi_1\, \Delta_{HS}\, \phi_2 + \langle grad_{HS}\, \phi_1, grad_{HS}\, \phi_2\rangle + \phi_1\, \langle C_H\, \nu_H, grad_{HS}\, \phi_2\rangle\Big)\sigma_H^{n-1} = \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \phi_1\, \langle grad_{HS}\, \phi_2, \eta_{HS}\rangle \sigma_{HS}^{n-2}.$$

Inoltre si ha $\int_{\mathcal{U}} \{(\phi_1\, \Delta_{HS}\, \phi_2 - \phi_2\, \Delta_{HS}\, \phi_1) + \langle C_H\, \nu_H, (\phi_1 grad_{HS}\, \phi_2 - \phi_2 grad_{HS}\, \phi_1)\rangle\}\, \sigma_H^{n-1} = 0.$

Corollario **32 (Integrazione per parti orizzontale)** *Nelle ipotesi del Teorema 30, per ogni* $X \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G}, H)$ *riesce*

$$\int_{\mathcal{U}} (div_{HS} X + \langle C_H \nu_H, X\rangle)\sigma_H^{n-1} = -\int_{\mathcal{U}} \langle X, \mathcal{H}_H\rangle\, \sigma_H^{n-1} + \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle X, \eta_{HS}\rangle\, \sigma_{HS}^{n-2}.$$

3.3. – *Variazione prima dell'H-perimetro.* – In quest'ultima sezione, mostriamo come poter effettuare il calcolo esplicito della variazione prima di σ_H^{n-1}, usando il formalismo geometrico-differenziale sopra introdotto. Come referenze per le versioni classiche di questi argomenti citiamo il libro di Spivak [42], oltreché l'articolo di Hermann [26].

Come in precedenza, siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k ed $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa. Inoltre, sia $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà $\mathbf{C}^\infty$-regolare, $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η.

Definizione **16** *Siano* $\imath : \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ *l'inclusione di* $\mathcal{U}$ *in* $\mathbb{G}$ *e* $\vartheta : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ *una mappa* $\mathbf{C}^\infty$. *Allora* ϑ *è una* **deformazione liscia** *di* $\imath$ *se:*

(i) ogni $\vartheta_t := \vartheta(t, \cdot) : \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ *è un'immersione e* $\vartheta_0 = \imath$;

(ii) $\vartheta_t|_{\partial\mathcal{U}} = \imath|_{\partial\mathcal{U}}$ *per ogni* $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Il **vettore variazione** *di* ϑ, *è definito come* $W := \frac{\partial\vartheta}{\partial t}|_{t=0} = \vartheta_* \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$.

Se $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, denotiamo con ν_t la normale unitaria lungo $\mathcal{U}_t := \vartheta_t(\mathcal{U})$. Se $\mathcal{U}$ ed ϵ sono scelti opportunamente piccoli, allora $\mathcal{U}_t = \vartheta_t(\mathcal{U})$ risulta essere immersa e non-caratteristica. Definiamo quindi la $n-1$-forma $\sigma_{H,t}^{n-1}$ su $\mathcal{U}_t$, come

$$(\sigma_{H,t}^{n-1})|_{\mathcal{U}_t} = (\nu_H^t \,\lrcorner\, \sigma_{\mathcal{R}}^n)|_{\mathcal{U}_t} \in \Lambda^{n-1}(T\mathcal{U}_t),$$

per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ove $\nu_H^t := \frac{proj_H \nu_t}{|proj_H \nu_t|_H}$. Posto $\Gamma(t) := \vartheta_t^* \sigma_{H,t}^{n-1} \in \Lambda^{n-1}(T\mathcal{U})$ per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, si ha che $\Gamma(t)$ è una $\mathbf{C}^\infty$-famiglia ad un parametro di $n-1$-forme su $\mathcal{U}$. Per determinare la variazione prima $I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1})$ di σ_H^{n-1} su $\mathcal{U}$, si deve allora calcolare

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\mathcal{U}} \Gamma(t) = \int_{\mathcal{U}} \dot{\Gamma}(0). \tag{13}$$

Quindi ci basterà determinare $\dot{\Gamma}(0)$. Sia pertanto $\underline{\zeta}$ un frame ortonormale nell'aperto U tale che

(i) $\zeta_1|_{\mathcal{U}_t} := \nu_H^t$; *(ii)* $H_p\mathcal{U}_t = \mathrm{span}\{(\zeta_2)_p, ..., (\zeta_{h_1})_p\}$ $(p \in \mathcal{U}_t)$; *(iii)* $\tau_\alpha := X_\alpha$.

Sia $\underline{\varphi}$ il suo relativo co-frame. In tal modo, si ottiene che

$$\sigma_{H,t}^{n-1} \llcorner\, \mathcal{U}_t = (\zeta_1 = \nu_H^t \,\lrcorner\, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)|_{\mathcal{U}_t} = (\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)|_{\mathcal{U}_t},$$

e quindi che $\Gamma(t) = \vartheta_t^*(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. A partire da questa espressione, ci si riconduce quindi al calcolo della *derivata di Lie* secondo la direzione $\widetilde{W} := \frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ della $n-1$-forma $\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n$. Ciò si può effettuare tramite la *Formula di Cartan* (cfr. [27], [26], [42]):

$$\mathcal{L}_{\widetilde{W}}(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = \widetilde{W} \,\lrcorner\, d(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) + d(\widetilde{W} \,\lrcorner\, \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n).$$

Si può in tal modo dimostrare il seguente

Teorema **33 (Variazione prima dell'H-perimetro)** *Sotto le precedenti ipotesi, si ha*

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = -\int_{\mathcal{U}} \mathcal{H}_H^{\mathbf{sc}}\Big(\langle proj_H W, \nu_H\rangle + \Big\langle proj_V W, \frac{proj_V \nu}{|proj_H \nu|}\Big\rangle\Big)\sigma_H^{n-1} + \int_{\partial\mathcal{U}} \langle W, \eta\rangle\, |proj_H \nu|_H\, \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2}.$$

Se inoltre $W \in \mathbf{C}^\infty(\mathcal{U}, H)$ la formula diviene

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = -\int_{\mathcal{U}} \mathcal{H}_H^{\mathbf{sc}}\langle W, \nu_H\rangle \sigma_H^{n-1} + \int_{\partial\mathcal{U}} \langle W_{HS}, \eta_{HS}\rangle \sigma_{HS}^{n-2}.$$

Notare che quest'ultima formula è nient' altro che un'altra versione del Corollario 32. Infine, si osservi che da questo risultato consegue subito che condizione necessaria alla *minimalità* di una ipersuperficie non-caratteristica è l'annullamento di $\mathcal{H}_H^{\mathbf{sc}}$.

4. – Appendice: Connessioni e Connessioni parziali

Definizione **17** *Una* **connessione affine** ∇ *su una $\mathbf{C}^\infty$-varietà M è una regola che assegna ad ogni $X \in \mathfrak{X}(M)(:= \mathbf{C}^\infty(M, TM))$ una mappa $\mathbb{R}$-lineare $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, chiamata* **derivata covariante rispetto ad** X*, tale che per ogni X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni f, $g \in \mathbf{C}^\infty(M)$ si ha:*

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(2) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

Se inoltre $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è una varietà Riemanniana, allora ∇ è l'unica **connessione di Levi-Civita di** M**,** *se per ogni X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, valgono le seguenti proprietà:*

(3) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$;

(4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Per un'accurata esposizione del concetto di connessione, rimandiamo, ad esempio, ai classici testi [7], [28], [27], [42]. Una generalizzazione del concetto di connessione è suggerita dalla seguente definizione (cfr. anche [23], [24], [29]).

Definizione **18** *Sia M una varietà Riemanniana, e siano (E, π_E, M), (F, π_F, M), due sottofibrati di TM. Una* E**-connessione** $\nabla^{(E,F)}$ **su** F *è una regola che assegna ad ogni $X \in \mathbf{C}^\infty(M, E)$ una mappa $\mathbb{R}$-lineare $\nabla_X^{(E,F)} : \mathbf{C}^\infty(M, F) \longrightarrow \mathbf{C}^\infty(M, F)$ tale che per ogni X, $Y \in \mathbf{C}^\infty(M, E)$, ogni $Z \in \mathbf{C}^\infty(M, F)$, ed ogni f, $g \in \mathbf{C}^\infty(M)$ si ha*

(1) $\nabla_{fX+gY}^{(E,F)} Z = f\nabla_X^{(E,F)} Z + g\nabla_Y^{(E,F)} Z$;

(2) $\nabla_X^{(E,F)} fY = f\nabla_X^{(E,F)} Y + (Xf)\, Y$.

Se $E = F$ poniamo $\nabla^E := \nabla^{(E,E)}$, e chiamiamo ∇^E una **connessione parziale relativa ad** E*, od* E**-connessione**. *Notare che se $proj_E$ indica la proiezione ortogonale su E, una E-connessione si può sempre definire, a partire da una connessione ∇ su TM, come segue: $\nabla_X^E Y := proj_E(\nabla_X Y)$ $(X, Y \in \mathbf{C}^\infty(M, E))$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Ambrosio, *Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces*, Adv. in Math., 2001.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara, *"Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems"*, Oxford University Press, 2000.

[3] L. Ambrosio & B. Kircheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math.Ann. **318**, 527-555, 2000.

[4] ——, *Current in metric spaces*, Acta Math.**185**, 1-80, 2000.

[5] N. Arcozzi & F. Ferrari, *Metric normal and distance function in the Heisenberg group,* Preprint, 2003.

[6] L. Capogna, D. Danielli, & N. Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. Anal. Geom. **12**, 1994.

[7] I. Chavel, *"Riemannian Geometry: a modern introduction"*, Cambridge University Press, 1994.

[8] J.J Cheng, J.F. Hwang, A. Malchiodi, & P. Yang, *Minimal surfaces in pseudohermitian geometry,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, vol. IV, 129-179, 2005.

[9] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom.Funct.An., **9**, 428-517, 1999.

[10] C.B. Crooke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., Paris **13**, 419-435, 1980.

[11] C.B. Crooke & A. Derdziński, *A lower bound for λ_1 on manifolds with boundary*, Comment. Math. Helv. **59**, 187-192, 1984.

[12] D. Danielli, N. Garofalo, & D.M. Nhieu, *Minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature and isoperimetry in Carnot groups*, preprint 2001.

[13] ——, *Notions of Convexity in Carnot groups*, preprint 2002.

[14] G. David & S. Semmes, *"Fractured Fractals and Broken Dreams. Self-Similar Geometry through Metric and Measure"*, Oxford University Press, 1997.

[15] E.De Giorgi,*Un progetto di teoria delle correnti, forme differenziali e varietà non orientate in spazi metrici*, in *Variational Methods, Non Linear Analysys and Differential Equations in Honour of J.P. Cecconi*, M.Chicco et al. Eds. ECIG, Genova, 67-71, 1993.

[16] H. Federer, *"Geometric Measure Theory"*, Springer Verlag, 1969.

[17] B. Franchi, R. Serapioni, & F.S. Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, Houston Journal of Math. Vol. 22, **4**, 1996.

[18] ——, *Rectifiability and Perimeter in the Heisenberg Group*, Math. Annalen, **321**, 479-531, 2001.

[19] ——, *Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups*, Comm. Anal. Geom., to appear.

[20] ——, *On the structure of finite perimeter sets in step 2 Carnot groups*, J.Geometric Anal., to appear.

[21] N. Garofalo & D.M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **49**, 1081-1144, 1996.

[22] N. Garofalo & S. Pauls, *The Berstein problem in the Heisenberg group,* arXiv:math.DG/0209065.

[23] Z. Ge, *Betti numbers, characteristic classes and sub-Riemannian geometry* Illinois Journal of Mathematics, vol. **36**, no.3, 1992.

[24] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *"Subriemannian Geometry"*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, 1996.

[25] ———, *"Metric structures for Riemannian and Non Riemannian Spaces"*, Progress in Mathematics, **153**, Birkhauser Verlag, Boston, 1999.

[26] R. Hermann , *The Second Variation for Minimal Submanifolds*, Jour.Math.Mech., **16**, 1966.

[27] S. Helgason, *"Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces"*, Academic Press, New York, 1978.

[28] N.J Hicks, *"Notes on Differential geometry"*, Van Nostrand Reinholds Company, London, 1971.

[29] J. Koiller, P.R. Rodrigues & P. Pitanga, *Non-holonomic connections following Élie Cartan*, An. Acad. Bras. Cienc. 2001, **7** (2), pp. 165-190.

[30] G. Lu, J. J. Manfredi, & B. Stroffolini, *Convex functions on the Heisenberg group*, Calculus of Variations, to appear.

[31] V. Magnani, *"Elements of Geometric Measure Theory on sub-Riemannian groups"*, PHD Thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, (2002).

[32] P. Mattila, *"Geometry of sets and measures in euclidean spaces"*, Cambridge University Press, 1995.

[33] J. Milnor, *Curvatures of left invariant Riemannian metrics*, Adv. Math., **21**, 293–329, 1976.

[34] J. Mitchell, *On Carnot-Carathèodory metrics*, J.Differ. Geom. **21**, 35-45, 1985.

[35] F. Montefalcone, *Some relations among volume, intrinsic perimeter and one-dimensional restrictions of BV functions in Carnot groups*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, vol. IV, 79-128, 2005.

[36] ———, *"Some Remarks in Differential and Integral Geometry of Carnot Groups"*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Bologna, 2004.

[37] R. Montgomery, *"A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications"*, AMS, Math. Surveys and Monographs, Vol. 91, 2002.

[38] R. Monti, *"Distances, Boundaries and surface measures in Carnot Carathéodory Spaces"*, PhD Thesis, Univerity of Trento, 2001.

[39] S.D. Pauls, *Minimal surfaces in the Heisenberg group*, Geom. Dedicata, **104**, 201-231, 2004.

[40] P. Pansu, *"Geometrie du Group d'Heisenberg"*, These pour le titre de Docteur, 3ème cycle, Universite Paris VII, 1982.

[41] L.A. Santaló, *"Integral Geometry and Geometric Probability"*, Enc. Math., **1**, 1976.

[42] M. Spivak, *"Differential Geometry"*, vol. IV, Publisch or Perish, 1964.

[43] R.S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry*, J. Diff. Geom., **24**, 221-263, 1986. Corrections: J. Diff. Geom., **30**, 595-596, 1989.

[44] G. Talenti, *The standard isoperimetric theorem*, in Handbook of Convexity, Vol. **A**, P.M.Gruber & J.M.Wills, eds, 73-123. Amsterdam:North Holland, 1993.

[45] N.Th. Varopoulos, *Analysis on Lie groups*, J. Funct.Anal., **76**, 346-410, 1988.

[46] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, & T. Coulhon, *"Analysis and Geometry on Groups"*, Cambridge University Press, 1992.

Francescopaolo Montefalcone:

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna,

Piazza di P.ta S.Donato, 5, 40126 Bologna, Italia

E-mail address: montefal@dm.unibo.it