Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica
Materia di tesi: Geometria Algebrica

Schemi 0-dimensionali e forme canoniche di polinomi omogenei

Tesi di laurea di:

Alessandra Bernardi

Relatore:

Chiar.mo Prof. **Alessandro Gimigliano**

Non a noi, Signore, non a noi,
ma al tuo nome da' gloria,
per la tua fedeltà, per la tua grazia.
Sal 115,1

Contents

Introduzione

In questa tesi di geometria algebrica ci si occupa dello studio di problemi correlati con la conoscenza della dimensione di particolari schemi zero-dimensionali in $\mathbf{P}^n$: i cosiddetti *"Punti Grassi"*. Dal punto di vista algebrico essi sono individuati da intersezioni di potenze di ideali primi omogenei contenuti nell'anello $S = K[y_0, \ldots, y_n]$; mentre dal punto di vista geometrico sono insiemi di punti $P_1, \ldots, P_s$ in $\mathbf{P}^n$ con molteplicità superiore a 1 (tali schemi li indicheremo con $\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$) che individuano sistemi lineari di ipersuperficie aventi in P_i molteplicità almeno α_i.

Nell'ambito del primo capitolo ci si avvia allo studio della dimensione, per ogni grado d, della componente di grado d di un ideale siffatto, e cioè alla conoscenza della funzione di Hilbert di $\mathbf{X}$. Per fare questo si introducono i *Sistemi Inversi*, la cui relazione con la funzione di Hilbert di $\mathbf{X}$ in grado fissato permette di spostare il nostro problema allo studio di ideali generati da potenze di forme lineari.

Nel secondo capitolo vengono esposti problemi puramente algebrici: *Problemi di Waring* e *Forme Canoniche*. I Problemi di Waring sono due: il "Piccolo Problema di Waring" richiede di trovare il piú piccolo intero $g(j)$ tale che ogni forma $F \in R_j = (K[x_0, \ldots, x_n])_j$ sia somma al piú di $g(j)$ potenze j-esime di forme lineari; il "Grande Problema di Waring", invece, richiede di trovare il piú piccolo intero $G(j)$ tale che la generica forma $F \in R_j$ sia somma al piú di $G(j)$ potenze di forme lineari. Il problema che scaturisce dallo studio delle Forme Canoniche è qualcosa di molto piú generale (tant'è che la sezione 2.3.3 del presente lavoro è interamente dedicata a mostrare che il Problema di Waring non ne è altro che un caso particolare) e si può tradurre nel chiedersi quando è possibile scrivere la generica forma di grado p in q variabili come combinazione lineare di prodotti di polinomi omogenei in q variabili di grado fissato ed altri polinomi sempre omogenei ed in q variabili di grado dipendente da quello del precedente.

Il terzo capitolo tratta un argomento in apparenza ancora diverso dai due precedenti: le *Varietà delle Secanti* della *Varietà di Veronese*. Quest'ultima viene dapprima introdotta da un punto di vista puramente geometrico, poi, una volta reinterpretata algebricamente, ci si accorge essere la varietà che parametrizza potenze di forme lineari. Se di una varietà siffatta se ne fa la Varietà delle s-Secanti si ottiene una varietà che parametrizza somme di s potenze di forme lineari.

Ecco dunque che nel quarto capitolo si cerca di fornire un'unica chiave interpretativa per i tre argomenti esposti nei capitoli precedenti. Ci si accorge che la conoscenza della funzione di Hilbert di insiemi di punti doppi conduce a buoni risultati sul Grande Problema di Waring e sulla Verietà delle Secanti della Varietà di Veronese (si vedano a tale proposito i teoremi 4.4 e 4.4 bis). Una volta chiarito il legame tra questi tre argomenti il capitolo prosegue con l'analisi di alcuni casi particolari: si trattano varietà difettive che non rientrano in un'auspicabile regola generale incontrata già nel primo capitolo (ossia che uno schema in $\mathbf{P}^n$ di s punti grassi di molpteplicità $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ abbia la stessa dimensione di uno schema di $\sum_{i=1}^{s} \binom{\alpha_i - 1 + n}{n}$ punti semplici in posizione generale). Questa discussione sfocia in un importante teorema di J. Alexander ed A. Hirschowitz che chiarisce la situazione in $\mathbf{P}^n$ per s punti doppi distinti con le dovute eccezioni. Il capitolo termina con una breve discussione del Piccolo Problema di Waring ed una rilettura di quanto studiato fino a quel punto in termini di forme canoniche.

Nel quinto capitolo, infine, si abbandona lo studio di schemi di punti doppi e si affronta dapprima quello di schemi di punti tripli nel piano proiettivo in relazione con il già incontrato quesito sulle forme canoniche, per poi generalizzare il procedimento ed i risultati a schemi di punti tutti con molteplicità n, con la differenza però che mentre nel caso di punti tripli le eccezioni sono tutte note, nel caso generale non lo sono ancora. Per essere piú espliciti, ciò che si cerca di scoprire in quest'ultimo capitolo è quale sia il piú piccolo intero s per cui la generica forma di grado j possa essere scritta come combinazione lineare di prodotti di potenze $(j-n)$-esime di forme lineari per forme di grado n.

Le principali referenze utilizzate nell'elaborazione di questa tesi sono: [**ER**], [**Ge**], [**Gi.2**], [**Ha.2**], [**Mir**], [**Wa**].

Chapter 1

Alcuni schemi 0-dimensionali

1.1 Nozioni introduttive

I problemi che studieremo in questo capitolo si avvarranno, come sostegno bibliografico, di un recente lavoro di A. V. Geramita [**Ge**]: si tratta di alcune note servitegli da sostegno nel corso di una conferenza riguardante il problema dei Punti Grassi.

Sia K un campo algebricamente chiuso e di caratteristica zero. L'ambiente nel quale lavoreremo è $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n(K)$. L'anello dei polinomi $K[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ è un anello graduato e come tale lo si può esperimere

$$K[y_0, y_1, \ldots, y_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$$

dove $S_d =< y_0^d, y_0^{d-1}y_1, \ldots, y_n^d >$, si ha quindi che

$$dim_k(S_d) = \left(\begin{array}{c} d+n \\ n \end{array} \right).$$

Le forme di grado d formano uno spazio vettoriale (S_d appunto) di dimensione $\left(\begin{array}{c} d+n \\ n \end{array} \right)$. Dal punto di vista geometrico questi spazi vettoriali vengono chiamati *"sistemi lineari completi di ipersuperfici"*.

Dati dei punti $(P_1, \ldots, P_s) \in \mathbf{P}^n$ definiamo $S_d(P_1, \ldots, P_s)$ come lo spazio vettoriale delle ipersuperfici di grado d passanti per i punti $P_1, \ldots, P_s$ (questo spazio vettoriale è quindi costituito dai polinomi di grado d che si annullano in $P_1, \ldots, P_s$). $S_d(P_1, \ldots, P_s)$ è chiaramente un sottospazio di S_d

Ci chiediamo ora qual é la dimensione di $S_d(P_1, \ldots, P_s)$.

È abbastanza evidente che se i punti sono in posizione generale si verifica che

$$dim_k(S_d(P_1,\dots,P_s)) = \left[\binom{n+d}{n} - s\right]^+ \quad [1]$$

(in quanto imporre il passaggio per s punti equivale a richiedere il verificare s equazioni indipendenti).
Se invece i punti non sono necessariamente in posizione generale, allora accade:

$$dim_k(S_d(P_1,\dots,P_s)) \geq \left[\binom{n+d}{n} - s\right]^+$$

$\left[\binom{n+d}{n} - s\right]^+$ è la *dimensione virtuale di* $S_d(P_1,\dots,P_s)$.

Supponiamo ora che si richieda non il semplice passaggio per i P_i, ma che in P_i ci siano delle singolarità, ossia si richieda, oltre all'annullarsi dei polinomi in P_i, anche l'annullarsi di tutte le loro derivate parziali fino ad un certo ordine n_i-1 (si scriverà $P_i^{n_i}$). Ci aspettiamo che ogni $P_i^{n_i}$ imponga $\binom{n+n_i-1}{n}$ condizioni (l'annullarsi delle derivate parziali fino all'ordine (n_i-1)-esimo), e quindi ci chiediamo se sia vero che

$$dim_k(S_d(P_1^{n_1},P_2^{n_2},\dots,P_s^{n_s})) = \left[\binom{d+n}{n} - \sum_{i=1}^{s}\binom{n+n_i-1}{n}\right]^+. \tag{1.1}$$

Questa volta la risposta non è piú immediata come nel caso dei punti semplici; in tale caso, se i $P_1,\dots,P_s$ sono in posizione generale la dimensione è sempre quella aspettata. Nel nuovo caso avremo solo che

$$dim_k(S_d(P_1^{n_1},P_2^{n_2},\dots,P_s^{n_s})) \geq \left[\binom{d+n}{n} - \sum_{i=1}^{s}\binom{n_i-1}{n}\right]^+.$$

Ci sono dei semplici controesempi:

1. Consideriamo $S_2(P_1^2,P_2^2)$ in $\mathbf{P}^2$.
   Se (1) fosse veritiera dovrebbe avvenire che

   $$dim_k(S_2(P_1^2,P_2^2)) = \left[\binom{2+2}{2} - \sum_{i=1}^{2}\binom{2+n_i-1}{2}\right]^+ = 6-6=0$$

   ma cosí non è: per due punti passa sempre una retta quindi avremo sempre che la retta doppia passante per P_1 e P_2 appartiene a $S_2(P_1^2,P_2^2)$, indi $dim_k(S_2(P_1^2,P_2^2)) = 1 \neq 0$

[1]dove $[x]^+ := max\{x,0\}$

2. Consideriamo $S_4(P_1^2, \ldots, P_5^2)$
Se (1) fosse veritiera accadrebbe che

$$dim_k(S_4(P_1^2, \ldots, P_5^2)) = \left(\begin{array}{c} 4+2 \\ 5 \end{array} \right) - 3 \cdot 5 = 15 - 15 = 0$$

ma per 5 punti passa sempre una conica quindi se la prendiamo doppia avremo una quartica per $P_1^2, \ldots, P_5^2$ perciò $dim_k(S_4(P_1^2, \ldots, P_5^2)) = 1 \neq 0$

3. Consideriamo $S_3(P_1^2, P_2^2)$
Si verifica che

$$dim_k(S_3(P_1^2, P_2^2)) = dim_k(S_2(P_1, P_2)) = 4.$$

Ora, che $dim_k(S_2(P_1, P_2)) = 4$ é corretto anche secondo (1), ma che $dim_k(S_3(P_1^2, P_2^2)) = 4$ è in contrasto con quanto espresso da (1).
Vediamo il perchè della prima uguaglianza:
$S_3(P_1^2, P_2^2)$ è lo spazio vettoriale delle curve di grado 3 (cubiche) passanti per i punti P_1 e P_2 ed aventi in essi molteplicità 2; per conoscerne la dimensione occorre individuarne i generatori; questi ultimi possono essere ricercati tra le cubiche costituite dall'unione di una retta e una conica in virtú del

Teorema di Bezout

> Siano $\mathcal{C}_F, \mathcal{C}_G \subset \mathbf{P}^2$ due curve algebriche definite da $F, G \in K[y_0, y_1, y_2]$ con $m = deg(F)$ e $n = deg(G)$. Allora se $\mathcal{C}_F$ e $\mathcal{C}_G$ non hanno componenti comuni $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_G$ è dato da un numero di punti minore o uguale ad $m \cdot n$. Precisamente $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_G$ è data da $m \cdot n$ punti (contati con le molteplicità).

Si veda [**CLO**]. Supponiamo che tra i generatori di $S_3(P_1^2, P_2^2)$ ci sia $\mathcal{C}_F$ non scomponibile in una retta ed una conica incidenti in P_1 e P_2; sia $\mathcal{C}_G$ una retta passante per P_1 e P_2. Per il teorema di Bezout si ha che $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_G$ è costituita da $3 \cdot 1$ punti (contati con molteplicità), ma ciò è impossibile in quanto $\mathcal{C}_F$ e $\mathcal{C}_G$ si incontrano in P_1 e P_2 con molteplicità doppia in entrambi i casi, quindi con molteplicità totale almeno 4. Ecco perchè solo le cubiche costituite dall'unione di una retta ed una conica incidenti in P_1 e P_2 possono essere contemplate tra i generatori di $S_3(P_1^2 P_2^2)$. Ora poichè però tale retta risulta essere fissa il numero dei generatori di $S_3(P_1^2, P_2^2)$ coincide col numero di "coniche linearmente indipendenti" di $S_2(P_1, P_2)$ e quindi proprio col numero di generatori di $S_2(P_1, P_2)$, da cui segue $dim_k(S_3(P_1^2, P_2^2)) = dim_k(S_2(P_1, P_2))$

1.2 Formalizzazione

Il problema di conoscere $dim_k(S_d(P_1^{n_1}, \ldots, P_s^{n_s}))$ non è dunque di immediata risoluzione, tant'è che non si è ancora trovato un risutato generale che dia il valore di tale dimensione per punti generici $P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^n$.

Un'altra formulazione del problema è quella nei termini di *"funzione di Hilbert"*.

1.2.1 Funzione di Hilbert nel caso di sottoschemi 0-dimensionali ridotti di $\mathbf{P}^n$

Sia $\mathbf{X} = \{P_1, \ldots, P_s\} \subset \mathbf{P}^n$, con $P_1, \ldots, P_s$ punti distinti. Sia $\wp_i \subset S = K[y_0, \ldots, y_n]$ l'ideale primo di altezza n corrispondente al punto P_i ($\wp_i = (L_{i_1}, \ldots, L_{i_n})$ con L_{i_j} forme lineari linearmente indipendenti per ogni $j = 1, \ldots, n$). Sia $I = \wp_1, \ldots, \wp_s$ l'ideale di $\mathbf{X}$. Essendo i $\wp_i$ ideali primi, I risulta essere un ideale ridotto e quindi corrispondente ad un sottoschema 0-dimensionale ridotto di $\mathbf{P}^n$. Come è noto $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ e $dim_k S_i = \begin{pmatrix} i+n \\ n \end{pmatrix}$. Inoltre $I = \bigoplus_{i \geq 0} I_i$. Sia A l'anello delle coordinate di $\mathbf{X}$ ossia $A = S/I = \bigoplus A_i$.
Definiamo quindi la *funzione di Hilbert* di X (o, equivalentemente di A):

$$H(\mathbf{X}, t) = H(A, t) = dim_k A_t = dim_k(S_t) - dim_k(I_t)$$ [2].

Esempio 1.1

Siano $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1] \in \mathbf{P}^2$, allora $I = \wp_1 \cap \wp_2 \cap \wp_3 = (y,z) \cap (x,z) \cap (x,y) = (xy, xz, yz)$ e $(S/I)_n =< \overline{x}^n, \overline{y}^n, \overline{z}^n >$. Quindi la funzione di Hilbert di questi tre punti è: 1 3 3 3 ... Infatti:

$$H(S/I, 1) = dim_k \left(\frac{S}{I}\right)_1 = dim_k \frac{K[x,y,z]}{< 0 >} = 1,$$

$$H(S/I, 2) = dim_k \left(\frac{S}{I}\right)_2 = dim_k \frac{K[x,y,z]}{< xy, xz, yz >} = 3,$$

dopodichè $H(S/I, t) = 3 \; \forall \, t \geq 2$ in quanto si osserva che la funzione di Hilbert, una volta raggiunto il valore della dimensione dello schema nel quale si sta lavorando, si stabilizza (è chiaro infatti che $H(S/I, t)$ non può essere maggiore di $dim_k(S)$ in quanto

[2] Ecco perché il nostro problema di parenza puó essere equivalentemente ricondotto allo studio delle funzione di Hilbert

$dim_k(A_t) \leq dim_k(S)$; ma è chiaro anche che se $t_1 \leq t_2$ allora $H(S/I, t_1) \leq H(S/I, t_2)$ infatti se $t_1 \leq t_2$ $H(S/I, t_1) = dim_k(A_{t_1}) \leq dim_k(A_{t_2}) = H(S/I, t_2))$.

Se invece i tre punti fossero allineati accadrebbe che $H(S/I) = \ 1\ 2\ 3\ 3\ \ldots$
Valga l'esempio seguente:
siano: $P_1 = [1, 0, 0]$, $P_2 = [0, 1, 0]$ e $P_3 = [1, 1, 0]$,

$$H(S/I, 1) = dim_k \frac{K[x, y, z]}{< z >} = 1,$$

$$H(S/I, 2) = dim_k \frac{K[x, y, z]}{< z^2, xz, yz >} = 2,$$

$$H(S/I, 3) = dim_k \frac{K[x, y, z]}{< z^3, x2y - xy^2, x^2z, xyz, xz^2, y^2z, yz^2 >} = 3$$

e cosí via.

Vediamo la cosa in generale:
Sia $M_1, \ldots, M_{\binom{d+n}{n}}$ una base monomiale di S_d : se $F \in S_d$ allora $F = c_1M_1 + \cdots + c_{\binom{d+n}{n}} M_{\binom{d+n}{n}}$ con $c_i \in K\ \forall\ i = 1, \ldots, \binom{d+n}{n}$ abbiamo quindi un'espressione lineare che si traduce nel cercare i c_i tali che $F(P) = 0$.
Quindi, se consideriamo $P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^n$, le forme di grado d che si annullano in questi punti sono le soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} M_1(P_1)c_1 + \cdots + M_{\binom{d+n}{n}}(P_1)c_{\binom{d+n}{n}} = 0 \\ \ldots \\ M_1(P_s)c_1 + \cdots + M_{\binom{d+n}{n}}(P_s)c_{\binom{d+n}{n}} = 0 \end{cases} . \tag{1.2}$$

Ora, se indichiamo con $\mathcal{M}_d$ la matrice

$$\begin{pmatrix} M_1(P_1) & \cdots & M_{\binom{d+n}{n}}(P_1) \\ \vdots & & \vdots \\ M_1(P_s) & \cdots & M_{\binom{d+n}{n}}(P_s) \end{pmatrix}$$

Ne segue che (2) è equivalente al sistema $\mathcal{M}_d \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{\binom{d+n}{n}} \end{pmatrix} = 0.$

Ora, la soluzione lineare di queste equazioni é esattamente lo spazio vettoriale I_d e

$dim_k(I_d) = \begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix} - rg(\mathcal{M}_d)$ cosicché

$$H(S/I,d) = \begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix} - dim_k(I_d) = rg(\mathcal{M}_d).$$

Ma, per ogni s possiamo scegliere $P_1,\dots,P_s$ tali che, qualunque sia d, la $\mathcal{M}_d$ ha rango massimo: $rg(\mathcal{M}_d) = min\left\{s, \begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix}\right\}$.
Quindi, riassumendo, se abbiamo uno schema $\mathbf{X} = \{P_1,\dots,P_s\} \subset \mathbf{P}^n$ ove punti $P_i \longleftrightarrow \wp_i$ ideali primi e i P_i sono generici, allora:

$$H(\mathbf{X},t) = min\left\{s, \begin{pmatrix} t+n \\ n \end{pmatrix}\right\}.$$

1.2.2 Funzione di Hilbert nel caso di sottoschemi 0-dimensionali non ridotti di $\mathbf{P}^n$

Supponiamo di avere un solo punto, cioè supponiamo di avere uno schema il cui supporto sia $P = [1,0,\dots,0]$ avente come ideale rappresentativo un ieale primario il cui radicale sia $\wp$ cioè $(y_1,\dots,y_n)$.

Sia $F \in \wp$ un polinomio omogeneo di grado d; deomogeneizziamolo rispetto ad y_0 e otteniamo $f \in S = K[y_1,\dots,y_n]$, con $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ e $degf_i = i$. Poichè $F \in \wp$, avremo

$$f_0 = 0 \text{ e } P = \underline{0} \in \mathbf{A}^n,$$

$$f_1 = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)\Bigg|_0 y_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\Bigg|_0 y_n.$$

Si dice che se $\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_0 \neq 0$ allora P é un **punto semplice** di $V(f)$ e f_1 è l'equazione di $T_P(V(f))$.
Dire che $F \in \wp^2$ è equivalente ad affermare che $\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)\Big|_0 = 0 \; \forall \; i = 1,\dots,n$ e questa è esattamente la definizione di **punto singolare** di $V(f)$ (in questo caso si tratta di un punto almeno doppio).
Quindi se $I = \wp^2$ allora I_d consiste di tutte le forme di grado d che hanno una singolarità in P. Questo spazio vettoriale ci fornisce un classico esempio di sistema lineare di ipersuperfici di $\mathbf{P}^n$ (è un sottospazio lineare di S_d).

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di f attorno a 0.
Sia $a_{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta$ termine di f_2, allora

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} \left.\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\right)\right|_0 & \text{se } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2!}\left.\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha^2}\right)\right|_0 & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} .$$

$F \in \wp^3$ se e solo se tutte le derivate parziali seconde di f si annullano che equivale a dire che P è un punto singolare di $V(f)$ con molteplicitá maggiore o uguale a 3.
Piú generalmete: tutte le derivate parziali di f di ordine al piú t si annullano in P se e solo se $F \in \wp^{t+1}$ ossia se e solo se P è un *punto singolare di $V(f)$ di moltepilicitá maggiore o uguale a* $t+1$. Avremo quindi:

$$H(S/\wp^t, s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} s+n \\ n \end{pmatrix} & \text{se } s < t \\ \begin{pmatrix} t-1+n \\ n \end{pmatrix} & \text{se } s \geq t \end{cases} .$$

Definizione 1.1

Sia $P \in \mathbf{P}^n$ e $\wp \subset S = K[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ sia l'ideale ad esso corrispondente. Il sottoschema di $\mathbf{P}^n$ definito dall'ideale $\wp$-primario $\wp^t$ é chiamato **punto grasso** con supporto P e lo si denota con (P, t).

Quindi un solo punto grasso in $\mathbf{P}^n$ ha la stessa funzione di Hilbert di $\begin{pmatrix} t-1+n \\ n \end{pmatrix}$ punti generici distinti di $\mathbf{P}^n$.

Nella geometria algebrica classica in genere, anziché la terminologia "punti grassi" , si utilizza quella di "intorno infinitasimale": un punto grasso il cui ideale rappresentativo sia $\wp^n$ lo si nomava "$(n-1)$-esimo intorno infinitesimale". Vediamo il motivo di questa denominazione. Un punto doppio il cui ideale rappresentativo sia $\wp^2$ (e qunidi primo intorno infinitesimale del punto rappresentato da $\wp$) è caratterizzato dall'annullarsi non solo di $F(P)$ $\forall F \in \wp$ ma anche di tutte le sue derivate prime. Esso è quindi individuato da $n+1$ condizioni. Geometricamente si può vedere la cosa in questi termini: $F(P) = 0$ rappresenta P, $\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)\right|_0 = 0$ rappresentano altre n condizioni come nel caso in cui si avessero altri n punti indipendenti. Si può vedere la cosa come se si avessero n punti infinitesimalmente vicini a P.

Un punto triplo è caratterizzato dall'annullarsi di $F(P)$ e di tutte le derivate parziali di primo e second'ordine. Oltre alle n condizioni sulle derivate prime (che, abbiamo visto, è come se individuassero n punti vicini a P) abbiamo anche quelle date dall'annullarsi delle derivate seconde le quali le si possono pensare come individuanti un altro insieme di punti a loro volta un po' piú lontani da

P rispetto a quelli individuati dall'annullarsi delle derivate prime ma comunque ancora abbastanza vicini a P.

Aumentando la molteplicità di P aumenta il grado delle derivate parziali che si annullano; si può immaginare il tutto come se ci fossero degli intorni di P oguno dei quali venga individuato dall'annullarsi delle derivate parziali di un dato grado e aventi raggio sempre maggiore mano a mano che aumenta l'ordine di tali derivate.

Ecco perchè si parla di *intorni infinitesimali*: il primo intorno infinitesimale di P è dato in un senso da P^2, in un altro da un insieme di punti giacenti in un intorno di P con raggio infinitesimale; il secondo intorno infinitesimale di P è in un senso P^3, in un altro un insieme di punti giacenti in un intorno di P avente raggio maggiore del primo intorno infinitesimale ma comunque anch'esso infinitesimale; e cosí via.

Un altro motivo della denominazione di "intorno infinitesimale" può essere evinto dal seguente

Esempio 1.2

Siano $P_1 = (0,t)$, $P_2 = (t,0)$, $P_3 = (t,t) \in \mathbf{A}^2(K)$ tali punti hanno come ideali rappresentativi rispettivamente $(y_1, y_2 - t), (y_1 - t, y_2), (y_1 - t, y_2 - t)$. Consideriamo lo schema $X = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, esso sarà individuato dall'ideale $I = (y_1, y_2 - t) \cap (y_1 - t, y_2) \cap (y_1 - t, y_2 - t)$ che può anche essere riscritto

$$I = (y_1(y_1 - t), y_2(y_2 - t), (y_1 - t)(y_2 - t)).$$

Ora se facciamo il limite per t che tende a 0 otteniamo:

$$lim_{t \to 0} I = (y_1^2, y_2^2, y_1 y_2) = (y_1, y_2)^2$$

che è l'ideale rappresentativo di un punto doppio.

Quest'esempio illustra come un punto doppio possa essere individuato da tre punti che, da tre direzioni diverse, gli si avvicinano infinitamente.

Estendiamo questo discorso a piú punti

Definizione 1.2

Siano $P_1, \dots, P_s$ punti distinti in $\mathbf{P}^n$ e $\wp_1, \dots, \wp_s$ i corrispondenti ideali primi. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ interi positivi. Il sottoschema di $\mathbf{P}^n$ definito dall'ideale $I = \wp_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap \wp_s^{\alpha_s}$ è chiamato **schema di punti grassi in $\mathbf{P}^n$** e si denota

$$(P_1, \dots, P_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

Ora il problema è quello di conoscere $H(S/I)$ quando I è l'ideale di uno schema di punti grassi.

Notiamo che questa è una sorta di problema di interpolazione differenziale, infatti stiamo cercando la dimensione di uno spazio di ipersuperfici di grado fissato le quali passino attraverso un insieme di punti fissati e che abbiano, in ciascuno di questi punti, una singolaritá di molteplicitá come minimo α_i.

Si è inoltre visto che se $s = 1$ allora $S/\wp^t$ ha la funzione di Hilbert di $\binom{t-1+n}{n}$ punti distinti di $\mathbf{P}^n$ in posizione generale.

Ci chiediamo ora se è vero che la funzione di Hilbert di uno schema di punti grassi, come sopra, è la medesima di $\sum_{i=1}^{s} \binom{\alpha_i - 1 + n}{n}$ punti distinti di $\mathbf{P}^n$ in posizione generale. La risposta è NO (come del resto abbiamo visto nell'introduzione, tant'è che gli esempi che riportiamo sono i medesimi, solo espressi con un linguaggio diverso).

Esempio 1.3

Siano P_1, P_2 due punti di $\mathbf{P}^2$, P_i corrisponda a $\wp_i$ e siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ cosicché $I = \wp_1^2 \cap \wp_2^2$. La domanda di cui sopra ci chiede se I ha come funzione di Hilbert la medesima di un insieme di 6 punti di $\mathbf{P}^2$ in posizione generale. Dal momento che 6 punti di $\mathbf{P}^2$ in posizione generale hanno come funzione di Hilbert 1 3 6 6 ... dovrebbe accadere che in I non ci fossero coniche. Ma cosí non è in quanto se L è l'equazione della retta contenente P_1 e P_2 allora $L^2 \in I$.

Esempio 1.4

Siano $P_1, \dots, P_5$ cinque punti di $\mathbf{P}^2$ in posizione generale con $\wp_1, \dots, \wp_5$ i corrispondenti ideali primi.
Consideriamo $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_5^2$. Vogliamo sapere se I ha come funzione di Hilbert la medesima di $5 \cdot 3 = 15$ punti di $\mathbf{P}^2$ in posizione generale, cioè 1 3 6 10 15 15 ... quindi non ci dovrebbe essere nessuna quartica in I. Ma cinque punti di $\mathbf{P}^2$ giacciono sempre su una conica (la cui equazione sia $\mathcal{C}$), indi per cui $\mathcal{C}^2$ è esattamente una quartica e sta in I.

Dopo questi esempi ci si chiede se sia possibile dare una risposta generale alla domanda di cui sopra.

1.2.3 Congettura

Ciò che verrà illustrato in questa sezione segue le linee un articolo di R. Miranda [**Mir**].

Riprendiamo gli esempi della conica doppia per due punti e la quartica doppia per cinque punti. Per quanto visto, ci si aspetterebbe che curve siffatte non esistano ma la realtá non è questa. Essi sono solo casi particolari ma accade sovente che si presenti qualcosa di analogo.

Un altro esempio carino è quello delle curve di grado 93 che abbiano in un punto molteplicitá 57 e in altri sette punti molteplicitá 28. La dimensione virtuale di $S_{93}(P_0^{57}, P_1^{28}, \ldots, P_7^{28})$ é $max\left\{0, \frac{93(96)}{2} - 5\right.$ $max\{0, -31\} = 0$. Quindi ci aspettiamo che $dim_k S_{93}(P_0^{57}, P_1^{28}, \ldots, P_7^{28}) = 0$. Ciò nonostante per sette punti in posizione generale passa sempre una cubica che è doppia in uno di essi e attraversa gli altri sei, inoltre per otto punti in posizione generale passa sempre una curva di grado sei che è tripla il uno di essi e passa attraverso gli altri sette. Consideriamo le sette cubiche C_j, $1 \leq j \leq 7$, con un punto doppio in P_0 e passanti attraverso tutti gli altri P_i eccetto P_j. Sia S la curva di grado 7 tripla in P_0 e doppia negli altri sette punti P_i. Allora $5S + 3\sum_{j=1}^{7} C_j \in S_{93}(P_0^{57}, P_1^{28}, \ldots, P_7^{28})$. Quindi $S_{93}(P_0^{57}, P_1^{28}, \ldots, P_7^{28}) \neq \emptyset$.

Da questi esempi emerge che i problemi riguardanti la dimensione di $S_d(P_1^{n_1}, \ldots, P_s^{n_s})$ non sono poi tanto peregrini. A tale proposito è stata formulata una congettura che è qui di seguito riportata nella sua prima originaria espressione dovuta a Beniamino Segre, a tale proprosito si veda [**Seg**] (in seguito B. Harbourne in [**Ha.1**], A. Gimigliano in [**Gi.1**] e in [**Gi.2**] e A. Hirschowitz in [**Hi.1**] ne hanno date, indipendentemente tra loro, altre formulazioni riconducibili l'una all'altra):

Congettura 1.1

> Se $S_d(P_1^{n_1}, \ldots, P_s^{n_s})$ è un sistema lineare la cui dimensione non è quella aspettata (si dirá *sistema lineare speciale*) per i punti $P_1, \ldots, P_s$ in posizione generale, allora tutte le curve di $S_d(P_1^{n_1}, \ldots P_s^{n_s})$ contengono una curva fissa doppia (almeno).

Questa è comunque solo una congettura, ossia il suddetto problema è ancora aperto. Lavori recenti stanno focalizzando la loro attenzione sul caso in cui le molteplicità del P_i siano tutte uguali tra loro: si stanno quindi cercando di studiare i sistemi $S_d(P_1^n, \ldots, P_s^n)$.

Ad esempio, esistono già risultati nei casi $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ nei quali la congettura descritta sopra è verificata.

Piú in generale le attuali conoscenze in materia ci permettono di riconoscere che, per quanto riguarda i sistemi lineari di curve piane, si ha conoscenza completa di quanto accade solo nei casi seguenti (sia $I = \wp_1^{\alpha_1} \cap \cdots \cap \wp_s^{\alpha_s}$):

1. $\forall\, s$ e $\alpha_i \leq 12$ con $\alpha_i = \alpha_j \;\forall\, i, j$ (vedi [**CM.1**]);

2. $s \leq 9$ e α_i qualsiasi (vedi [**Gi.2**]);

3. s qualsiasi e $\alpha_i \leq 3$ (vedi [**Gi.2**]).

Per maggiore completezza a riguardo riportiamo alcuni dei risultati presentati in [**Ha.2**] da B. Harbourne:

Sia $\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; n_1, \ldots, n_s)$; introduciamo la seguente

Notazione

$\alpha(\mathbf{X})$ il piú piccolo intero d tale che $I(\mathbf{X})_d \neq 0$;

$\beta(\mathbf{X})$ il piú piccolo intero d tale che l'insieme degli zeri di $I(\mathbf{X})_d$ sia 0-dimensionale;

$\tau(\mathbf{X})$ il piú piccolo intero d, $d \geq 0$, tale che $H(\mathbf{X}, d) = P(\mathbf{X}, d)$ dove $P(\mathbf{X})$ è il polinomio di Hilbert di $\mathbf{X}$ (ossia $P(\mathbf{X})(t) = \frac{t^2+3t+2-\sum_i n_i(n_i+1)}{2}$);

$\nu(\mathbf{X}, d)$ il numero di generatori di $I(\mathbf{X})$ in grado d in ogni insieme minimale di generatori omogenei.

In [**Ha.2**] troviamo i seguenti fatti:

1. Sia $\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s, n_1, \ldots, n_s)$ un sottoschema di punti grassi di $\mathbf{P}^2$ con P_i punti distinti. Allora
$$\sum_i \nu(\mathbf{X}, i) \leq \alpha(\mathbf{X}) + \beta(\mathbf{X}) - \tau(\mathbf{X}) \leq \alpha(\mathbf{X}) + 1 \ ;$$
per la dimostrazione di questo fatto si veda [**Du**].
2. $\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; n_1, \ldots, n_s)$ si dice *quasi uniforme* se i punti P_i sono generici, $s \geq 9$, $n_1 = n_9$ e $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s \geq 0$.
In tal caso c'è una congettura ([**HHF**]) che afferma che se $\mathbf{X}$ è quasi uniforme allora $H(\mathbf{X}, d) = max\{P(\mathbf{X}, d), 0\}$ e $\nu(\mathbf{X}, d) = max\{H(\mathbf{X}, d) - 3H(\mathbf{X}, d-1), 0\}$.
È dimostrato che una tale congettura è vera nei casi seguenti:
   - $s = 9$ ([**Ha.3**]);
   - $n \leq 2$ ([**GGR**], [**Id**]);
   - s una potenza di 4 e $n \geq \frac{\sqrt{s}-2}{4}$ ([**HHF**] e [**Ev**]);
   - $s = z(z+1)$ e $n = z+1 \quad \forall\, z \in \mathbf{Z},\ z > 2$ ([**HR**]).
3. Altra congettura dovuta a Nagata ([**Na**]) è la seguente:

   Sia $\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; n_1, \ldots, n_s)$ per $s > 2$ e $P_i \in \mathbf{P}^2$ punti generici. Allora $\alpha(\mathbf{X}) > \frac{n_1+\cdots+n_s}{\sqrt{s}}$.

   Tale congettura è sicuramente valida nel caso in cui s sia un quadrato.

4. Ciliberto e Miranda ([**CM.1**], [**CM.2**]) hanno verificato la congettura di B. Segre per ogni $n \leq 12$ e per ogni $s > 9$, Mignon (in [**Mig**]) l'ha verificata per ogni $s > 9$ e $n_i \leq 4 \ \forall i$.
5. In [**Na**] troviamo: se $\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; \underbrace{n, \ldots, n}_{s \text{ volte}})$, P_i punti in posizione generale, $s \leq 9$, allora $\alpha(\mathbf{X}) = [c_s n]$, dove $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 3/2$, $c_4 = c_5 = 2$, $c_6 = 12/5$, $c_7 = 21/8$, $c_8 = 48/17$, $c_9 = 3$.

1.2.4 Sistemi inversi

Prima di procedere nella trattazione introduciamo il concetto di *sistema inverso* che ci fornirà nuovi strumenti per lo studio del nostro problema. Introduciamo una chiave di lettura un po' formale.

Sia $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ e sia $S = K[y_1, \ldots, y_n]$ i cui polinomi penseremo come gli operatori "derivate parziali" su R, cioè consideriamo l'azione di S su R (chiamata *apolarità di S su R*) e definita:

$$y_i \circ x_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} ,$$

$\{y_1, \ldots, y_n\}$ in R_1 si comporta come la base duale di R_1 rispetto a questa azione.

È abbastanza evidente che l'estensione di questa azione risulta essere:

$$S_i \times R_j \longrightarrow R_{j-1}$$

$$s_i \times r_j := s_i \circ r_j$$

Osserviamo che:

- l'azione di S su R fa di R un S-modulo (mentre non è vero il viceversa);
- l'azione di S su R abbassa il grado;
- R è un S-modulo <u>non</u> finitamente generato;
- l'azione di apolarità induce una simmetria K-bilineare:

$$S_j \times R_j \longrightarrow K \ \ \forall\, j = 0, 1, \ldots$$

- la simmetria bilineare $S_j \times R_j \longrightarrow K$ indotta dall'azione di apolarità è non singolare; [3]
- se $\{y^A\}$ e $\{x^B\}$ sono rispettivamente basi di S_j e R_j, esse sono quasi basi duali, ossia ad essere basi duali di S_j e R_j sono: $\{y^{A_1}, \ldots, y^{A_t}\}$ e $\{\frac{1}{c_1}x^{A_1}, \ldots, \frac{1}{c_t}x^{A_t}\}$.

Introduciamo ora il concetto di *sistema inverso*:

Definizione 1.3

I ideale omogeneo di S. I^{-1} = **sistema inverso di I** ed è l'S-sottomodulo di R consistente di tutti gli elementi di R annullati da I. Quindi:

$$\text{Se } I = (F_1, \ldots, F_t) \text{ e } G \in R, \text{ avremo che}$$

$$G \in I^{-1} \Leftrightarrow F_1 \circ G = \cdots = F_t \circ G = 0.$$

I^{-1} è un sottomodulo graduato di R ma non è necessariamente chiuso rispetto alla moltiplicazione; esso risulta essere noto una volta che si conoscono tutti gli $(I^{-1})_j \ \forall j$.

L'importanza dei sistemi inversi nello studio del nostro problema sta nel risultato seguente:

$$dim_k(I^{-1})_j = H(S/I, j).$$

Una volta noto $(I^{-1})_j$ (quindi I^{-1} se si conosce $(I^{-1})_j \ \forall j$) è nota pure $H(S/I, j)$.

Un'altra osservazione che ci potrà venire utile è: $(I^{-1})_j \cong I_j^{\perp}$ [4].

Si verifica inoltre che:

$$I_j^{\perp} =< \text{i monomi di } S_j \text{ che non sono in } I_j >$$

e che

$$(I \cap J)^{-1} = I^{-1} + J^{-1}.$$

Introdotta aldunque questa nuova chiave di lettura, vediamo cosa ci permette di conoscere riguardo i punti grassi.

[3]Sia $V \times W \longrightarrow K$ una parità K-bilineare data da $v \times w \longrightarrow v \circ w$. Essa induce due mappe K-bilineari:
$\phi : V \longrightarrow Hom_K(W, K)$ cosí definita: $\phi(v) := \phi_v$ e $\phi_v(w) = v \circ w$
e
$\chi : W \longrightarrow Hom_K(V, K)$ cosídefinita: $\chi(w) := \chi_w$ e $\chi_w(v) = v \circ w$
$V \times W \longrightarrow K$ é non singolare $\Leftrightarrow$ per ogni base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di W la matrice $(b_{ij} = v_i \circ w_j)$ è invertibile.

[4]Se $V \times W \longrightarrow K$ è una simmetria e V_1 è un sottospazio di W allora $V_1^{\perp}$ è un sottospazio di W e precisamente è: $V_1^{\perp} = \{w \in W / v \circ w = 0 \ \forall v \in V_1\} = \{w \in W / \chi_w(V_1) = 0\}$. Sia $V \times W \longrightarrow K$ una simmetria non singolare con $dim_k(V) = dim_k(V_1) = t \Rightarrow dim_k(V_1^{\perp}) = n - t$

1.2.5 Sistemi inversi di punti grassi

Se I è un ideale monomiale, anche se non è artiniano [5], possiamo comunque dire con esattezza chi è I^{-1}: è un S-sottomodulo monomiale di R generato da tutti i monomi che non sono divisibili per i generatori monomiali di I; quindi I^{-1} non sarà finitamente generato ma è conoscibile (diremo che è *finitamente descrivibile*).

Vediamo qualcosa di analogo per i punti grassi. Facciamo le teoria per gli ideali monomiali (i punti grassi corrispondono a potenze di ideali monomiali, per cui sono essi stessi degli ideali monomiali). Un insieme di punti grassi è un' intersezione di ideali, ognuno dei quali si ottiene con un cambiamento di variabili lineare da un ideale monomiale.

Un solo punto grasso

Sia S l'anello dei polinomi di $\mathbf{P}^n$: $S = K[y_0, \ldots, y_n]$. Sia $\wp = (L_1, \ldots, L_n)$ l'ideale corrispondente a $P \in \mathbf{P}^n$. A meno di un opportuno cambiamento di variabili possiamo supporre $P = [1, 0, 0, \ldots, 0]$ e quindi $\wp = (y_1, \ldots, y_n)$ (ideale monomiale). Sia $I = \wp^{l+1}$ (ideale primario) si ha ovviamente

$$I^{-1} = K - \text{ span of } \{x^B / y^B \notin I\} \ ^6.$$

Quindi, per conoscere I^{-1} è sufficiente conoscere esattamente i monomi che non stanno in I. Se $I_t = (0)$ per $t \leq l$ allora $(I^{-1})_t = R_t$ per $t \leq l$.

Notazione: per descrivere il resto di I^{-1} scriviamo $T = K[x_1, \ldots, x_n]$

$$R_t =< x_0^t > \oplus < x_0^{t-1} T_1 > \oplus \cdots \oplus < x_0^{t-l} T_l > \oplus [< x_0^{t-(l+1)} T_{l+1} \oplus \cdots \oplus T_l].$$

Osserviamo che

$$< x_0^t > \oplus < x_0^{t-1} T_1 > \oplus \cdots \oplus < x_0^{t-l} T_l > \text{ non è contenuto in } \wp^{l-1}$$

mentre

$$< x_0^{t-(l+1)} T_{l+1} > \oplus \cdots \oplus T_l \subset \wp^{l-1}.$$

Quindi

$$[(\wp^{l+1})^{-1}]_t =< x_0^t > \oplus < x_0^{t-1} T_1 > \oplus \cdots \oplus < x_0^{t-l} T_l >= x_0^{t-l} R_l.$$

Riassumendo:

Sia $\wp = (y_1, \ldots, y_n) \subset K[y_0, \ldots, y_n] = S$ e sia $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ (come introdotti nel paragrafo precedente). Se $l \geq 0$ allora

$$(\wp^{l+1})^{-1} = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_l \oplus x_0 R_l \oplus x_0^2 R_l \oplus \cdots$$

[5] I è un ideale artiniano $\Leftrightarrow I^{-1}$ è finitamente generato.

[6] In generale, per ogni coppia di sottospazi $\Gamma, \Phi \subset \mathbf{P}^n$ si definisce span of Γ e Φ, e si scrive $\overline{\Gamma \cup \Phi}$, il piú piccolo sottospazio lineare di $\mathbf{P}^n$ contenente la loro unione.

Sia ora P un punto arbitario di $\mathbf{P}^n$ (ossia $P = [1, p_1, \dots, p_n]$ e quindi $\wp = (y_1 - p_1 y_0, \dots, y_n - p_n y_0))$. Con un oppotuno cambiamento di variabili ci si riconduce al caso di $P = [1, 0, \dots, 0]$. È quindi molto semplice verificare che la conclusione alla quale si è pervenuti nel caso di $P = [1, 0, \dots, 0]$ può essere cosí generalizzata:
Se $P = [p_0, \dots, p_n] \in \mathbf{P}^n$ e $\wp$ ne è l'ideale corrispondente allora

$$(\wp^{l+1})^{-1} = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_l \oplus LR_l \oplus L^2 R_l \oplus \cdots$$

$$\text{dove } L = p_0 x_0 + p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n.$$

Piú di un punto grasso

Da quanto appena visto possono seguire due generalizzazioni nel caso si abbia a che fare con piú di un punto grasso:

1. Siano $P_1, \dots, P_s$ punti di $\mathbf{P}^n(K)$ con $P_i = [p_{i_0}, p_{i1}, \dots, p_{in}]$. Sia $L_{P_i} = p_{i_0} x_0 + p_{i_1} x_1 + \ldots + p_{i_n} x_n \in R = K[x_0, \dots, x_n]$.
   Quindi
   $$\text{se } I = \wp_1^{n_1+1} \cap \cdots \cap \wp_s^{n_s+1} \subset S = K[y_0, \dots, y_n] \text{ si ha}$$
   $$(I^{-1})_j = \begin{cases} R_j & \text{per } j \leq max\{n_i\} \\ L_{P_1}^{j-n_1} R_{n_1} + \cdots + L_{P_s}^{j-n_s} R_{n_s} & \text{per } j \geq max\{n_i + 1\} \end{cases}.$$

2. Sia $I = \wp_1^{n_1+1} \cap \cdots \cap \wp_s^{n_s+1} \subseteq S = K[y_0, \dots, y_n]$ con $\wp_i$ ideali corrispondenti a P_i. Risulta che:
   $$H(S/I, j) = dim_k (I^{-1})_j = \begin{cases} dim_k(S_j) & \text{per } j \leq max\{n_i\} \\ dim_k(< L_{P_1}^{j-n_1} R_{n_1}, \dots, L_{P_s}^{j-n_s} R_{n_s} >) & \text{per } j \geq max\{n_i + 1\} \end{cases}$$

Quest'ultimo risultato ci fornisce un legame tra la funzione di Hilbert di un insieme di punti grassi e gli ideali generati da potenze di forme lineari. Si può quindi affermare quanto segue:

$(I^{-1})_j$ é la j-esima parte graduata dell'ideale $(L_{P_1}^{j-n_1}, \dots, L_{P_s}^{j-n_s})$ per $j \geq max\{n_i + 1\}$.

Perciò gli elementi di $(I^{-1})_j$ sono del tipo $L_{P_1}^{j-n_1} R_{n_1} + \cdots + L_{P_s}^{j-n_s} R_{n_s}$ e quindi somme di potenze j-esime di polinomi di grado 1. Dunque, associata ad I c'è una famiglia infinita di ideali, generati da potenze di forme lineari, ognuna delle quali ha una parte graduata del tipo $J = (L_{P_1}^{j-n_1} R_{n_1} + \cdots + L_{P_s}^{j-n_s} R_{n_s})$.

Chapter 2

Problemi di Waring e forme canoniche

2.1 Problema di Waring per gli interi

In questa sezione tratteremo un argomento della teoria dei numeri noto come *Problema di Waring*. In tale esposizione ci avvarremo delle già citate note di A. V. Geramita [**Ge**]

2.1.1 Piccolo problema di Waring

Nel 1770 E. Waring, nel suo articolo *"Meditationes Algebricae"*, enunciò, senza dimostrazione, i risultati seguenti:

1. Ogni numero naturale è somma al piú di 9 cubi positivi
2. Ogni numero naturale è somma al piú di 19 potenze quarte

È quindi pensabile che Waring fosse a conoscenza di un risultato piú generale:

> Per ogni numero naturale $j \geq 2$ esiste un numero $N(j)$ tale che ogni intero positivo n si può scrivere nel modo seguente:
>
> $$n = a_1^j + \cdots + a_{N(j)}^j \text{ dove } a_i \geq 0 \; e \; i = 1, \ldots, N(j).$$

Se un tale $N(j)$ esiste denotiamo con $g(j)$ il piú piccolo intero avente tale proprietà.
Il problema di Waring consiste dunque nel determinare suddetto $g(j)$.

Un **Teorema di Hilbert (1909)** ci garantisce che

> $g(j)$ esiste per ogni $j \geq 2$.

Vediamo alcuni esempi:

1. Caso di $j = 2$.
   Il seguente teorema risolve il problema:

   Teorema di Lagrange

   Ogni intero positivo si può esprimere come somma di quadrati di 4 numeri interi.

   Tale teorema non ci dice altro che $g(2) = 4$.

2. $g(3) = 9$ come affermò Waring.

3. $g(4) = 19$ sempre secondo quanto affermato da Waring.

4. Quando $j > 4$ ci sono al piú tre possibilità per determinare $g(j)$. Esse sono assai complicate e questo non è il luogo per trattarle; diamo solo un'idea del problema enunciando il seguente risultato:

   Teorema 2.1

   se per un dato $j > 4$, risulta:

   $$2^j \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^j \right\} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^j \right] \leq 2^j \tag{2.1}$$

   (dove $[x]$ è la parte intera di x e $\{x\}$ la parte frazionaria)
   allora

   $$g(j) = 2^j + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^j \right] - 2.$$

   Ad esempio (2) vale per $j = 5$. quindi $g(5) = 2^5 - 7 - 2 = 37$.
   È stato inoltre dimostrato che (2) non vale al piú per un numero finito di interi j.

Quello appena trattato prende appunto il nome di *Piccolo Problema di Waring* in quanto da esso ne prende origine un altro che va sotto il nome di *Grande Problema di Waring*.

2.1.2 Grande problema di Waring

Questo problema nasce da un'osservazione che si può sollevare riguardo quanto accade nello studio di quello precedente.
Ad esempio: sebbene $g(3) = 9$ solo i numeri 23 e 239 richiedono effettivamente nove cubi per la loro rappresentazone, inoltre solo quindici numeri (curiosamente tutti maggiori di 8042) ne richiedono otto. Quest'osservazione conduce ad una

Definizione 2.1

> Sia $G(j)$ il piú piccolo intero tale che tutti gli interi sufficientemente grandi siano scrivibili come somma al piú di $G(j)$ potenze j-esime di interi.

È quindi immediato osservare che $G(j) \leq g(j)$.
Il grande problema di Waring consiste dunque nel determinare un $G(j)$ siffatto.

Esempi 2.1

- $G(3) \leq 7$ (non è ancora stato provato se effettivamente risulta che $G(3) < 7$);
- $G(4) = 16$;
- $G(6) \leq 27$;
- $G(7) \leq 36$.

In alcuni casi particolari può accadere che $G(j) = g(j)$ (è il caso ad esempio di quanto osservato da Gauss: ogni $n \equiv 7 (mod\, 8)$ é somma di quattro quadrati e non di tre, quindi $G(2) = g(2) = 4$).
Ad ogni modo si conosce ancora ben poco riguardo il numero $G(j)$.

2.2 Problema di Waring nell'ambito dell'algebra commutativa

Nell'ambito dello studio degli anelli di polinomi su un campo, i problemi di Waring possono essere riletti nel modo seguente:

Piccolo problema di Waring

> Sia $R = K[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{j \in \mathbf{N}} R_j$. Dato un intero $g(n, j)$ tale che ogni elemento in R_j sia somma al massimo di $g(n, j)$ potenze j-esime di forme lineari, qual è il minimo valore di $g(n, j)$?

Grande problema di Waring

Sia $N = \binom{n+j}{n}$. Pensiamo R_j come uno spazio affine di dimensione N su un campo K (cioè come $\mathbf{A}^N := \mathbf{A}^N(K)$) e sia

$$U_t(j) = \{F \in R_j / F = L_1^j + \cdots + L_t^j \text{ per } L_i \in R_1\} \subseteq \mathbf{A}^N.$$

Esiste un valore di t per cui $\overline{U_t} = \mathbf{A}^N$?[1] Se tale t esiste, sia $G(n, j)$ il minimo t con tale proprietà; quanto vale $G(n, j)$?

La risposta al piccolo problema di Waring è SÍ: un tale $g(n, j)$ esiste ed inoltre $g(n, j) \leq dim_k S_j$.
Cosa si può dire riguardo ai numeri $G(n, j)$ e $g(n, j)$?
I teoremi di Gauss e Lagrange per i quadrati degli interi hanno il loro analogo in termini di polinomi:

Teorema 2.2

Sia $R = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ allora $G(n, 2) = g(n, 2) = n + 1$.

Facciamo ora un'osservazione che ci sarà utile nel seguito:

Osservazione 2.3

Se $j > 2$ allora $U_t(j)$ è chiuso se e solo se $t \geq g(n, j)$ o $t = 1$.

Dimostrazione

Il fatto che $U_t(j)$ sia chiuso se $t \geq g(n, j)$ segue banalmente dalla definizione ed in tal caso si verifica che $U_t(j) = R_j$.
Verifichiamo che $U_t(j)$ è chiuso anche nel caso in cui $t = 1$.
Siano $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ e $U_1(j) = \{F \in R_j / F = L^j \text{ per qualche } L \in R_1\}$. Essendo K algebricamente chiuso $F = L^j$ se e solo se $cF = (c^{1/j}L)^j$. Quindi, quando guardiamo all'insieme delle j-esime potenze di forme lineari in $\mathbf{A}^N = R_j$ con $N = \binom{n+j}{n}$, rispetto a questo problema possiamo tranquillamente passare allo spazio proiettivo su R_j: $\mathbf{P}(R_j)$. Riformulando in questi termini il problema si ha che: ogni $F \in R_j$ definisce un'ipersuperficie di grado j in $\mathbf{P}^n$, inoltre F e G definiscono la stessa ipersuperficie se e solo se $F = cG$, quindi $\mathbf{P}(R_j)$ è pensabile come rappresentante delle ipersuperfici in $\mathbf{P}^n$ di grado j. $\sharp$

[1] Con $\overline{U_t}$ si intende la chiusura nella topologia di Zariski

Facciamo un esempio concreto:

Esempio 2.1

Siano $n = 2$ e $R = K[x_0, x_1, x_2]$. Quindi $R_2 \simeq \mathbf{A}^6$.
Una forma quadratica in R corrisponde ad una matrice simmetrica 3×3; ad esempio $F = x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ corrisponde alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.
Come base per S_2 è abbastanza naturale scegliere $(y_0^2, 2y_0y_1, y_1^2, 2y_1y_2, y_2^2)$ la cui 5-upla di matrici corrispondente sará

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Quindi, in generale, alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

corrisponderà la forma quadratica

$$F = a_{00}x_0^2 + a_{01}(2x_0x_1) + a_{02}(2x_0x_2) + a_{12}(2x_1x_2) + a_{22}x_2^2.$$

Supponiamo ora $F = L^2$ dove $L = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2$.
Quindi
$F = \alpha_0^2x_0^2 + \alpha_0\alpha_1(2x_0x_1) + \alpha_0\alpha_2(2x_0x_2) + \alpha_1^2x_1^2 + \alpha_1\alpha_2(2x_1x_2) + \alpha_2^2x_2^2$
a cui corrisponde la matrice
$\begin{pmatrix} \alpha_0^2 & \alpha_0\alpha_1 & \alpha_0\alpha_2 \\ \alpha_0\alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_0\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_F = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$.
Notiamo che il rango di$\mathcal{A}_F$ è 1; inoltre ogni matrice simmetrica 3×3 di rango 1 corrisponde ad una forma quadratica scrivibile come quadrato di una forma lineare. Cosí, almeno nel caso di tre variabili, $U_1(2)$ è un sottospazio chiuso di $\mathbf{P}^5$. Infatti se usiamo le indeterminate $Z_{00}, Z_{11}, Z_{22}, Z_{01}, Z_{02}, Z_{12}$ in $\mathbf{P}^5$, $U_1(2)$ non è altro che il sottospazio chiuso di $\mathbf{P}^5$ definito dall'annullarsi dei minori 2×2 della matrice $\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{01} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{02} & Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}$.
Nel prossimo capitolo vedremo un altro modo, piú geometrico, di guardare a questo problema.

2.3 Forme Canoniche

Il problema di Waring può essere visto come il caso particolare di un problema abbastanza classico quale quello delle forme canoniche (e.g. si veda [**Wa**]) che cercheremo ora di trattare. Prima di addentrarci in tale argomento riprendiamo alcuni concetti già noti e, al fine di una piú scorrevole lettura successiva, trattiamoli con un linguaggio leggermente diverso da quello usato in precedenza. Per trattare quest'argomento facciamo riferimento ad un articolo di R. Ehrenborg e G. C. Rota [**ER**] .

2.3.1 Apolarità e Operatore di Polarizzazione

Sia K un campo algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Sia $R = K[x_1, \ldots, x_q]$ e sia R_p il sottospazio di R consistente nell'insieme di tutti i polinomi di grado p (la terminologia classica dà a tali polinomi il nome di *"p-iche q-arie"*). Una base di R_p è data dai monomi

$$x_1^{i_1} \cdots x_q^{i_q}$$

dove $i_1 + \cdots + i_q = p$ e $i_1, \ldots, i_q$ sono interi non negativi. La dimensione di R_p è $\begin{pmatrix} q+p-1 \\ p \end{pmatrix}$ che indicheremo con $\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \rangle$.

Dati $i_1, \ldots, i_q$, interi non negativi, definiamo il coefficiente multinomiale

$$\begin{pmatrix} p \\ i_1, \ldots, i_q \end{pmatrix} = \frac{p!}{i_1! \cdots i_q!} \text{ , se } i_1 + \cdots + i_q = p,$$

e zero altrimenti.

Un tipico elemento di R_p può essere scritto nella forma

$$f(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i_1+\cdots+i_q=p} \begin{pmatrix} p \\ i_1 \cdots i_q \end{pmatrix} a_{i_1,\ldots,i_q} x_1^{i_1} \cdots x_q^{i_q}$$

dove $a_{i_1,\ldots,i_q} = 0$ se $i_1 + \cdots + i_q \neq p$

Per semplicità di notazione usiamo la seguente abbreviazione ormai diventata standard:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q), \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_q), \quad \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_q)$$

$$\mathbf{x^i} = x_1^{i_1} \cdots x_q^{i_q}, \quad \mathbf{a_i} = a_{i_1,\ldots,i_q}, \quad \mathbf{i}! = i_1! \cdots i_q!, \quad |\mathbf{i}| = i_1 + \cdots + i_q.$$

Secondo questa notazione una p-ica q-aria $f(\mathbf{x})$ è scrivibile nella forma:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{i}|=p} \binom{p}{\mathbf{i}} \mathbf{a_i} \cdot \mathbf{x^i}.$$

Sia ora $R^* = K[u_1, \ldots, u_q]$ e R^*_p lo spazio di tutti i polinomi omogenei di grado p. Un elemento di R^*_p è una p-ica q-aria duale. Come prima $dim(R^*_p) = \langle {q \atop p} \rangle$. Un generico elemento di R^*_p lo scriviamo

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{j}} \binom{p}{\mathbf{j}} \mathbf{b_j u^j}.$$

Per tutto questo paragrafo assumeremo che il numero delle variabili sia sempre q.

Definiamo la forma bilineare

$$< \cdot \mid \cdot >= R^* \times R \longrightarrow K$$

$$< \mathbf{u^j} \mid \mathbf{x^j} >= \mathbf{i}! \cdot \delta_{\mathbf{ij}}$$

e la chiamiamo *forma apolare* (non è difficile verificare che si tratta della medesima quantità definita nel paragrafo 1.2.4).

Dato il funzionale lineare $L : R_p \to K$ esiste un unico elemento $g(\mathbf{u}) \in R^*_p$ tale che $L(f(\mathbf{x})) =< g(\mathbf{x}) \mid f(\mathbf{x}) >$ per ogni $f(\mathbf{x}) \in R_p$. Il prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_q)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_q)$ lo si denota come segue:

$$(\mathbf{c} \mid \mathbf{d}) = c_1 d_1 + \cdots + c_q d_q.$$

Notiamo che la forma $(\mathbf{c} \mid \mathbf{x})^p = (c_1 x_1 + \cdots + c_q x_q)^p$ è una p-ica q-aria. Una tale p-ica q-aria la si chiama *"p-esima potenza di una forma lineare"*; analogamente $(\mathbf{c} \mid \mathbf{u})^p$ è chiamata *"p-esima potenza di una forma lineare duale"*. Si può verificare che per ogni vettore $\mathbf{c}$ e per ogni p-ica q-aria $f(\mathbf{x}) \in R_p$ abbiamo

$$< (\mathbf{c} \mid \mathbf{u})^p \mid f(\mathbf{x}) >= p! \cdot f(\mathbf{c}).$$

Analogamente, per ogni vettore $\mathbf{c}$ e per ogni p-ica q-aria duale $g(\mathbf{u}) \in V^*_p$ si ha

$$< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{c} \mid \mathbf{x})^p >= p! \cdot g(\mathbf{c}).$$

Lo scopo di queste lunghe notazioni è quello di poter riformulare, col linguaggio appena introdotto, i concetti di *apolarità* e *operatore di polarizzazione*. Vediamoli:

Definizione 2.2

Sia $f(\mathbf{x})$ una forma di grado r, e sia $g(\mathbf{u})$ una forma duale di grado p. Se $r \leq p$ allora $f(\mathbf{x})$ si dice *apolare* a $g(\mathbf{u})$ se

$$< g(\mathbf{u}) \mid h(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) >= 0$$

per ogni forma $h(\mathbf{x})$ di grado $p - r$.
Se $r \geq p$ allora $f(\mathbf{x})$ è apolare a $g(\mathbf{u})$ se

$$< h(\mathbf{u}) \cdot g(\mathbf{u}) \mid f(\mathbf{x}) >= 0$$

per tutte le forme duali $h(\mathbf{u})$ di grado $r - p$.

Definizione 2.3

Per $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_q) \in K^q$ definiamo l'operatore di polarizzazione $D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}$ come

$$D_{\mathbf{c},\mathbf{x}} = c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_q \frac{\partial}{\partial x_q}.$$

Diamo alcune semplici proposizioni senza riportarne le dimostrazioni.

Proposizione 2.4

L'operatore di polarizzazione $D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}$ è una derivazione, cioè:

1. $D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}$ è lineare,
2. $D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}(1) = 0$,
3. $D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}(f(\mathbf{x})) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}(g(\mathbf{x}))$.

Inoltre $D_{\mathbf{c},\mathbf{x}}$ trasforma una p-forma in una $(p-1)$-forma.

Proposizione 2.5

Sia $f(\mathbf{x})$ una forma di grado $(p-1)$, e sia $g(\mathbf{u})$ una forma duale di grado p. Allora

$$< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{c} \mid \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) >=< D_{\mathbf{c},\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) \mid f(\mathbf{x}) > .$$

Corollario 2.6

Sia $f(\mathbf{x})$ una forma di grado r, e sia $g(\mathbf{u})$ una forma duale di grado p, dove $r \leq p$. Allora $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{u})$ sono apolari se e solo se

$$< D_{\mathbf{c}_{p-r},\mathbf{u}} \cdots D_{\mathbf{c}_1,\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) \mid f(\mathbf{x}) >= 0$$

per ogni $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r \in K^q$.

Introdotto questo linguaggio possiamo adesso considerare il problema delle forme canoniche.

2.3.2 Forme canoniche

Siano $d_1, \dots, d_s$ interi non negativi e sia Γ un insieme finito di multiindici ($\Gamma \subseteq \mathbf{N}^s$). Per ogni $\gamma \in \Gamma$ sia $\mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x})$ un polinomio omogeneo nelle variabili $x_1, \dots, x_q$. Assumiamo che per ogni $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma_1 d_1 + \cdots + \gamma_s d_s + deg(\mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x})) = p \ .$$

Il problema che ci interessa è il seguente:

Quando è possibile scrivere una generica p-ica q-aria $f(\mathbf{x})$ nella forma

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) h_1(\mathbf{x})^{\gamma_1} \cdots h_l(\mathbf{x})^{\gamma_s} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{h}^\gamma(\mathbf{x})$$

dove h_i è un polinomio omogeneo di grado d_i per $i = 1, \dots, s$?

Se una tale scrittura è possibile è detta una *"forma canonica"* per f se s è il piú piccolo intero per cui il problema ha soluzione.

Teorema 2.7

Una p-ica q-aria $f(\mathbf{x})$ può essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{h}^\gamma(\mathbf{x})$$

per qualche $h_1, \dots, h_s$ se e solo se esistono $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_s(\mathbf{x})$ tali che non ci sia alcuna p-ica q-aria duale apolare a tutte le forme $\frac{\partial f}{\partial h_i}$, $1 \le i \le s$.

Dimostrazione

I coefficienti dei polinomi h_i li chiamiamo *parametri* e li denotiamo con *par*, con **Par** indichiamo l'insieme dei parametri. Notiamo che

$$|\mathbf{Par}| = \langle \begin{matrix} q \\ d_1 \end{matrix} \rangle + \cdots + \langle \begin{matrix} q \\ d_s \end{matrix} \rangle.$$

Assumiamo che la generica p-ica q-aria $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{a_i} \mathbf{x^i}$ possa essere scritta nella forma di cui sopra. Si ha la seguente disuguaglianza:

$$\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \rangle \le |\mathbf{Par}| = \langle \begin{matrix} q \\ d_1 \end{matrix} \rangle + \cdots + \langle \begin{matrix} q \\ d_s \end{matrix} \rangle.$$

Sviluppando $\sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x})\mathbf{h}^\gamma(\mathbf{x})$ in un polinomio in $\mathbf{x}$, si può scrivere

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \mathbf{a_i}\mathbf{x^i} = \sum_{\mathbf{j}\in J} \mathbf{t_j}(\mathbf{x})\mathbf{h^j}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \phi_{\mathbf{i}}(par's)\mathbf{x^i}.$$

Otteniamo che $\langle \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix} \rangle$ identifica

$$\mathbf{a_i} = \phi_{\mathbf{i}}(par's)$$

(vediamo i coefficienti di $f(\mathbf{x})$ come polinomi nei *par's*).

Consideriamo la mappa:

$$\mathbf{\Phi} : K^{\mathbf{Par}} \longrightarrow K^{\langle \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix} \rangle}$$

definita da

$$\mathbf{\Phi}(par's) = (\phi_{\mathbf{i}}(par's))_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p}$$

dove le coordinate di $K^{\langle \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix} \rangle}$ sono indiciate da $\mathbf{i}$, con $|\mathbf{i}| = p$, e le coordinate di $K^{\mathbf{Par}}$ sono indiciate dall'insieme $\mathbf{Par}$.
Ciò che si assume è che il rango della mappa $\mathbf{\Phi}$ sia denso in $K^{\langle \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix} \rangle}$. C'è un teorema ([**ER**] Teor. 2.4 [2]) che ci permette di dire che i $\langle \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix} \rangle$ polinomi $\phi_{\mathbf{i}}$ sono algebricamente indipendenti [3]. Attraverso un altro teorema che troviamo sempre in [**ER**] (Teor. 2.3 [4]) possiamo asserire che la matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial par}\right)_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p, par\in\mathbf{Par}}$$

[2] **Teorema 2.4 in [ER]**

Siano $p_1(x_1,\dots,x_q),\dots,p_r(x_1,\dots,x_q) \in \overline{\mathbf{C}(x_1,\dots,x_q)}$ con $r \leq q$. Sia $P : \mathbf{C}^q \to \mathbf{C}^r$ definita da $P(x_1,\dots,x_q) = (p_1(x_1,\dots,x_q),\dots,p_r(x_1,\dots,x_q))$. Allora le funzioni algebriche $p_1,\dots,p_r$ sono algebricamente indipendenti se e solo se il rango di questa mappa è denso in $\mathbf{C}^r$.

[3] Siamo $p_1(x_1,\dots,x_q),\dots,p_q(x_1,\dots,x_q) \in \overline{\mathbf{C}(x_1,\dots,x_q)}$. Le funzioni algebriche $p_1,\dots,p_q$ sono *algebricamente dipendenti* se e solo se

$$det\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq q} \equiv 0$$

[4] **Teorema 2.3 in [ER]**

Siano $p_1(x_1,\dots,x_q),\dots,p_r(x_1,\dots,x_q) \in \overline{\mathbf{C}(x_1,\dots,x_q)}$, dove $r \leq q$. Allora le funzioni algebriche $p_1,\dots,p_r$ sono algebricamente indipendenti se e solo se la matrice $\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq q}$ ha rango massimo.

ha rango massimo.
Avendo quest'ultima matrice rango pieno possiamo scegliere i valori per i parametri tali che la suddetta matrice continui ad avere rango massimo. Scegliere i valori dei parametri è la stessa cosa che scegliere i polinomi omogenei $\mathbf{h_i}(\mathbf{x})$ di grado d_i per $i = 1, \ldots, s$. Sempre per il fatto che $\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial par}\right)_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p, par \in \mathbf{Par}}$ ha rango massimo si ha che le colonne di tale matrice generano lo spazio lineare $K^{\langle \, {q \atop p} \, \rangle}$ il quale è naturalmente isomorfo a R_p, in particolare

$$\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial par}\right)_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \longrightarrow \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial par} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \frac{\partial f}{\partial par}.$$

Quindi le p-iche q-arie $\frac{\partial f}{\partial par}$ riempiono lo spazio lineare R_p. Da questo fatto si ha che non c'è alcuna p-ica q-aria duale diversa da zero $g(\mathbf{u})$ tale che

$$< g(\mathbf{u}) \mid \frac{\partial f}{\partial par} >= 0$$

per tutti i parametri $par \in \mathbf{Par}$.
Ora, ogni parametro interviene in uno solo dei polinomi omogenei $h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_s(\mathbf{x})$. Diciamo che par intervenga in $h_i(\mathbf{x})$. Dal momento che $\frac{\partial h_i}{\partial par} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ per qualche $\mathbf{k}$ tale che $|\mathbf{k}| = d_i$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial par} = \frac{\partial f}{\partial h_i} \frac{\partial h_i}{\partial par} = \frac{\partial f}{\partial h_i} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}.$$

Se facciamo variare par su tutti i parametri h_i, il multiindice $\mathbf{k}$ varierà tra tutti i muliindici tali che $|\mathbf{k}| = d_i$. Quindi la condizione che

$$< g(\mathbf{u}) \mid \frac{\partial f}{\partial h_i} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} >= 0$$

è equivalente a dire che $g(\mathbf{u})$ è apolare a $\frac{\partial f}{\partial h_i}$. Siamo dunque pervenuti alla conclusione che non esiste alcuna $g \in R_p^*$ che sia apolare a tutte le forme $\frac{\partial f}{\partial h_i}$ per $i = 1, \ldots, l$.

Questa argomentazione prova metà del teorema; la dimostrazione dell'altra metà può essere fatta percorrendo a ritroso la strada sopra intrapresa. $\sharp$

Vediamo alcune applicazioni di questo teorema (di cui omettiamo le dimostrazioni, si veda [**ER**]).

Corollario 2.8

Una generica quartica ternaria può essere scritta nella forma $h_1 \cdot h_2 + h_3^2$, dove h_1, h_2, h_3 sono quadriche ternarie.

Corollario 2.9

Una generica cubica ternaria può essere scritta nella forma $h_1^3 + h_2^3 + h_3^3 + c\, h_1 h_2 h_3$ dove h_1, h_2, h_3 sono forme lineari ternarie e c è una costante opportuna.

Corollario 2.10

Sia $q = 2j$. Allora la generica quadrica q-aria può essere scritta nella forma $h_1 h_2 + h_3 h_4 + \cdots + h_{q-1} h_q$, dove le h_i sono forme lineari.

Corollario 2.11

Una generica cubica quaternaria può essere scritta nella forma $h_1 h_2 h_3 + h_4 h_5 h_6$ dove h_i sono forme lineari.

Corollario 2.12

Sia $f(\mathbf{x})$ una generica forma binaria di grado $p \geq 4$. Allora $f(\mathbf{x})$ può essere scritta nella forma $h_1^p + h_2^p + \cdots + h_j^p + c\, h_1^2 h_2^2 \cdots h_j^2$ dove $h_1, h_2, \ldots, h_j$ sono forme lineari binarie, c una costante e $p = 2j$.

Proposizione di Grace

Sia $r > 2$ e sia λ_i un intero tale che $0 < \lambda_i \leq p$ per $i = 1, \ldots, r$. Assumiamo che $\sum_{i=1}^r \lambda_i = (r-1)(p+1)$. Siano $e_1, \ldots, e_r$ forme lineari a due a due indipendenti. Allora per ogni p-ica binaria $f(\mathbf{x})$ esiste un'unica forma binaria $h_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, r$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} e_i(\mathbf{x})^{\lambda_i} h_i(\mathbf{x}).$$

Lemma di Jordan

Siano λ, μ, ν interi positivi tali che $\lambda + \mu + \nu = 2p + 2$. Se $x + y + z = 0$, allora ogni polinomio omogeneo $S(x, y, z)$ di grado p può essere unicamente scritto in questo modo:

$$S(x, y, z) = x^\lambda P(x, y, z) + y^\mu Q(x, y, z) + z^\nu R(x, y, z) \ ,$$

dove P, Q, R sono polinomi omogenei di grado rispettivamente $p - \lambda$, $p - \mu$, $p - \nu$.

Dopo questa panoramica sulle forme canoniche ci dedichiamo a vedere che effettivamente il problema di Waring non è altro che un caso particolare del problema enunciato sopra riguardo alle forme canoniche.

2.3.3 Problema di Waring

Il problema di Waring è quello dell'espressione di una p-ica q-aria come somma di potenze di forme lineari.

Teorema 2.13

Una generica p-ica q-aria $f(\mathbf{x})$ può essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{x})^p + (\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{x})^p + \cdots + (\mathbf{a}_s \mid \mathbf{x})^p$$

se e solo se esistono vettori $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$ tali che non ci sia alcuna p-ica q-aria duale non nulla $g(\mathbf{u})$ apolare a tutte le forme $(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1}, (\mathbf{y}_2 \mid \mathbf{x})^{p-1}, \cdots, (\mathbf{y}_s \mid \mathbf{x})^{p-1}$

Dimostrazione

Assumiamo che la generica p-ica q-aria $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ possa essere scritta nella forma:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{x})^p + (\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{x})^p + \cdots + (\mathbf{a}_s \mid \mathbf{x})^p.$$

Nel membro destro dell'ultima uguaglianza abbiamo sq coefficienti arbitrari $a_{1_1}, \ldots, a_{1_q}, a_{2_1}, \ldots\ldots, a_{s_q}$; nel membro sinistro abbiamo $\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle$ coefficienti arbitrari $\mathbf{e}_{\mathbf{i}}$, dove $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_q)$ è un multiindice e $i_1 + \cdots + i_q = p$. Paragonando il numero di coefficienti di entrambi i membri otteniamo la disuguaglianza

$$\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle \leq sq.$$

Mettendo poi a confronto i coefficienti stessi otteniamo le seguenti $\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle$ identità:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{i}} = \phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s).$$

Notiamo che $\phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ è un polinomio in sq variabili. Possiamo cosí riscrivere l'identità di partenza

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)\mathbf{x}^{\mathbf{i}}.$$

I $\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle$ polinomi $\phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ definiscono la mappa $\mathbf{\Phi}$ da K^{sq} a $K^{\left\langle \begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix} \right\rangle}$ data da

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s) = (\phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s))_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p}$$

dove le coordinate di $\mathbf{K}^{\langle {q \atop p} \rangle}$ sono indiciate dal multiindice $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_q)$ con $i_1 + \cdots + i_q = p$. dal momento che abbiamo assunto che la generica $f(\mathbf{x})$ può essere scritta nella forma presente nel testo del teorema, si ha che il rango della mappa $\mathbf{\Phi}$ è denso. Avvalendoci di [**ER**] Teor. 2.4 già richiamato possiamo concludere che i $\langle {q \atop p} \rangle$ polinomi

$\phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ sono algebricamente indipendenti. Essendo $\langle {q \atop p} \rangle \leq sq$, un altro teorema già richiamato ([**ER**] Teor. 2.3) ci dice che affermare che le $\phi_{\mathbf{i}}$ sono algebricamente indipendenti è equivalente ad affermare che la matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial a_{1_1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial a_{1_q}}, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial a_{2_1}}, \ldots \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial a_{s_q}} \right)_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p}$$

ha rango massimo, quindi possiamo trovare valori per $\mathbf{a}_1 = (a_{1_1}, \ldots, a_{1_q})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{2_1}, \ldots, a_{2_q}), \ldots, \mathbf{a}$ $(a_{s_1}, \ldots, a_{s_q})$ tali che quest'ultima matrice abbia rango pieno, siano essi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$. Quindi le colonne della matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_q}}, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{2_1}}, \ldots \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{s_q}} \right)_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p}$$

generano lo spazio $K^{\langle {q \atop p} \rangle}$. C'è un isomorfismo naturale tra $K^{\langle {q \atop p} \rangle}$ e V_p definito da

$$(\mathbf{e}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \longrightarrow \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$$

Questo isomorfismo porta il vettore $\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial a_{1_1}} \right)_{\mathbf{i}}$ nella p-ica q-aria $\sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_1}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y_{1_1}}$. Cosa analoga vale per $y_{1_2}, \ldots, y_{s_q}$. Sempre a motivo di questo isomorfismo, l'ultima matrice incontrata ha rango massimo se e solo se le sq p-iche q-arie

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y_{1_1}}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y_{1_q}}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y_{2_1}}, \ldots \ldots \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y_{s_q}}$$

generano R_p.
Notiamo che

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y_{1_1}} = p(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1} x_1$$

e analogamente per $y_{1_1}, \ldots, y_{s_q}$. Quindi le p-iche q-arie

$$(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1} x_1, \ldots, (\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1} x_q, (\mathbf{y}_2 \mid \mathbf{x})^{p-1} x_1, \ldots \ldots, (\mathbf{y}_s \mid \mathbf{x})^{p-1} x_q$$

generano R_p.

Ricordiamo dall'algebra lineare che un insieme di elementi in uno spazio lineare lo genera se e solo se il funzionale nullo è l'unico funzionale lineare che manda quest'insieme in zero. Quindi, l'unico funzionale lineare

$$L : V_p \longrightarrow K$$

tale che

$$L((\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1}x_1) = \cdots = L((\mathbf{y}_s \mid \mathbf{x})^{p-1}x_q) = 0$$

è il funzionale nullo. Ma lo spazio V_p^* è il duale di V_p, perciò, se una qualche p-ica q-aria duale $g(\mathbf{u})$ soddisfa

$$< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1}x_1 >= \cdots =< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{y}_s \mid \mathbf{x})^{p-1}x_q >= 0$$

allora necessariamente $g(\mathbf{u}) = 0$.
La condizione che

$$< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1}x_1 >= \cdots =< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{y}_s \mid \mathbf{x})^{p-1}x_q >= 0$$

è precisamente la condizione che $g(\mathbf{u})$ sia apolare a $(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1}$. Quindi se esiste una p-ica q-aria $g(\mathbf{u})$ tale che $g(\mathbf{u})$ sia apolare a ciascun $(\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{x})^{p-1}, (\mathbf{y}_2 \mid \mathbf{x})^{p-1}, \ldots, (\mathbf{y}_s \mid \mathbf{x})^{p-1}$ allora $g(\mathbf{u})$ è nulla. Come si è provato sopra, questa affermazione è equivalente a dire che la matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_q}}, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{2_1}}, \ldots \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{s_q}} \right)_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p}$$

ha rango pieno. Quest'ultimo fatto implica banalmente che in quest'ultima matrice c'è un minore di ordine $\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle$ non nullo. Questo minore deve continuare a mantenersi diverso da zero anche quando al posto dei valori specifici $\mathbf{a'}_1, \mathbf{a'}_2, \ldots, \mathbf{a'}_s$ usiamo le variabili $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$. Quindi la matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_1}}, \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{1_q}}, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{2_1}}, \ldots \ldots, \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial y_{s_q}} \right)$$

ha un minore di ordine $\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle$ non nullo e quindi ha rango massimo.

Quest'ultimo fatto (per il Teor. 2.3 in [**ER**]) ci permette di dire che i $\left\langle \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\rangle$ polinomi

$\phi_{\mathbf{i}}$ sono algebricamente indipendenti; poi il Teor. 2.4 in [**ER**] ci permette di concludere che il rango della mappa

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s) = (\phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s))_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p}$$

è denso in $K^{\langle {q \atop p} \rangle}$.
Ricordiamo che

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}|=p} \phi_{\mathbf{i}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)\mathbf{x}^{\mathbf{i}} \ .$$

Quest'identità può essere vista come una mappa da K^{sq} in R_p. Dal naturale isomorfismo tra R_p e $K^{\langle {q \atop p} \rangle}$ sappiamo che il rango di questa mappa è denso in R_p.
Abbiamo quindi provato che una generica $f(\mathbf{x}) \in R_p$ può essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{x})^p + (\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{x})^p + \cdots + (\mathbf{a}_s \mid \mathbf{x})^p.$$

$\sharp$

Come applicazioni di questo teorema si dimostrano i seguenti corollari:

Corollario 2.14

Una generica forma quadratica q-aria può essere scritta come somma di q quadrati.

Corollario 2.15

Una generica cubica quaternaria può essere scritta come somma di 5 cubi.

Corollario 2.16

Una generica quintica ternaria può essere scritta come somma di 7 potenze quinte.

Corollario 2.17

La generica cubica 5-aria non può in generale essere scritta come somma di 7 cubi.

Ricordiamo ora che un punto $\mathbf{a}$ della p-ica q-aria $f(\mathbf{x})$ ha molteplicità k se per ogni $i = 0, \ldots, k-1$ accade che

$$[D_{\mathbf{c}_1,\mathbf{x}}, \ldots, D_{\mathbf{c}_i,\mathbf{x}} f(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = 0, \quad \forall\ \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i \in \mathbf{K}^q \ .$$

Proposizione 2.18

Sia $g(\mathbf{u})$ una p-ica q-aria duale, e sia $1 \leq k \leq p$. Allora $g(\mathbf{u})$ è apolare a $(\mathbf{a} \mid \mathbf{x})^{p+1-k}$ se e solo se $\mathbf{a}$ ha molteplicità k per $g(\mathbf{u})$.

Dimostrazione

Assumiamo che $g(\mathbf{u}) \in R_p^*$ sia apolare a $(\mathbf{a} \mid \mathbf{x})^{k-1-i} \cdot (\mathbf{a} \mid \mathbf{x})^{p+1-k} = (\mathbf{a} \mid \mathbf{x})^{p-i}$. A motivo della Proposizione 2.1 e della Definizione 2.2 si ha:

$$0 =< g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{x}) \cdots (\mathbf{c_i} \mid \mathbf{x})(\mathbf{a} \mid \mathbf{x})^{p-i} >=$$

$$=< D_{\mathbf{c}_i,\mathbf{u}} \cdots D_{\mathbf{c}_1,\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) \mid (\mathbf{a} \mid \mathbf{x})^{p-i} >=$$

$$= (p-i)! \cdot [D_{\mathbf{c}_i,\mathbf{u}} \cdots D_{\mathbf{c}_1,\mathbf{u}} g(\mathbf{u})]_{\mathbf{u}=\mathbf{a}}.$$

Concludiamo quindi che $\mathbf{a}$ è un punto di $g(\mathbf{u})$ di molteplicità k.
Ripercorrendo le medesime uguaglianze nella direzione opposta proviamo l'altra implicazione della proposizione. $\sharp$

Combinando il Teorema 2.13 con la Proposizione 2.18 si ha il seguente

Teorema 2.19

La generica p-ica q-aria $f(\mathbf{x})$ può essere scritta nella forma

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{x})^p + (\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{x})^p + \cdots + (\mathbf{a}_s \mid \mathbf{x})^p$$

se e solo se esistono $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$ tali che non sia possibile trovare alcuna p-ica q-aria duale $g(\mathbf{u})$ diversa da zero che abbia $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$ come punti doppi.

Corollario di Clebsh

La generica quartica ternaria non può in generale essere scritta come somma di 5 potenze quarte.

Dimostrazione

In questo caso $q = 3, p = 3$. Dobbiamo verificare che per tutti i vettori $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5 \in K^3$ c'è una quartica ternaria duale $g(\mathbf{u})$ non banale che ha $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$ come punti doppi. I vettori $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$ sono le coordinate omogenee di punti del piano proiettivo. Per 5 punti del piano proiettivo passa almeno una conica, ossia c'è una quartica ternaria $h(\mathbf{u})$ non nulla tale che $h(\mathbf{y}_1) = \cdots = h(\mathbf{y}_5) = 0$. Sia $g(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u})^2$. Ne segue ora molto semplicemente che $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_5$ sono punti doppi per $g(\mathbf{u})$. $\sharp$

Teorema (Sylvester)

Una generica forma $(2j-1)$-ica non può essere scritta come somma di $(2j-1)$-esime potenze di j forme lineari.

Dimostrazione

Scegliamo j forme lineari distinte; esse corrispondono a j punti nel piano. Assumiamo che ci sia una forma binaria duale diversa da zero di grado $2j-1$ che abbia tutti questi punti come punti doppi. Ogni punto doppio è un fattore al quadrato della forma binaria; quindi abbiamo j fattori quadrati della forma binaria $g(\mathbf{u})$; ma il loro prodotto ha grado $2j$ che è maggiore di $2j-1$ ossia del grado di $g(\mathbf{u})$. Ora, usando il Teorema 2.19 possiamo giungere alla nostra conclusione. $\sharp$

Chapter 3

Varietà delle secanti

Anche in questo capitolo, come referenze, si fa principlmente riferimento a [**Ge**].

Riprendiamo l'esempio del capitolo precedente.
Siamo in $S_2 = \mathbf{A}^6$ con $S = K[y_0, y_1, y_2]$. Ordiniamo i monomi di S_2 con l'ordine lessicografico: $y_0^2, y_0y_1, y_0y_2, y_1^2, y_1y_2, y_2^2$ ed usiamoli per definire la funzione

$$\phi : \mathbf{P}^2 \longrightarrow \mathbf{P}^5$$

$$\phi([a, b, c]) = [a^2, ab, ac, b^2, bc, c^2]$$

Questa mappa è chiamata *immersione di Veronese* di $\mathbf{P}^2$ in $\mathbf{P}^5 = \mathbf{P}(S_2)$. $\phi(\mathbf{P}^2)$ è una superficie di $\mathbf{P}^5$: come risulterà piú chiaro dalla trattazione del prossimo paragrafo, essa parametrizza l'insieme dei quadrati di forme lineari di $S = K[y_0, y_1, y_2]$.
Quest'esempio particolare può essere generalizzato.

3.1 Varietà di Veronese

Sia $R = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Considero lo spazio R_j e una sua base (costituita da monomi di grado j in R: $M_1, \ldots, M_{\binom{n+j}{n}}$). Pongo $N = \begin{pmatrix} n+j \\ n \end{pmatrix} - 1$. Si definisce ora la mappa

$$\nu_j : \mathbf{P}^n \longrightarrow \mathbf{P}^N$$

$$\nu_j(\mathbf{x}) = \left(M_1(\mathbf{x}), \ldots, M_{\binom{n+j}{n}}(\mathbf{x}) \right)$$

Questa mappa è un'immersione e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di $\mathbf{P}^N$: $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ viene appunto chiamata *Varietá di Veronese* ed è l'insieme delle j-esime potenze di forme lineari provenienti da S_1.

Per vedere meglio questa situazione si può pensare $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}(R_j)$ come il proiettivizzato della parte di grado j dell'anello delle coordinate: $(K[x_0, \ldots, x_n])_j$ (e questo non induce in errore, ad esempio: $dim_k((K[x_0, \ldots, x_n])_j) = \begin{pmatrix} n+j \\ n \end{pmatrix} + 1 = N + 1$), ossia lo penso come generato da$<$ $x_0^j, x_0^{j-1}x_1, \ldots\ldots, x_n^j >$. In quest'ottica posso pensare ν_j come la mappa dallo spazio duale di $\mathbf{P}^n$ (ad esso appartengono gli iperpiani di $\mathbf{P}^n$ ossia i polinomi $L \in (K[x_0, \ldots, x_n])_1$) in $\mathbf{P}^N$ che agisca nel seguente modo:

$$\nu_j : (\mathbf{P}^n)^* \longrightarrow \mathbf{P}^N, \;\; \nu_j(L) = L^j$$

ossia se si scrive

$$L = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

essa agisce come segue

$$\nu_j(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (a_0^j, a_0^{j-1}a_1, \ldots\ldots, a_n^j). \tag{3.1}$$

Questi due modi di interpretare ν_j sono del tutto equivalenti ma da quest'ultimo emerge meglio il fatto che $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ parametrizzi effettivamente l'insieme dei polinomi in $\mathbf{P}^N$ di grado j che sono esprimibili come potenze j-esime di polinomi di grado 1 (ossia elementi di $(\mathbf{P}^n)^*$). Abbiamo detto che questi due modi di interpretare ν_j sono equivalenti, vediamolo. Si ha che

$$\nu_j(a_0x_0 + \cdots + a_nx_n) = \nu_j(L) = L^j = a_0^jx_0^j + \binom{n}{1}a_0^{j-1}a_1x_0^{j-1}x_1 + \cdots\cdots + a_n^jx_n^j$$

che è, a meno di un cambiamento di coordinate, come opera (4), ossia la n-upla dei coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ viene portata da ν_j in $(a_0^jx_0^j + \binom{n}{1}a_0^{j-1}a_1x_0^{j-1}x_1 + \cdots\cdots + a_n^jx_n^j)$ che con un opportuno cambiamento di coordinate diventa esattamente $(a_0^j, a_0^{j-1}a_1, \ldots\ldots, a_n^j)$.

Ecco quindi che ora risulta piú chiaro quanto affermato al termine del paragrafo precedente, ossia che $\phi(\mathbf{P}^2)$ parametrizzi in $\mathbf{P}^5$ l'insieme dei quadrati di forme lineari di $S = K[y_0, y_1, y_2]$.

Un'osservazione che si può fare riguardo la varietá di Veronese è la seguente:
Sia $F \in S_j$ tale che $V(F)$ sia un'ipersuperficie di $\mathbf{P}^n$; si verifica che $\nu_j(V(F)) = \nu_j(\mathbf{P}^n) \cap H_F$ dove H_F è l'iperpiano di $\mathbf{P}^N$ determinato da F. Quindi ν_j converte problemi riguardanti intersezioni di ipersuperfici dello stesso grado di $\mathbf{P}^n$ in problemi riguardanti intersezioni di iperpiani di $\mathbf{P}^N$ con la varietà $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ e viceversa.
Da ciò è facile verificare che $deg(\nu_j(\mathbf{P}^n)) = j^n$.

3.2 Varietà delle secanti

Appurato che la Varietà di Veronese $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ parametrizza l'insieme dei polinomi in $\mathbf{P}^N$ di grado j che sono esprimibili come potenze j-esime di polinomi di grado 1, è interessante cercare una varietà

che parametrizzi somme di potenze j-esime di forme lineari di $R = K[x_0, \ldots, x_n]$.
Per fare questo ci facciamo aiutare dalla somma puramente geometrica di punti. Se $P_1 = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$, $P_2 = [b_0, b_1, \ldots, b_r] \in \mathbf{P}^r$ la varietà che ne parametrizza la somma è la retta proiettiva che li contiene, ossia:

$$< P_1, P_2 >= \{Q \in \mathbf{P}^r / Q = [\lambda a_0 + \mu b_0, \ldots, \lambda a_r + \mu b_r] \text{ dove } [\lambda, \mu] \in \mathbf{P}^1\}.$$

Cercare la varietà che parametrizzi la somma di due potenze j-esime di forme lineari in S è come cercare la *corda* per $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ che collega due punti distinti, ossia una retta secante non degenere di $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ e la si chiamerà *Secante a* $\nu_j(\mathbf{P}^n)$.
Analogamente, dati tre punti non allineati in $\mathbf{P}^r$, la varietà che ne parametrizza la somma è il piano che li contiene; cosí, prendendo tre punti di $\nu_j(\mathbf{P}^n)$, nel caso delle potenze j-esime, la loro "somma", ossia il piano che li contiene, si chiamerà *"Piano 3-secante a $\nu_j(\mathbf{P}^n)$"* o *"$\mathbf{P}^2$ 3-secante a $\nu_j(\mathbf{P}^n)$"*.
Piú in generale, la somma di s potenze j-esime sarà nomata *"$\mathbf{P}^{s-1}$ s-secante"*.

Questa è una costruzione da un punto di vista algebrico della Varietà delle Secanti; vediamone ora una piú geometrica.

<u>Varietá 2-secante</u>
Sia $X \subset \mathbf{P}^N$ una varietá con $dim X = n$. Presi due punti in X c' è una retta che li congiunge; considero tutte le coppie possibili di punti in X e tutte le rette che li uniscono (a due a due); ne faccio l'unione, ciò che ottengo è un aperto (non vengono prese in considerazione tutte le rette tangenti a X); ecco: la chiusura di tale aperto è una varietà che viene chiamata "varietá 2-secante ad X".

<u>Varietà 3-secante</u>
Al solito sia $X \subset \mathbf{P}^n$ una varietá di dimensione n. Prendo tre punti di X e considero il piano da essi individuato. Prendo tutte le 3-uple di punti di X e i piani passanti per esse, ne considero l'unione, ottengo un aperto la cui chiusura sarà proprio la "varietá 3-secante ad X".
In generale la

<u>Varietá t-secante</u>
Sia $X \subset \mathbf{P}^N$ con $dim X = n$. Considero t punti di X e il piano $(t-1)$-dimensionale passante per essi. Prendo poi tutti i piani costruiti in questo modo al variare della t-upla di punti in X; la chiusura dell'insieme unione di tutti questi piani è precisamente la "Varietà t-secante ad X" che si è soliti indicare con una delle seguenti notazioni: $Sec_{t-1}(X) = X^t = t - sec(X)$

Quindi la varietá delle t-secanti ha come elementi somme di t potenze j-esime di polinomi di grado 1.
Può essere ora interessante studiare la dimensione di $Sec_{t-1}(X)$.

In X abbiamo preso t punti $P_1, \ldots, P_t$ quindi $(P_1, \ldots, P_t) \in \overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{t \text{ volte}}$ e $dim(X \times X \times \cdots \times X) = nt$. t punti generano un $\mathbf{P}^{t-1} \subset \mathbf{P}^N$; ci aspettiamo quindi che $dimSec_{t-1}(X) = nt + t - 1$

a meno che $nt + t - 1 \geq N$ nel cui caso ci attendiamo che $Sec_{t-1}(X) = \mathbf{P}^N$. Avremo quindi che la dimensione aspettata di $Sec_{t-1}(X)$ sarà il $min\{N, (n+1)t - 1\}$.

Chapter 4

Punti Grassi, Problemi di Waring, Varietà delle Secanti

In questo capitolo cercheremo di stabilire una connessione tra gli argomenti trattati fino ad ora. Anche in questa circostanza ci avvarremo delle già citate note di A.V. Geramita [**Ge**]. Stabiliremo un legame tra i problemi di Waring sulla rappresentazione di forme omogenne di grado j come somme di potenze j-esime di forme lineari e le varietà delle secanti di varietà di Veronese.

4.1 Preliminari

Spendiamo ancora alcune parole riguardo le varietà delle secanti. Nelle proposizioni che seguono si osserva cosa accade se si interseca $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ rispettivamente con una retta, un piano ed uno spazio tridimensionale di $\mathbf{P^N}$; per quanto riguarda le dimostrazioni si faccia al solito riferimento a [**Ge**].

Proposizione 4.1

> Sia $\mathcal{S} = \nu_j(\mathbf{P}^N)$, con $N = \binom{n+j}{n} - 1$. Una retta di $\mathbf{P}^N$ può incontrare $\mathcal{S}$ in uno schema 0-dimensionale di molteplicità al piú 2.

Proposizione 4.2

> L'intersezione di un piano in $\mathbf{P}^N$ con $\mathcal{S}$, se non è vuota, o è una conica piana oppure uno schema 0-dimensionale di molteplicità al piú 3.

Proposizione 4.3

L'intersezione di un $\mathbf{P}^3 \subset \mathbf{P}^N$ con $\mathcal{S}$, se non è vuota, è o uno schema 0-dimensionale di molteplicità al piú 4, o una curva razionale normale di grado 3 (nel caso in cui $j = 3$) oppure una curva razionale normale di grado 2, ossia una conica piana (nel caso in cui $j = 2$).

Osserviamo che, nonostante la validità di tali risultati, non è necessariamente vero che se si ha $\nu_j : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ e si scrive $\mathcal{S} = \nu_j(\mathbf{P}^n)$ allora se $\mathbf{P}^t \subseteq \mathbf{P}^N$ incontra $\mathcal{S}$ in uno schema 0-dimensionale tale schema debba avere molteplicità al piú $t+1$. Valga il seguente controesempio: $\nu_3 : \mathbf{P}^3 \longrightarrow \mathbf{P}^{19}$, consideriamo $\mathbf{P}^{16} \subset \mathbf{P}^{19}$ che corrisponde ad un sottospazio delle cubiche di $\mathbf{P}^3$ di dimensione 3. Tale $\mathbf{P}^{16}$ incontra $\mathcal{S}$ esattamente in 27 punti di $\mathbf{P}^3$.
In generale non è noto, per un t fissato, quale sia la molteplicità massima di intersezione che può avere $\mathbf{P}^t \subset \mathbf{P}^N$ con $\mathcal{S}$ (sempre assumendo che tale intersezione sia uno schema 0-dimensionale).

Prima di passare alla soluzione del grande problema di Waring diamo un esempio di problema riguardante $U_t(j)$.
Trattiamo il caso di $U_2(3)$ e dimostriamo che non è chiuso ossia che i polinomi di $S = K[y_0, y_1, y_2]$ di grado 3 che sono somma di due cubi di forme lineari non riempiono la varità delle secanti $\nu_3(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^9$. L'idea è di mostrare che i punti dei piani tangenti a $\nu_3(\mathbf{P}^2) = \mathcal{S}$ stanno tutti nella chiusura dell'insieme delle "vere" rette secanti di $\mathcal{S}$, ma nessuno di essi sta su una "vera" secante.
Sia $P \in \nu_3(\mathbf{P}^2) = \mathcal{S}$ e sia Π il piano tangente ad $\mathcal{S}$ in P. Non è difficile vedere che l'intersezione di Π ed $\mathcal{S}$ in P è un sottoschema di $\mathbf{P}^9$ di molteplicità non inferiore a 3 e che nessuna retta di Π passante per P incontra $\mathcal{S}$ in P in un sottoschema di $\mathbf{P}^9$ di molteplicità 1 o 2. Sia ora $Q \in \Pi$, $Q \neq P$; mostriamo che Q non appartiene ad una "vera" retta secante ossia la forma cubica in S_3 che corrisponde a Q non è la somma di due cubi di forme lineari. Supponiamo per assurdo che ciò accada. Si possono dunque trovare $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$ tali che la retta da essi individuata incontri Π in Q. Sia Π' il piano contenente le rette incidenti $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{PQ}$. Π' incontra $\mathcal{S}$ almeno una volta in P_1 ed in P_2 e almeno due volte in P, ossia la sua intersezione con $\mathcal{S}$ è un sottoschema di $\mathbf{P}^9$ con molteplicità almeno 4. Ma per la proposizione **4.2** (osserviamo che siamo nel caso in cui $j = 3$) ciò non è possibile (questa dimostrazione è dovuta a M. V. Catalisano).

4.2 Grande Problema di Waring e funzione di Hilbert di un insieme di punti doppi

Cerchiamo ora di ottenere la soluzione del Grande Problema di Waring dallo studio dei polinomi omogenei.

Sia $R = K[x_0, \dots, x_n]$. Vogliamo sapere quali elementi di R_j possono essere scritti come somma di s potenze j-esime di forme lineari. Questo è lo stesso che scoprire l'immagine della mappa

$$\phi : \underbrace{R_1 \times \cdots \times R_1}_{s \text{ volte}} \longrightarrow R_1$$

data da

$$\phi(L_1, \ldots, L_s) = L_1^j + \cdots + L_s^j.$$

Se vediamo R_1 come $\mathbf{A}^{n+1}(K)$ e R_j come $\mathbf{A}^N(K)$ (al solito $N = \binom{n+j}{n}$) allora ϕ può essere scritta come una mappa polinomiale

$$\phi : \mathbf{A}^{s(n+1)} \longrightarrow \mathbf{A}^N.$$

A noi interessa conoscere la dimensione di tale mappa. Per fare questo prendiamo in considerazione il suo differenziale.

Ricordiamo che $d\phi$ è una funzione che, per ogni punto $P \in \mathbf{A}^{s(n+1)}$, fornisce una trasformazione lineare $(d\phi)(P)$ dallo spazio tangente di $\mathbf{A}^{s(n+1)}$ in P allo spazio tangente di $\mathbf{A}^N$ in $\phi(P)$ (ossia $\mathbf{A}^N$ stesso):

$$(d\phi)(P) := d\phi|_P : T_P(\mathbf{A}^{s(n+1)}) \longrightarrow \mathbf{A}^N.$$

Quindi se conosciamo il generico rango di questa trasformazione lineare siamo pure a conoscenza della dimensione dell'immagine. Perciò il problema si riconduce a calcolare $d\phi(P)$ per un P dato, ossia: fissato $v \in T_P(\mathbf{A}^{s(n+1)})$ come si può trovare $[(d\phi)|_P](v)$? La strada usuale per fare ciò è trovare una curva $\mathcal{C}$ passante per P il cui vettore tangente in P sia v e poi prendere la curva $\phi(\mathcal{C})$ e trovare un vettore tangente in $\phi(P)$. Prendiamo quindi il punto $P = (L_1, \ldots, L_s) \in \mathbf{A}^{s(n+1)}$ e il vettore $v \in T_P(\mathbf{A}^{s(n+1)}) \simeq \mathbf{A}^{s(n+1)}$. Scriviamo $v = (M_1, \ldots, M_s)$ dove pensiamo M_i come elemento di $\mathbf{A}^{n+1}$ per $i = 1, \ldots, s$ (ossia immaginiamo M_i come un elemento di R_1). Consideriamo la seguente parametrizzazione (trattasi di curva in $\mathbf{A}^{s(n+1)}$ passante per P con v vettore tangente in P):

$$t \longmapsto (L_1 + M_1 t, L_2 + M_2 t, \ldots, L_s + M_s t).$$

Cerchiamo l'immagine di questa curva

$$\phi(L_1 + M_1 t, L_2 + M_2 t, \ldots, L_s + M_s t) = \sum_{i=1}^{s} (L_i + M_i t)^j.$$

Possiamo trovare un vettore tangente in $\mathbf{A}^N$ a $\phi(\mathcal{C})$ in $\phi(P)$ nel modo seguente:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s} (L_i + M_i t)^j\right) = \sum_{i=1}^{s} j(L_i + M_i t)^{j-1} M_i$$

e se calcoliamo tale espressione per $t = 0$ troviamo che il vettore tangente a $\phi(\mathcal{C})$ in $\phi(P)$ è esattamente

$$\sum_{i=1}^{s} j(L_i + M_i t)^{j-1} M_i.$$

Allora, facendo variare $v = (M_1, \dots, M_s)$ su tutto lo spazio $\mathbf{A}^{s(n+1)}$, i vettori tangenti che si ottengono variano su tutte le forme delle spazio vettoriale $< L_1^{j-1}R_1, \dots, L_s^{j-1}R_1 >$. Assemblando questi risultati otteniamo il seguente:

Teorema 4.4

Siano $L_1, \dots, L_s$ forme lineari in $R = K[x_0, \dots, x_n]$ dove:

$$L_i = a_{i_0}x_0 + a_{i_1}x_1 + \dots + a_{i_n}x_n$$

e siano $P_1, \dots, P_s \in \mathbf{P}^n(K)$ dove

$$P_i = [a_{i_0}, \dots, a_{i_n}].$$

Siano inoltre $\wp_i \subset S = K[y_0, \dots, y_n]$ gli ideali associati ai P_i per $i = 1, \dots, s$. Sia data la funzione

$$\phi : \underbrace{R_1 \times \dots \times R_1}_{s \text{ volte}} \longrightarrow R_j$$

$$\phi(L_1, \dots, L_s) = L_1^j + \dots + L_s^j$$

allora

$$rg(d\phi)|_{(L_1,\dots,L_s)} = dim_k < L_1^{j-1}R_1, \dots, L_s^{j-1}R_1 > .$$

Applicando a questo caso quanto visto al punto 2 alla voce Piú di un punto grasso alla sezione 1.2.5 sui sistemi inversi di punti grassi, si ha poi (ove $R = K[x_0, \dots, x_n]$):

$$dim_k < L_1^{j-1}R_1, \dots, L_s^{j-1}R_1 >= H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \dots \cap \wp_s^2}, j\right).$$

4.3 Varietà delle Secanti e funzione di Hilbert di un insieme di punti doppi

Come abbiamo appena visto, se si vuole conoscere in $\mathbf{P}(R_j) = \mathbf{P}^N$ (come sempre $N = \binom{n+j}{n} - 1$) la dimensione della varietà che è chiusura dell'insieme di forme di grado j in $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ esprimibili come somme di al piú s potenze j-esime di forme lineari, si deve conoscere per s punti generici $P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^n$ la funzione di Hilbert $H(R/I, j)$ dove $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2$ (al solito $\wp_i$ è l'ideale primo contenuto in R rappresentante P_i).

Riprendiamo una notazione già introdotta nel capitolo scorso: con

$$Sec_{s-1}(\nu_j(\mathbf{P}^n))$$

si individua la sottovarietà di $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}(R_j)$ che è chiusura dell'insieme di forme in R_j che sono somme di non piú di s potenze j-esime di forme lineari.

Il teorema 4.4 può, seguendo la suddetta notazione, essere riscritto come segue:

Teorema 4.4 bis

Sia $S = K[y_0, \ldots, y_n]$, siano $P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^n$ generici e $\wp_i \subseteq S$ gli ideali primi ad essi corrispondenti.
Allora

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_j(\mathbf{P}^n))) = H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, j\right) - 1 = dim_k\left(\frac{S}{(\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2)_j}\right) - 1.$$

Vediamo una semplice ma interessante applicazione di tale risultato

4.3.1 Curva razionale normale in $\mathbf{P}^n$

Prendiamo in considerazione $\nu_j(\mathbf{P}^1) \subseteq \mathbf{P}^j$. Il sopracitato teorema, in questo caso, ci dice che

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_j(\mathbf{P}^1))) = dim_k\left(\frac{S_j}{(\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2)_j}\right) - 1$$

dove $S = K[y_0, y_1]$, $P_i \in \mathbf{P}^1$ generici e $\wp_i$ i rispettivi ideali corrispondenti.
La funzione di Hilbert di un insieme di punti grassi su una retta fu completamente descritta da Ed Davis e A. V. Geramita (si veda [**DG**]) per poi essere rivista in forma assai elegante da Brian Harbourne in [**Ha.1**]. L'unica parte di tali lavori che è di interesse per la nostra trattazione è descritta da quanto segue.

Se $P_1, \ldots, P_s$ giacciono sulla medesima retta, detta $e(I)$=molteplicità di I, allora

$$e(\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2) = 2s$$

e

$$dim_k\left(\frac{S_j}{(\wp_1^2\cap\cdots\cap\wp_s^2)_j}\right)=2s\Longleftrightarrow j\geq 2s-1.$$

Consideriamo dapprima la varietà $Sec_1(\nu_j(\mathbf{P}^1))\subseteq\mathbf{P}^j$ (varietà alla quale si fa solitamente riferimento quando si parla di "Varietà delle Secanti"). La dimensione aspettata di $Sec_1(\nu_j(\mathbf{P}^1))$ è 3 (si scelgano due punti sulla curva $\nu_j(\mathbf{P}^1)$ e li si unisca con un $\mathbf{P}^1$). Sulla base di quanto visto in precedenza dobbiamo considerare l'ideale $\wp_1^2\cap\wp_2^2$ in $S=K[y_0,y_1]$; tale ideale ha molteplicità 4 e la sua funzione di Hilbert è 1 2 3 4 4 ...
Quindi

$$dim(Sec_1(\nu_j(\mathbf{P}^1)))=3\Leftrightarrow j\geq 3.$$

Ossia la varietà delle rette secanti per una curva razionale normale in $\mathbf{P}^n$, per $n\geq 3$, ha dimensione 3. Ovviamente la curva razionale normale in $\mathbf{P}^2$ non può avere alcuna varietà delle secanti di dimensione 3. Ne segue che la generica forma di grado 3 in $K[y_0,y_1]$ è somma di due cubi di forme lineari.

Vediamo ora cosa si può dire riguardo $Sec_2(\nu_j(\mathbf{P}^1))$.
Essendo $e(\wp_1^2\cap\wp_2^2\cap\wp_3^2)=6$ tale ideale ha come funzione di Hilbert 1 2 3 4 5 6 6 ... La dimensione aspettata di $Sec_2(\nu_j(\mathbf{P}^1))$ è 5 ma, dalla forma della funzione di Hilbert, si deduce che ciò si verifica solo per $j\geq 5$. Ne segue che $Sec_2(\nu_5(\mathbf{P}^1))$ riempie $\mathbf{P}^5$ e $Sec_2(\nu_6(\mathbf{P}^1))$ è un'ipersuperficie in $\mathbf{P}^6$ mentre $Sec_2(\nu_7(\mathbf{P}^1))$ ha codimensione 2 in $\mathbf{P}^7$, ecc. Notiamo che si può dedurre che la generica forma di grado 5 in $K[y_0,y_1]$ è somma di 3 potenze quinte di forme lineari.

4.3.2 Risoluzione del Grande Problema di Waring

È abbastanza chiaro, da queste considerazioni, che il grande problema di Waring è relativamente semplice per le forme di $K[x_0,x_1]$. La sua soluzione è classicamente nota col nome di "Teorema di Sylvester" (si veda [**ER**] al Teorema 4.3)

Teorema di Sylvester

Una generica forma di grado $2j-1$ in $K[x_0,x_1]$ può essere scritta come somma di j potenze $(2j-1)$-esime di forme lineari.

Dimostrazione

Per induzione a partire dai casi $j=1,2$ già studiati esplicitamente. $\sharp$

4.3.3 Conseguenze

Ci sono molti altri fatti classici come conseguenze del teorema 4.4; scegliamo alcuni esempi specifici che possano illustrarle (li troviamo in [**ER**]); seguiamo, per fare questo, la chiave di lettura dei "punti grassi" (si veda [**CTV**])

Ricordiamo preliminarmente che se $\wp_1^{\alpha_1} \cap \cdots \cap \wp_s^{\alpha_s} \subset S = K[y_0, \ldots, y_n]$, dove $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_s$, è un ideale di punti grassi in $\mathbf{P}^n$ allora la *molteplicità* di I è

$$e(I) = \sum_{i=1}^{s} \binom{\alpha_i + n - 1}{n}.$$

Teorema di Catalisano - Trung - Valla (Vedi [**CTV**])

Sia I come sopra e $\wp_i$ tale che $\wp_i \longleftrightarrow P_i$. Si definisca $\mathbf{X} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ e si supponga che $t+1$ punti di $\mathbf{X}$ giacciano su un $\mathbf{P}^{t-1}$ per ogni $t \leq n$ (ossia i punti di $\mathbf{X}$ siano *linearmente in posizione generale*). Allora

1. $H(S/I, j) = e(I)$ per tutti i $j \geq max\left\{\alpha_1 + \alpha_2 - 1, \left[\frac{n-2+\sum_{i=1}^{s}\alpha_i}{n}\right]\right\}$;
2. se $P_1, \ldots, P_s$ sono punti su una curva razionale normale allora $H(S/I, j) < e(I)$ per $j < max\left\{\alpha_1 + \alpha_2 - 1, \left[\frac{n-2+\sum_{i=1}^{s}\alpha_i}{n}\right]\right\}$.

Proposizione 4.5

Una generica cubica quaternaria può essere scritta come somma di 5 cubi (ossia una generica forma di grado 3 in $R = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ può essere scritta come somma di 5 cubi).

Dimostrazione

Essendo la funzione di Hilbert di R pari a 1 4 10 20 35 ... per provare questa proposizione dobbiamo solo mostrare che, in virtú del teorema 4.1 bis, se $P_1, \ldots, P_5 \in \mathbf{P}^3$ sono scelti genericamente allra, se poniamo

$$I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_5^2 \ , \ \wp_i \longleftrightarrow P_i$$

abbiamo

$$H(R/I, 3) = 20 = dim_k R_3.$$

Ma noi sappiamo che $e(I) = 20$ e il teorema di Catalisano - Trung - Valla afferma che $H(R/I, j) = 20$ per $j \geq max\left\{2+2-1, \left[\frac{3-2+10}{3}\right]\right\} = max\{3, 3\} = 3$ se i punti sono scelti in posizione generale. Questo è sufficiente a provare la proposizione. $\sharp$

Proposizione 4.6 (Clebsch, 1867)

Una generica forma di grado 4 in $K[x_0, x_1, x_2]$ non è la somma di 5 potenze di grado 4.

Dimostrazione

Seguendo la linea della precedente proposizione, se fissiamo $P_1, \ldots, P_5 \in \mathbf{P}^2$ con $\wp_i \leftrightarrow P_i$, allora $e(\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_5^2) = 15$. Quindi sarà sufficiente mostrare che

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, 4\right) < 15 = dim_k S_4$$

per 5 punti di $\mathbf{P}^2$ scelti in posizione generale. Ma l'unica conica doppia passante per 5 punti dà una quartica nell'ideale di punti grassi che stiamo considerando. Usando il già citato teorema di Bèzout ricordiamo che l'unica conica passante per 5 punti in posizione generale è irriducibile, la conica doppia è l'unica quartica nell'ideale di punti grassi. Quindi, in quest'ultimo caso

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, 4\right) = 14$$

come volevasi dimostrare. ♯

Questa prova mostra anche che $Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ è un'ipersuperficie in $\mathbf{P}(R_4) = \mathbf{P}^{14}$.

È interessante determinare l'equazione di quest'ultima ipersuperficie. A tale scopo introduciamo la *Notazione di Clebesch*.

Notazione di Clebsch

Questa notazione ci permetterà di parlare piú agevolmente delle Varietà di Veronese e Varietà delle Secanti; inoltre il suo utilizzo ci metterà in grado di conoscere l'equazione dell'ipersuperficie descritta sopra e di comprendere alcuni fatti interessanti riguardo le Varietà di Veronese. Apriamo dunque la parentesi che ci permetterà di illustrare il significato di suddetta notazione.

Consideriamole n-uple ordinate del tipo

$$\{(i_1, \ldots, i_n)/i_1 \leq \ldots \leq i_s \text{ dove } i_j \in \{0, 1, \ldots, s\}\}$$

Notiamo che queste n-uple sono in corrispondenza biunivoca coi monomi di grado n in $K[x_0, \ldots, x_s]$ nel modo seguente:

$$(i_1, \ldots, i_n) \longleftrightarrow x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

ad esempio:

$$(0,\dots,0,1) \leftrightarrow x_0^{n-1}x_1$$
$$x_0x_1^2x_2x_3 \leftrightarrow (0,1,1,2,3)$$
$$\text{ecc...}$$

Se $(i_1,\dots,i_n)$ e $(j_1,\dots,j_m)$ sono rispettivamente una n-upla ed una m-upla, formiamo la $(m+n)$-upla

$$(i_1,\dots,i_n)(j_1,\dots,j_m)$$

intercalando gli i_k e i j_t in modo che i numeri $i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_m$ siano ancora in ordine.
Ad esempio:

> Se $s=4$, $n=3$, $m=2$ e si considerano $(0,0,3)$ e $(1,2,3,4)$ allora $(0,0,3)(1,2,3,4)=(0,0,1,2,3,3,4)$.

Ora si fissi s e per ogni intero n ordiniamo le n-uple secondo l'ordine lessicografico e consideriamo la matrice $\mathcal{M}_{s,n}$ di ordine $1\times\begin{pmatrix} s+n \\ n\end{pmatrix}$ formata dall'insieme di tutte le n-uple ordinate.
Ad esempio per $s=2$, $n=2$ abbiamo

$$\mathcal{M}_{2,2} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (1,1) & (1,2) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

Fissato s, per ogni m ed n si consideri la matrice

$$\mathcal{M}_{s,m}^t\mathcal{M}_{s,n} = \begin{pmatrix} \underbrace{(0,\dots,0)}_{\text{m-upla}} \\ \vdots \\ \underbrace{(s,\dots,s)}_{\text{m-upla}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{(0,\dots,0)}_{\text{n-upla}} & \cdots & \underbrace{(s,\dots,s)}_{\text{n-upla}} \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.1

- Siano $s=2$, $m=n=1$

$$\begin{pmatrix} (0) \\ (1) \\ (2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0) & (1) & (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) \\ (0,1) & (1,1) & (1,2) \\ (0,2) & (1,2) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

Se si considerano i simboli (i,j) come variabili, si ottiene una matrice 3×3 simmetrica:

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{01} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{02} & Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

- Siano $s = 2$, $m = n = 2$

$$\mathcal{M}_{2,2}^t \mathcal{M}_{2,2} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (1,1) & (1,2) & (2,2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0,0,0,0) & (0,0,0,1) & (0,0,0,2) & (0,0,1,1) & (0,0,1,2) & (0,0,2,2) \\ - & (0,0,1,1) & (0,0,1,2) & (0,1,1,1) & (0,1,1,2) & (0,1,2,2) \\ - & - & (0,0,2,2) & (0,1,1,2) & (0,1,2,2) & (0,2,2,2) \\ - & - & - & (1,1,1,1) & (1,1,1,2) & (1,1,2,2) \\ - & - & - & - & (1,1,2,2) & (1,2,2,2) \\ - & - & - & - & - & (2,2,2,2) \end{pmatrix}$$

che scritta con le variabili diventa

$$\begin{pmatrix} Z_{0000} & Z_{0001} & Z_{0002} & Z_{0011} & Z_{0012} & Z_{0022} \\ - & Z_{0011} & Z_{0012} & Z_{0111} & Z_{0112} & Z_{0122} \\ - & - & Z_{0022} & Z_{0112} & Z_{0122} & Z_{0222} \\ - & - & - & Z_{1111} & Z_{1112} & Z_{1122} \\ - & - & - & - & Z_{1122} & Z_{1222} \\ - & - & - & - & - & Z_{2222} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Si noti che sono esattamente $\begin{pmatrix} s+m+n \\ s \end{pmatrix}$ diverse variabili in una siffatta matrice simmetrica, che corrispondono ai monomi di grado $m+n$ in $K[x_0, \dots, x_s]$, e che alcune variabili compaiono piú di una volta nella matrice.

L'utilità di questa notazione proviene dalla seguente

Osservazione 4.7

Definiamo

$$\mathcal{Z}_{n,m} := \mathcal{M}_{s,n}^t \mathcal{M}_{s,m}$$

come la suddetta matrice nelle $N = \begin{pmatrix} s+m+n \\ s \end{pmatrix}$ variabili. Siano $\mathcal{S} = \nu_{n+m}(\mathbf{P}^s) \subseteq \mathbf{P}^{N-1}$ e $P \in \mathcal{S}$. Allora $\mathcal{Z}_{m,n}(P)$ è una matrice di rango 1.

Dimostrazione

Sia $\mathsf{a} = [a_0, \ldots, a_s] \in \mathbf{P}^s$. Se $(i_1, \ldots, i_n)$ è un'n-upla come sopra, allora scriviamo

$$\mathbf{a}_{(i_1,\ldots,i_n)} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} \ .$$

Quindi, se $L = a_0 x_0 + \cdots + a_s x_s$ si ha che i coefficienti di L^n sono esattamente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{(0,\ldots,0)} & \mathbf{a}_{(0,\ldots,0,1)} & \cdots & \mathbf{a}_{(s,\ldots,s)} \end{pmatrix} := \mathcal{M}_{s,n}(\mathsf{a}).$$

Perciò

$$L^{n+m} \longleftrightarrow \mathcal{M}^t_{s,n}(\mathsf{a})\mathcal{M}_{s,m}(\mathsf{a}) = \mathcal{Z}_{m,n}(L^{m+n})$$

ed è dunque ovvio che $\mathcal{Z}_{m,n}(L^{m+n})$ abbia rango 1. $\sharp$

Proposizione 4.8

Per ogni m ed n tali che $m + n = j$, la varità di Veronese è contenuta nella sottovarietà di $\mathbf{P}^{N-1}$ definita dai minori 2×2 della matrice

$$\mathcal{M}^t_{s,n}\mathcal{M}_{s,m} = \mathcal{Z}_{n,m}.$$

Ricordiamo che la costruzione di queste matrici dipende fortemente dall'ordine monomiale scelto (infatti, se si cambia l'ordinamento, potrebbe non verificarsi il risultato, ossia ordini diversi danno ideali diversi di minori 2×2). È importante notare che tutto questo discorso non implica affatto che i minori 2×2 definiscano la varietà di Veronese.

Allo stesso modo vediamo che se $\mathsf{a} \leftrightarrow L_1$ e $\mathsf{b} \leftrightarrow L_2$ allora

$$L_1^{m+n} + L_2^{m+n} \longleftrightarrow \mathcal{M}^t_{s,n}(\mathsf{a})\mathcal{M}_{s,m}(\mathsf{a}) + \mathcal{M}^t_{s,n}(\mathsf{b})\mathcal{M}_{s,m}(\mathsf{b}) = \mathcal{Z}_{m,n}(L_1^{m+n} + L_2^{m+n})$$

Dal momento che, se $A_1, \ldots, A_r$ sono tutte matrici $m \times n$ di rango 1 e $r \leq min\{m, n\}$, allora $\sum_{i=1}^r A_i$ ha al piú r, ne segue che la varietà definita dall'annullarsi dei minori 3×3 di $\mathcal{Z}_{m,n}$ contiene la varietà delle secanti ad $\mathcal{S}$.

Possiamo, ovviamente, continuare su questa linea ed ottenere:

Teorema 4.9

Sia $\mathcal{Z}_{n,m}$ la matrice $\begin{pmatrix} s+n \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+m \\ s \end{pmatrix}$ definita come sopra, e sia l un intero positivo tale che $l < min\left\{ \begin{pmatrix} s+n \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s+m \\ s \end{pmatrix} \right\}$. Sia $\mathcal{S} = \nu_{n+m}(\mathbf{P}^s)$ e sia $\mathcal{I}_t$ l'ideale definito dai minori $t \times t$ di $\mathcal{Z}_{m,n}$; allora, detta $V(\mathcal{I}_t)$ la varietà definita da $\mathcal{I}_t$ si ha che

$$Sec_{l-1}(\mathcal{S}) \subseteq V(\mathcal{I}_{l-1}).$$

Se diamo un'occhiata ai due esempi analizzati sopra, nel primo caso (matrice (6)) abbiamo una matrice 3×3 i cui minori 2×2 definiscono la superficie di Veronese $\nu_2(\mathbf{P}^2)$ in $\mathbf{P}^5$ e il determinante della matrice definisce la varietà delle secanti a quella di Veronese. Notiamo che questa rappresentazione ci permette di trovare la varietà di Veronese come una sottovarietà singolare della varietà delle secanti ed avente molteplicità 2 in tale varietà.

Allo stesso modo, il determinante di una matrice 6×6 del tipo (7) fornisce un'equazione dell'ipersuperficie $Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ in $\mathbf{P}^{14}$ che volevamo trovare.

Sempre usando (7) troviamo che

- $\nu_4(\mathbf{P}^2) \subseteq Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ è una sottovarietà singolare di molteplicità 5;
- $Sec_1(\nu_4(\mathbf{P}^2)) \subseteq Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ è una sottovarietà singolare di molteplicità 4;
- $Sec_2(\nu_4(\mathbf{P}^2)) \subseteq Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ è una sottovarietà singolare di molteplicità 3;
- $Sec_3(\nu_4(\mathbf{P}^2)) \subseteq Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ è una sottovarietà singolare di molteplicità 2.

Se guardiamo al caso particolare di $n = 1$ e $m = j - 1$ abbiamo che una matrice $(s + 1) \times \binom{j-1+s}{s}$ i cui minori 2×2 sono noti in qualità di generatori dell'ideale definente la varietà di Veronese $\nu_j(\mathbf{P}^s)$. Possiamo inoltre guardare ai minori di ordine minore o uguale a $s + 1$. Non abbiamo alcun teorema che ci garantisca che essi forniscano l'ideale definente un'appropriata varietà delle secanti, eccettuato il caso di $s = 1$ ossia quello in cui la varietà di Veronese è una curva razionale normale.

4.4 Relazione tra Problemi di Waring, Varietà delle Secanti ed Insiemi di Punti Doppi

Ricapitoliamo quanto visto fino ad ora.

I problemi di Waring per le forme in R_j con $R = K[x_0, \ldots, x_n]$, considerati sono:

Piccolo problema di Waring Trovare il piú piccolo intero $g(j)$ tale che ogni forma $F \in R_j$ sia somma al piú di $g(j)$ potenze j-esime di forme lineari.

Grande problema di Waring Trovare il piú piccolo intero $G(j)$ tale che la generica forma $F \in R_j$ sia somma al piú di $G(j)$ potenze j-esime di forme lineari.

Si sono poi introdotte le varietà delle secanti alle varietà di Veronese e sono state indicate

$$Sec_{s-1}(\nu_j(\mathbf{P}^n))$$

Si è poi osservato che esse individuano la chiusura in $\mathbf{P}^N$ ($N = \left(\begin{array}{c} n+j \\ n \end{array}\right)$) dell'insieme

$$\bigcup\{\mathbf{P}^{s-1} \subset \mathbf{P}^N / \mathbf{P}^{s-1} \supset \mathbf{X} = \{P_1, \ldots, P_s \in \nu_j(\mathbf{P}^n) / P_1, \ldots, P_s \;\; l.i.\}\}.$$

Abbiamo dunque visto che $G(j)$ è il piú piccolo intero s tale che

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_j(\mathbf{P}^n))) = H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, j\right) - 1$$

dove $\wp_i \leftrightarrow P_i \in \mathbf{P}^n$ e $\{P_1, \ldots, P_s\}$ è un generico insieme di s punti in $\mathbf{P}^n$.
Si è inoltre osservato che $Sec_{s-1}(\nu_j(\mathbf{P}^n))$ ha come dimensione aspettata

$$min\{s(n+1) - 1, N\}$$

ma essa risulta appunto soltanto una dimensione "aspettata" nel senso che non è sempre quella effettiva (in tal caso si parla di varietà delle secanti *difettive*).
Con lo stesso argomento abbiamo osservato che $H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, j\right)$ ha, per ogni j, come valore aspettato il $min\left\{\left(\begin{array}{c} n+j \\ n \end{array}\right), s(n+1)\right\}$ ma che questo valore non è necessariamente quello vero.

Si è infine cercato di stabilire una relazione tra i valori aspettati (e i casi specifici nei quali i valori effettivi non corrispondono a quelli attesi).
Siamo scesi nei dettagli in un caso specifico di fallimento delle aspettative: la generica quartica ternaria non può essere scritta come somma di 5 potenze quarte di forme lineari infatti $Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ ha, in $\mathbf{P}^{14}$, dimensione 13 anziché riempire tutto lo spazio. Questo proviene dalla semplice osservazione che 5 punti $P_1, \ldots, P_5 \in \mathbf{P}^2$ in posizione generale con ideale rappresentativo $\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_5^2 \subseteq S = K[y_0, y_1, y_2]$ sono tali che $H(S/I, 4) = 14$ anziché 15 come ci attenderemmo; troviamo infatti un'equazione di grado 6, il determinante della matrice 6×6 di tipo (7), che contiene la varietà dei $\mathbf{P}^4$ 5-secanti di $\nu_4(\mathbf{P}^2)$.
Per terminare la discussione di quest'esempio dovremmo mostrare che il determinante è effettivamente l'equazione che definisce $Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2)) \subseteq \mathbf{P}^{14}$; per fare questo potrebbe essere sufficiente verificare che tale determinante è irriducibile. Fortunatamente Michael Catalano - Johnson nel lavoro [**CJ**] ha recentemente osservato che $Sec_t(\nu_j(\mathbf{P}^n))$, se non riempie tutto lo spazio proiettivo, non può stare su un'ipersuperficie di grado $t+1$. In particolare $Sec_4(\nu_4(\mathbf{P}^2))$ non può giacere su un'ipersuperficie di $\mathbf{P}^{14}$ di grado ≤ 5. Tale osservazione pone termine alla discussione.

Catalano - Johnson non prova la sua osservazione , ma Catalisano ha trovato un semplice argomento (che probabilmente corrisponde a ciò che Catalano - Johnson aveva in mente). Per completezza diamo l'argomentazione di Catalisano:

Lemma (M. Catalano - Johnson) (Si veda [**CJ**])

Sia $\mathbf{X} \in \mathbf{P}^n$ una varietà non degenere. Sia $F \in K[x_0, \dots .x_n]$ e supponiamo che

$$Sec_t(\mathbf{X}) \subseteq V(F) \not\subseteq \mathbf{P}^n.$$

Allora

$$deg(F) \geq t + 2\ .$$

Dimostrazione

Essendo $\mathbf{X}$ non degenere, possiamo scegliere

$$\mathbf{Y} = \{P_1, \dots, P_n, P_{n+1}\} \subseteq \mathbf{X}$$

che siano linearmente indipendenti. Supponiamo di poter trovare un F come sopra ma il cui grado sia al piú $t+1$.
Ora, $t < n$ (altrimenti $Sec_t(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^n$) e quindi $t+1 < n+1$.
Consideriamo

$$\mathbf{Z} = \{P_1, \dots, P_{t+1}, P_{t+2}\} \subseteq \mathbf{Y}.$$

Notiamo che $\mathbf{Z}$ determina un unico $\mathbf{P}^{t+1} := \mathbf{P}^{t+1}_{\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{P}^n$.
Se

$$\mathbf{Z}_i = \{P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{t+2}\}\ ^1.$$

Allora $\mathbf{Z}_i$ determina un unico $\mathbf{P}^t_i \simeq \mathbf{P}^t \in Sec_t(\mathbf{X})$. Quindi

$$\bigcup_{i=1}^{t+2}(\mathbf{P}^t_i) = \mathcal{L}$$

è una sottovarietà di dimensione t di $Sec_t(\mathbf{X})$ che ha grado $t+2$. Dal momento che $\mathbf{P}^{t+1}_{\mathbf{Z}} \cap V(F)$ ha dimensione t e contiene $\mathcal{L}$, otteniamo che

$$deg(\mathbf{P}^{t+1}_{\mathbf{Z}} \cap V(F)) \geq t+2\ .$$

[1] $(P_1, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_t) = (P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_t)$

Essendo $deg(F) = t + 1$ incappiamo, a motivo del teorema di Bezout, in una contraddizione se non accade che $V(F) \supseteq \mathbf{P}^{t+1}_{\mathbf{Z}}$. Ma in quest'ultimo caso può essere ripetuta la medesima argomentazione per ogni insieme di $n + 1$ punti linearmente indipendenti di $\mathbf{X}$. Si ottiene dunque o una contraddizione o che $V(F) \supset Sec_{t+1}(\mathbf{X})$. Poichè alla fine $Sec_s(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^n$ la dimostrazione è terminata. $\sharp$

Ci sono altre varietà delle secanti difettive; vediamone alcune.

Esempio 4.2

$Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3))$ non riempie $\mathbf{P}^{34}$.

Questo risultato è inaspettato poichè scegliendo 9 punti sulla varietà tridimensionale $\nu_4(\mathbf{P}^3)$ si ha una scelta 27-dimensionale che, sommata al $\mathbf{P}^8$ di connessione, dovrebbe dare uno spazio di dimensione 35. Questa varietà è estremamente difettiva. Si può infatti osservare che $dim(Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3))) = 33$ ossia $Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3))$ è un'ipersuperficie di $\mathbf{P}^{34}$ ed ha due dimensioni in meno di quella aspettata. [2] Mostrare che

$$dim(Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3))) = 33$$

equivale a mostrare che

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_9^2}, 4\right) = 34 < 35 = dim_k S_4$$

dove $P_1, \ldots, P_9$ ($P_i \leftrightarrow \wp_i$) sono punti generici di $\mathbf{P}^3$ e $S = K[y_0, \ldots, y_3]$.
Ora, ogni insieme di 9 punti di $\mathbf{P}^3$ sta su un'ipersuperficie Q di grado 2 (unica ed irriducibile se i punti sono stati sceli in posizione sufficientemente generale). Perciò esiste sempre una forma di grado 4 in $\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_9^2$ e quindi

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_9^2}, 4\right) \leq 34$$

che è sufficiente per provare che $Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3))$ non riempie $\mathbf{P}^{34}$.

La prova del fatto che questa varietà è effettivamente un'ipersuperficie di $\mathbf{P}^{34}$ o, equivalentemente, che la funzione di Hilbert descritta sopra ha esattamente valore 34 (ossia che Q^2 è l'unica quartica nell'ideale $\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_9^2$) è leggermente delicata.

[2]Ricordiamoci che nell'esempio di Clebsch accade che "dimensione reale = dimensione aspettata -1"

Ad ogni modo, una volta stabilito ciò, possiamo usare il metodo incontrato nel paragrafo precedente per costruire la matrice 10×10:

$$\mathcal{M}_{3,2}^t \mathcal{M}_{3,2} = \mathcal{Z}_{2,2}.$$

Il determinante di questa matrice si annulla sulla varietà $(Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3))$ e quindi, usando ancora il risultato di Catalano - Johnson, il polinomio $det(\mathcal{Z}_{2,2})$ definisce l'equazione di $Sec_8(\nu_4(\mathbf{P}^3) \subset \mathbf{P}^{34}$.

Notiamo che nel linguaggio del problema di Waring quest'esempio può essere riletto nel modo seguente:

> *"La generica forma di grado 4 di $R = K[x_0, \ldots, x_3]$ non è somma di 9 potenze di grado 4 di forme lineari".*

Esempio 4.3

La verietà $Sec_{13}(\nu_4(\mathbf{P}^4)$ non riempie $\mathbf{P}^{69}$.

Osserviamo innanzitutto che se si scelgono 14 punti su di una varietà quadridimensionale con l'aggiunta di un $\mathbf{P}^{13}$ di connessione si dovrebbe avere uno spazio di dimensione 69. Ma ciò non è quanto accade. Per mostrare che questa varietà delle secanti è difettiva è sufficiente dimostrare che

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_{14}^2}, 4\right) = 69 < 70 = dim_k R_4$$

dove $P_1, \ldots, P_{14} \in \mathbf{P}^4$ son 14 punti in posizione generale e $\wp_i \leftrightarrow P_i$.
Ora, poiché $dim_k R_2 = 15$, c'è sempre una quadrica Q per ogni insieme di 14 punti di $\mathbf{P}^4$ (unica ed irriducibile se i punti sono scelti in posizione sufficientemente generale). Allora

$$Q^2 \in (\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_{14}^2)_4$$

e

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_{14}^2}, 4\right) \leq 69.$$

Come nel caso precedente, ciò basta a provare che $Sec_{13}(\nu_4(\mathbf{P}^4))$ è difettiva. Non si è ancora trovato il modo di dimostrare direttamente che il valore della funzione di Hilbert in grado 4 è esattamente 69 (ossia che Q^2 è l'unica quartica in $(\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_{14}^2)_4)$ ma questa congettura è probabilmente corretta.

Come nell'esempio precedente, una volta assunta la veridicità di tale congettura, si può mostrare che $Sec_{13}(\nu_4(\mathbf{P}^4))$ è un'ipersuperficie di $\mathbf{P}^{69}$ e il determinante della matrice 15×15:

$$\mathcal{M}_{4,2}^t \mathcal{M}_{4,2} = \mathcal{Z}_{2,2}$$

dà l'equazione di definizione (sempre grazie al risultato di Catalano - Johnsosn).

Notiamo che nel linguaggio del problema di Waring questo risultato si rilegge:

> *"La generica forma di grado 4 di $R = K[x_0, \ldots, x_4]$ non è la somma di 14 potenze di grado 4 di forme lineari"*

Esempio 4.4

La varietà $Sec_6(\nu_3(\mathbf{P}^4))$ non riempie $\mathbf{P}^{34}$.

La dimensione aspettata di questa varietà è $7 \cdot 4 + 6 = 34$; ma per 7 punti $P_1, \ldots, P_7 \in \mathbf{P}^4$ in posizione generale con $P_i \leftrightarrow \wp_i \subseteq S = K[y_0, \ldots, y_4]$ accade:

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_7^2}, 3\right) = 34 < 35 = dim_k R_3.$$

Ciò sarà sufficiente a dimostrare il risultato.
Ora, $e(\wp_i^2) = 5$ e se $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_7^2$ allora $e(I) = 35$. Si ricordi che 7 punti di $\mathbf{P}^4$ sono sempre su una sua curva razionale normale, perciò, avvalendosi del Teorema di Catalisano - Trung - Valla, si trova che:

$$H(S/I, 3) \leq 35 \ \ per \ \ j < max\{3, [(2+14)/4]\} = 4.$$

Quindi $H(S/I, 3) \leq 34$.

La prova che il valore della funzione di Hilbert è esattamente 34 è assai complessa e la omettiamo. Ad ogni modo, una volta che la si è assunta, ne segue che $Sec_6(\nu_3(\mathbf{P}^4))$ è un'ipersuperficie di $\mathbf{P}^{34}$.

Osserviamo che, sfortunatamente, in questa circostanza il metodo di Clebsch non ci è utile per ottenere l'equazione di questa varietà e non è ancora chiaro come ottenere l'equazione che la definisce (eccetto, a motivo del risultato di Catalano - Johnson, il caso in cui essa abbia grado superiore a 8).

Il motivo per cui abbiamo speso cosítanto tempo su questi esempi è che essi rappresentano le uniche eccezioni previste dal seguente ed importantissimo teorema dovuto a J. Alexander ed A. Hirschowitz; esso fornisce una risposta definitiva al Grande Problema di Waring per le forme omogenee (si veda [**AH**]).

Teorema (J. Alexander, A. Hirschowitz)

Sia $\mathbf{X} = \{P_1, \dots, P_s\}$ un insieme di s punti di $\mathbf{P}^n$. Siano $\wp_i \subseteq K[y_0, \dots, y_n]$ gli ideali associati ai punti P_i per ogni $i = 1, \dots, s$ e sia $j \geq 3$. Allora:

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, j\right) = min\{(n+1)s, dim_k S_j\}$$

eccetto nei casi seguenti:

- $n = 2$, $j = 4$, $s = 5$ (Proposizione 4.5);
- $n = 3$, $j = 4$, $s = 9$ (Esempio 4.2);
- $n = 4$, $j = 4$, $s = 14$ (Esempio 4.3);
- $n = 4$, $j = 3$, $s = 7$ (Esempio 4.4).

Nel linguaggio delle varietà delle secanti di varietà di Veronese il suddetto teorema può essere cosìriletto:

Corollario 4.10

Sia $\mathbf{X} = Sec_t(\nu_j(\mathbf{P}^n))$, per $j \geq 3$. Allora:

$$dim\mathbf{X} = min\{(t+1)n + t, \binom{n+j}{j} - 1\}$$

eccetto per:

- $j = 3$, $n = 4$, $t + 1 = 7$ (Esempio 4.4) (difettività 1);
- $j = 4$, $n = 2$, $t + 1 = 5$ (Proposizione) (difettività 1);
- $j = 4$, $n = 3$, $t + 1 = 9$ (Esempio 4.2) (difettività 2);
- $j = 4$, $n = 4$, $t + 1 = 14$ (Esempio 4.3) (difettività 1).

Notiamo che la dimostrazione di questo teorema è assai complessa e questo non è certo il luogo per riportarla.

4.5 Piccolo Problema di Waring

Per concludere questa sezione, dove i problemi di Waring ci hanno fatto da filo conduttore, spendiamo, per completezza, ancora alcune parole sul "Piccolo Problema di Waring".
Enunciamolo ancora una volta:

> *"Qual è il piú piccolo intero $g(j)$ per cui OGNI forma in $K[x_0, \ldots, x_n]$ di grado j è somma al piú di $g(j)$ potenze j-esime di forme lineari?"*

Si è già detto in precedenza che, a parte il caso in cui $j = 2$ e n qualunque, non si è a conoscenza di alcun risultato in cui questo problema abbia soluzione. Si possono trovare maggiori informazioni a riguardo in [**Har**] all'esercizio 11.35: tale esercizio considera il caso di $n = 1$ ossia quello delle forme omogenee in $K[x_0, x_1]$.

Il già citato teorema di Sylvester fornisce una risposta al problema generico. Ricordiamo che tale teorema afferma che la generica forma di grado n è somma di d potenze n-esime di forme lineari se e solo se $2d - 1 \geq n$. Harris aggiunge: "... inoltre, se $2d - 1 = n$ essa è unicamente esprimibile cosí "; ossia sono genericamente necessarie $(n + 1)/2$ potenze $n - esime$. Poiché la curva normale razionale $C \subset \mathbf{P}^n$ ha grado n è possibile trovare un iperpiano che incontri C in n punti distinti, otteniamo che ogni forma di grado n in $K[x_0, x_1]$ è somma al piú di n potenze n-esime di forme lineari. Inoltre, non è difficile mostrare che se $P \in \mathbf{P}^n$ che stia su una retta tangente a C allora P richiede n potenze n-esime nella sua espressione come somma di potenze di forme lineari. Quindi il piccolo problema di Waring per $K[x_0, x_1]$ è completamente risolto.

Teorema 4.11

> Sia $R = K[x_0, x_1]$ e $F \in R_n$. Allora F può essere espresso come somma di n potenze n-esime di forme lineari. Inoltre, $F = x_0^{n-1}x_1$ non può essere scritto, come somma di potenze n-esime, con meno di n addendi.

Piú in generale, se consideriamo $\nu_j(\mathbf{P}^n) \subset \mathbf{P}^N$ $\left(N = \binom{n+j}{n} - 1\right)$ e P ogni punto di $\mathbf{P}^N$ off $\nu_j(\mathbf{P}^n)$, accade che un generico $\mathbf{P}^{N-n} = \mathbf{P}^s$ passante per P incontra $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ in $deg(\nu_j(\mathbf{P}^n)) = j^n$ punti distinti. Tramite il Lemma di Harris si ha che ogni scelta di $s+1$ elementi di questi j^n punti è costituita da punti linearmente indipendenti. Quindi la forma di grado j in $K[x_0, \ldots, x_n]$ che corrisponde a P può essere scritta come somma di $s+1 = N-n+1$ potenze j-esime di forme lineari (in $\binom{j^n}{s+1}$ modi, usando proprio questo $\mathbf{P}^s$). Notiamo inoltre che possiamo scegliere un'infinità di $\mathbf{P}^s$ passanti per P, abbiamo quindi un'infinità di rappresentazioni. Ciò è in marcato contrasto con il caso in cui una forma di grado j può essere espressa come somma di $\binom{n+j}{n} - n - 1$ potenze j-esime di forme lineari. In tal caso (genericamente) la rappresentazione è unica ([**IK**])

Il primo passo per saggiare quest'affermazione è lo studio delle forme cubiche in $K[x_0, x_1, x_2]$. Usando il corollario 4.10 con $j = 3$, $n = 2$ troviamo che la generica forma cubica in R è somma di 5 cubi di forme lineari e, grazie ai richiami fatti, ogni forma cubica in R è somma al piú di $\binom{2+3}{3} - 2 = 8$ cubi di forme lineari.

Ad ogni modo Bruce Resnick (si veda [**Re**] al teorema 7.6) ci assicura che solo le cubiche in $\mathbf{C}[x_0, x_1, x_2]$ richiedono effettivamente 5 cubi di forme lineari: tutte le altre ne richiedono al massimo 4.

4.6 Connessione con le Forme Canoniche

Vogliamo rivedere quanto osservato fin qui alla luce del punto di vista delle Forme Canoniche, sviluppato nella sezione 2.3 dove si utilizzava soprattutto il punto di vista dell'algebra lineare; cerchiamo di rileggere questi discorsi nei termini piú geometrici delle Varietà delle Secanti.

L'espressione

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{x})^p + (\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{x})^p + \cdots + (\mathbf{a}_s \mid \mathbf{x})^p \tag{4.3}$$

del teorema 2.19 può essere cosí riscritta:

$$f(\mathbf{x}) = (a_{1_1}x_1 + \cdots + a_{1_q}x_q)^p + (a_{2_1}x_1 + \cdots + a_{2_q}x_q)^p + \cdots + (a_{s_1}x_1 + \cdots + a_{s_q}x_q)^p.$$

I polinomi $a_{i_1}x_1 + \cdots + a_{i_q}x_q$ con $i = 1, \ldots, s$ sono elementi di $R_1 = K[x_1, \ldots, x_q]$. $f(\mathbf{x})$ è una forma di grado p in q variabili (una "p-ica q-aria"). Consideriamo l'immersione di Veronese

$$\nu_p : \mathbf{P}^{q-1} \longrightarrow \mathbf{P}^Q$$

$$\nu_p(a_1, \ldots, a_q) = (a_1^p, a_1^{p-1}a_2, \ldots\ldots, a_q^p)$$

con $Q = \begin{pmatrix} q-1+p \\ q-1 \end{pmatrix}$.

(Solitamente le coordinate di elementi di $\mathbf{P}^{q-1}$ si indicherebbero $[a_0, \ldots, a_{q-1}]$; mi sono concessa di usare indici che vadano da 1 a q anzichè da 0 a $q-1$ solo per omogeneità con le notazioni precedenti).

Ora $\nu_p(\mathbf{P}^{q-1})$ è la Varietà di Veronese che parametrizza l'insieme dei polinomi di $\mathbf{P}^{q-1}$ di grado p che sono esprimibili come potenze p-esime di polinomi di grado 1. Se di $\nu_p(\mathbf{P}^{q-1})$ facciamo la varietà delle s-secanti, otteniamo che quest'ultima parametrizza somme di s potenze p-esime di polinomi di grado 1, ossia proprio gli elementi che sono scrivibili come al secondo membro dell'uguaglianza (7).

Siano $P_1 \equiv \mathbf{y_1}, \ldots, P_s \equiv \mathbf{y_s}$ e $\wp_1, \ldots, \wp_s$ i rispettivi ideali primi omogenei corrispondenti.

Il teorema 4.4 bis ci dice che

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))) = H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, p\right) - 1 = dim_k\left(\frac{S}{(\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2)_p}\right) - 1.$$

Inoltre il teor. 4.4 ci dice che

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2}, p\right) = dim_k < L_1^{p-1}R_1, \ldots, L_s^{p-1}R_1 >$$

$$\text{dove } L_i = a_{i_0}x_0 + a_{i_1}x_1 + \cdots + a_{i_q}x_q.$$

Per quanto visto in 1.2.5

$$< L_1^{p-1}R_1, \ldots, L_s^{p-1}R_1 >= (I^{-1})_p$$

$$\text{con } I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2.$$

Ricordiamo inoltre che $I_p^{-1} \cong I_p^{\perp}$ e

$$I_p^{\perp} =< \text{i monomi di } S_p \text{ che non sono in } I_p > .$$

Dire che non esiste alcuna p-ica q-aria duale g diversa da zero che abbia $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_s$ come punti doppi è equivalente ad affermare che l'ideale $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2 \subset K[y_1, \ldots, y_q]$ è vuoto ossia $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$ riempie tutto $\mathbf{P}^Q$.
Quindi il teorema 2.19 può essere cosí riletto:

> Il generico elemento di $R_p \subset K[x_1, \ldots, x_q]$ può essere parametrizzato da $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$ se e solo se $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$ riempie tutto $\mathbf{P}^Q$.

Il teorema 2.19 dunque non fornisce alcuna informazione sulla dimensione di $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$, o meglio, ci dice che

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))) = Q \text{ se e solo se}$$

$$\text{quasi tutte le } f \in R_p \text{ sono tali che } f = l_1^p + \cdots + l_s^p \text{ con } l_i \in R_1 \;\; i = 1, \ldots, s$$

Invece il teorema 4.4 bis ci elargisce un metodo per calcolare effettivamente la dimensione di $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$.

È interessante notare la corrispondenza tra le p-iche q-arie duali ed i sistemi inversi.

Ripercorriamo le tappe della definizione dei Sistemi Inversi.
Siano $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ e $S = K[y_1, \ldots, y_n]$. I polinomi di S li pensiamo come gli operatori "derivate parziali" e consideriamo l'azione di apolarità di S su R, ossia

$$y_i \circ x_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) x_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} .$$

A questo punto si definisce il sistema inverso $I^{-1} \subset R$ dell'ideale omogeneo $I \subset S$ come l' S-sottomodulo di R consistente di tutti gli elementi di R annullati da I; ossia:

$$\text{se } I = (F_1, \ldots, F_t) \text{ e } G \in R \text{ allora}$$

$$G \in I^{-1} \text{ se e solo se } F_1 \circ G = \cdots = F_t \circ G = 0.$$

Quando nel paragrafo 2.3 si è ridefinita la forma apolare si è passati attraverso lo spazio duale, ossia la forma apolare è la seguente forma bilineare:

$$< \cdot \mid \cdot >: R^* \times R \longrightarrow K$$

$$< \mathbf{u^i} \mid \mathbf{x^j} >= \mathbf{i}! \cdot \delta_{\mathbf{ij}}$$

Ora, considerare l'azione di S su R descritta in 1.2.4 oppure la suddetta forma bilineare agente su $R^* \times R$ è esattamente la stessa cosa. Ecco perchè dire che non esiste alcuna p-ica q-aria $g \in V^*$ non nulla equivale a dire che $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2 \subset K[y_1, \ldots, y_q]$ è vuoto. Per poter poi dire che quest'ultima affermazione è equivalente al fatto che $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$ riempia tutto $\mathbf{P}^Q$ si ricorre ai già richiamati teoremi 4.4 e 4.4 bis. Del resto se $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2 \subset S = K[y_1, \ldots, y_q]$ è vuoto anche I_p lo è per ogni p. Essendo poi $I_p^\perp =<$ i monomi di S_p che non sono in $I_p >$, si ha che se $I_p = \emptyset$ allora $I_p^\perp \cong I_p^{-1} = R_p$

$$dim(S/I, p) = dim(I^{-1})_p = dim(R_p) = \left(\begin{array}{c} p+q-1 \\ q-1 \end{array} \right) + 1$$

ora

$$dim(R/I, p) = dim(S/I, p)$$

e

$$dim(R/I, p) = dim(Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))) + 1$$

perciò

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))) + 1 = \left(\begin{array}{c} p+q-1 \\ q-1 \end{array} \right) + 1 = Q + 1$$

ossia

$$dim(Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))) = Q.$$

Resta dunque dimostrato che $I = \emptyset$ se e solo se $Sec_{s-1}(\nu_p(\mathbf{P}^{q-1}))$ riempie tutto $\mathbf{P}^Q$.

Come si è già visto in una precedente discussione, l'interesse ad esprimere forme omogenee come somme di forme lineari è una semplificazione del problema riguardante le forme di grado fissato (si veda [**Ge**]).

Diamo ora un risultato riguardante le forme canoniche che ci permetterà di trovare una loro connessione con gli esempi incontrati fino ad ora.

Proposizione 4.12

La generica quartica ternaria può essere scritta:

$$h_1h_2 + h_3^2$$

dove h_i sono forme quadratiche

Ossia

Se $R = K[x_0, x_1, x_2]$ allora il generico elemento di R_4 può essere scritto come $h_1h_2 + h_3^2$ con h_i forme di grado 2.

Dimostrazione

Consideriamo la mappa

$$\phi : R_2 \times R_2 \times R_2 \longrightarrow R_4$$

descritta da

$$\phi(h_1, h_2, h_3) = h_1h_2 + h_3^2$$

Vogliamo trovare il rango massimo del differenziale di questa mappa. Consideriamo la retta per (h_1, h_2, h_3) cosí parametrizzata:

$$(h_1, h_2, h_3) + t(Q_1, Q_2, Q_3)$$

la cui immagine tramite ϕ è

$$(h_1 + tQ_1)(h_2 + tQ_2) + (h_3 + tQ_3)^2.$$

La derivata di ϕ lungo questa retta è

$$(h_1 + tQ_1)Q_2 + (h_2 + tQ_2)Q_1 + 2(h_3 + tQ_3)Q_3.$$

Quindi, al variare di Q_1, Q_2, Q_3, otteniamo i vettori tangenti nello spazio vettoriale che è la parte di grado 4 dell'ideale (h_1, h_2, h_3). Vogliamo dunque conoscere la dimensione di questo stazio vettoriale per h_1, h_2, h_3 generici. Ci sono diversi modi per fare questo:

1. Tre generiche quadriche formano una sequenza regolare in S cosicché la funzione di Hilbert dell'ideale da esse generato risulta 1 3 3 1 0 ... Quindi tre generiche quadriche generano lo spazio di tutte le forme di grado 4 in R.

2. Se poniamo $h_1 = L_1^2$, $h_2 = L_2^2$, $h_3 = L_3^2$, (con L_1, L_2, L_3 forme lineari linearmente indipendenti) allora

$$(L_1^2, L_2^2, L_3^2)_4 =< L_1^2 S_2, L_2^2 S_2, L_3^2 S_2 >$$

e, nel primo risultato alla voce "Piú di un punto grasso" del paragrafo 1.2.5 sui Sistemi Inversi di Punti Grassi, abbiamo visto che questo spazio vettoriale è $(I^{-1})_4$ dove $I = \wp_1^3 \cap \wp_2^3 \cap \wp_3^3$.
Arrivati a questo punto occorre solo dimostrare che

$$H\left(\frac{S}{\wp_1^3 \cap \wp_2^3 \cap \wp_3^3}, 4\right) = 15 = dim_k R_4$$

ma questo è facile perchè non c'è nessuna quartica piana con 3 triple di punti non allineati (teorema di Bezout). $\sharp$

Chapter 5

Punti Grassi

5.1 Punti tripli

Nel capitolo precedente si è riusciti a stabilire una relazione tra la dimensione della generica parte di grado j dell'ideale rappresentativo di uno schema 0-dimensionale costituito da s punti doppi, la dimensione della Varietà delle s-Secanti della Varietà di Veronese $\nu_j(\mathbf{P}^n)$ e il Grande Problema di Waring (si veda in particolare il paragrafo 4.4).

In questo capitolo intendiamo occuparci di un altro particolare schema 0-dimensionale: quello costituito da s punti tripli in $\mathbf{P}^2$, ossia:

$$\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; \underbrace{3, \ldots, 3}_{s \text{ volte}}) \text{ con } P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^2.$$

Nel paragrafo 2.3 è stato introdotto il concetto di *forma canonica* ed è pure stato osservato che il Problema di Waring non è altro che un caso particolare della questione piú generale inerente alla possibilità di scrivere una p-ica q-aria in forma canonica (§ 2.3.3). Al paragrafo 4.6 si è infine cercato di stabilire una connessione tra quest'ultimo problema e quanto studiato in precedenza riguardo appunto la dimensione di uno schema di punti doppi.

Nel corrente capitolo, in analogia col metodo di procedere seguito fino ad ora, si intende legare lo studio della funzione di Hilbert di uno schema di punti tripli in $\mathbf{P}^2$ a quello delle forme canoniche.

Richiamiamo quanto osservato al termine del primo capitolo (§ 1.2.5)

$$\text{Se } P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^n(K) \text{ con } P_i = [p_{i_0}, \ldots, p_{i_n}],$$

$$L_{P_i} = p_{i_0}x_0 + \cdots + p_{i_n}x_n \in R = K[x_0, \ldots, x_n] \text{ e}$$
$$I = \wp_1^{n_1+1} \cap \cdots \cap \wp_s^{n_s+1} \subset S = K[y_0, \ldots, y_n], \text{ allora}$$

$$(I^{-1})_j = \begin{cases} R_j & \text{per } j \leq max\{n_i\} \\ L_{P_1}^{j-n_1} R_{n_1} + \cdots + L_{p_s}^{j-n_s} R_{n_s} & \text{per } j \geq max\{n_i + 1\} \end{cases}$$

$$\text{e } H(S/I, j) = dim_k(I^{-1})_j = \begin{cases} dim_k(S_j) & \text{per } j \leq max\{n_i\} \\ dim_k(< L_{P_1}^{j-n_1} R_{n_1}, \ldots, L_{p_s}^{j-n_s} R_{n_s} >) & \text{per } j \geq max\{n_i + 1\} \end{cases}.$$

Cosa questa che nel nostro caso si traduce cosí :

$$\text{siano } P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^2, \quad P_i = [p_{i_0}, p_{i_1}, p_{i_2}],$$

$$L_{P_i} = p_{i_0} x_0 + p_{i_1} x_1 + p_{i_2} x_2 \in R = K[x_0, x_1, x_2] \text{ e}$$

$$I = \wp_1^3 \cap \cdots \cap \wp_s^3 \subset S = K[y_0, y_1, y_2].$$

$$\text{allora } (I^{-1})_j = \begin{cases} R_j & \text{per } j \leq 2 \\ L_{P_1}^{j-2} R_2 + \cdots + L_{P_s}^{j-2} R_2 & \text{per } j \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{e } H(S/I, j) = dim_k(I^{-1})_j = \begin{cases} dim_k(S_j) & \text{per } j \leq 2 \\ dim_k(< L_{P_1}^{j-2} R_2, \ldots, L_{P_s}^{j-2} R_2 >) & \text{per } j \geq 2 \end{cases}.$$

Cerchiamo ora di mettere questo fatto in relazione con le forme canoniche e chiediamoci quando accade che

$$L_{P_1}^{j-2} R_2 \oplus \cdots \oplus L_{P_s}^{j-2} R_2 \tag{5.1}$$

sia una forma canonica, ossia quando il generico elemento di R_j si può scrivere nella forma (8), il che equivale a richiedere che $(I^{-1})_j$ individui un aperto la cui chiusura sia tutto R_j, cosa questa che si verifica solo quando $I_j = \emptyset$. La domanda è dunque la seguente:

Fissato j, qual è il piú piccolo intero s per cui $(I^{-1})_j = R_j$ (o equivalentemente $I_j = \emptyset$)?

Siamo dunque interessati a studiare la dimensione di I_j, oppure quella di $(I^{-1})_j$. A tale proposito ricordiamo che nel primo capitolo, al paragrafo 1.2.2, ci si era interrogati sull'eventualità che la funzione di Hilbert di uno schema del tipo $(P_1, \ldots, P_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ con $P_1, \ldots, P_s$ generici in $\mathbf{P}^n$ fosse sempre la medesima di $\sum_{i=1}^{s} \begin{pmatrix} \alpha_i - 1 + n \\ n \end{pmatrix}$ punti distinti di $\mathbf{P}^n$, ma la risposta era risultata negativa in quanto si erano immediatamente trovati due controesempi:

- $H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \wp_2^2}, 3\right) \neq H\left(\frac{S}{\wp_1 \cap \cdots \cap \wp_6}, 3\right)$
- $H\left(\frac{S}{\wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_5^2}, 4\right) \neq H\left(\frac{S}{\wp_1 \cap \cdots \cap \wp_{15}}, 4\right)$

Nel nostro caso una tale domanda si traduce nel richiedere se la funzione di Hilbert dello schema $\mathbf{X} = (P_1, \dots, P_s; \underbrace{3, \dots, 3}_{s \text{ volte}})$ con $P_1, \dots, P_s$ generici in $\mathbf{P}^2$ è la medesima di $s \cdot \binom{3-1+2}{2} = 6s$ punti semplici generici. Un risultato di A. Hirschowitz ([**Hi.2**]) ci assicura che, in questo caso particolare, ciò effettivamente si verifica, salvo in due casi che fanno eccezione e che descriviamo negli esempi seguenti.

Esempio 5.1

Siano $j = 3$ e $s = 2$. Se le cose andassero come ci si aspetterebbe, $I_3 = (\wp_1^3 \cap \wp_2^3)_3$ dovrebbe essere vuoto in quanto dovrebbe avere la dimensione dell'ideale di $2 \cdot 6 = 12$ punti generici, ossia 0 (è infatti semplice da verificare che $dim_k(R_3(P_1, \dots, P_{12})) = \left[\binom{2+3}{2} - 12\right]^+ = [10-12]^+ = 0$), ma ciò è falso in quanto per due punti passa sempre una retta, quindi se considero la retta tripla essa sarà sicuramente definita da un polinomio di I; perciò $I_3 = (\wp_1^3 \cap \wp_2^3)_3 \neq \emptyset$ (si ha $dim(I_3) = 1$).

Esempio 5.2

Siano $j = 6$ e $s = 5$. Anche in questo caso la dimensione aspettata di I_6 è nulla poichè $dim_k((\wp_1^3 \cap \dots \cap \wp_5^3)_6)$ dovrebbe essere uguale a $dim_k(R_6(P_1, \dots, P_{30})) = \left[\binom{2+6}{2} - 30\right]^+ = [20-30]^+ = 0$; ma, di nuovo, ciò non rispecchia quanto accade effettivamente (ossia la dimensione esatta non è quella aspettata): per cinque punti passa una conica e se considero la conica tripla essa è definita da una forma di grado 6 passante per i 5 punti ed ivi avente molteplicità 3. Quindi $dim_k((\wp_1^3 \cap \dots \cap \wp_5^3)_6) \neq 0$.

Ora, se dunque quelle appena presentate sono le uniche eccezioni al fatto che

$$dim_k((\wp_1^3 \cap \dots \cap \wp_s^3)_j) = dim(R_j(P_1, \dots, P_{6s})),$$

si può facilmente calcolare il legame esistente tra un fissato grado j ed il minimo intero s per cui $(\wp_1^3 \cap \dots \cap \wp_s^3)_j = I_j = \emptyset$, per s punti generici del piano proiettivo.

Se $j = 1$ o $j = 2$ accade rispettivamente che $(I^{-1})_1 = R_1$ o $(I^{-1})_2 = R_2$; quindi la risposta a quanti punti occorrono affinchè la chiusura di $(I^{-1})_j$ sia tutto R_j, con $j = 1, 2$, è banalmente 1.

Nei casi di $j = 3$ e $j = 6$ si presentano le due eccezioni di cui sopra ove ci si aspetterebbe occorressero rispettivamente 2 e 3 punti affinchè $I_j = \emptyset$, con $j = 3, 6$, ed invece si è costretti in entrambi i casi ad aggiungere un punto, ossia:

1. fissato $j = 3$, il minimo intero tale che $I_3 = (\wp_1^3 \cap \dots \cap \wp_s^3)_3 = \emptyset$ è $s = 3$;

2. fissato $j = 6$, il minimo intero tale che $I_6 = (\wp_1^3 \cap \cdots \cap \wp_s^3)_6 = \emptyset$ è $s = 6$.

In tutti gli altri casi, invece, come ci assicura Hirschowiz ([**?**]), si può procedere alla formulazione di una regola generale.

Si è detto dunque che, salvo le eccezioni richiamate, posto $I = \wp_1^3 \cap \cdots \cap \wp_s^3$, ove i $\wp_i$ sono gli ideali primi omogenei associati a s punti generici $P_i \in \mathbf{P}^2$, $\forall i = 1, \ldots, s$, accade che

$$dim(I_j) = dim(R_j(P_1, \ldots, P_{6s})),$$

Ora

$$dim(R_j(P_1, \ldots .P_{6s})) = \left[\begin{pmatrix} 2+j \\ 2 \end{pmatrix} - 6s \right]^+ .$$

Quindi richiedere che $I_j = \emptyset$ equivale a richiedere che $dim_k(I_j) = dim_k(R_j(P_1, \ldots, P_{6s})) = 0$, quindi $\left[\begin{pmatrix} 2+j \\ 2 \end{pmatrix} - 6s \right]^+ = max \left\{ 0, \begin{pmatrix} 2+j \\ 2 \end{pmatrix} - 6s \right\} = 0$, ovvero $6s \geq \begin{pmatrix} 2+j \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(j+2)(j+1)}{2}$. Ecco dunque trovato il piú piccolo intero s per cui $(\wp_1^3 \cap \cdots \cap \wp_s^3)_j = \emptyset$:

$$s = \left\lceil \frac{(j+2)(j+1)}{12} \right\rceil$$

dove il simbolo $s = \lceil a \rceil$ sta ad indicare l'unico intero s tale che $a \leq s < a + 1$.

Arrivati a questo punto cerchiamo di stabilire un legame con le forme canoniche.
Si era detto che, fissato j, ricercare il piú piccolo intero s (d'ora in poi indicheremo $s := s(j)$) per cui $((\wp_1^3 \cap \cdots \cap \wp_{s(j)}^3)^{-1})_j$ individui un aperto la cui chiusura sia tutto R_j equivale a determinare il più piccolo $s(j)$ per cui (8) sia una forma canonica. Siamo quindi in grado di enunciare il seguente

Teorema 5.1

Sia $f \in R_j = (K[x_0, x_1, x_2])_j$ la generica forma di R di grado $j \neq 3, 6$. Allora se $s(j) = \left\lceil \frac{(j+2)(j+1)}{12} \right\rceil \in \mathbf{Z}$ si ha che $\forall s \geq s(j)$, $s \in \mathbf{Z}$, f è scrivibile nella forma canonica

$$f = \sum_{i=1}^{s(j)} L_i^{j-2} Q_i \tag{5.2}$$

con $L_i \in R_1$ e $Q_i \in R_2$ $\forall i = 1, \ldots, s(j)$.

Per $j = 1, 2$ avremo che $s(j) = 1$ e per $j = 3, 6$ avremo invece che il relativo valore si $s(j)$ è rispettivamente $s(j) = 3, 6$.

Al paragrafo 2.3.2, quando si era introdotto il concetto di “Forme Canoniche”, si era utilizzata una ben precisa simbologia, utilizzando la quale il teorema appena enunciato può essere cosí riletto:

> Una j-ica ternaria $f(\mathbf{x})$ con $j \neq 3, 6$ può essere scritta nella forma
>
> $$f(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) h_1^{\gamma_1}(\mathbf{x}) \cdots h_s^{\gamma_s}(\mathbf{x})$$
>
> dove $deg(\mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x})) = 2$, $\gamma_1 + \cdots + \gamma_s = j-2$, e $\mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) = 0$ se $\gamma \notin \Gamma'$ con $\Gamma' = \{(j-2, 0, \ldots, 0), (0, j-2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, j-2)\}$ se $s \in \mathbf{Z}$ è tale che $s \geq s(j) = \left\lceil \frac{(j+2)(j+1)}{12} \right\rceil$.
>
> Per $j = 3, 6$ avremo invece che il relativo valore di $s(j)$ è $s(j) = 3, 6$ (rispettivamente).

Raggiunte queste conclusioni, se ne cercassimo un'interpretazione piú geometrica in analogia con lo studio fatto riguardo gli schemi di putni doppi, si potrebbe trovare quella varietà che parametrizza forme del tipo (9). Non è difficile allora vedere che se si determina la varietà $\mathbf{T}$ che parametrizza forme del tipo $L^{j-2}Q$, allora la varietà delle s-Secanti di $\mathbf{T}$ sarà quella che parametrizzerà proprio le forme espresse da (9).

5.2 Punti n-upli

In questo paragrafo cercheremo di studiare la situazione degli schemi 0-dimensionali costituiti da s punti grassi di $\mathbf{P}^2$ di molteplicità n:

$$\mathbf{X} = (P_1, \ldots, P_s; \underbrace{n, \ldots, n}_{s \text{ volte}}) \text{ con } P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^2.$$

Siano $\wp_1, \ldots, \wp_s \subset S = K[y_0, y_1, y_2]$ gli ideali primi omogenei rispettivamente associati a $P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{P}^2$, $P_i = [p_{i_0}, p_{i_1}, p_{i_2}]$; sia poi $I = \wp_1^n \cap \cdots \cap \wp_s^n$ l'ideale rappresentativo di $\mathbf{X}$; sia infine $L_{P_i} = p_{i_0}x_0 + p_{i_1}x_1 + p_{i_2}x_2 \in R = K[x_0, x_1, x_2]$.

In analogia con la strada seguita nel paragrafo precedente, ci poniamo la seguente domanda:

> *Fissato j, qual è il piú piccolo intero s per cui $(I^{-1})_j = R_j$?*

Alle solite, accade che

$$(I^{-1})_j = \begin{cases} R_j & \text{per } j \leq n \\ L_{P_1}^{j-n}R_n + \cdots + L_{P_s}^{j-n}R_n & \text{per } j \geq n+1 \end{cases}.$$

(Si veda § 1.2.5)

Rileggendo il tutto in termini di "Forme Canoniche", siamo interessati a sapere quando $L_{P_1}^{j-n}R_n \oplus \cdots \oplus L_{P_s}^{j-n}R_n$ con $j \geq n+1$ rappresenta una forma canonica.

Come si è già in precedenza osservato non è possibile assumere come regola generale il fatto che il comportamento di s punti di molteplicità n sia il medesimo di quello di $s \cdot \begin{pmatrix} n-1+2 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{sn(n+1)}{2}$ punti distinti di $\mathbf{P}^2$ tutti con molteplicità 1 (come prova di questo fatto bastino i tanti controesempi incontrati nel corso di tutto il lavoro svolto fino ad ora). Ad ogni modo le eccezioni sono relativamente poche rispetto al numero di volte nelle quali effettivamente quanto appena asserito si verifica. Occupiamoci quindi di questo caso tralasciando le eccezioni, o meglio: fissato j, studiamo la dimensione di $I_j = (\wp_1^n \cap \cdots \cap \wp_s^n)_j$ al variare di s supponendo che la varietà che parametrizza le forme di $(I^{-1})_j$ non sia difettiva.

Supponiamo dunque di essere nel caso in cui

$$dim_k((\wp_1^n \cap \cdots \cap \wp_s^n)_j) = dim(R_j(Q_1, \ldots, Q_{\frac{sn(n+1)}{2}}))$$

ove $Q_1, \ldots, Q_{\frac{sn(n+1)}{2}}$ sono punti in posizione generale. Ora, supponendo j fissato, il piú piccolo intero s per cui $I_j = \emptyset$ è il piú piccolo intero per cui $dim_k(I_j) = 0$. Quindi:

- se $j \leq n$ si ha che $(I^{-1})_j = R_j$ ossia che $I = \emptyset \quad \forall\, s$, ovvero $s = 1$;
- se $j \geq n+1$ si ha che
$$(I^{-1})_j = L_{P_1}^{j-n}R_n \oplus \cdots \oplus L_{P_s}^{j-n}R_n$$
e
$$dim_k(\wp_1^n \cap \cdots \cap \wp_s^n) = dim(R_j(Q_1, \ldots, Q_{\frac{sn(n+1)}{2}})).$$
Ora, se i $Q_1, \ldots, Q_{\frac{sn(n+1)}{2}}$ sono in posizione generale $dim(R_j(Q_1, \ldots, Q_{\frac{sn(n+1)}{2}})) = \left[\begin{pmatrix} 2+j \\ 2 \end{pmatrix} - sn\right.$ $\left[\frac{(j+2)(j+1)}{2} - \frac{sn(n+1)}{2}\right]^+$. Dunque $\left[\frac{(j+2)(j+1)}{2} - \frac{sn(n+1)}{2}\right]^+ = 0$ se e solo se $\frac{sn(n+1)}{2} \geq \frac{(j+2)(j+1)}{2}$.
Quindi l'intero da noi cercato è
$$s(j) = \left\lceil \frac{(j+2)(j+1)}{n(n+1)} \right\rceil.$$

Diremo che s, j, n sono *Segre-compatibili* se per s punti generici in $\mathbf{P}^2$ si verifica che $(\wp_1^n, \ldots, \wp_s^n)_j$ ha la dimensione aspettata.

Rileggendo il tutto in termini di forme canoniche siamo ora nelle condizioni di poter generalizzare il Teorema 5.1:

Teorema 5.2

Sia $f \in R_j = (K[x_0, x_1, x_2])_j$ una generica forma in $R = K[x_0, x_1, x_2]$, di grado j e siano s, j, n Segre-compatibili. Allora per $s(j) = \left\lceil \frac{(j+2)(j+1)}{n(n+1)} \right\rceil \in \mathbf{Z}$ si ha che $\forall\, s \geq s(j)$, $s \in \mathbf{Z}$, f è scrivibile nella forma canonica

$$f = \sum_{i=1}^{s(j)} L_i^{j-n} N_i \ ,$$

con $L_i \in R_1$ e $N_i \in R_n \quad \forall\, i = 1, \ldots, s(j)$.

Teorema questo che, espresso nella terminologia precipua delle forme canoniche, assume il seguente aspetto:

La generica j-ica ternaria $f(\mathbf{x})$ può essere scritta, per s, j, n Segre-compatibili, nella forma

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}} \mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) h_1^{\gamma_1}(\mathbf{x}) \cdots h_s^{\gamma_l}(\mathbf{x})$$

dove $deg(\mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x})) = n$, $\gamma_1 + \cdots + \gamma_s = j - n$, $\mathbf{t}_\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se $\gamma \notin \mathbf{\Gamma}'$ con $\mathbf{\Gamma}' = \{(j - n, 0, \ldots, 0), (0, j - n, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, j - n)\}$ e $s \in \mathbf{Z}$ tale che $s \geq s(j) = \left\lceil \frac{(j+2)(j+1)}{n(n+1)} \right\rceil$.

Osservazione 5.1

Quando s, j, n non sono Segre-compatibili, sarà necessario avere valori di $s >> s(j)$ per avere una forma canonica.

Osservazione 5.2

In molti casi siamo in grado di conoscere le terne (s, j, n) Segre-compatibili; in particolare si veda la sezione 1.2.3.

Bibliography

[**AH**] J. Alexander ed A. Hirschowitz, *Polynomial interpolation in several variables*, J. Alge. Geom. 4 No.2, 201-222 (1995)

[**CJ**] M. Catalano - Johnson, *The possible dimension of the higer secant varieties*, Am. J. of Math. **118** (1996). 355-361

[**CLO**] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer 1998

[**CM.1**] C. Ciliberto, R. Miranda, *Linear system of plane curves with base points of equal multiplicity*, Trans. Am. Math. Soc.352, No.9, 4037-4050 (2000)

[**CM.2**] C. Ciliberto, R. Miranda, *Degenerations of planar linear systems*, J. Reine Angew. Math. 501 (1998), 191-220

[**CTV**] M. V. Catalisano, N. V. Trung e G. Valla, *A sharp bound for the regularity inedex of fat points in general position*, Proc. AMS, vol. 118, 1993, 717-724

[**DG**] Ed Davis, A. V. Geramita *The Hilbert Function of Special Class of 1-dimensional Cohen-Macaulay algebras*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math No. 67, the Curves Seminar Vol. III, 717-724 (1993)

[**Du**] P. Dubreil *Sur quelques propriétés des sistèmes des points dans le plan et des courbes gauches algébriques*, Bull. Soc. Math. France, **61** (1933), 258-283

[**ER**] R. Ehrenborg e G. C. Rota, *Apolarity and Canonical Forms for Homogeneus Polynomials*, European Jo. of Comb., 1993

[**Ev**] L. Evain, *La fonction de Hilbert de la réunion de 4^h gros points génériques de $\mathbf{P}^2$ de méme multiplicité*, J. Alg. Geom. 8 (1999), 787-796

[**Ge**] A. V. Geramita, *Inverse system of fat points: Waring's problem, Secant varieties of Veronese Varieties and parameter sapces for Gorenstain ideals*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. No.102, 1-131 (1999)

[**GGR**] A. V. Geramita, D. Gregory, L. Roberts, *Monomial ideals and points in projective space*, J. Pure and Appl. Alg. 40 (1986), 33-62

[**Gi.1**] A. Gimigliano *On Linear System of Plane Curves*, Ph. D. thesis, Queen's University, Kingston, Ontario (1987)

[**Gi.2**] A. Gimigliano, *Our thin knowledge of Fat Points*, Queens Papers in Pure and Applied Math. **83**, *The Curves Seminar at Queens' vol VI (1989)*

[**Ha.1**] B. Harbourne, *The Geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **6** (1986)

[**Ha.2**] B. Harbourne, *Problems and Progress: A survey on fat points in* $\mathbf{P}^2$, preprint 30 Novembre 2000 Department of Mathematics and Statistics of University of Nebraska Lincoln

[**Ha.3**] B. Harbourne, *Free Resolutions of Fat Points Ideal on* $\mathbf{P}^2$, J. Pure and Applied Alg. 125 (1998), 213-234

[**HHF**] B. Harbourne, S. Holay, S. Fitchett, *Resolutions of Ideals of Quasiuniform Fat Point Subschemes of* $\mathbf{P}^2$, preprint (2000)

[**HR**] B. Harbourne, J. Roé, *Linear system with multiple base points in* $\mathbf{P}^2$, preprint (2000)

[**Har**] J. Harris, *Algebraic Geometry, a First Course*, Springer - Verlag, New York (1993)

[**Hi.1**] A. Hirschowitz *Une conjecture pour la cohmologie des diviseurs sur les surfaces rationelles génériques*, Journ. Reine Angew. Math. 397 (1989), 208-213

[**Hi.2**] A. Hirschowitz, *La methode d'Horace pour l'Interpolation a plusieurs variabile*, Manuscr. Math. 50 (1985)

[**Id**] M. Idà, *The minimal free resolution for the first infinitesimal neighborhoods of n general points in the plane*, J. Alg. 216 (1999), 741-753

[**IK**] A. Iarrobino e V. Kanev, *The Lengh of homogeneous form, Determinantal Loci of Catalecticants and Gorenstein Algebras*

[**Mig**] T. Mignon, *Systèmes de courbes planes à singularités imposées: le cas des multiplicités inférieures ou égales à quatre*, J. Pure Appl. Algebra 151 (2000), no. 2, 173-195

[**Mir**] R. Miranda, *Linear system of plane curves*, Notices of the AMS, Vol.46,No.2

[**Na**] M. Nagata, *On rational surfaces, II*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math. 33 (1960), 271-293

[**Re**] B. Reznick, *Sums of Power of Complex Linear Forms*

[**Seg**] B. Segre, *Alcune questioni su insiemi finiti di punti in Geometria Algebrica*, Atti del Convegno internazionale di Geom. Alg., Torino (1961)

[**Wa**] K. Wakelord, *On Canonical Forms*, Proc. London Math. Soc. 18 (1918-19), 403-410

In quest'ultima pagina vorrei ringraziare tutti coloro che mi hanno sostenuta ed aiutata durante la preparazione di questo lavoro.

In primo luogo la mia riconoscenza è diretta al professor Gimigliano il quale con pazienza, chiarezza, precisione e puntualità si è prodigato nel propormi argomenti, chiarire dubbi e correggere le numerose bozze; lo ringrazio anche perchè con la sua mitezza e la sua affabilità mi ha consentito di lavorare in serenità.

In secondo luogo voglio ringraziare tutti i compagni di corso che si sono sempre dimostrati disponibili all'aiuto reciproco (mi riferisco principalmente a Lorenzo, Chiara B., Serena, Elisa, Federico, Chiara G., Piergiorgio, Lara e Federica); le suore dell'Istituto Zoni, d. Riccardo e le compagne di collegio con le quali per quattro anni ho condiviso la vita nella sua quotidianità e che mi hanno sostenuta nelle piccole e grandi difficoltà di ogni giorno (Rita, Elisa, Lucia, Silvia, Tatiana, Nadia, Maria Vittoria, Cristina e tutte le altre); i tanti amici che per la loro numerosità non posso qui citare tutti per nome ma che per la loro viva e vera partecipazione alle mie vicende interiori ed esteriori mi hanno dato tanto in termini di crescita personale.

Ringrazio infine tutti i famigliari: i miei genitori, i miei nonni, gli zii e le mie tanto care cuginette Maddalena e Benedetta; tanti eventi si sono succeduti in questi anni e in questi ultimi mesi (persone che vanno e che vengono, muri che crescono e che cadono... "chi ha orecchi per intendere intenda") ma mai, sia nella gioia che nel dolore, è venuta meno l'unità della famiglia.

GRAZIE A TUTTI!