Varietà che parametrizzano forme e loro varietà delle secanti

Alessandra Bernardi

I problemi studiati in questa tesi prendono origine dal seguente problema:
Sia K un campo algebricamente chiuso e di caratteristica 0. Sia S l'anello dei polinomi $K[x_0,\dots,x_n]$ ed S_d la sua parte di grado d. Qual è il più piccolo intero positivo $G(d)$ tale che il generico elemento di S_d si possa scrivere come

$$F = N_1 + \cdots + N_{G(d)} \tag{1}$$

dove ogni $N_i = M^{(i)}_{1,j(1)} \cdots M^{(i)}_{k,j(k)}$ e $M^{(i)}_{1,j(1)} \in S_{j(1)}, \dots, M^{(i)}_{k,j(k)} \in S_{j(k)}$?

Definizione **1** *Se il generico elemento di S_d si può scrivere come (1) si dice che F è una "Forma Canonica"*

Il problema sopra descritto può essere riformulato dal punto di vista geometrico. Sia $\phi : \mathbf{P}(S_{j(1)}) \times \cdots \times \mathbf{P}(S_{j(k)}) \to \mathbf{P}(S_d)$ la mappa tale che $\phi(([M_{1,j(1)}],\dots,[M_{k,j(k)}])) = [M_{1,j(1)} \cdots M_{k,j(k)}]$ dove $\sum_{l=1}^{k} j(l) = d$.

Definizione **2** *La varietà che parametrizza forme del tipo $M_{1,j(1)} \cdots M_{k,j(k)} \in S_d$ è $X := \overline{\mathrm{Im}(\phi)} \subset \mathbf{P}(S^d)$.*

Definizione **3** *Se X è una varietà proiettiva irriducibile, la "$(s-1)$-esima varietà delle secanti di X" è $\mathrm{Sec}_{s-1}(X) := \overline{\bigcup_{P_1,\dots,P_s \in X} < P_1,\dots,P_s >}$.*

Dunque se X è definita come in Definizione 2, allora $\mathrm{Sec}_{s-1}(X)$ parametrizza forme del tipo (1). L'intero che risolve il problema sopra descritto è
$G(d) = \min\left\{ s \in \mathbf{Z}^+ \mid \dim(\mathrm{Sec}_{G(d)-1}(X)) = \binom{n+d}{d} - 1 \right\}$.

Remark **1** *Se $X \subset \mathrm{P}^N$ è una varietà ridotta e irriducibile di dimensione n, allora la dimensione aspettata di $\mathrm{Sec}_{s-1}(X)$ è $\mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) = \min\{ns + s - 1, N\}$.*

Definizione **4** *Se $\dim(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) < \mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_{s-1}(X))$ si dice che $\mathrm{Sec}_{s-1}(X)$ è difettiva con difetto $\delta_s(X) = \mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) - \dim(\mathrm{Sec}_{s-1}(X))$.*

Uno degli strumenti più importanti nello studio della dimensione di varietà delle secanti è il Lemma di Terracini:

Lemma **1** *Sia $X \subset \mathbf{P}^N$ una varietà proiettiva irriducibile. Siano $P_1,\dots,P_s \in X$ punti generici e sia $Q \in < P_1,\dots,P_s >$. Allora $T_Q(\mathrm{Sec}_{s-1}(X)) = < T_{P_1(X)},\dots,T_{P_s}(X) >$.*

A questo strumento puramente geometrico se ne può associare uno algebrico. Sia $R = K[y_0, \ldots, y_n]$ un anello di polinomi. Si consideri l'azione di R su S data da $y_i \circ x_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(y_i)$. Questa azione è chiamata anche"Apolarità".

DEFINIZIONE **5** *Se $I \subset R$ è un ideale omogeneo, il "Sistema Inverso" I^{-1} di I è l'R-sottomodulo di S contenente tutti gli elementi di S annullati da I.*

REMARK **2** *Se $Z = \mathrm{Proj}(S/I(X))$ è uno schema proiettivo, la funzione di Hilbert di Z in grado d è $H(Z, d) = \dim(((I(Z))^{-1})_d)$.*

Si può quindi spostare il problema della conoscenza della funzione di Hilbert di un dato schema, allo studio del sistema inverso del suo ideale di definizione (e viceversa).

PROPOSIZIONE **1** *Sia $X \subset \mathbf{P}(S_d)$ la varietà che parametrizza forme del tipo (1). Sia $(I^{(i)})_d \subset R_d$ la parte di grado d del sistema inverso del cono tangente $T_{P_i}(X) \subset S_d$ per ogni $i = 1, \ldots, s$ e $P_1, \ldots, P_s$ punti generici su X. Sia inoltre $I = I^{(1)} + \cdots + I^{(s)} \subset R_d$ e $Z = \mathrm{Proj}(R/I)$. Allora, combinando il Lemma di Terracini col metodo dei Sistemi Inversi si ottiene che $H(Z, d) - 1 = \dim(\mathrm{Sec}_{s-1}(X))$.*

In questa tesi ci si occupa di studiare la dimensione di varietà delle secanti di varietà proiettive che parametrizzano tre tipi particolari di forme (il terzo caso è una generalizzazione del concetto di Forma Canonica ai tensori).

1. – Varietà delle secanti a varietà osculanti di varietà di Veronese

Siano $L_1, \ldots, L_s$ forme lineari di S e $F_1, \ldots, F_s \in S_k$. Il primo problema che si affronta in questa tesi è lo studio della dimensione delle varietà delle secanti delle varietà che parametrizzano forme del tipo

$$F = L_1^{d-k} F_1 + \cdots + L_s^{d-k} F_s. \tag{2}$$

al variare degli interi $d > k > 0$ ed $n > 0$. Un primo risultato è il seguente:

PROPOSIZIONE **2** *La varietà proiettiva associata a (2) è $\mathrm{Sec}(O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)})$ dove $O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)}$ è la k-esima varietà osculante alla d-esima immersione di Veronese di $\mathbf{P}^n$ in $\mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ che indichiamo con $\nu_d(\mathbf{P}^n)$.*

Dapprima si calcola, quando possibile, la dimensione di $\mathrm{Sec}(O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)})$ con l'uso diretto del Lemma di Terracini. Dopodiché si applica il metodo dei Sitemi Inversi.

PROPOSIZIONE **3** *Il sistema inverso di $T_{P_i}(O_{k,\nu_d(\mathbf{P}^n)}) \subset S_d$ è la parte di grado d di un ideale $I^{(i)} \subset R$ dipendente solo da n e da k ma non da d e tale che $\wp_i^{k+1} \supset I^{(i)} \supset \wp_i^{k+2}$ dove $\wp_i \subset R$ è un ideale primo con supporto su un punto.*

In molti casi sarà possibile spostare il problema del calcolare direttamente $H(R/(I^{(1)} + \cdots + I^{(s)}), d)$ al computo di $H(R/(\wp_1^{k+1} + \cdots + \wp_s^{k+1}), d)$ oppure di $H(R/(\wp_1^{k+2} + \cdots + \wp_s^{k+2}), d)$ grazie al lemma:

Lemma 2 *$H(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}),d)$ è regolare se o $h^1((\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2})_d)=0$, (quindi $\binom{d+n}{n}\geq s\binom{k+n+1}{n}$) oppure $h^0((\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1})_d)=0$, (quindi $\binom{d+n}{n}\leq s\binom{k+n}{n}$).
$H(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}),d)$ è non-regolare, con difetto δ, se o $h^1((\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1})_d)>$ $\exp h^1((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)=\max\{0,l(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}))-\binom{d+n}{n}\}$; in questo caso $\delta\geq h^1((\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1})_d)-\exp(h^1((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)$; oppure $h^0((\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2})_d)>\exp(h^0((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)=\max\{0,\binom{d+n}{n}-l(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}))\}$; in questo caso $\delta\geq h^0((\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2})_d)-\exp(h^0((I^{(1)}+\cdots+I^{(s)})_d)$.*

In tutti i casi studiati non si è trovato alcun esempio in cui la difettività di $H(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}),d)$ non dipenda dalla difettività di $H(R/(\wp_1^{k+1}+\cdots+\wp_s^{k+1}),d)$ oppure di $H(R/(\wp_1^{k+2}+\cdots+\wp_s^{k+2}),d)$. In questa tesi si congettura che la difettività si ha solo nei casi descritti dal Lemma 2.

Nel caso di $\mathbf{P}^2$ si prova la congettura per $s\leq 9$. Per provarlo si utilizza "La méthode d'Horace" (descritta in [3]) su uno schema Z' che è una specializzazione di $\mathrm{Proj}(R/(I^{(1)}+\cdots+I^{(s)}))$: essa consiste nel considerare una curva $\mathcal{C}$ per $P_1,\ldots,P_t$ con $t\leq s$, dopodiché si studia lo schema residuo $Res_{\mathcal{C}}(Z')$ il cui ideale rappresentativo è $(I(Z'):I(\mathcal{C}))$; ora se $\mathcal{C}$ è una componente fissa di molteplicità ν, allora $H(Z',d)=H(Res_{\mathcal{C}}(Z'),d-t\nu)$.

Non citiamo in questa circostanza tutti i risultati trovati per $s>2$ per motivi di spazio. Mostriamo solo un esempio in cui si riscontra una difettività elevata: $O_{4,\nu_5(\mathbf{P}^6)}\subset\mathbf{P}^{461}$. Se $s=2$ allora $\mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_1(O_{4,\nu_5(\mathbf{P}^6)}))=431$ ma in realtà il difetto è $\delta_2=86$. Se $s=3,4$ i difetti sono $\delta_3=44$ e $\delta_4=9$. Solo $\mathrm{Sec}_4(O_{4,\nu_5(\mathbf{P}^6)})=\mathbf{P}^{461}$.

2. – Varietà delle secanti a varietà che parametrizzano forme che si decompongono come prodotto di forme lineari

Il secondo problema affrontato in questa tesi è lo studio della dimensione della varietà delle secanti della varietà $\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n)\subset\mathbf{P}(S_d)$ che parametrizza forme di grado d completamente decomponibili come prodotto di forme lineari.
Un primo interesse nei confronti di questa varietà è dovuto alla seguente congettura formulata da Ehrenborg in [2]: *il più piccolo $s\in\mathbf{Z}^+$ tale che $\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathbf{G}(n-1,n+d-1))=\mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ sarebbe uguale al $\min\{s\in\mathbf{Z}^+\mid\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n))=\mathbf{P}^{\binom{n+d}{d}-1}\}$, dove $\mathbf{G}(k,N)$ è la Grassmanniana dei $\mathbf{P}^k\subset\mathbf{P}^N$.* Se questa congettura fosse vera, sarebbe possibile calcolare la dimensione di $\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n))$ in molti casi. In questa tesi se ne mostra però un controesempio: $\dim(\mathrm{Sec}_2(\mathbf{G}(3,6)))=33<\mathrm{expdim}(\mathrm{Sec}_2(\mathbf{G}(3,6)))=\dim(\mathbf{P}^{34})=34$. In questa tesi si dimostra che suddetta congettura è vera per $d=2$.

Se $d=2$ si riesce anche a dimostrare la seguente:

Proposizione 4 *L'intersezione $\mathbf{G}(n-1,n+1)\cap\mathrm{Split}_2(\mathbf{P}^n)\subset\mathbf{P}^{\frac{n^2+3n}{2}}$ è il luogo degli $(n-1)$-spazi di $\mathbf{P}^{n+1}$ che sono $(n-1)$-secanti alla curva razionale normale $\nu_{n+1}(\mathbf{P}^1)$.*

Se $d>2$ il risulatato si può estendere almeno in una direzione:

Proposizione 5 *Il luogo* $\{(n-1)-$*spazi* $(n-1)-$*secanti a* $\nu_{n+d-1}(\mathbf{P}^1)\}$ *è contenuto in* $\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n) \cap \mathbf{G}(n-1, n+d-1)$.

Per quanto riguarda la dimensione della varietà delle secanti di $\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n)$, quello che si riesce a dimostrare combinando il metodo dei Sistemi Inversi col Lemma di Terracini è la seguente:

Proposizione 6 *Se* $d > 2$ *e* $n \geq 3(s-1)$, *allora* $\mathrm{Sec}_{s-1}(\mathrm{Split}_d(\mathbf{P}^n))$ *non è difettiva.*

3. – Varietà delle secanti a varietà di Segre

La varietà di Segre parametrizza tensori completamente decomponibili, ossia se $V_1, \ldots, V_t$ sono spazi vettoriali, la varietà di Segre parametrizza tensori $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_t$ per i quali esistono $v_i \in V_i$ per ogni $i = 1, \ldots, t$ tali che $T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_t$. Questo è un caso più generale del problema descritto inizialmente in quanto le forme possono essere viste come tensori.
La varietà delle $(s-1)$-secanti ad una varietà di Segre parametrizza tensori che si possono scrivere come somma di s tensori completamente decomponibili.

Questa parte della tesi è di tipo descrittivo. Si espongono i risultati trovati col metodo dei Sistemi Inversi e "La méthode d'Horace" in [1] e quelli trovati invece con l'uso della teoria delle rappresentazioni in [4].
La descrizione del metodo attraverso la teoria delle rappresentazioni inizia con la presentazione un algoritmo descritto in [4] per la decomposizione della parte di grado d dell'ideale della varietà delle secanti di una varietà di Segre, e si conclude col costruire i generatori dell'ideale della prima varietà delle secanti alla varietà di Segre con $t = 3$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Catalisano M.V., Geramita A.V., Gimigliano A., *Rank of tensors, secant variety of Segre varieties and fat points*, Lin. Alg. and Applic., **355**, (2002), 263–285

[2] Ehrenborg R., *On Apolarity and Generic Canonical Forms*, Journal of Algebra, **213**, (1999), 167–194

[3] Hirschowitz A., *La Méthode de Horace pour l'interpolation à plusieurs variables*, Manuscripta Math., **50**, (1985), 337–388

[4] Landsberg J.M., Manivel L., *On the ideals of secant varieties of Segre varieties*, Found Comuput. Math. 4, **4**, (2004), 397–422

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
e-mail: `abernardi@dm.unibo.it`
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. A. Gimigliano, Università di Bologna