



DIEM  
GMA

Quaderni di ricerca

## Sesta giornata di studio Ettore Funaioli

16 luglio 2012

A cura di  
Umberto Meneghetti, Alberto Maggiore e Vincenzo Parenti Castelli



SOCIETÀ EDITRICE  
**ESCOLAPIO**



Alm@DL



# **Quaderni del DIEM – GMA**

## **Atti di giornate di studio – 6**

A cura di:

U. Meneghetti , A. Maggiore , V. Parenti Castelli

Coordinatore di redazione:

Alessandro Zanarini

**DIEM**

Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche,  
Nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia

<http://www.diem.unibo.it/>

**GMA**

Gruppo di Meccanica Applicata

[http://wpage.unina.it/dellaval/GMA/GMA\\_homeold.htm](http://wpage.unina.it/dellaval/GMA/GMA_homeold.htm)

**Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna**

[http://www.accademiascienzebologna.it/AccademiaScienze/  
default.htm](http://www.accademiascienzebologna.it/AccademiaScienze/default.htm)

# Sesta giornata di studio

## Ettore Funaioli

*16 luglio 2012*

*A cura di:*  
*Umberto Meneghetti, Alberto Maggiore e Vincenzo Parenti Castelli*

*Proprietà letteraria riservata  
© Copyright 2013 degli autori  
Tutti i diritti riservati*

*Sesta giornata di studio Ettore Funaioli – 16 luglio 2012 / A cura di  
Umberto Meneghetti, Alberto Maggiore, Vincenzo Parenti Castelli  
Bologna: 2013 – p. 378; 17 cm*

**ISBN ;9:/::/96:/:/837/;**

Versione elettronica disponibile alla pagina  
<http://amsacta.unibo.it/3715/>

Stampa a richiesta eseguita da:



40131 Bologna – Via U. Terracini 30 – Tel. 051- 6340113 – Fax 051- 6341136  
**[www.editrice-esculapio.com](http://www.editrice-esculapio.com)**

# INDICE

## Prefazione

<i>P. G. Molari, G. Angelini, A. Canzler, P. Sannipoli</i>	1
Ricostruzione della balista imperiale romana. Un piacevole viaggio tra fantasia, storia, tecnologia e.. progettazione	
<i>U. Meneghetti</i>	41
Le trombe idroeoliche	
<i>A. Berti, J.P. Merlet, M. Carricato</i>	61
Solving the direct geometrico-static problem of 3-3 cable-driven parallel robots by an interval analysis based algorithm	
<i>A. Rossi, G. Rosati, M. Faccio, A. Carli, C. Finetto</i>	79
Progettazione e gestione di sistemi di assemblaggio industriale ad elevata flessibilità: Fully Flexible Assembly Systems	
<i>A. O. Andrisano, M. Ansaldi, G. Berselli, E. Bonazzi, F. Gherardini, F. Leali, M. Pellicciari, F. Pini, C. Renzi, A. Vergnano</i>	89
Metodo di progettazione di sistemi di fixture per l'assemblaggio di telai automobilistici mediante analisi di sensibilità	
<i>N. Sancisi, V. Parenti Castelli</i>	101
Rotation axis identification at the human tibio-talar and talo-calcaneal joints by the Burmester theory	
<i>M. Troncossi, C. Mazzotti, M. Mozaffari Foumashi, D. Zannoli, V. Parenti-Castelli</i>	111
Design and manufacturing of a hand-and-wrist exoskeleton prototype for the rehabilitation of post-stroke patients	
<i>A. O. Andrisano, F. Pellicano, M. Barbieri, E. Fava</i>	121
Finite element modeling of spur and helical gears	
<i>A. Freddi</i>	129
An experimental stress analysis syllabus and course design	
<i>L. Cristofolini</i>	149
Integrazione di metodi numerici e sperimentali: una prospettiva biomeccanica	
<i>E. Oliva, A. Strozzi, A. Baldini, M. Giacopini, E. Bertocchi</i>	177
Achievement of a uniform contact pressure in a shaft-hub press-fit	

<i>L. Bertocchi, M. Giacopini, A. Strozzi</i>	203
A complementarity formulation to study lubricated contact problems in the presence of cavitation	
<i>E. Dragoni</i>	215
Progetto ottimale di cuscinetti radiali a rulli cilindrici per la massima capacità di carico	
<i>A. Spaggiari, E. Dragoni, N. Golinelli</i>	225
Regolarizzazione delle tensioni torsionali in giunzioni tubolari incollate a singola sovrapposizione con adesivi funzionalizzati	
<i>D. Castagnetti</i>	237
Confronto sperimentale tra convertitori di energia piezoelettrici multifrequenza: convertitore frattale e convertitore tradizionale	
<i>G. Sciré Mammano, E. Dragoni</i>	251
Progetto di sospensioni a bassa rigidezza composte da aste in instabilità elastica	
<i>L. Leonelli</i>	269
A multibody model for the analysis of self excited vibrations of racing motorcycles	
<i>A. Segatori, B. Reggiani, L. Donati, L. Tomesani</i>	283
Extrusion of magnesium hollow profiles for automotive applications	
<i>E. Mucchi, G. Dalpiaz</i>	293
Numerical vibro-acoustic analysis of gear pumps for automotive applications	
<i>A. O. Andrisano, F. Pellicano, M. Strozzi</i>	307
Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells: effect of the companion mode participation	
<i>A. Martini, M. Troncossi, A. Rivola</i>	323
Feasibility investigation on detection of water leaks in pipelines by means of vibration monitoring	
<i>L. Montechiesi, M. Cocconcelli, R. Rubini</i>	333
Diagnostics by means of artificial immune systems: a different approach for the fault detection of bearings in non-stationary conditions	
<i>A. Zanarini, E. Brugnoni</i>	351
A time-varying dynamic problem for the frequency analysis of an off-road motorcycle	
Indice degli autori	377

## Prefazione

*Dalla prima “Giornata di studio Ettore Funaioli” del 18 luglio 2007 alla sesta del 16 luglio 2012, le memorie presentate sono passate da 13 a 25 – anche se in questa raccolta, per alcune difficoltà organizzative, ne compaiono solo 23. A tutti i partecipanti va il nostro più vivo ringraziamento: a loro si deve il successo della manifestazione, che è peraltro legato anche all’alta considerazione in cui è tenuta la figura del Prof. Ettore Funaioli, che ricordiamo sempre con grande stima e sincera gratitudine per l’alto insegnamento scientifico e la profonda umanità.*

*La crescente adesione di amici ed allievi – di prima e di seconda generazione – a queste Giornate di Studio, conferma anche l’apprezzamento dei partecipanti per l’occasione che esse offrono di ritrovarsi fra colleghi che si conoscono, si stimano e si apprezzano, per fare tutti partecipi dei risultati scientifici ottenuti e per discutere amichevolmente dei comuni problemi che si incontrano nell’attività quotidiana. È motivo di grande soddisfazione constatare la qualità scientifica dei lavori presentati e il costante impegno dei Ricercatori di Meccanica che hanno voluto partecipare alla Sesta Giornata: il buon seme sparso dai nostri Maestri ha trovato buona terra e dà buon frutto.*

*La Sesta Giornata di studio Ettore Funaioli si è svolta con il patrocinio dell’Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna e del GMA – Gruppo di Meccanica Applicata. Di ciò ingraziamo vivamente il Presidente dell’Accademia delle Scienze, Prof. Francesco A. Manzoli e il Presidente del GMA, Prof. Aldo Rossi.*

*La Giornata ha potuto svolgersi anche grazie alla collaborazione della Facoltà di Ingegneria dell’Alma Mater Studiorum e del DIEM – Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni meccaniche, nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia. Ringraziamo il Preside della Facoltà di Ingegneria, Prof. Pier Paolo Diotallevi, e il Direttore del DIEM, Prof. Gianni Caligiana, che hanno consentito queste collaborazioni e hanno voluto aprire la Giornata porgendo il loro saluto ai partecipanti.*

Bologna, 21 giugno 2013

*Umberto Meneghetti – Alberto Maggiore – Vincenzo Parenti Castelli*



# **RICOSTRUZIONE DELLA BALISTA IMPERIALE ROMANA**

## **UN PIACEVOLE VIAGGIO FRA FANTASIA, STORIA, TECNOLOGIA E .. PROGETTAZIONE**

Pier Gabriele Molari

Guido Angelini

Pietro Sannipoli

*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: piergabriele.molari@ unibo.it*

Andreas Canzler

*Chemnitz University of Technology*

*Chemnitz, Deutschland*

**Riassunto.** Nel secondo anno, da quando è stato acceso il “Laboratorio di storia dell’ingegneria meccanica”, si prosegue il cammino iniziato nel Corso precedente, che ha portato alla ricostruzione virtuale della balista descritta da Vitruvio [1] e ci si impegna in una ricostruzione della macchina da lancio dei romani dell’età imperiale.

Si è così coinvolti in un piacevole viaggio, a cavallo fra fantasia interpretativa e costruttiva, ricerca storica e realtà tecnologica che, definita la “mission” della macchina, fa comprendere l’essenza del progetto.

L’analisi accurata delle immagini presenti sulla colonna Traiana fornisce un terreno di discussione e di elaborazione di varie soluzioni costruttive che vengono esaminate e confrontate scoprendo anche inedite interpretazioni delle scene rappresentate. Il lavoro termina con lo “studio” della macchina, i disegni dei particolari e del complessivo.

In attesa di una ri-costruzione reale della macchina se ne esegue una virtuale con tanto di lancio .. simulato..

**Keywords:** *balista, Roman imperial gun, history of mechanical engineering*

### **1. INTRODUZIONE**

Dopo aver fugato i dubbi sollevati da molti sul fatto che Vitruvio avesse le conoscenze sufficienti per essere un costruttore di macchine belliche<sup>1</sup>, ci si rende conto come questa macchina Fig.1 fosse particolarmente pesante, delicata nella messa a punto e dispendiosa

---

<sup>1</sup> la precisa esperienza professionale dell’autore, viene dichiarata nella prefazione [2] I,2: (...) *itaque cum M. Aurelio et P. Minidio et Gn. Cornelio ad apparationem ballistarum et scorpionum reliquorumque tormentorum refectionem fui praesto et cum eis commoda accepi* (...) «Pertanto attesi insieme con M. Aurelio e P. Minidio e Gn. Cornelio alla preparazione delle baliste e degli scorpioni e al riattamento delle macchine belliche; e insieme con essi ricevetti il compenso» (traduzione di Silvio Ferri).



**Figura 1.** La ricostruzione della balista di Vitruvio [1]

nella sostituzione dei pezzi; in sostanza, poco adatta ad essere impiegata sul campo da un esercito che aveva fatto della mobilità una strategia essenziale [A1÷A4], ci si imbatte così nella minuziosa descrizione della balista eseguita da Erone e affascinati dalla rivoluzione tecnologica di questa macchina rispetto alle precedenti, ci si impegna nella ricerca bibliografica per porre le basi necessarie ad una sua (ri)costruzione.

A differenza della balista “classica” con struttura lignea di notevoli dimensioni, ritrovata ad Hatra e sostanzialmente descritta da Vitruvio, questa balista con telaio metallico viene detta piccola, potente e maneggevole [4]. Si trova poi che la balista descritta da Erone ha acceso la curiosità di molti Studiosi [5, 6, 7, 8] e che vanta alcune ricostruzioni, alcune delle quali sperimentate sul campo.

Meno interesse ha suscitato la balista Romana derivata da quella descritta da Erone<sup>2</sup> ampiamente e meticolosamente descritta sulla colonna Traiana, colonna che fu inaugurata il 12 maggio 113 e che riporta le guerre avvenute in Dacia fra il 101 ed il 106. Marco Ulpio Nerva Traiano fu imperatore romano dal 98 al 117 e sotto il suo comando l’impero romano raggiunse la sua massima espansione. Anche la descrizione di Ammiano Marcellino pur ammirando lo spirito di voler far conoscere questa macchina nei dettagli, non è di grande aiuto soprattutto perché la macchina viene descritta, come scrive l’Autore “nei limiti che me lo concede il mio ingegno modesto” [A2].

Molte domande sulla struttura di questa balista vengono poste in [7]. Sembra quindi più interessante spostare lo studio per tentare una ricostruzione di questa balista, dato che si può enfatizzare il ruolo della estrema semplificazione e della concretezza Romana, tanto utile da mettere in luce nella didattica della moderna progettazione delle macchine. Vincoli strategici e tattici per la balista di Erone rivisitata dai Romani

---

<sup>2</sup> Durante il Corso sono stati messi in evidenza i legami fra la tradizione neoAristotelica-Alessandrina, rappresentata da Archimede, Erone, Pappo, e nostri uomini di scienza: Commandino, Dal Monte, Galilei, legami che hanno contribuito in maniera così profonda alla impostazione della scienza moderna [3].

Come descritto in [9] agli inizi del II secolo l'esercito romano si trovò ad essere assistito dal più potente arsenale di macchine da guerra dell'antichità: l'adozione su larga scala delle carroballiste montate su carri trainati conferiva una flessibilità ed una efficacia di impiego paragonabile a quella delle moderne artiglierie mobili... raccomanda che lo schieramento delle macchine da guerra avvenga in parte sulle ali avanzate della formazione, in modo da colpire dalla massima distanza possibile, e in parte dietro alla prima linea per sostenerla prima dell'impiego delle fanterie, assieme agli arcieri e ai lanciatori di giavellotto. La macchina quindi deve venire prodotta su larga scala .....



**Figura 2.** - un tornio parallelo del 1395 [11], - un vecchio trapano a mano, - una classica sega per il legno [12]

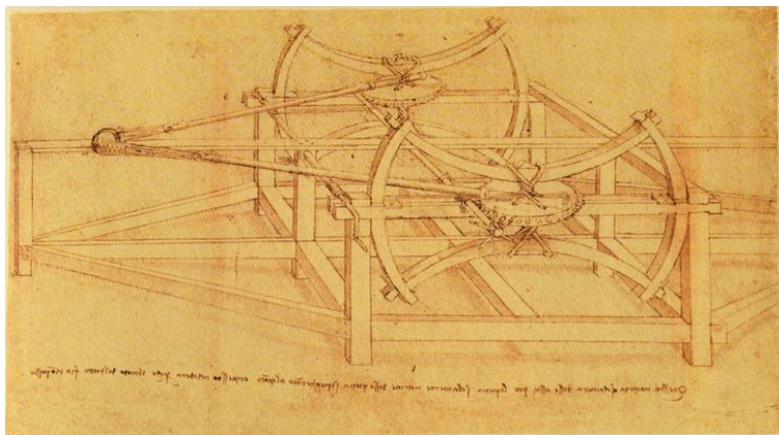
Va notato poi che la vita di queste macchine è limitata fra il primo ed il quarto secolo. Dopo tale periodo cessa la necessità di disporre di un esercito estremamente mobile e le baliste non appaiono più nei bassorilievi che celebrano le imprese di Costantino, ma vengono ancora descritte [A2÷A4]. Queste macchine dette "macchine a torsione" non saranno superate nel corso dell'antichità se non con la rivoluzionaria invenzione della polvere da sparo.[10]

## 2. LE MACCHINE A "TORSIONE"

Sono note alcune macchine che impiegavano l'avvolgimento di una fune in un tamburo per poi svolgere successivamente la fune e generare un moto rotatorio di un asse. Purtroppo disponiamo di immagini di epoche successive, ma vengono riportate perché si pensa siano significative. Le macchine semplici e primordiali riportate in Fig. 2 sembrano essere state le ispiratrici delle macchine belliche a torsione, anche se con modalità che possono discostarsi sensibilmente da ciò che si sta studiando.

Un esempio tipico è quello del tornio parallelo sul quale si avvolgeva e svolgeva una fune o un nastro collegato ad un elemento elastico. L'energia necessaria per il moto veniva fornita dall'operatore agendo su di un pedale Fig. 2-a [10].

Si riportano anche macchine nelle quali, anche se con modalità diverse dalla precedente, veniva impiegato o l'avvolgimento di una funicella (come nel trapano che sfrutta il moto di sali-scendi di una traversa mossa dalla mano dell'operatore) Fig.2-b o la torsione di una treccia di fili per generare forze assiali (come nelle classiche seghe da legno) Fig. 2-c [12] e come in Leonardo per deformare a flessione elementi elastici<sup>3</sup>, Fig. 3 [13].



**Figura 3.** La balista di Leonardo, Codice Atlantico, Foglio 145 r [13]

---

<sup>3</sup> *Questa macchina scacerà da sé assai più la pietra, se l'antenne motrice d'essa pietra si piegheranno alquanto. E questo accaderà perché il moto del tutto fa composto.* Leonardo, Codice Atlantico, foglio 145 r [13]



**Figura 4.** La balista di Valturio , De Re Militari - manoscritto (22 es. codice D, f. 139 v.)  
1450 circa, per maggiori dettagli si veda [14].

La Fig. 3 è significativa del fatto che anche Leonardo non progettasse più baliste con un “motore a torsione”. Questa tipologia di macchine viene invece riportata da Valturio Fig. 4 ma, in questo caso, come già visto in [1], sembra lecito pensare che vi sia un legame diretto con l’opera di Frontino (30 - 103). e quindi le immagini di Valturio si possono pensare versioni precedenti delle nostre baliste imperiali.

### 3. LA STRUTTURA DELLA BALISTA DI ERONE E DELLA BALISTA ROMANA

Ritornando alla balista minuziosamente descritta da Erone e ricostruita modernamente da Marsden [5], Iriarte[6] e da Russo [7], essa è formata da un telaio metallico al quale vengono ancorati i due elementi elastici precaricati attraverso il sistema dei modioli e della ralla con l’impiego di un nonio per il precarico ed il fissaggio [15] [1].

La balista è molto ben rappresentata nei tre disegni riportati e non sembra necessaria un’ulteriore descrizione Fig. 5 -a, -b, -c.

In queste macchine si notano alcuni particolari ai quali si farà riferimento in seguito e che vale la pena nominare (nei termini greci o latini o latino-italianizzati) [5] [7] [8], la tipologia:

*elitona*: una balista nella quale i bracci ruotano verso l'esterno per espellere il proietto, Fig. 6-a,

*palintona*: una balista nella quale i bracci ruotano all'interno per espellere il proietto, Fig. 6-b,

la struttura della macchina vera e propria:

*kambestrion (capitulum)*: i due montanti che racchiudono la matassa e sostengono i modioli,

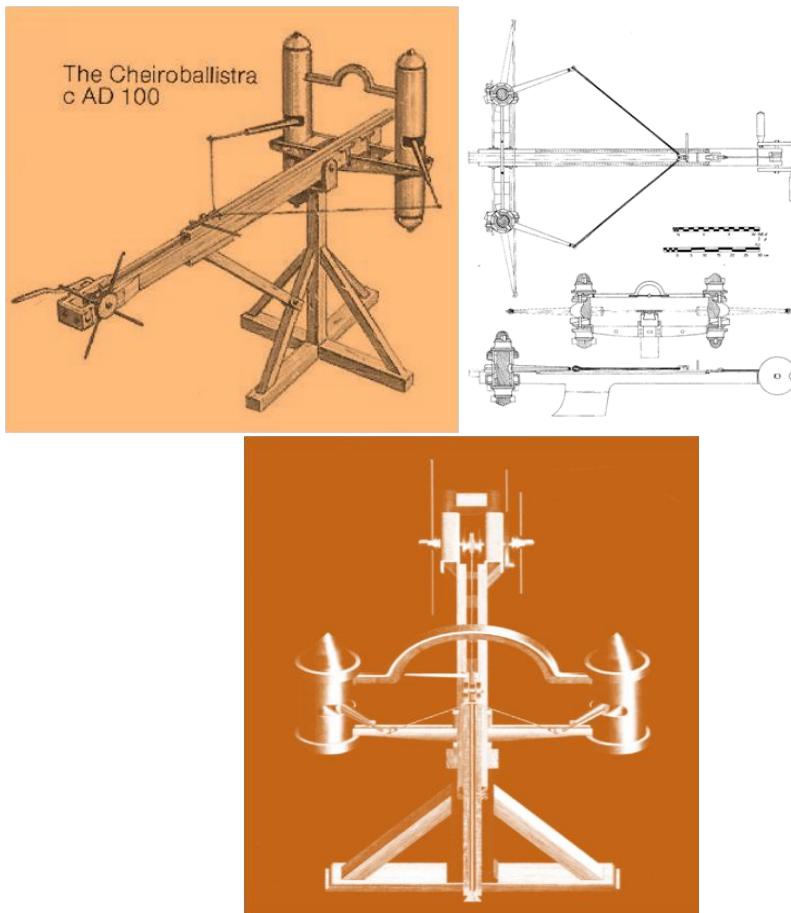
*kamarion*: la traversa superiore, in genere arcuata,

*klimakion*: la traversa inferiore o telaio,

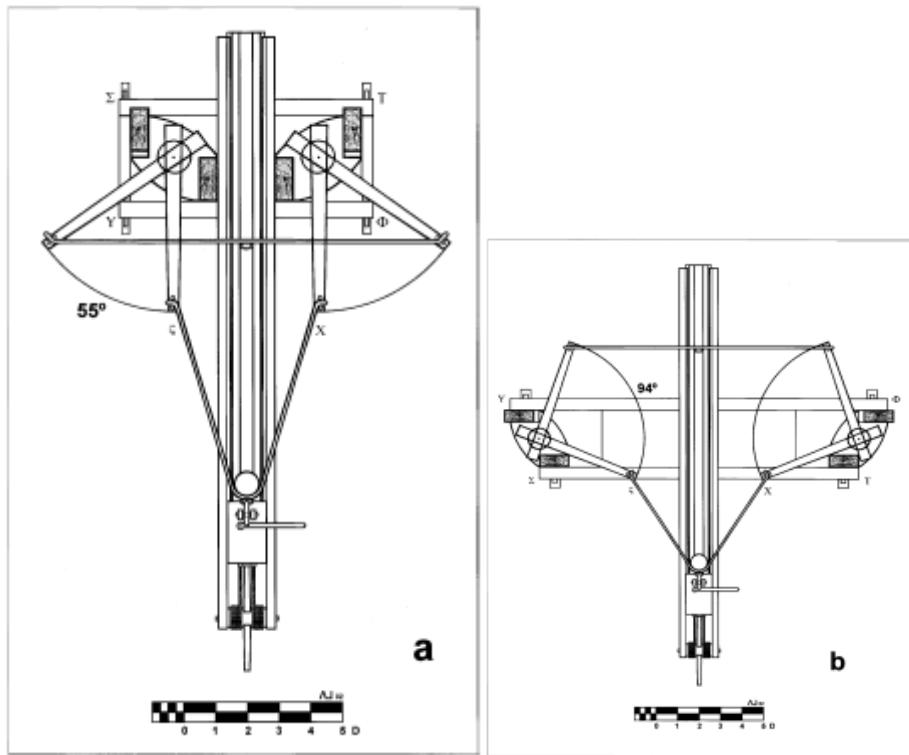
*modioli*: le ralle indexate che permettono di precaricare la matassa e di fermarla con spine nella posizione desiderata [15] Fig. 7,

*braccetti (bracchium)*: i bracci che ruotando portano energia al porta sasso tramite due fili,

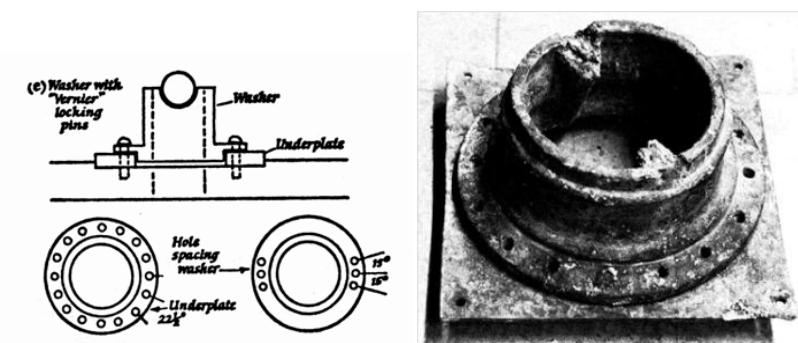
*chelonium* : guida per la slitta alla quale erano fissati tramite un meccanismo a scatto i fili del portasasso;



**Figura 5.** Alcune ricostruzioni della balista di Erone, - Marsden 1969 [5], - Iriarte 2000 [6], - Russo 2004 [7]



**Figura 6.** Le due tipologie di macchina: a- la elitona, b- la palintona [16]



**Figura 7.** Il modiollo: la ralla indexata con nonio per frazionare la divisione angolare e quindi ottimizzare il precarico della matassa [14] e un modiollo originale ritrovato a Cremona (Museo Civico) [7] [10].

la struttura di sostegno:

*basis*: le traverse di piede,

*columella*: il ritto unito al sostegno centrale che poteva essere alzato o abbassato,

*caput columellae*: l'articolazione superiore della columella,

*columna minor posterior*: il sostegno posteriore per il chelonium, che definiva l'alzo,

*capreolus*: la controventatura della colonna centrale (plinto),

*plinthus*: la parte del telaio, centrale e di sostegno,

*subiectio*: il controvento posteriore sul quale veniva regolata la columna minor per regolare l'alzo;

#### 4. LE IMMAGINI SULLA COLONNA TRAIANA [17]

Dalla Fig. 8 alla 12 vengono riportate le scene della colonna Traiana nelle quali sono scolpite baliste. Non si può contare su descrizioni scritte della balista della Roma imperiale, se non quella “tarda” di Ammiano Marcellino [A2], ma le immagini riportate ci permettono di osservare questa macchina, anche in condizioni operative, e di confrontarle con quelle della balista descritta da Erone. Nascono così spontanee molte domande sulle caratteristiche meccaniche della macchina. Alcune di esse sono poste in [7, pag.280], dove vengono date anche alcune risposte, qui vengono ampliate, analizzate e discusse.



**Figura 8.** Immagini dalla Colonna Traiana, XL - 104-105



**Figura 9.** Immagini dalla Colonna Traiana, LXV – 163-164



**Figura 10.** Immagini di baliste per difesa fissa, Colonna Traiana LXVI 165-166



**Figura 11.** Baliste, fromboliere e proiettili. Immagini dalla Colonna Traiana, LXVI – 167



**Figura 12.** Ingegneri imperiali osservano la nuova balista, Colonna Traiana, LXVI 169



**Figura 13.** Un balistario con il “motore” di riserva a tracolla e a destra un possibile schema di questa versione della macchina (vista da dietro), con un “motore” in posizione ed uno separato.

Le domande:

Perché le matasse elastiche sono racchiuse un astucci cilindrici?

Questi astucci sono soltanto una protezione per le matasse elastiche?

Essi fanno parte integrante della struttura di sostegno della matassa?

Nel caso fosse rimasta la struttura portante all'interno dei cilindri quale poteva la procedura di montaggio ?

Perché è molto più ampia la barra di accoppiamento fra i due “motori”?

Perché questa barra è priva della parte rettilinea?

Perché i due cilindri sono così poco sviluppati in altezza?

Esiste una ferritoia centrale nella quale possono scorrere i braccetti ?

Nelle, sostanzialmente due, installazioni: statica da difesa sulle mura, mobile sui carri a latere della cavalleria o centrale dietro la prima linea, il basamento è sempre lo stesso ?

Ma ancora: perché i due cilindri non sempre terminano con due chiusure a punta?

In quale ambiente sono poste e cosa fanno le persone che le circondano?

## 5. DISCUSSIONE SULLE IDEE E ALCUNE CONVINZIONI

Durante il Corso si discute molto su questi interrogativi, anche su immagini ingrandite, e sul significato delle immagini riportate sulla Colonna. In sintesi, liberando la fantasia, si arriva a sostenere che i Romani apportano a questa macchina bellica sostanziali modifiche, oggi si direbbe, ne fanno una “industrializzazione”. Vediamone in sintesi i dettagli:

Gli ingegneri imperiali separano la parte soggetta a torsione dalla parte soggetta a flessione; inscatolano la matassa elastica e la rendono sostituibile in tempi rapidi (quasi un cambio gomme da F1 !!). Il progetto viene così stravolto. La matassa da elemento cardine di difficilissima messa a punto (di difficile tuning!! direbbe oggi Vitruvio, che descrive l'operazione in modo dettagliato<sup>4</sup>) diviene una cartuccia da sostituire: l'addetto alla

---

<sup>4</sup> Altrettanto importante è la sua formazione musicale relativa alla teoria armonica e al rapporto tonale, che gli consente, fra le altre cose, di calibrare con precisione baliste



**Figura 14.** Il busto di Apollodoro di Damasco (gipsoteca di Monaco), architetto di Traiano e autore della famosa “colonna” [18], a destra “gli ingegneri” imperiali o un autoritratto dello stesso Apollodoro ?

macchina (Colonna Traiana XL 104) ne porta a tracolla un refill Fig. 13<sup>5</sup> !! Va anche considerato che questa tecnologia, impiegante nervi e peli animali, era estremamente delicata e poteva aver bisogno di sostituzioni impreviste. Vegezio [A3] racconta una disperata “colletta” di capelli femminili.

I Romani impiegano elementi metallici anche nella matassa elastica e ne evitano il precaricamento in una configurazione palintona, cioè con la rotazione dei braccetti verso l’interno della macchina dopo lo sgancio, più sicura per gli addetti e di ingombro ridotto. Accorciano la matassa ed evitano anche la messa a punto. Ma c’è di più, nella colonna Traiana viene anche riportato un prototipo di un ulteriore step (sempre per utilizzare un termine da F1): viene tolta anche la traversa superiore e così il telaio viene ulteriormente semplificato Fig.11<sup>6</sup>.

---

*catapulte e scorpioni. Infatti nei bracci trasversali di queste macchine, alle loro estremità di destra e di sinistra, vi sono dei fori detti semitoni, attraverso i quali si tendono, per mezzo di verricelli e leve, le funi di budello ritorto che non vengono fissate e serrate definitivamente se prima non emettono un determinato suono che all’orecchio dell’artefice risulti della stessa intensità armonica. Perché il colpo parta e segua una traiettoria in linea retta la tensione dei bracci dev’essere di pari intensità e quando essa viene allentata bisogna che scattino all’unisono.* Vitruvio I,8 [2].

<sup>5</sup> E’ con grande piacere che si ha una conferma di questa osservazione dal lavoro [10].

<sup>6</sup> Non è chiaro se l’interruzione dell’arco del kamarion sia una lesione del fregio o sia una rappresentazione di una nuova versione della macchina. Qui fa piacere optare per questa seconda interpretazione e si pensa ad un telaio realizzato in un sol pezzo per fusione in bronzo; una struttura più “classica” con due traverse in ferro non altera tuttavia lo sviluppo del lavoro.

In sostanza nella Colonna Traiana vengono riportati tre step della macchina, una prima con gli elementi elastici racchiusi in cartucce intercambiabili e con la registrazione da entrambi i lati (Colonna Traiana XL 104-105) Fig.8, un secondo step con la cartuccia che non viene più regolata ma che si monta dall'alto e viene bloccata da un coperchio (Colonna Traiana LXV 163-164) Fig.9. Una terza soluzione che spoglia definitivamente la macchina di tutte le cose inutili e che vede i due elementi cilindrici spuntare a sbalzo da un sottostante telaio che li sostiene Fig.11 . Piace qui pesare che questa versione venga osservata con compiacimento da coloro che l'hanno pensata<sup>7</sup>: dagli ingegneri di Traiano (Colonna Traiana LXVI 169) Fig.12 e quindi nasce spontaneo pensare che sia lo stesso Apollodoro di Damasco [19], architetto imperiale, autore della colonna, la cui somiglianza appare molto marcata per entrambe le persone, Fig.14 ad osservare compiaciuto la sua opera.

Si decide di concentrarsi sostanzialmente su questa terza versione della macchina perché sembra rappresentare la massima evoluzione della macchina stessa.

## 6. EVOLUZIONE DEL PROGETTO CONCETTUALE: TIPOLOGIE DI RIFERIMENTO

Ma rimane ancora la domanda di base: a questi tre step come si adeguano gli elementi “motori” ?

Aprendo la fantasia, tenendo presente i vincoli tecnologici e facendo riferimento ove è possibile anche a soluzioni moderne, si possono pensare ben sei differenti tipi di “cartucce motore”:

- 1- Fili raggruppati in una matassa e avvolta su aspo.

Raggruppando i fili e incrociandoli come la filatrice fa su di un aspo nel confezionamento della matassa, si può, come si vede nello schizzo, effettuare il caricamento solo da un lato del cilindro, fissando su scassi assiali le estremità dei bracci dell’aspo e lasciando un sostegno assiale per un cuscinetto al quale viene ancorato il braccetto Fig. 15.

ancorati a due piatti d'estremità e passanti su di un distanziale centrale tenuto assialmente da un cuscinetto su di un albero centrale pure fisso alle piastre d'estremità.

Il braccetto può venire ancorato con una accoppiamento filettato al piatto centrale Fig. 16.

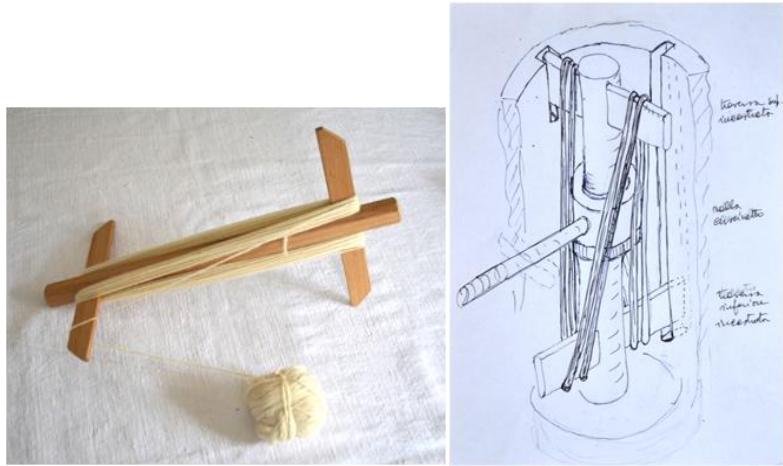
- 2- Fili multipli fra loro separati

Come nelle fruste per montare l’albume dell'uovo, si possono vedere i fili In questo caso il filo lavora a trazione e la sua deformazione viene valutata sull'allungamento dalla posizione iniziale alla finale, in modo del tutto analogo a quanto fatto nel precedente lavoro [1].

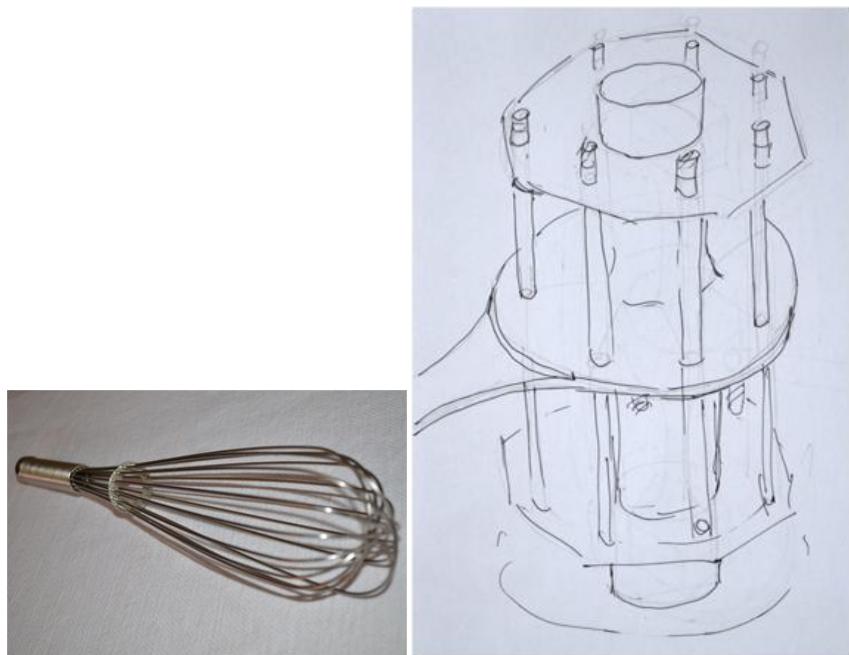
Il modello può impiegare anche lamierini affacciati a due a due come nella macchina descritta in [4] e riferita ad altro Autore.

---

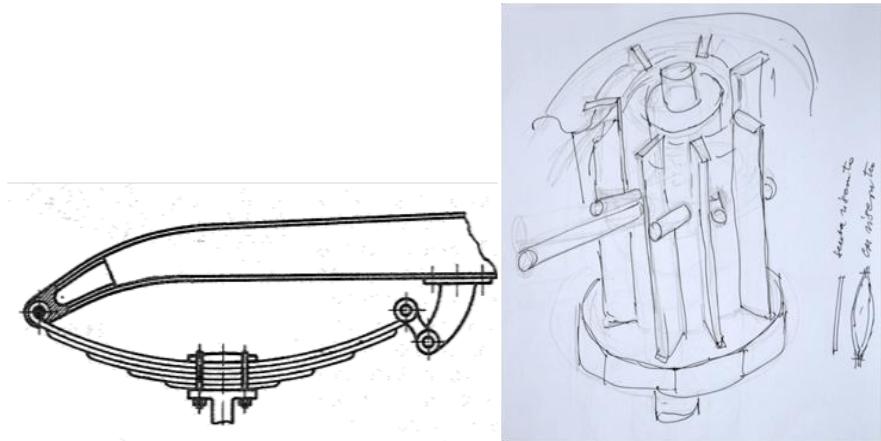
<sup>7</sup> Ciò a differenza di quanto viene asserito dagli studiosi che affermano trattarsi di Daci [10].



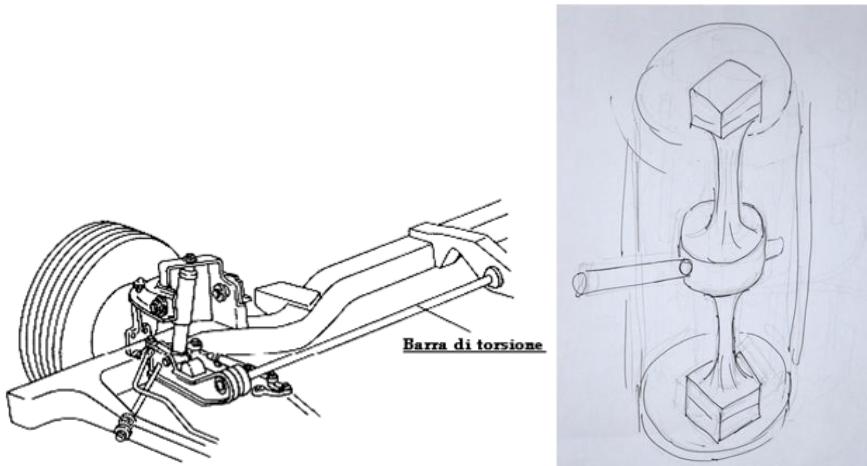
**Figura 15.** Dal gomitolo alla matassa: un aspo con il filo avvolto. Di facile messa a punto rispetto alla matassa originale, e con possibilità di sostituzione rapida



**Figura 16.** Il distanziatore dei fili (come in una frusta per montare l'albumine delle uova) che diviene elemento mobile.



**Figura 17.** Una molla a balestra e un insieme di molle a balestre in parallelo



**Figura 18.** Una barra di torsione montata su veicolo e lo schema della possibilità di utilizzare lo stesso principio sulla balista.

### 3- Molle a lamine (balestre) in parallelo

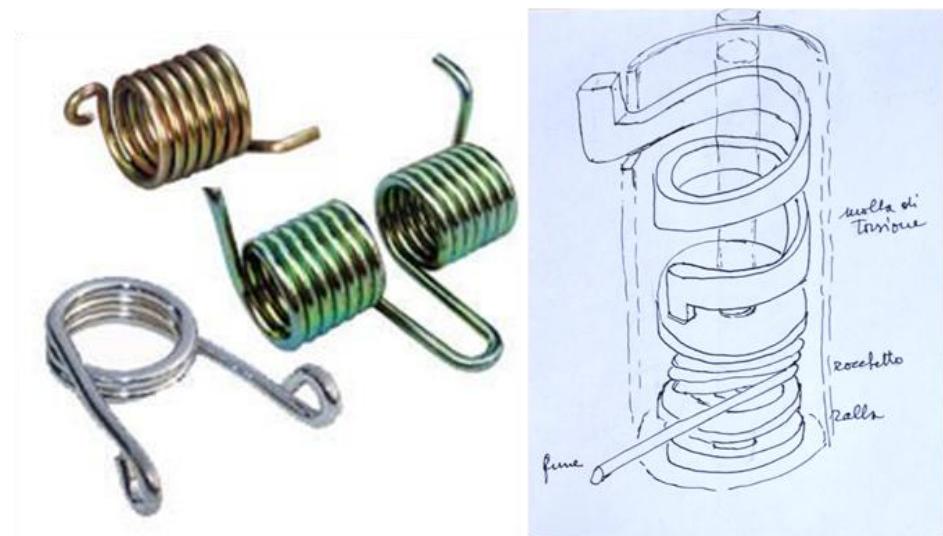
Si impiegano lamierini disposti in parallelo Fig. 17.

Per il montaggio all'interno dei nostri cilindri, si pensa che la parte centrale sia sostenuta assialmente da un cuscinetto e che possa permettere il passaggio delle due teste Fig. 18.

### 4- Barra di torsione

La barra di torsione è presente in molte sospensioni di vetture automobilistiche e immagazzina energia in spazi contenuti, riuscendo a migliorare il comportamento dinamico della vettura in presenza di asperità stradali.

Si tratta sostanzialmente di una barra con le estremità ammorsate al telaio ed una parte centrale soggetta alla coppia esterna di torsione Fig. 18.



**Figura 19.** Odiere molle di torsione e un possibile schema del loro impiego all'interno dei nostri cilindri. In alto un possibile ancoraggio alla struttura, in basso una ralla per permettere la rotazione e sostenere un precarico assiale.

#### 5- Molle di torsione

Le molle cilindriche di torsione ad elica: queste molle sono simili alle più tradizionali molle cilindriche di compressione. Presentano estremità che sporgono dalla forma cilindrica in modo che possano essere globalmente caricate a torsione. Queste molle sono impiegate in molti campi. In Fig. 19 ne sono riportati alcuni tipi. Queste molle si possono realizzare anche partendo da un tubo di materiale togliendo per asportazione materiale fra una spira e l'altra.

Il funzionamento simile, ma rovesciato, a quello delle serrande. Impiega un albero centrale sul quale si avvolgono una o più molle a nastro, l'albero è supportato da cuscinetti. In basso occorre prevedere anche un cuscinetto assiale. L'estremità delle molle si impegnano su di un'asta laterale che viene fissata alle estremità. Il braccio viene trasversalmente impegnato in una cava realizzata nell'albero centrale. A questa soluzione, per la elevata possibilità di rotazione, può essere anche affiancato un secondo modello nel quale si può avere un tamburo centrale sul quale si avvolge e si svolge un tendine o una fune che può essere impiegata al posto dei braccetti Fig. 20.

#### 6- Molle a nastro o a spirale piatta

I modelli delle tipologie sopra-esposte, caratteristiche e dimensioni richieste

Per ogni modello viene riportata una scheda, con una rappresentazione tridimensionale avente maggiori dettagli rispetto agli schizzi già visti, nella quale vi è uno schema del calcolo impiegato per un dimensionamento di massima Figg.22÷31 e alcune considerazioni sintetiche conclusive.

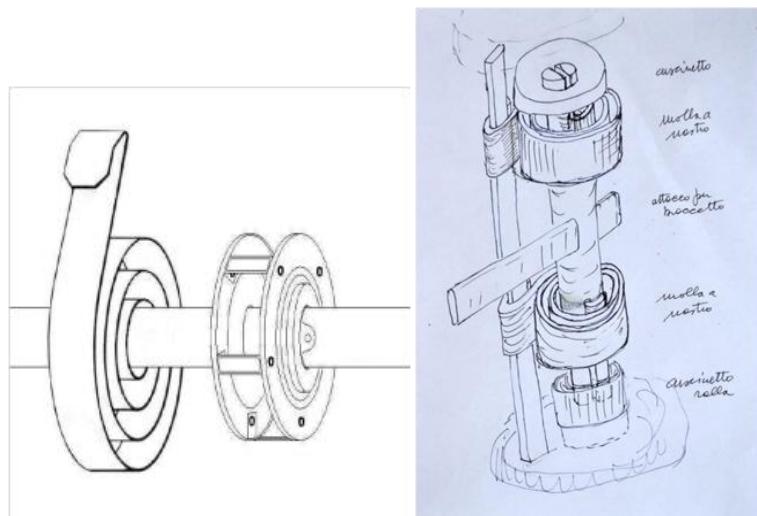
Sono disponibili due lavori sul dimensionamento delle baliste con elemento elastico lavorante globalmente a torsione: uno trattato al continuo ipotizzando un certo grado di

riempimento della matassa trattata come trave di torsione [17] ed uno al discreto prendendo in considerazione il contributo di ogni singolo filo lavorante a trazione [1].

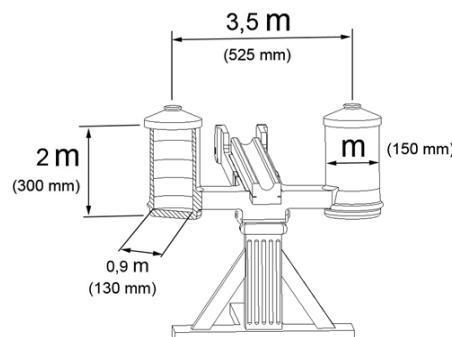
## 7. SCELTA RAGIONATA DELLA TIPOLOGIA IN BASE AI VINCOLI GEOMETRICI E OTTIMIZZANDO L'EFFICIENZA

Per il dimensionamento di massima in moduli (in questo caso il modulo, per necessità, non viene identificato direttamente con un elemento funzionale) ci si basa sulle proporzioni tratte dalle immagini della Colonna Traiana, Fig.21.

Questo proporzionamento viene tenuto presente nella successiva analisi delle tipologie in modo da valutarne la fattibilità costruttiva, pensando che la superficie cilindrica interna sia pari a circa 0,9 moduli, cioè circa 130 mm.



**Figura 20.** Una molla a nastro impiegata in una serranda e il modello



**Figura 21.** Disegno con quote in “moduli”.

## Modello tipo 1 ASPO di fili

materiale fili: TENDINI  
 modulo elastico  $E = 4000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 50 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$

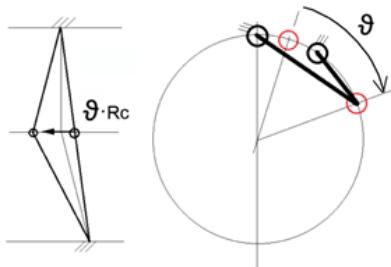
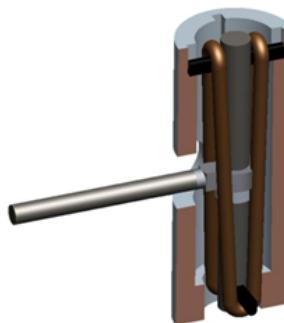
rotazione braccetti  $\vartheta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$

diametro filo avvolto  $D = 20 \text{ mm}$

coef. riempimento  $\text{riemp} = 0.85$

sezione efficace  $A_{\text{eff}} := \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \text{riemp} = 267.035 \text{ mm}^2$

Allungamenti diversa tra le due metà del filo, una metà inizialmente si accorcia poi ricomincia ad allungarsi, l'altra si allunga e basta.



- lunghezza iniziale  $L_0 := 120.18 \text{ mm}$

- lunghezza finale (sopra)  $Ll_{\text{su}} := 120.67 \text{ mm}$

- deformazioni  $\varepsilon_{\text{su}} := \frac{Ll_{\text{su}} - L_0}{L_0} = 0.004$

- tensioni  $\sigma_{\text{su}} := E \cdot \varepsilon_{\text{su}} = 16.309 \text{ MPa}$

- trazione  $F_{Nsu} := A_{\text{eff}} \cdot \sigma_{\text{su}} = 4355.04 \text{ N}$

- forza circonferenziale  $F_{Csu} := F_{Nsu} \cdot \frac{\text{spost}}{Ll_{\text{su}}} = 902.26 \text{ N}$

- coppia intero aspo (avvolgimento 4 "fili")  $M_{\text{aspo}} := 4(F_{Csu} + F_{Cgiu}) \cdot \text{braccio} = 526.77 \text{ N}\cdot\text{m}$

- energia da un motore  $W_{\text{el}} := \frac{M_{\text{aspo}} \cdot \vartheta}{2} = 206.864 \text{ J}$

- energia di lancio (2 motori)  $W_{\text{lancio}} := 2 \cdot W_{\text{el}} = 413.728 \text{ J}$

Considerazioni:

- alcuni fili troppo sollecitati con una rotazione di  $45^\circ$ .
- energia NON sufficiente, si potrebbe aumentare rotazione ma i fili sono già oltre il limite elastico.
- difficoltà nella messa a punto per intercambiabilità (fissaggio fili e rilassamento).

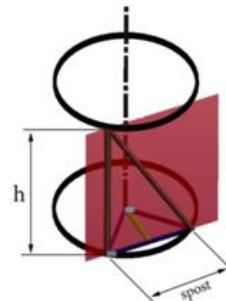
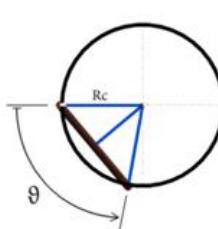
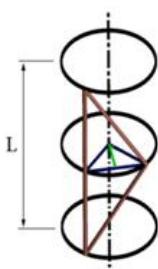
**Figura 22.** Modello tipo 1 - Fili raggruppati in una matassa avvolta su aspo.

## Modello tipo 2 Gabbia di fili

materiale fili: BRONZO  
 modulo elastico  $E = 113000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 350 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 725 \text{ Nm}$

rotazione braccetti  $\theta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$   
 diametro filo  $d = 2 \text{ mm}$   
 raggio corona  $R_c = 30 \text{ mm}$



- spostamento estremità del filo       $\text{spost} = 2 * R_c * \sin \frac{\theta}{2} = 23 \text{ mm}$

- lunghezza iniziale       $h = \frac{L}{2} = 120 \text{ mm}$

- lunghezza finale       $L_{\text{fin}} := \sqrt{h^2 + \text{spost}^2} = 0.122 \text{ m}$

- deformazione filo       $\varepsilon_{\text{filo}} := \frac{L_{\text{fin}} - h}{h} = 1.814\%$

- tensione trazione       $\sigma_{\text{filo}} := E \cdot \varepsilon_{\text{filo}} = 2049.964 \text{ MPa}$

- tiro assiale       $F_N := A_{\text{filo}} \cdot \sigma_{\text{filo}} = 6440.15 \text{ N}$       - forza circonferenziale       $F_c := F_N \cdot \frac{\text{spost}}{L_{\text{fin}}} = 1210.31 \text{ N}$

- distanza minima corda dal centro

$$\text{braccio} := R_c \cdot \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = 0.028 \text{ m}$$

- torsione generata dalla azione di due semi-fili

$$M_{\text{filo}} := 2 \cdot F_c \cdot \text{braccio} = 67.091 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- fili necessari al lancio       $Z_{\text{filo}} := \frac{M_{\text{tot}}}{M_{\text{filo}}} = 10.817$

- max num. fili       $Z_{\text{filo}} := \frac{(2 \cdot \pi \cdot R_c)}{d_{\text{filo}}} = 94.248$

Considerazioni:

- per quanto si riduca il raggio della corona, la tensione di trazione su ogni filo rimane eccessiva, e rimanendo in campo elastico la rotazione dei braccetti diventa troppo ridotta.
- energia immagazzinata non sufficiente per il lancio, con più corone (o con tendini) si ritornerebbe al modello matassa e ai suoi limiti.
- difficoltà nel fissaggio dei fili e nella messa a punto della cartuccia sostitutiva.

**Figura 23.** Modello tipo 2 - Fili multipli fra loro separati

### Modello tipo 3 Molle a lamine (balestre)

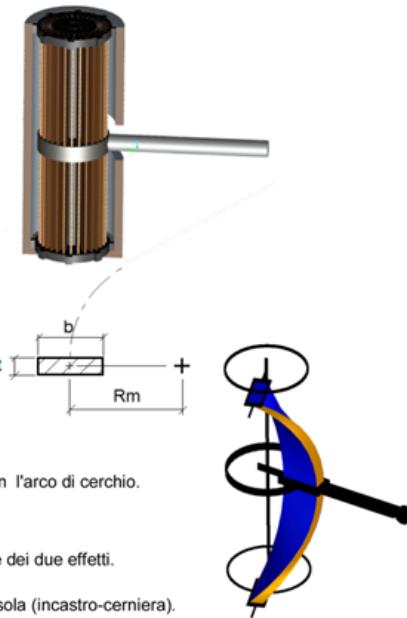
materiale : BRONZO  
 modulo elastico  $E = 113000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 350 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$

rotazione braccetti  $\theta = 45^\circ$

altezza motore  $L = 270 \text{ mm}$   
 semi-barra  $L_m = 135 \text{ mm}$

spessore  $t = 2 \text{ mm}$   
 larghezza  $b = 30 \text{ mm}$   
 raggio medio  $R_m = 30 \text{ mm}$   
 numero barre  $Z_{\text{barre}} = 20$



La barra è soggetta a FLESSIONE e a TORSIONE.

Rotazione imposta, freccia verticale approssimata con l'arco di cerchio.

$$f := r_m \cdot \theta = 15.708 \text{ mm}$$

Momento torcente globale dato dalla sovrapposizione dei due effetti.

FLESSIONE: semi-barra considerata come una mensola (incastro-cerniera).



$$\text{- forza alla estremità : } F_b := \frac{f \cdot E \cdot b \cdot t^3}{4 \cdot L_m^3} = 43.286 \text{ N}$$

$$\text{- mom. flettente : } M_{fle} := F_b \cdot L_m = 5.844 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{- tensione max : } \sigma_{FLE} := \frac{6 \cdot M_{fle}}{b \cdot t^2} = 292.18 \text{ MPa}$$

$$\text{- coppia da flessione (semi-barra) : } M_{T,fle} := F_b \cdot r_m = 0.866 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{TORSIONE semi-barra : } M_{T,TOR} := \frac{\theta \cdot G \beta \cdot b \cdot t^3}{L_m} = 17.319 \text{ N}\cdot\text{m}$$



$$\text{- tensione lato corto : } \tau := \alpha \cdot \frac{M_{T,TOR}}{b^2 \cdot t} = 32.298 \text{ MPa}$$

$$\text{composizione tensioni : } \sigma_{ID} := \sqrt{\sigma_{FLE}^2 + 3 \cdot \tau^2} = 297.488 \text{ MPa}$$

$$\text{coppia complessiva da ciascun motore (2 semi-barre) : } M_T := 2 \cdot (M_{T,fle} + M_{T,TOR}) \cdot Z_{\text{barre}} = 727.388 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{energia totale (2 motori) : } W_{\text{lancio}} := 2 \cdot \frac{M_T \cdot \theta}{2} = 571.289 \text{ J}$$

Considerazioni:

- energia sufficiente con  $45^\circ$  di rotazione e 20 barre.
- difficoltà nel fissaggio delle barre: vincolo superiore = cerniera, in mezzeria è equivalente ad un incastro per motivi di simmetria.
- raggio medio ridotto per non allontanarsi troppo dalla ipotesi di mensola.



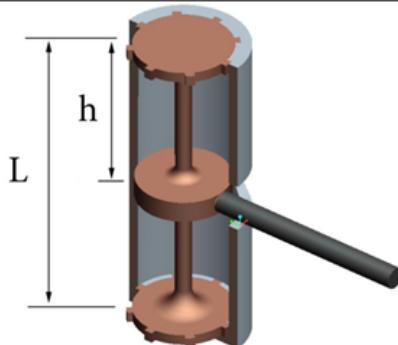
**Figura 24.** Modello tipo 3 - Molle a lamine (balestre) in parallelo

## Modello tipo 4 Barre di torsione

materiale: BRONZO  
 modulo elastico  $E = 113000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 350 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{TOT} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 725 \text{ Nm}$

rotazione bracciotti  $\theta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$   
 semi-barra  $h = 120 \text{ mm}$



- diametro barra per generare  $M_t$  con  $45^\circ$  di rotazione

$$D := \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t \cdot h}{\pi \cdot G \cdot \theta}} = 10.76 \text{ mn}$$

- massima tensione tangenziale

$$\tau := \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = 1484.39 \text{ MPa}$$

oppure, partendo dalla tensione di rottura:

- diametro per resistere ad una coppia  $M_t$

$$D_{tau} := \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_R}} = 21.94 \text{ mn}$$

- coppia con rotazione  $45^\circ$ ,  $D_{tau}$  e  $h$

$$M_{tau} := \frac{\theta \cdot G \cdot \pi \cdot D_{tau}^4}{32 \cdot h} = 6277.23 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- rotazione necessaria per generare  $M_t$  con  $D_{tau}$

$$\theta_{tau} := \frac{32 \cdot M_t \cdot h}{\pi \cdot G \cdot D_{tau}^4} = 2.6^\circ$$

- altezza semi-barra  $D_{tau}$  necessaria per ruotare di  $45^\circ$  con  $M_t$

$$h_{tau} := \frac{\theta \cdot \pi \cdot G \cdot D_{tau}^4}{32 \cdot M_t} = 2.08 \text{ m}$$

Considerazioni:

- incompatibilità tra ingombri, angolo di rotazione imposti, e dimensioni necessarie per ottenere la energia di lancio con questo tipo di motore.

**Figura 25.** Modello tipo 4 - Barra di torsione

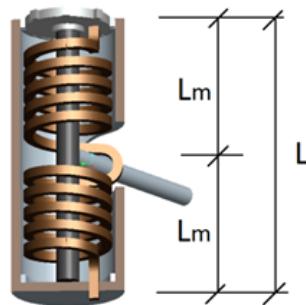
## Modello tipo 5A

### Molle di torsione doppie

materiale : BRONZO  
 modulo elastico  $E = 113000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 350 \text{ MPa}$

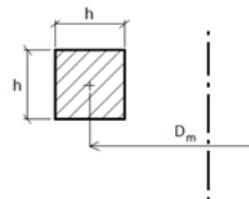
energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 725 \text{ Nm}$

rotazione bracciotti  $\theta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$   
 semi-barra  $L_m = 120 \text{ mm}$



lato sezione quadra  $h = 19 \text{ mm}$   
 diametro avvolgimento  $D_m = 120 \text{ mm}$   
 spire semi-molla  $Z_{\text{spire}} = 6$

- verifica altezza molla  $L_r := h \cdot Z_{\text{spire}} = 114 \text{ mm}$



carico nel senso di avvolgimento dell'elica:  
 il filo lavora a FLESSIONE

- tensione sul bordo interno del filo  $\sigma_{\text{max}} := \frac{6 \cdot M_{\text{m}} t}{h^3} = 317.428 \text{ MPa}$  - con fatica  $\sigma_{\text{f max}} := 1.12 \cdot \sigma_{\text{max}} = 355.52 \text{ MPa}$

(coeff. 1,12 dal rapporto  $\frac{D_m}{h} = 6.316$ , da fig.11-4 Wals pag 135)

- rotazione  $t_{\text{ums}} := \frac{6 \cdot M_{\text{m}} t \cdot Z_{\text{spire}} \cdot D_m}{E \cdot h^4} = 0.106$  - angolo:  $\phi := t_{\text{ums}} \cdot 360 = 38.322$

- energia immagazzinata nella semi-molla  $W_{\text{el}} := \frac{M_{\text{m}} t \cdot \phi \cdot \pi}{2 \cdot 180} = 121.353 \text{ J}$

- energia totale (lancio)  $W_{\text{lancio}} := 4 \cdot W_{\text{el}} = 485.412 \text{ J}$

Considerazioni:

- energia immagazzinata non sufficiente.
- con più di  $45^\circ$  di rotazione si potrebbe accumulare più energia.
- però cala il momento torcente.

**Figura 26.** Modello tipo 5 - Molle di torsione da entrambi i lati e realizzate in bronzo

## Modello tipo 5B

### Molle di torsione doppie

materiale : ACCIAIO  
 modulo elastico  $E = 210000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 600 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 725 \text{ Nm}$

rotazione bracci  $\theta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$   
 semi-barra  $L_m = 120 \text{ mm}$

lato sezione quadra  $h = 16 \text{ mm}$   
 diametro avvolgimento  $D_m = 120 \text{ mm}$   
 spire semi-molla  $Z_{\text{spire}} = 7$

- verifica altezza molla  $L_r := h \cdot Z_{\text{spire}} = 112 \text{ mm}$

carico nel senso di avvolgimento dell'elica:  
 il filo lavora a FLESSIONE

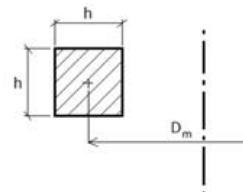
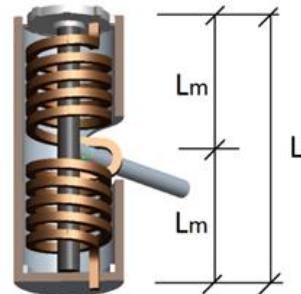
$$\text{- tensione sul bordo interno del filo} \quad \sigma_{\max} := \frac{6 \cdot M_m t}{h^3} = 531.553 \text{ MPa}$$

$$\text{- con fatica} \quad \sigma_{\max} := 1.09 \cdot \sigma_{\max} = 579.392 \text{ MPa} \quad (\text{coeff. 1.09 dal rapporto } \frac{D_m}{h} = 7.5 \text{ , da fig. 11-4 Wals pag 135})$$

$$\text{- rotazione turns} := \frac{6 \cdot M_m t \cdot Z_{\text{spire}} \cdot D_m}{E \cdot h^4} = 0.133 \quad \text{- angolo: } \varphi := \text{turns} \cdot 360 = 47.84$$

$$\text{- energia immagazzinata nella semi-molla} \quad W_{\text{el}} := \frac{M_m t \cdot \varphi \cdot \pi}{2 \cdot 180} = 151.493 \text{ J}$$

$$\text{- energia totale (lancio)} \quad W_{\text{lancio}} := 4 \cdot W_{\text{el}} = 605.97 \text{ J}$$



Considerazioni:

- energia immagazzinata sufficiente.
- angolo di rotazione accettabile.

**Figura 27.** Modello tipo 5 - Molle di torsione da entrambi i lati e realizzate in acciaio

## Modello tipo 5C

### Molle di torsione singole

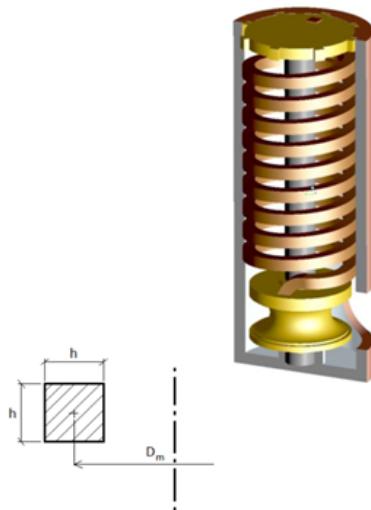
materiale : BRONZO  
 modulo elastico  $E = 113000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 350 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{TOT} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 725 \text{ Nm}$

rotazione bracciotti  $\theta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$

lato sezione quadra  $h = 24 \text{ mm}$   
 diametro avvolgimento  $D_m = 100 \text{ mm}$   
 spire semi-molla  $Z_{spire} = 10$

- verifica altezza molla  $L_r := h \cdot Z_{spire} = 0.24 \text{ m}$



carico nel senso di avvolgimento dell'elica:  
 il filo lavora a FLESSIONE

- tensione sul bordo interno  $\sigma_{max} := \frac{6 \cdot M_t}{h^3} = 314.994 \text{ MPa}$       - con fatica  $\sigma_{f,max} := 1.18 \cdot \sigma_{max} = 371.693 \text{ MPa}$

(coeff. 1,18 dal rapporto  $\frac{D_m}{h} = 4.167$ , da fig.11-4 Wals pag 135)

- rotazione  $tums := \frac{6 \cdot M_t \cdot Z_{spire} \cdot D_m}{E \cdot h^4} = 0.116$       - angolo:  $\varphi := tums \cdot 360 = 41.813$

- energia immagazzinata nella molla  $W_{el} := \frac{M_t \cdot \varphi \cdot \pi}{2 \cdot 180} = 264.818 \text{ J}$

- energia totale (lancio)  $W_{lancio} := 2 \cdot W_{el} = 529.636 \text{ J}$

Considerazioni:

- rotazione scarsa ed energia immagazzinata non sufficiente.
- sezione filo massiccia.
- scarsa compatibilità con la struttura della balista per via della posizione di uscita dei bracciotti (o del tamburo)

**Figura 28.** Modello tipo 5 - Molla di torsione solo da un lato e realizzata in bronzo

## Modello tipo 5D

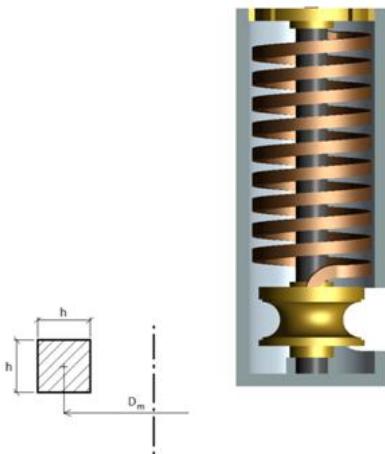
### Molle di torsione singole

materiale filo: ACCIAIO  
 modulo elastico  $E = 210000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 600 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 725 \text{ Nm}$

rotazione braccetti  $\theta = 45^\circ$   
 altezza motore  $L = 240 \text{ mm}$

lato sezione quadra  $h = 20 \text{ mm}$   
 diametro avvolgimento  $D_m = 100 \text{ mm}$   
 spire semi-molla  $Z_{\text{spire}} = 10$



carico nel senso di avvolgimento dell'elica:  
 il filo lavora a FLESSIONE

$$\text{- tensione sul bordo interno } \sigma_{\max} := \frac{6 \cdot M_t}{h^3} = 544.3 \text{ MPa} \quad \text{- con fatica } \sigma_{\text{f max}} := 1.16 \cdot \sigma_{\max} = 631.399 \text{ MPa}$$

(coeff. 1,16 dal rapporto  $\frac{D_m}{h} = 5$ , da fig. 11-4 Wals pag 135)

$$\text{- rotazione } \text{tums} := \frac{6 \cdot M_t \cdot Z_{\text{spire}} \cdot D_m}{E \cdot h^4} = 0.13 \quad \text{- angolo: } \varphi := \text{tums} \cdot 360 = 46.655$$

$$\text{- energia immagazzinata nella molla } W_{\text{el}} := \frac{M_t \cdot \varphi \cdot \pi}{2 \cdot 180} = 295.483 \text{ J}$$

$$\text{- energia totale (lancio) } W_{\text{lancio}} := 2 \cdot W_{\text{el}} = 590.965 \text{ J}$$

Considerazioni:

- rotazione ed energia immagazzinata sufficienti.
- sezione filo massiccia.
- scarsa compatibilità con la struttura della balista per via della posizione di uscita dei braccetti (o del tamburo)

**Figura 29.** Modello tipo 5 - Molla di torsione solo da un lato e realizzata in acciaio

## Modello tipo 6A Molle a spirale

materiale : BRONZO  
 modulo elastico  $E = 113000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 350 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{\text{TOT}} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_{\text{tot}} = 408 \text{ Nm}$

rotazione braccetti  $\theta = 80^\circ$

numero molle  $Z_{\text{MOLLE}} = 2$

spessore  $t = 7 \text{ mm}$   
 altezza  $b = 80 \text{ mm}$

distanza centro/estremo esterno  $r_{\text{EXT}} = 60 \text{ mm}$   
 distanza centro/estremo interno  $r_{\text{INT}} = 10 \text{ mm}$

numero spirali  $Z_S = 5$

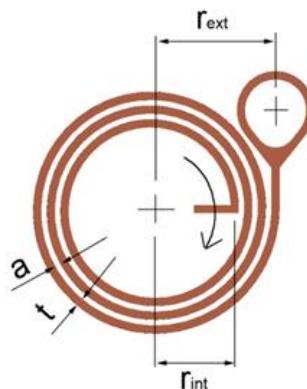
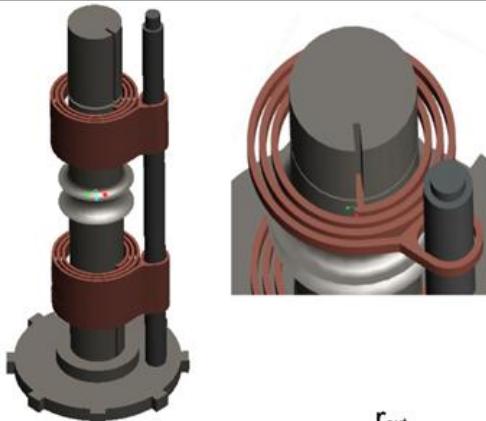
distanza tra le spirali  $a := \frac{r_{\text{ext}} - r_{\text{int}}}{Z_S} - t = 3 \cdot mn$

momento su ogni molla  $M_t := \frac{M_{\text{tot}}}{Z_{\text{molle}}} = 204.116 \text{ N}\cdot\text{m}$

sforzo flessione  $\sigma_{\text{bmax}} := \frac{(6 \cdot M_{\text{molla}})}{b \cdot t^2} = 312.423 \text{ MPa}$

angolo di rotazione  $\alpha_1 := \frac{24 M_t \pi \cdot Z_S}{E \cdot b \cdot t^3} \left[ r_{\text{ext}} - \frac{Z_S}{2} \cdot (t + a) \right] = 30.482^\circ$

energia di lancio  $W_{\text{2mot}} := 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (Z_{\text{molle}} M_t) \cdot \alpha_1 = 217.184 \text{ J}$



Considerazioni:

- energia immagazzinata non sufficiente.
- rotazione limitata, le spirali vanno a pacco una sull'altra.
- si può pensare di avvolgere la corda del portasasso su un tamburo solidale con l'albero delle molle, invece che usare i braccetti, e usare molle più sottili per avere una rotazione molto maggiore. Calibrare di conseguenza il diametro del tamburo, la corsa della slitta e la lunghezza della corda.

**Figura 30.** Modello tipo 6 - Molle a nastro con nastro in bronzo

## Modello tipo 6B Molle a spirale

materiale : ACCIAIO  
 modulo elastico  $E = 210000 \text{ MPa}$   
 tensione di rottura  $\sigma_R = 600 \text{ MPa}$

energia di lancio (2lb-180m)  $W_{TOT} = 570 \text{ J}$   
 coppia singolo motore  $M_T = 408 \text{ Nm}$

rotazione braccetti  $\theta = 80^\circ$

numero molle  $Z_{MOLLE} = 2$

spessore  $t = 6 \text{ mm}$   
 altezza  $b = 60 \text{ mm}$

distanza centro/estremo esterno  $r_{EXT} = 60 \text{ mm}$   
 distanza centro/estremo interno  $r_{INT} = 10 \text{ mm}$

numero spirali  $Z_S = 5$

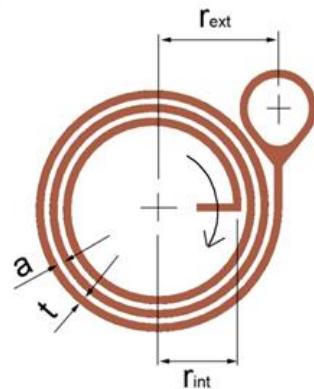
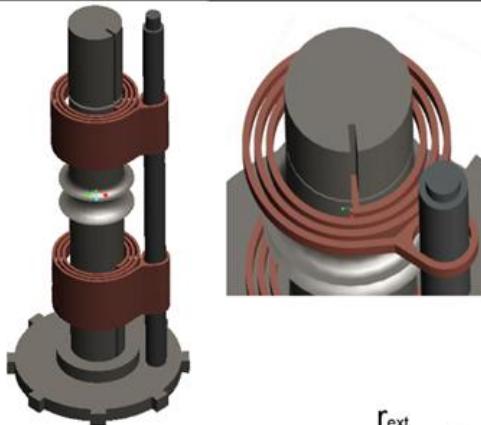
distanza tra le spirali  $a := \frac{r_{ext} - r_{int}}{Z_S} - t = 4 \text{ mm}$

momento su ogni molla  $M_{molla} := \frac{M_T}{Z_{molle}} = 204.116 \text{ N}\cdot\text{m}$

sforzo flessione  $\sigma_{bmax} := \frac{(6 \cdot M_t)}{b \cdot t^2} = 566.989 \text{ MPa}$

angolo di rotazione  $\alpha_l := \frac{24 M_t \pi \cdot Z_S}{E \cdot b \cdot t^3} \left[ r_{ext} - \frac{Z_S}{2} \cdot (t + a) \right] = 56.699^\circ$

energia di lancio  $W_{2mot} := 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (Z_{molle} M_t) \cdot \alpha_l = 403.98 \text{ J}$



Considerazioni:

- rotazione accettabile, ma energia immagazzinata non sufficiente.
- possibilità di usare un tamburo per la corda portasasso : aumentare energia immagazzinata con aumento di rotazione, ma limite dato dallo spazio tra le spirali delle molle.

**Figura 31.** Modello tipo 6 - Molle a nastro con nastro in acciaio

Per il calcolo delle parti elastiche degli altri tipi si fa riferimento ai calcoli classici delle molle di torsione e delle molle a nastro [20], [21], [22].

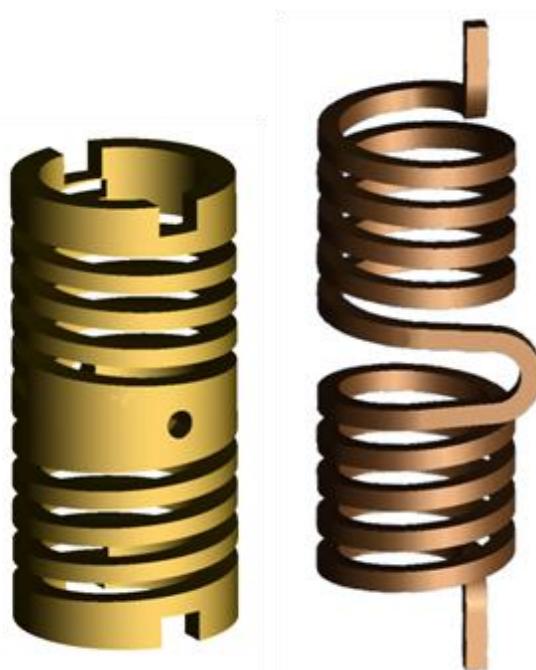
Come dati di massima viene considerata la necessità che il singolo “motore” sia alloggiabile all’interno dell’astuccio cilindrico cavo avente diametro esterno pari a 150 mm e diametro interno di 130 mm, altezza esterna di due moduli pari a 300 mm, altezza utile interna di 240 mm, che possa immagazzinare almeno una energia pari a 285 joule, necessaria per lanciare a 180 m di distanza una massa di due libbre (0,644 kg) [1], con una rotazione di circa 45° e che la distanza fra gli assi degli astucci sia 525 mm.

## 8. LA SCELTA DELLA TIPOLOGIA

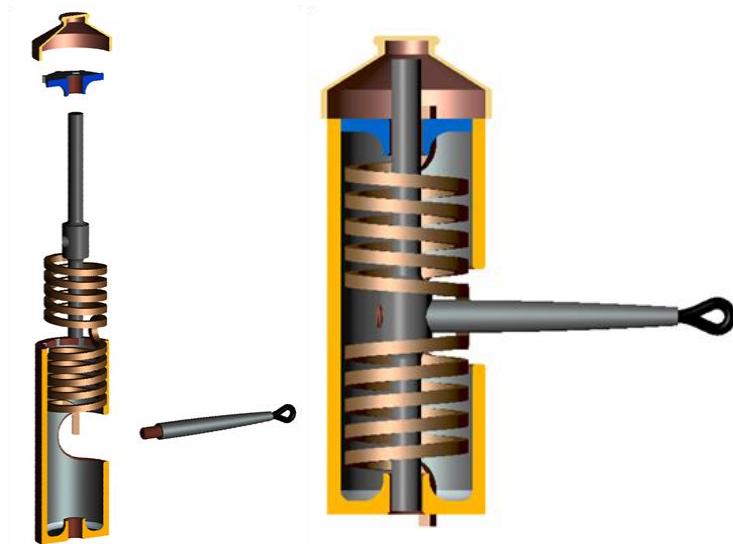
Analizzate le varie soluzioni proposte, si rileva che il tipo 1 pur presentando un notevole miglioramento rispetto alla soluzione di Erone, dato che permette il caricamento del “motore” dall’alto e un tensionamento più uniforme dei fili, non elimina totalmente la messa a punto, dato l’inevitabile rilassamento dei fili stessi, questa tipologia viene pertanto scartata. Il tipo 2 appare di difficile realizzazione per quanto riguarda l’ancoraggio dei singoli fili e dal calcolo si trova come sia difficile alloggiare, all’interno delle dimensioni definite, la corona di fili necessaria per poter disporre dell’energia fissata. Il tipo 3 supera i vincoli imposti, ma per esso appare abbastanza complicato e non rapido il montaggio, data la molteplicità delle lamelle. Il tipo 4, pur di più semplice realizzazione rispetto ai tipi precedentemente visti, richiede un forte sviluppo verticale che va al di là dei limiti fissati. I tipi 5 e 6 appaiono quelli più adatti dato che non richiedono una messa a punto, presentano una facile intercambiabilità e possono venir confinati nello spazio disponibile. Dal calcolo, il tipo 6 richiede, per fornire l’energia necessaria, caratteristiche meccaniche del nastro che non appaiono compatibili con le pur evolute tecnologie di allora. Per i motivi sopra esposti si sceglie quindi la tipologia 5, cioè quella con molla ad elica globalmente sollecitata a torsione. Si pensa che la molla potesse venire realizzata nelle due tecnologie riportate in Fig.32, la configurazione di destra appare di realizzazione più semplice dato che può essere utilizzato un “filo” a sezione quadrata. La molla viene “sdoppiata” a cavallo dei braccetti per maggiore semplicità costruttiva e per la posizione assiale dei braccetti, rispetto a quanto inizialmente ipotizzato in Fig. 19.

Impiegando una molla doppia composta di sette spire per parte con un filo a sezione quadra di 16 mm, se realizzata in acciaio e di sei spire con quadro di 19 mm, se realizzata in bronzo, si può ottenere la rotazione richiesta e si può disporre di una coppia anche maggiore di quella fissata.

In conclusione si decide di approfondire solo questo tipo di “motore” dato che è quello che soddisfa le specifiche richieste, appare di maggiore semplicità costruttiva, può alloggiare il braccetto e sostenere assialmente l’alberino, è di facile montaggio e presenta un ridotto numero di parti. In Fig. 33 se ne riporta la sequenza di montaggio con l’inserimento dall’alto della molla, dell’albero centrale, del riscontro/cuscinetto superiore, della cuffia di protezione e l’inserimento di lato del braccetto con filettatura di fissaggio.



**Figura 32.** Due possibili soluzioni costruttive dell'elemento elastico.



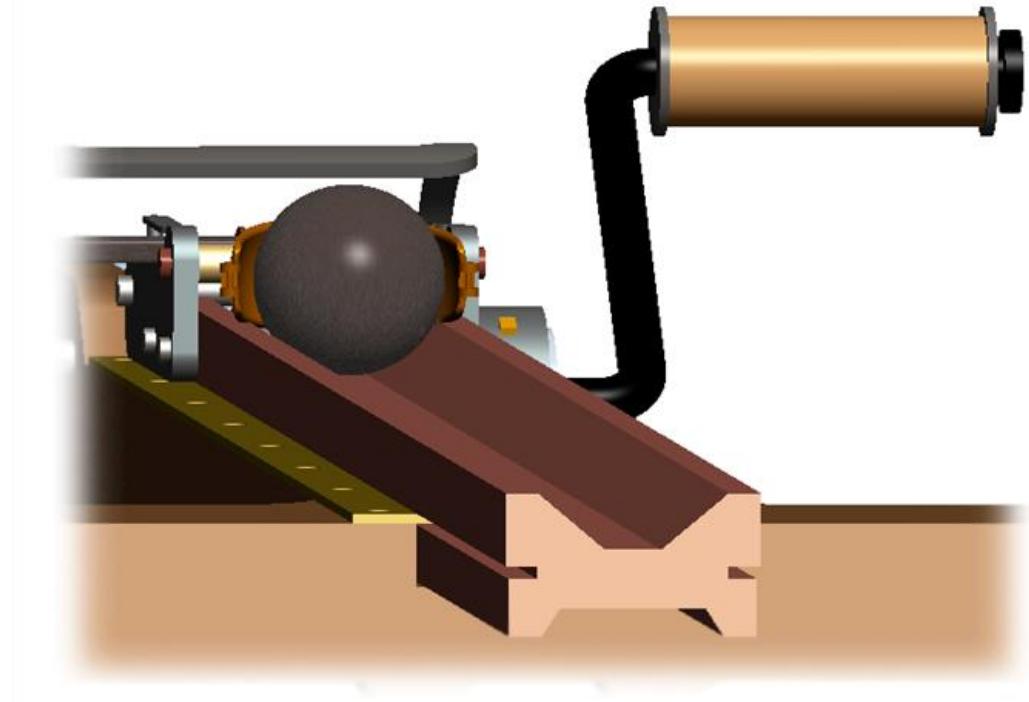
**Figura 33.** Esploso del “motore” e configurazione montata. La molla doppia è composta, se realizzata in acciaio, di sette spire per parte con un filo a sezione quadra di 16 mm, e di sei spire con quadro di 19 mm, se realizzata in bronzo.

## 9. IL DISEGNO DELLA MACCHINA

Scelta la tipologia costruttiva dell'elemento motore, si pensa di realizzare, come già detto, il telaio per fusione in bronzo in due parti: un basamento e la parte superiore che può ruotare su di esso e che porta gli alloggiamenti per i "motori".

Si progetta una slitta più semplice di quella tradizionale che scorre su guide a coda di rondine [1], pensando, ad una semplice guida realizzata con un piatti in bronzo ancorati alla struttura con ribattini o viti che si impegna in una apposita scanalatura realizzata sulla slitta in legno, come in Fig. 34.

Si pensa di realizzare la messa in carico della macchina tramite due taglie di legno simili a quelle riportate in Fig. 35, agendo su di un piccolo argano dotato di tamburo pure in legno sul quale viene forzata e ancorata con chiodi una ruota dentata che rimane in posizione tramite nottolini Fig. 36.



**Figura 34.** Particolare della slitta

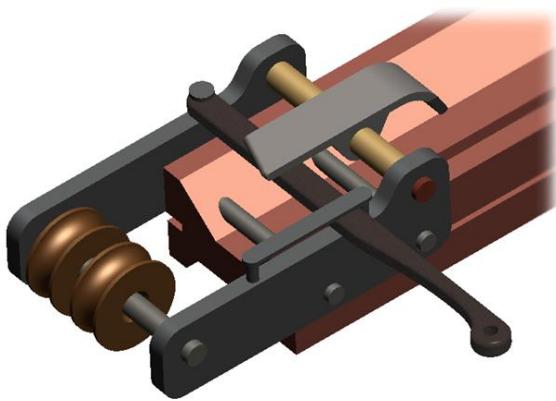


**Figura 35.** Una taglia per ridurre la forza di tiro (da un telaio per la tessitura): le cochlae ligneae di Ammiano Marcellino [A-2]

Forti dell'esperienza precedente [1], si pensa di realizzare lo sgancio con taglio inclinato per rilascio veloce, sicurezza leva di tiro, senza che ci siano parti che si possano separare dalla macchina, in modo semplice come riportato in Fig. 37.



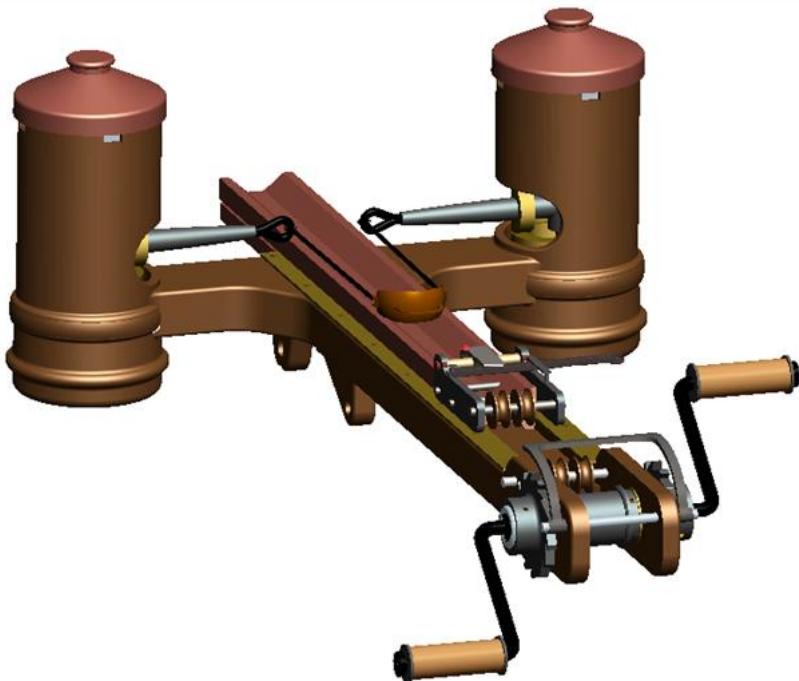
**Figura 36.** Il tipo di ruota dentata sulla quale agiscono nottolini per assicurare il ritegno del tamburo (da carri agricoli).



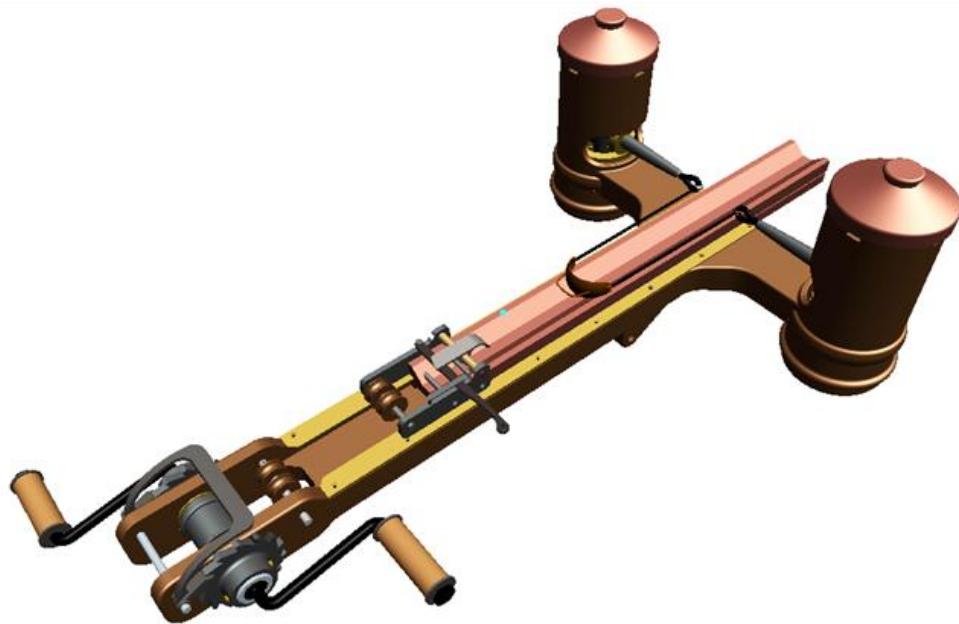
**Figura 37.** Il particolare dello sgancio

#### 10. IMMAGINI DELLA MACCHINA RICOSTRUITA

Nelle seguenti figure 38, 39, 40, 41, 42 si riportano i disegni in tre dimensioni della macchina, del basamento e della macchina piazzata sul basamento.



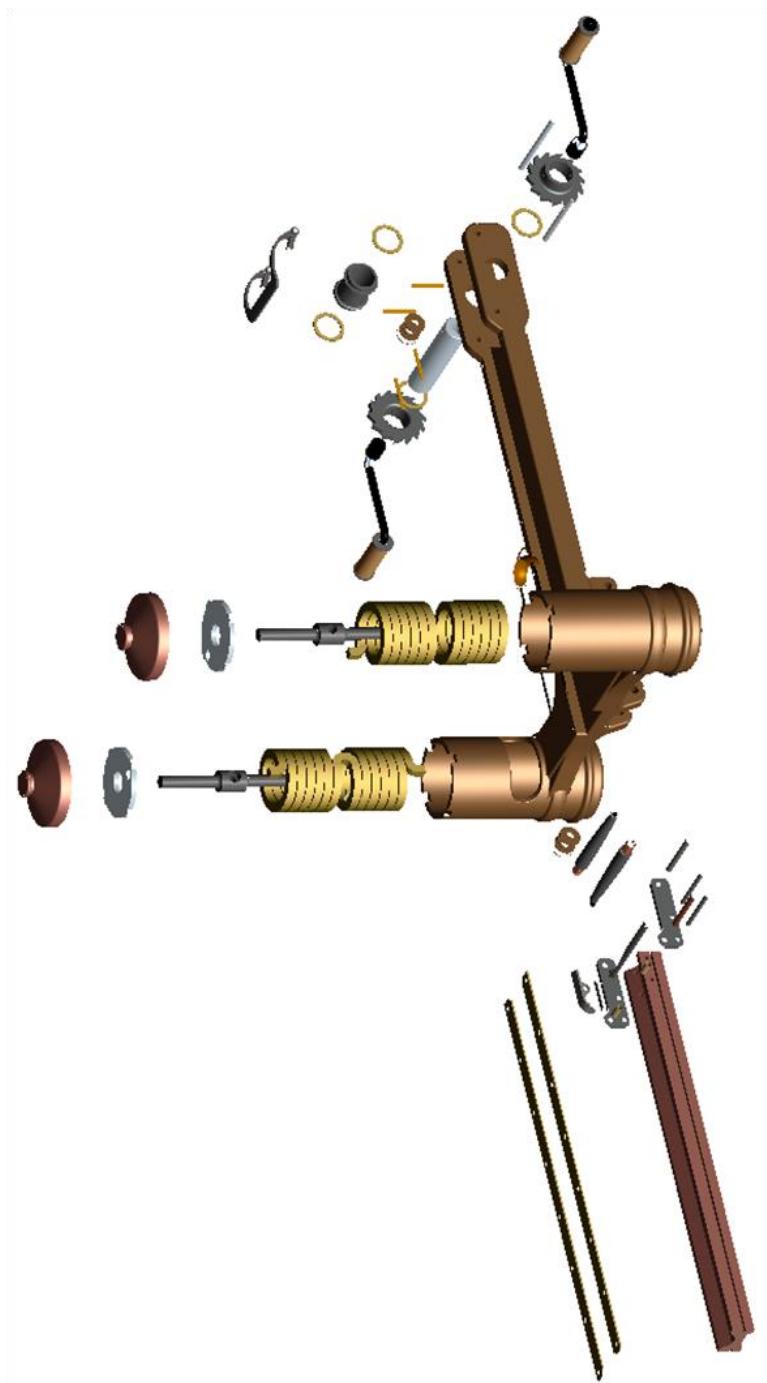
**Figura 38.** La macchina



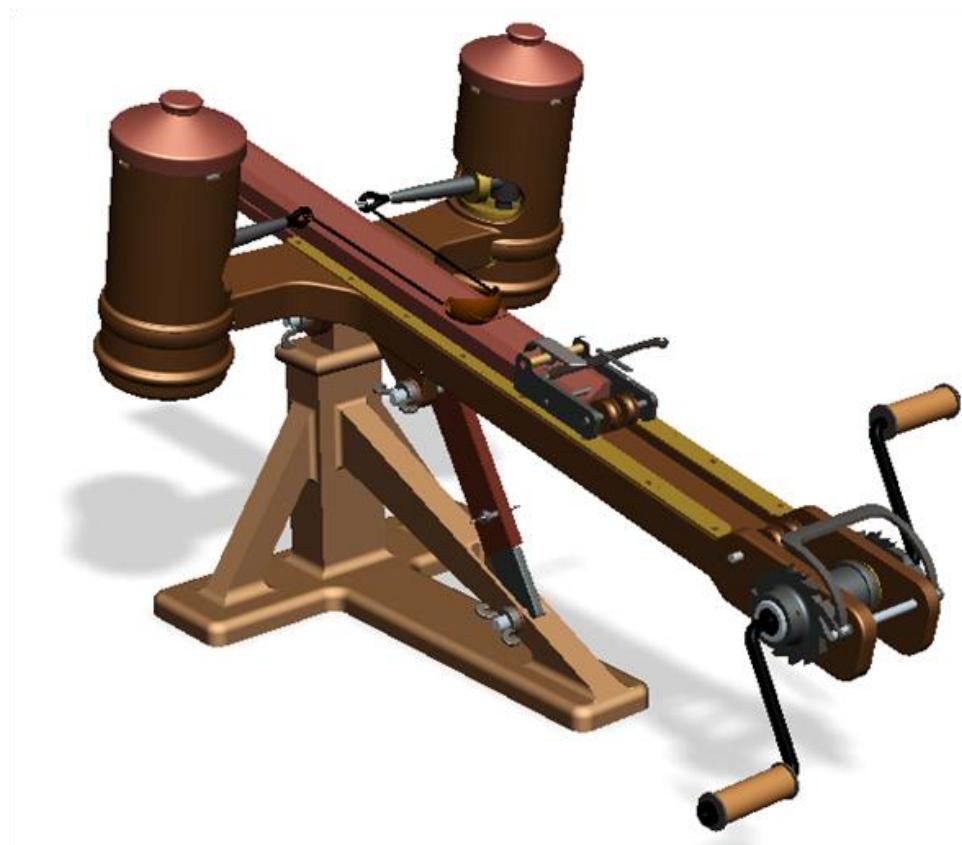
**Figura 39.** La macchina da un altro punto di vista



**Figura 40.** Il basamento e il particolare della regolazione dell'alzo (senza parti che si possano separare).



**Figura 41.** Disegno “esploso” della macchina; da notare il numero molto contenuto di pezzi.



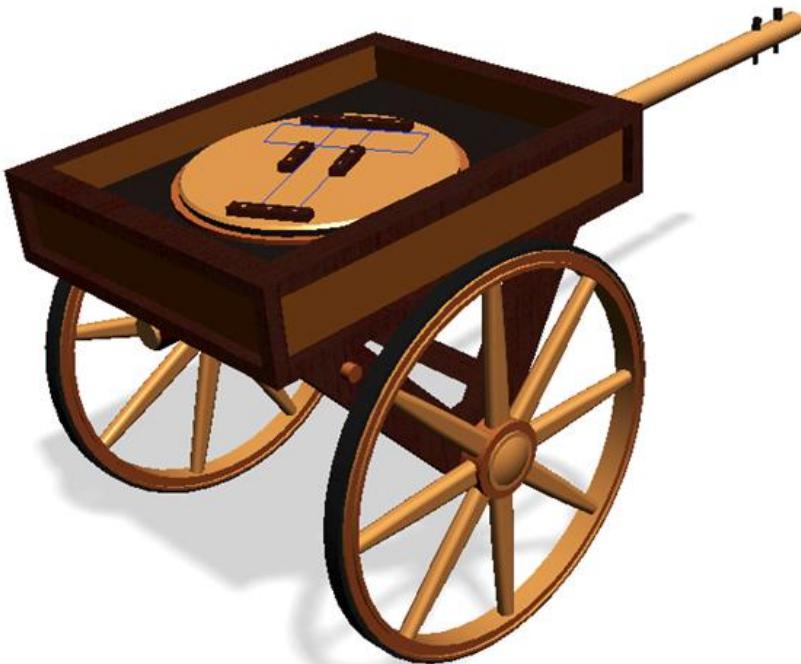
**Figura 42.** La balista sul suo basamento

## 11. LA COSTRUZIONE DEI PROIETTILI

Nella immagine riportata in Fig. 8 si può vedere una balista, gli addetti all'arma, alcuni frombolieri. La balista è circondata da cataste che sembrano proiettili da lanciare. Questi proiettili sembrano di piombo e di forma sferica.

## 12. LA PIATTAFORMA DI ANCORAGGIO DELLA MACCHINA CON POSSIBILITA' DI ROTAZIONE

Nella versione carrellata la balista può essere pensata fissata su di una ralla per permetterne la rotazione attorno ad un asse verticale Fig. 43. Il carro può essere pensato opportunamente zavorrato per limitarne il beccheggio durante il lancio. In Fig. 44 si riporta la versione carrellata.



**Figura 43.** Il carro con piattaforma di ancoraggio della macchina. La piattaforma può ruotare su asse verticale e può essere opportunamente zavorrata.

### 13. CONCLUSIONI

La soluzione proposta con molla lavorante globalmente a torsione, ma con le singole spire deformate a flessione, fa ripensare alle parole di sintesi scritte da Leonardo *questa macchina (Fig. 3) scacerà da sé assai più la pietra. Se l'antenne motrice d'essa pietra si piegheranno alquanto. E questo accaderà perché il moto del tutto fa composto e fa pensare come i Romani avessero già capito come la migliore, e più compatta, composizione del moto si potesse avere avvolgendo ad elica, in verticale, le “antenne motrici”.*

Sempre in attesa di potere costruire una balista reale e provarla sul campo, tenendo ben presente, pur non essendo proprio guerrafondai, la descrizione di Ammiano Marcellino per cosa può capitare ai ... nemici: *Quando la freccia è arrivata al punto estremo dove possono arrivare le funi [che legano la sbarra di ferro agli assi di legno] viene colpita dalla balestra per una spinta interna: vola via dagli occhi e a volte scintilla per il grande calore immessovi, cosicchè capita spesso che il dolore [provato da chi ne viene colpito] riconosca che si tratta di ferita mortale prima che la freccia venga vista.* [A2], si effettua un lancio simulato<sup>8</sup> !

---

<sup>8</sup> Il filmato “Ricostruzione della balista imperiale Romana” sarà presto disponibile su youtube.



**Figura 44.** La balista carrellata: la carrobalista.

### Ringraziamenti

Si ringraziano Giovanni Brizzi, Anna Maria Liberati, Giangiacomo Martines e Daniela Scagliarini per i preziosi consigli e le puntuali informazioni fornite sulla ricerca delle fonti.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] Molari P.G., Maraldi M., Angelini G., Bignami S., Lionello G., 2012, "La ricostruzione della balista di Vitruvio", *AMS Acta Università di Bologna*, Atti Giornata Funaioli 2011.
- [2] Marco Tullio Pollione Vitruvio (traduzione di Luciano Migotto), 1990, *De Architectura*, Edizioni Studio Tesi, Pordenone.
- [3] Teun Koetsier, 2001, "La théorie des machines au XVI<sup>e</sup> siècle: Tartaglia, Guidobaldo, Galileo", *Corpus*, n.39, pagg. 155-189.
- [4] Flavio Russo, "Piccola, potente e maneggevole", *Archeo*, 311 gennaio 2011 pagg. 104-109.

- [5] E.W. Marsden, 1971, "Greek and roman artillery", *Technical Treatises*, Oxford, pp. 106–184.
- [6] Iriarte Aitor, Iriarte, A, 2000: "Pseudo-Heron's cheiroballistra a(nother) reconstruction: I. Theoretics", *Journal of Roman Military Equipment Studies*, 11, 47-75.
- [7] F. Russo, 2004, *L'artiglieria delle legioni romane*, Ist. Poligrafico e Zecca dello Stato 88-240-3444-6.
- [8] E.W. Marsden, 1969, *Greek and Roman Artillery Historical Development*, Oxford University Press II.
- [9] Giuseppe Cascarino, *L'esercito Romano* voll. I, II, Ed Il Cerchio.
- [10] Anna Maria Liberati, 1999, "Le ballistae della Colonna Traiana", in Adriano La Regina (a cura di), *L'arte dell'assedio di Apollodoro di Damasco*, Milano, Electa.
- [11] *Hausbuch der Mendelschen Zwölfbriüderstiftung*, Band 1, Nürnberg, Mendelsche Zwölfbriüderstiftung, Papier, 169 Bl., 28x19,5 cm, Nürnberg, 1426-1549, Amb.317.2° Folio 18 v.[<http://www.nuernberger-hausbuecher.de/index.php?do=query&mo=3&vo=317&rs=2>] 23/5/2012
- [12] Ministero della Difesa, 1912, n.104, *Istruzione per lavori da zappatore*, Roma.
- [13] Leonardo da Vinci, 2006, *Il codice Atlantico*, vol.3 tav 141-208, Giunti Ed., Firenze,
- [14] Valturio Roberto, 1472, *De re militari* / Roberto Valturio (Contiene, in ripr. facs. digitale: A, *De re militari*. Verona, Giovanni di Nicolò, 1472. Biblioteca civica di Verona, inc. 1084; B, *De re militari*. Verona, Giovanni di Nicolò, 1472. Biblioteca civica Gambalunga, Rimini, 4.S.IV.11; C, *De re militari*, trad. it. di Paolo Ramusio. Verona, Bonini, 1483. Biblioteca civica di Verona, inc. 1020; D, *De re militari*. Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Urb. lat. 281, 1462), Ed. Guaraldi Rimini ; Y press, Milano, 2006. (N.B. In questa edizione manca la copia del 1472, bellissima per le illustrazioni, del manoscritto, ora conservato alla Ambrosiana di Milano, che Sigismondo inviò in dono a Maometto II e che fu intercettato durante il viaggio dai Veneziani).
- [15] Landels, J.G., 1978, *Engineering in the Ancient World*, Univ. of California.
- [16] Iriarte A., 2003, "The inswinging theory", *Gladius* XXIII, pp.111-140.
- [17] Filippo Coarelli, 1999, *La colonna Traiana*, Roma, Colombo, ISBN 8886359-34-9.
- [18] Rossi Cesare, 2012, "Ancient throwing machines: a Method to calculate their performance", *Mech & machine theory* 51, 1-13.
- [19] Leila Nistra, 1999, "Il ritratto di Apollodoro di Damasco", in Adriano La Regina (a cura di), *L'arte dell'assedio di Apollodoro di Damasco*, Milano, Electa.
- [20] A. M. Wahl, 1963, *Mechanical Springs second edition*, McGraw-Hill, New York.
- [21] Nicholas P. Chironis, 1961, *Spring Design and Application*, McGraw-Hill, New York.
- [22] Gustav Niemann, Hans Winter, Bernd-Robert Hohn, 2006, *Manuale degli organi delle macchine*, Tecniche Nuove, Milano.

## APPENDICE

Autori che scrivono di baliste, soprattutto del loro impiego in battaglia

- [A1] GIUSEPPE FLAVIO (Gerusalemme, 37 circa – Roma, 100 circa)  
*Bell Iud. III, 7; Bell Iud. V,6*  
*Guerra giudaica* / Flavio Giuseppe, a cura di Giovanni Vitucci, 2008, Milano, Oscar Mondadori, ISBN 9788804406884.

[A2] AMMIANO MARCELLINO (330 circa - 400 circa)

*Res Gestae* XXIII,4 - anno 362 d.c. *Le storie*, Ammiano Marcellino, a cura di Antonio Selem, 1987, Torino, UTET, Testo latino a fronte. *Storie*, a cura di Giovanni Viansino, 2001, Oscar Mondadori, Arnoldo Mondadori, Milano.

[A3] F. RENATO VEGEZIO (metà del V secolo)

*Mil* II, 25; *Mil* III, 24; *Mil* IV 9

*L'arte della guerra*, Vegezio, a cura di Luca Canali e Maria Pellegrini, 2001, Milano, Oscar Mondadori, Trad. italiana a fronte, ISBN 8804495472.

[A4] PROCOPIO ( secolo VI, storico Bizantino di Cesarea)

*Goth* I,21; *De rebus bellicis* 7 e 18

*La guerra gotica*, Procopio di Cesarea, traduzione di Domenico Comparetti, 2005, Milano, Garzanti, ISBN 8811366127.

*Le guerre persiana, vandalica, gotica*, Procopio di Cesarea, a cura di Marcello Craveri, introduzione di Filippo Maria Pontani, 1977, Torino, Einaudi, Collana I millenni.



# TROMBE IDROEOLICHE

Umberto Meneghetti

DIN - Dipartimento di Ingegneria Industriale

University of Bologna, Italy

e-mail: umberto.meneghetti@unibo.it

**Riassunto.** L'aria compressa ha ora numerosi e significativi impieghi industriali, ma fin dai primi passi della metallurgia si rese indispensabile disporre di mezzi per soffiare energicamente aria sia nei forni per la riduzione dei minerali, sia sui fuochi delle fucine. Alcuni secoli fa, accanto ai vari tipi di mantici vennero introdotte – pare per primo in Italia – le cosiddette Trombe Idroeoliche, un mezzo originale utilizzato anche in altri settori, come negli organi idraulici. Questa tecnologia fu abbandonata quando vennero introdotte le macchine a vapore, ma resta un interessante esempio dell'ingegnosità umana, come viene sommariamente esposto nel presente lavoro.

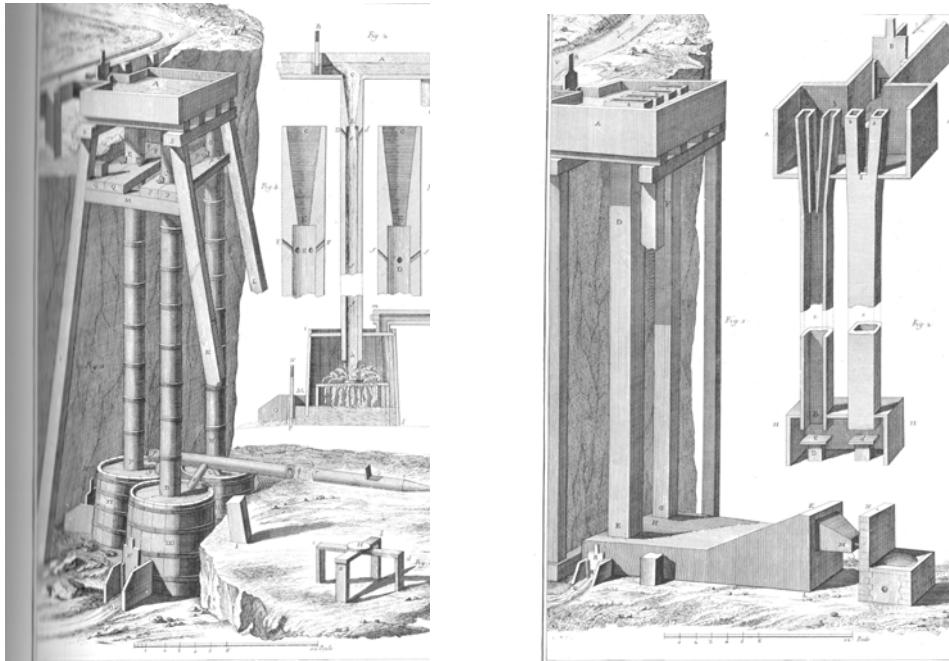
**Parole chiave:** tromba idroeolica, aria compressa, mantici

## 1. INTRODUZIONE

Come è ben noto, per mantenere vivo un fuoco di legna o di carbone occorre soffiarvi sopra aria, per allontanare la cenere e per fornire ossigeno alla combustione. Per raggiungere le elevate temperature necessarie nei processi metallurgici, poi, la combustione deve essere alimentata energeticamente con opportuni dispositivi soffianti: fra questi vanno annoverate anche le trombe idroeoliche, che per alcuni secoli hanno trovato larga diffusione, specialmente in Italia, e – come vedremo – non solo nella metallurgia.

La rappresentazione più nota delle trombe idroeoliche si trova nell'Encyclopédie Diderot-d'Alembert [1], v. Fig. 1. Il principio è semplice: viene incanalata in un tubo verticale o subverticale una certa quantità di acqua, facendo in modo che essa trascini con sé la maggiore quantità possibile di aria. Alla base del tubo è posto un recipiente chiuso, nel quale l'aria trascinata dall'acqua si libera ed entra in leggera pressione, mentre l'acqua esce da un'apertura praticata sotto il livello del pelo libero. Un tubo portavento preleva l'aria dalla parte superiore del recipiente e la convoglia all'utilizzatore. La tromba idroeolica svolge quindi la funzione comunemente affidata ai mantici.

Questa semplice tecnologia, caduta in disuso con l'avvento delle macchine a vapore, è stata successivamente del tutto dimenticata, tanto che numerosi studiosi, citati per es. in [2], hanno affermato che le trombe idroeoliche sono solo un prodotto di fantasia e non possono funzionare, mentre altri ne hanno completamente frainteso la modalità di funzionamento, v. per es. [3], p. 128.



**Figura 1.** *Encyclopédie Diderot-d'Alembert*, 1751-1772. A sinistra: «Trompes du Dauphiné»; a destra: «Trompes du Pays de Foix». Nelle prime l'aria entra attraverso fessure laterali, nelle seconde entra dall'alto.

## 2. SOFFIARE L'ARIA

L'evoluzione dei mezzi per soffiare aria ha accompagnato lo sviluppo e il progresso di molte branche della tecnologia, e in particolare della metallurgia, essendone al tempo stesso causa ed effetto.

Tralasciando mezzi estremamente semplici, come le ventole a mano, si possono citare, come mezzi via via più evoluti, i mantici a otre, v. Fig. 2, i mantici a due canne, v. Fig. 3, i mantici cinesi in legno, v. Fig. 4 a), e infine i mantici in cuoio, v. Fig. 5.

I grandi mantici in cuoio richiedevano grande forza motrice, quale in pratica si poteva ottenere solo con l'impiego di ruote idrauliche e alberi a camme, v. Figure 4 b) e 5 d), e, soprattutto, la loro fabbricazione era molto complessa e costosa, e la durata limitata. La Figura 6 a) mostra quanto fosse complicato un mantice, la cui durata era poi legata a quella delle costose parti in cuoio, che ne rendevano assai dispendiosa la manutenzione. Da qui la ricerca di altri mezzi per ottenere aria compressa più a buon mercato: testi dell'epoca affermano che le trombe idroeoliche venivano a costare circa la metà (alcuni dicono addirittura un trentesimo) dei mantici con la stessa portata, oltre a presentare una estrema economicità nella manutenzione, non richiedendo neppure la



a)



b)

**Figura 2.** a) D. Livingstone, C. Livingstone, H. Loreau, 1866. *Exploration du Zambèse et de ses affluents*: Mantici in uso sulle rive dello Zambezi, metà del XIX secolo. b) Luxor, Egitto, tomba di Rekhmire, XVIII Dinastia: Mantici. Particolare tratto da un affresco che illustra il ciclo di lavorazione per fondere una porta di bronzo.

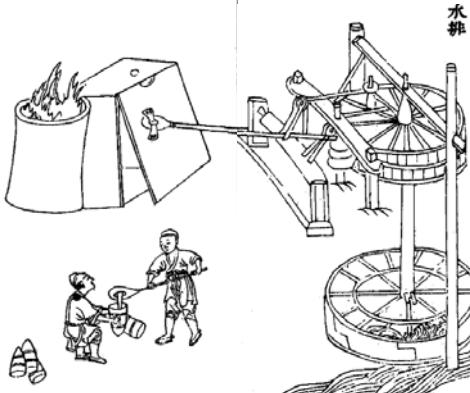


a)

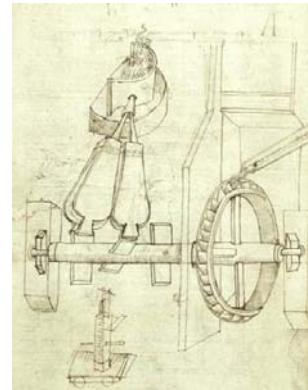


b)

**Figura 3.** a) Primitivo mantice a pistoni in uso nel sud-est asiatico. b) Candi Sukuh (Giava), c. metà del XV secolo: bassorilievo che illustra una fucina alimentata con un mantice a due pistoni, visibile a destra.

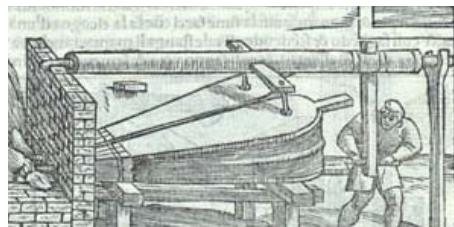


a)



b)

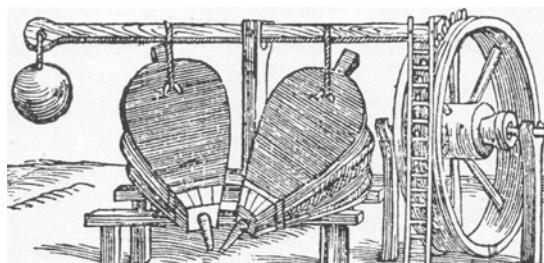
**Figura 4.** a) Wang Zhen, 1313. *Nong Shu*: Mantici cinesi in legno per forni da ghisa, azionati da ruota idraulica. b) Mariano di Jacopo detto Il Taccola, c. 1382-1453. *Liber Tertius de Ingeneis ac edifitiis non usitatis*: Mantici azionati da ruota idraulica e albero a camme.



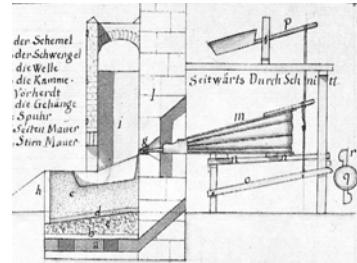
a)



b)

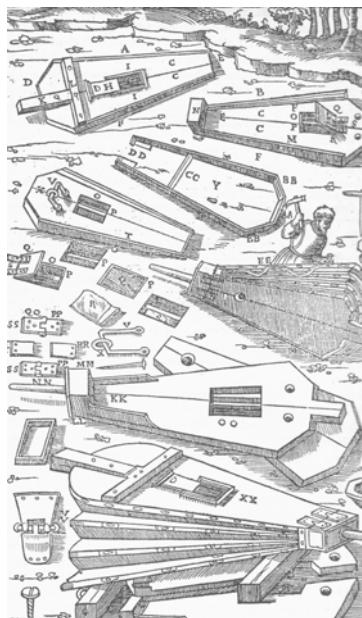


c)

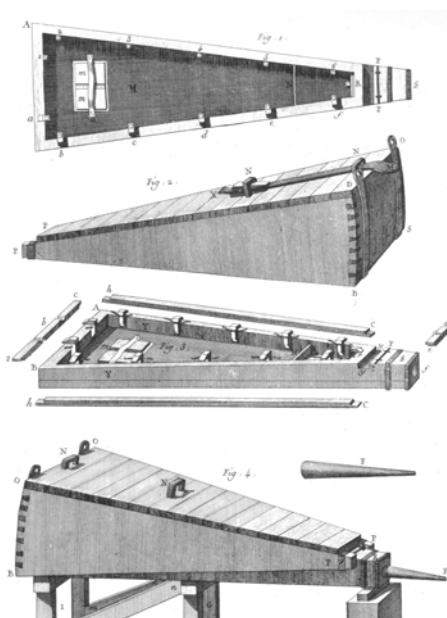


d)

**Figura 5.** a) V. Biringuccio, 1540. *De La Pirotechnia*: Mantice azionato a mano. b) Museo Davia-Bargellini, Bologna: Mantice settecentesco. c) V. Biringuccio, 1540. *De La Pirotechnia*: Mantici mossi da una ruota idraulica. d) S. B. Nicolis di Robilant, 1788. *Viaggi Mineralogici*. A cura di V. Garuzzo, Torino, 2001: Altoforno delle miniere d'argento di Freyberg. .



a)



b)

**Figura 6.** a) Giorgio Agricola, 1563. *De Re Metallica*, trad. it. di M. Florio, facsimile a cura di P. Macini e E. Mesini, Ed. ANIM, 1994: Fabbricazione del mantice. b) *Encyclopédie Diderot-d'Alembert*, 1751-1772: Mantice in legno. I mantici in legno erano più economici ma meno efficaci.

presenza di un operatore.

Prima di passare alle trombe idroeoliche, però, riteniamo interessante accennare ad alcuni altri dispositivi idraulici: le camere a sifone, attribuite a Erone d'Alessandria, e l'argagno, in uso in Toscana nel Sette e Ottocento.

### 3. LE CAMERE A SIFONE E L'ARGAGNO DI CECINA

Cercando una possibile origine delle trombe idroeoliche, ci si imbatte in un dispositivo che ne potrebbe essere stato l'antenato, cioè la camera a sifone, e in un altro derivato sicuramente da quest'ultima, cioè l'argagno. Entrambi meritano di essere descritti in questa pur breve rassegna di antichi dispositivi soffianti.

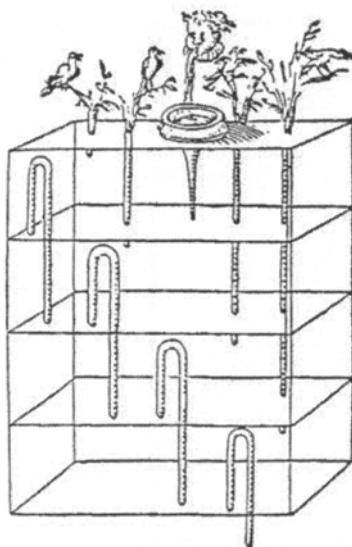
#### Le camere a sifone

Il principio della camera a sifone – comunemente attribuita a Erone d'Alessandria (I o III secolo d.C.) [4] – è assai semplice: in una camera ermeticamente chiusa viene inviata acqua, che scaccia l'aria, comprimendola e inviandola all'utilizzatore attraverso un apposito condotto (portavento).

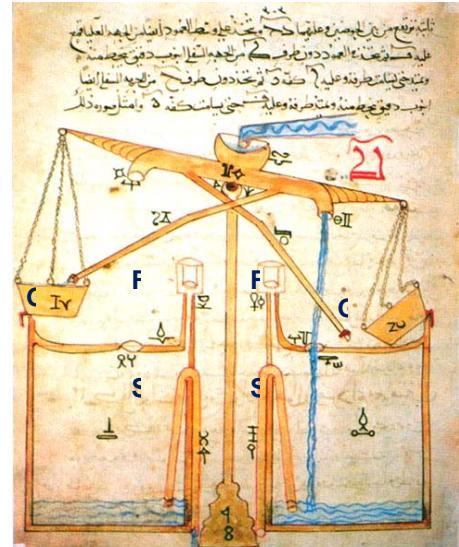
La camera è munita di un sifone: quando il livello dell'acqua raggiunge il colmo del sifone, l'acqua esce, la camera si svuota dell'acqua e si riempie di aria, apprestandosi a ricominciare il ciclo. Sovrapponendo più camere, ciascuna collegata ad un diverso utilizzatore, si può ottenere che questi entrino in azione in successione, come nel caso degli uccelli canori di Fig. 7 a). Da Erone sono verosimilmente derivate le camere a sifone di Al-Jazari [5], v. Fig. 7b).

Per quanto è dato sapere, queste camere furono utilizzate – nell'antichità e nel Rinascimento – per scopi ludico-spettacolari [4-7].

Le camere a sifone, per loro natura, non si prestano a fornire aria compressa in modo continuativo e con caratteristiche uniformi. Il primo inconveniente si può superare impiegando due camere, che si alternino nella funzione di inviare l'aria: l'argano, che vedremo fra poco, funzionava proprio in questo modo, impiegando però galleggianti e leve anziché sifoni. Allo scrivente sembra poi non inverosimile che l'idea della tromba idroeolica possa essere nata proprio

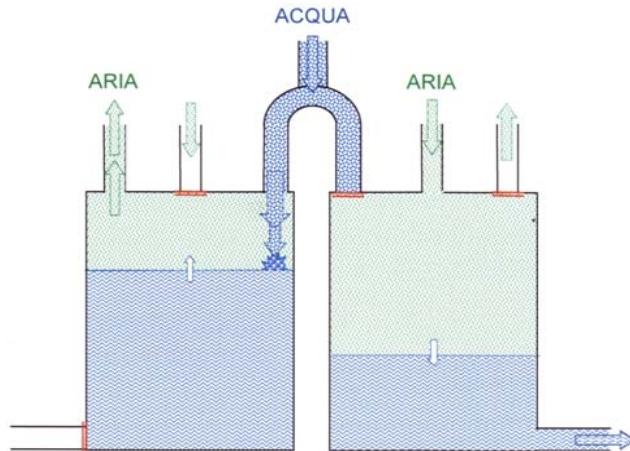


a)



b)

**Figura 7.** a) Erone d'Alessandria, I sec. d. C. *Heronis Alessandrini spiritalium liber*, ed. F. Commandino, 1575: Dispositivo di alimentazione con più camere a sifone sovrapposte. b) Al-Jazari, 1206. *The Book of Knowledge of Ingenious Mechanical Devices*: Dispositivo con due camere che si riempiono alternativamente di acqua, soffiando aria nei flauti F. Le camere si svuotano automaticamente tramite i sifoni S. I galleggianti G provvedono a spostare da una camera all'altra il getto dell'acqua di alimentazione. In figura, la camera di destra si sta riempiendo di acqua e soffia aria nel relativo flauto, la camera di sinistra si è già svuotata.



**Figura 8.** Schema funzionale dell'argagno di Cecina. Il *Nuovo Dizionario universale tecnologico* [8] scrive: «L'alto fornello di Cecina è avvivato in parte da due trombe ... ed in parte da una macchina sofflante idraulica ... chiamata ivi argagno, composta principalmente di due recipienti di muro ...». Il recipiente di sinistra sta inviando aria al portavento. Lo schema è simile a quello di Fig. 7 b).

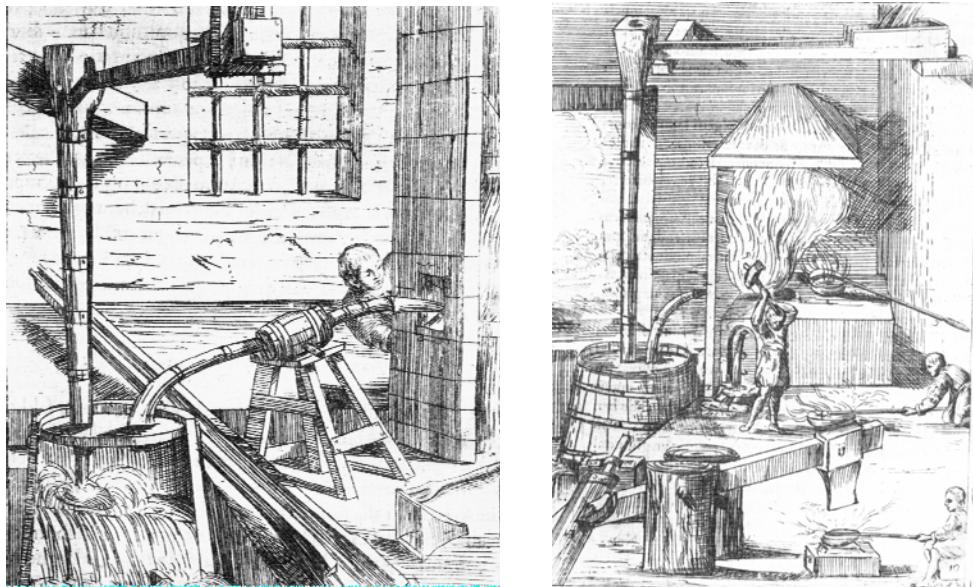
osservando il funzionamento delle camere a sifone, rilevando che l'acqua trascinava con sé aria, che liberava una volta giunta nella camera: il che è, appunto, il principio su cui si basano le trombe.

### L'argagno di Cecina

Il cosiddetto *argagno* è un dispositivo in uso in Toscana nel Settecento, del quale si trovano dettagliate descrizioni (v. Appendice) ma – a conoscenza dello scrivente – nessuna rappresentazione.

L'argagno è costituito da due grandi camere in mattoni, che, con l'intervento automatico di galleggianti e un gioco di leve e rinvii, alternativamente si riempiono di acqua – che scaccia l'aria e la manda all'altoforno – e si svuotano, riempiendosi di aria per la successiva fase di mandata. Si tratta, in sostanza, di un compressore alternativo, nel quale l'acqua svolge la funzione di pistone, v. Fig. 8.

Come si rileva dalla descrizione di [8], il dispositivo è molto semplice, l'unica complicazione essendo data dai meccanismi – galleggianti e leve – necessari per il suo funzionamento automatico. La portata di aria viene indicata in  $25.36 \text{ m}^3/\text{minuto}$ , con un consumo di acqua di  $33.813 \text{ m}^3/\text{minuto}$ . Trattandosi di una macchina volumetrica, l'aria nella camera raggiunge evidentemente la pressione necessaria per vincere le resistenze che incontra nelle tubazioni e nell'altoforno; ma questa pressione non è indicata. Si dice solo che il pelo libero dell'acqua, quando questa entra nella vasca per scacciarne l'aria, arriva ad un minimo di  $0.45 \text{ m}$  dal fondo del bacino di alimentazione, del quale peraltro non si co-



**Figura 9.** M. A. della Fratta et Montalbano, 1584. *Pratica Minerale* [12]. Bologna, Manolessi, 1678: «Botti e Trombe per soffiare». Nell'immagine di sinistra sono visibili lo spaccato della botte e, a parte, della tromba; nel portavento è presente la piccola botte usata per raccogliere l'umidità.

nosce la profondità. È in ogni modo plausibile che la pressione non fosse superiore a poche decine di centimetri di acqua; la resa si può comunque esprimere come  $25.36:33.813 = 0.75 \text{ mc aria/mc acqua}$ .

Oltre che in [8], l'argagno viene brevemente descritto anche in [9], mentre in [10] si riporta – in francese – lo stesso testo di [8]: è significativo che si adotti anche qui il termine toscano *argagno*, il che conferma che tale dispositivo non doveva essere noto, o almeno in uso, in altri Paesi.

#### 4. LE TROMBE IDROEOLICHE

Quando e come sia nata l'idea delle trombe idroeoliche non è finora dato sapere. È però quasi certo che esse abbiano avuto origine in Italia, v. [11].

Il primo testo sulle trombe idroeoliche è il trattato *Pratica Minerale* di Marco Antonio della Fratta, stampato nel 1584 [12]. Le trombe idroeoliche («Botti e Trombe per soffiare») vengono qui descritte molto dettagliatamente, v. Fig. 9, da persona che sicuramente deve averle non solo viste, ma anche costruite ed usate. Il della Fratta dà indicazioni precise sul salto necessario («almeno sedici piedi»), sulla cassetta in cui deve cadere il getto, sulla Botte o Tinazzo in cui si raccoglie l'acqua e si libera l'aria («di buon legno resistente, e di honesta grossezza per resistere alla forza del Vento, che vi si genera»). Per la tromba vera e propria si deve usare un

legno «senza groppi e di vena dritta»; la fabbricazione della tromba è descritta nei minimi dettagli: si precisa persino che «per maggior bellezza» anche all'esterno conviene che sia «rotonda». Terminate – con altre operazioni secondarie – la botte e la tromba, sulla botte si pone il portavento, che condurrà l'aria alla fucina o al forno fusorio.

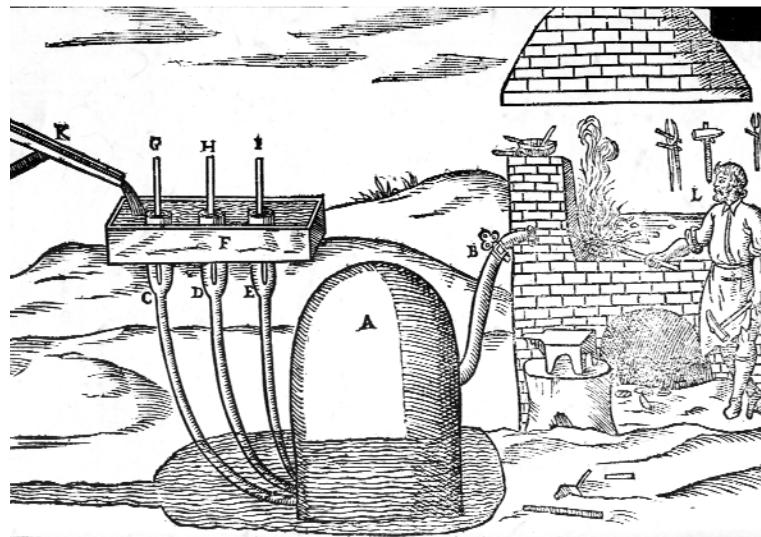
Dopo avere precisato che le botti si possono anche fabbricare in marmo, il della Fratta aggiunge interessanti considerazioni sull'inconveniente dell'umidità presente nell'aria e su un artificio da lui proposto per eliminarla: «E perche tal volta, per l'humidità dell'acqua, queste Botti sono rifiutate, come quelle, che col fiato loro non permettono il raffinare il metallo prezioso, portando ... la crudezza dell'acqua sopra il Metallo, facendolo intirizzare, ... io ho trovato per rimedio ... disporre un'altra Botte, minore la quarta parte della prima, in cui si fa sboccar il Portavento ... ; sopra poi à questa Botte si pone un altro Portavento ... & in fondo di questa Botticella resta un buco turato ... che à suo tempo si cava, per estrarne ... l'humidità condensata.». L'artificio è ben visibile nell'illustrazione di sinistra della Fig. 9.

Per quanto riguarda la modalità di uscita dell'acqua dalla botte (o “tinazzo”), che deve esser tale da assicurare che il pelo libero dell'acqua sia sempre al di sopra del foro di scarico, della Fratta raccomanda che il fondo della botte sia ben sigillato, «eccetto, cha da una parte, dove si deve fare una cassetta per la quale esce l'acqua: questa cassetta deve esser quadra, alta, e larga circa un piede senza coperchio, ma il foro del Tinazzo dev'esser qualche cosa meno».

Notevoli e significative sono poi le considerazioni finali sulle trombe idroeoliche: «Il modo di far questi soffioni è nuovo, & in vero risparmia molta spesa, poiche li mantici ... ascendevano ... al costo di 500 scudi, ... dove per lo contrario il su detto modo di soffiare si può perfettionare con 25 scudi. Vero è, che ... non in ogni luogo si trova il commodo di cascate d'acqua per far li soffioni, e però conviene ridursi alli mantici: ma se per farli lavorare è necessario il servirsi d'Huomini, ò di Animali, consiglierei sempre il condur la Vena cruda, e scelta lungi qualche miglio, mentre la spesa di nutrire gli Animali, ò di pagar gl'Huomini sormonta di gran lunga quella della condotta della Vena à luogo con commodo da acqua ... ».

Un interessante accenno alle trombe idroeoliche si trova anche in G. B. Della Porta [13], che nel suo *Della Magia Naturale Libri XX*, nel 1589 scrive: «Come l'acqua possa far ufficio di mantice. Il che habbiamo visto à Roma. Faccisi una cameretta, chiusa da tutte le parti, e sopra per un embuto riceva gran quantità di acqua, nel sommo delle mura sia un buso, dal qual per gran forza l'aria scampi via; perche con tanto impeto verrà cacciata fuori, che accenderà il fuoco molto bene, e farà l'ufficio del mantice eccellenzissimamente per le fucine di ferro, e di rame, sia l'embuto fatto di modo, che quando non habbiamo bisogno possiamo mandar l'acqua in altra parte, & havendone bisogno, rinovarla.» La descrizione non lascia alcun dubbio sul fatto che si tratti proprio della tromba idroeolica.

Storicamente molto importanti, anche se di mediocre qualità sia grafica sia di contenuto, sono le illustrazioni riportate in [14], v. Fig. 10: si tratta del volume *Le Machine* di G. Branca, edito in Roma nel 1629, e scritto dall'Autore quando era “Architetto della Santa Casa di Loreto”. La descrizione della tromba idroeolica è sostanzialmente corretta, ma la figura contiene verosimilmente qualche errore: in particolare, i tubi C, D, E dovrebbero portare l'acqua nella campana dall'alto, e non dal basso. Interessanti, invece, i tre pioli G, H, I: ne basterebbe uno solo, ma se le tre aste si interpretano come tubi, potrebbero svolgere la duplice funzione di chiudere l'ingresso dell'acqua quando non serve, e di facilitare l'ingresso – cioè il trascinamento da parte



**Figura 10.** Giovanni Branca, *Le Machine*, 1629 [13]: Spiritale per mantice di fucina.

dell’acqua – di una maggiore quantità di aria, con la modalità adottata in seguito nelle Trompes du Pays de Foix, v. Fig. 1.

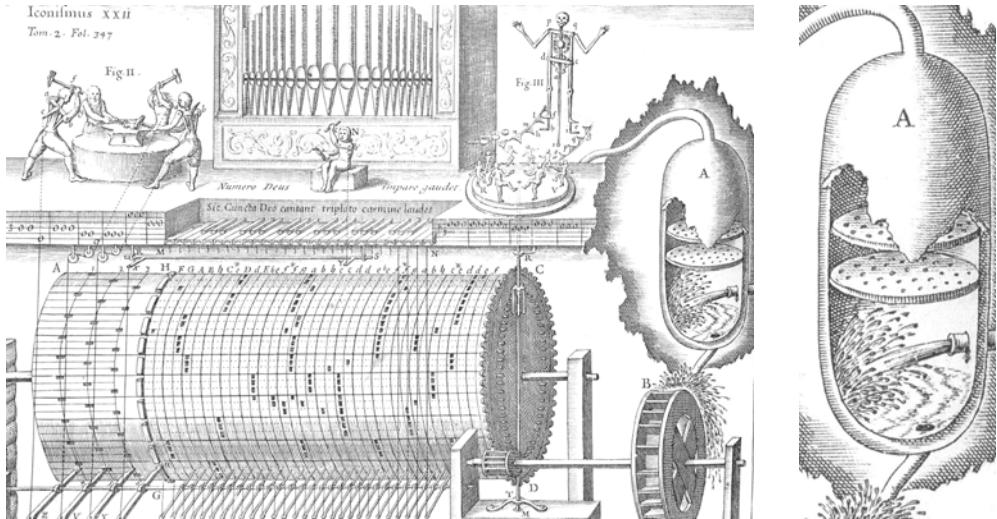
Da notare che nel suo libro il Branca descrive diverse macchine, ma in genere non si attribuisce il merito della loro invenzione: molte illustrazioni, in verità, sono così scadenti, da far pensare che qualche volta l’incisore abbia frainteso le intenzioni dell’Autore, ma che altre volte proprio quest’ultimo non abbia pienamente compreso il funzionamento delle macchine che descrive. Ciò, tuttavia, non diminuisce il valore storico della pubblicazione, la quale – per quanto concerne le trombe idroeoliche – conferma che nel 1629 esse erano già note da tempo.

## 5. ORGANI IDRAULICI E AUTOMI MUSICALI

L’aria compressa è fondamentale per le fucine e per i forni di fonderia. Si può dire, infatti, che lo sviluppo della metallurgia fu al tempo stesso causa ed effetto dello sviluppo dei mantici, soprattutto con l’introduzione della ruota idraulica e dell’albero a camme [15]. Le trombe idroeoliche, come abbiamo visto, affiancarono per un certo periodo i mantici, superandoli spesso sotto l’aspetto dell’economia di installazione e di manutenzione.

Ma anche altri, e anch’essi a loro modo importanti, furono già nel passato gli usi dell’aria compressa: questa, infatti, era impiegata negli organi a canne e in taluni oggetti ludici, ricercato ornamento dei giardini delle corti rinascimentali.

La prima notizia scritta dell’applicazione delle trombe idroeoliche per alimentare il sospirio di un organo pare sia quella riportata in un manoscritto di Giovanni Fontana, databile



**Figura 11.** Athanasius Kircher, 1650. *Musurgia Universalis*. Iconismus XXII: Organo idraulico. Dopo avere attraversato la “Camera Aeolia” A, l’acqua muove una ruota idraulica che trascina il “cilindro fonotattico”; questo, a sua volta, mediante piccoli pioli con funzione di camme, aziona, tramite leve, i tasti dell’organo e muove automatismi accessori, come la “Fucina di Vulcano”.

attorno al 1420 [16]. È improbabile che il Fontana sia stato l’ideatore del dispositivo; verosimilmente, egli, al più, può essere stato il primo ad applicarlo ad un organo: ne segue che in Italia le trombe idroeoliche erano già presenti e utilizzate all’inizio del XV secolo.

Per quanto riguarda l’applicazione delle trombe idroeoliche per alimentare i somieri degli organi, la trattazione più nota è sicuramente quella del gesuita padre Athanasius Kircher [17], che nella *Musurgia Universalis* del 1650 chiama il dispositivo “Camera Aeolia”, v. Fig. 11. Il Kircher conferma che nel 1650 il procedimento era già in uso nelle fucine e negli altiforni; scrive infatti: “habet autem huiusmodi Camerae maximum usum in omni negotio fabrili, hic enim in Italia passim ferrariis officinis cudenda instrumenta, perpetuum ventum suppedidant.”

Gli scritti del dottissimo padre Kircher ebbero ampia diffusione in tutta Europa, cosicchè le trombe idroeoliche risultarono meglio note agli studiosi di musica e alle persone di cultura umanistica, che ai tecnici in generale e ai metallurgisti in particolare. Tra i divulgatori della *camera aeolia* del Kircher si possono citare G. Schott [18] e J. Leupold [19], che riproducono entrambi, con poche e non essenziali varianti, l’Iconismus XXII della *Musurgia Universalis*, dal quale è tratta la Figura 11.

Gli organi idraulici con somiere alimentato da trombe idroeoliche ebbero in Italia una certa diffusione: Latanza [2] ne cita 7, dal più antico di Villa d’Este a Tivoli, terminato nel 1569-1570,

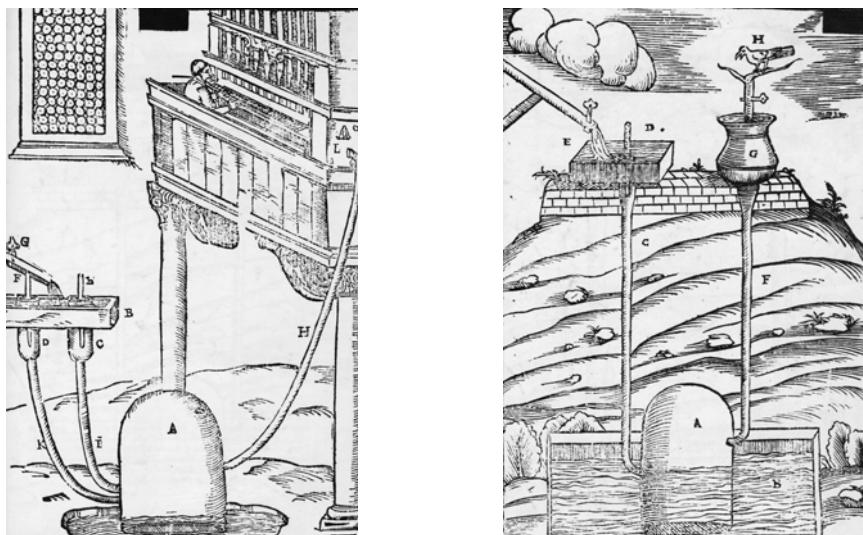
al più recente di Villa Pamphili a Roma, costruito nel 1758-59.

Questi organi, collocati per lo più nei parchi di lussuose dimore di personaggi importanti, avevano la funzione di divertire e stupire gli ospiti, colpendo la loro immaginazione per il misterioso funzionamento senza intervento umano ed esaltando così la gloria dei proprietari. Una funzione analoga, ma ancora più apertamente ludica, avevano i vari giochi meccanici che ornavano i giardini delle corti e delle ville signorili nel Rinascimento e nei secoli successivi [6-7]. Anche in questi giochi furono utilizzate trombe idroeoliche, come documenta, fra gli altri, il solito G. Branca [14], v. Fig. 12.

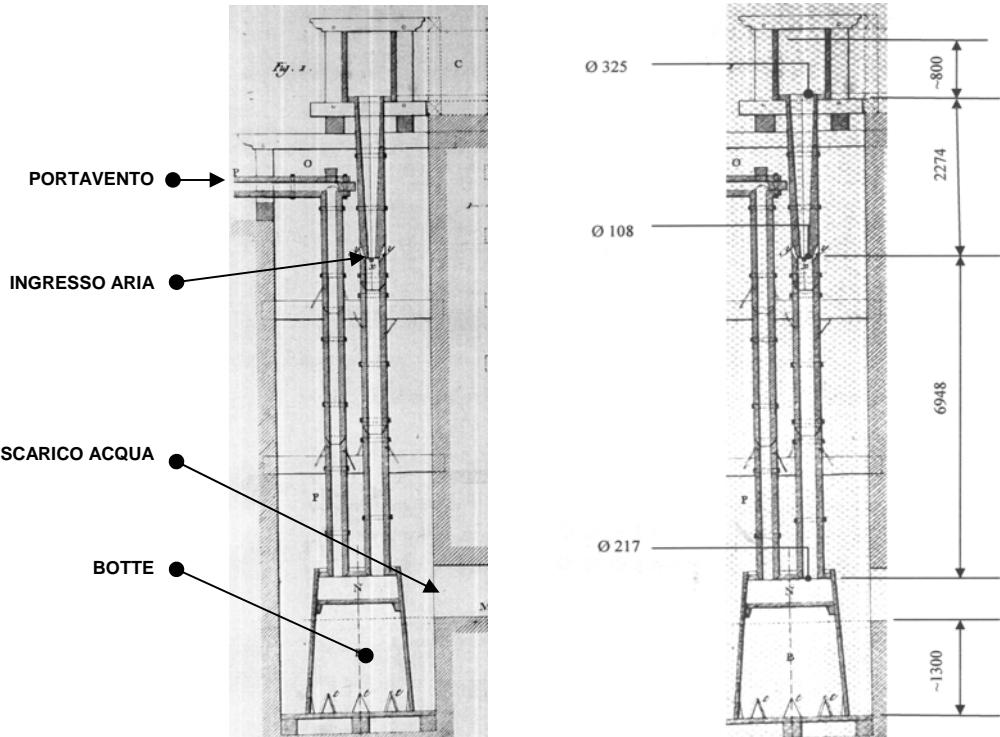
A causa della ricca committenza relativa a queste applicazioni, molti tecnici si dedicarono allo studio e al perfezionamento dei relativi meccanismi – dalle ruote idrauliche agli alberi a camme e alle trombe idroeoliche – contribuendo così in modo non irrilevante al generale progresso della tecnica.

## 6. LE ESPERIENZE DI BEAUNIER E GALLOIS

Nel 1804, a testimonianza dell'importanza e della diffusione delle trombe idroeoliche, due ingegneri minerari francesi svolsero alcune interessanti ricerche sperimentali sulle trombe della fonderia di Poullaouen, in Bretagna [20]. Si tratta di un impianto di notevole impegno, con due trombe uguali, in parallelo fra loro. Ogni tromba nella parte superiore è rastremata e in corrispondenza della sezione minima porta quattro aperture per l'immissione dell'aria, v. Fig. 13: lo



**Figura 12.** Giovanni Branca, *Le Machine*, 1629. Roma, per Iacomo Mascardi. A sinistra: «[...] spiritale] che ... dà il vento all'organo». A destra: «Lo spirito ... esala per la canna F e ... dà il fiato all'uccello H, che o fischia o canta». Qui si nota che, a causa della pressione, il livello dell'acqua nella botte A è inferiore a quello nella vasca esterna B.



**Figura 13.** Beaunier e Gallois, 1804, “Expériences faites sur les trompes de la Fonderie de Poullaouen”: Particolare della tromba. Le dimensioni riportate sono in millimetri.

schema funzionale è quindi quello della Trompe du Dauphiné, v. Fig. 1. La tromba prosegue poi con sezione allargata fino alla botte. Dalla sommità di questa l'aria viene prelevata dal portavento, mentre l'acqua esce inferiormente da aperture triangolari; il fondo della botte è circa 1300 mm al di sotto del canale di scarico dell'acqua.

Prima di descrivere le loro esperienze, Beaunier e Gallois riassumono i risultati ottenuti da un altro ricercatore, certo Lœwis, il quale aveva trovato che i due modi per introdurre aria nell'acqua – cioè dall'alto, oppure da aperture laterali lungo il condotto – sono entrambi efficaci, ma non vanno impiegati contemporaneamente, altrimenti ciascuno di essi indebolisce l'effetto dell'altro.

La strumentazione impiegata dai due sperimentatori comprende un dispositivo, chiamato *anemomètre à eau*, per la misura della pressione (gli Autori dicono della *densité*) dell'aria, e alcuni galleggianti di sughero, ai quali erano appese sfere di cera appesantite con piombi, per misurare la velocità dell'acqua nel canale di alimentazione, allo scopo di valutarne la portata.

Gli Autori traggono dalle esperienze da loro condotte alcune conclusioni particolari, di notevole ma specifico interesse per gli utenti delle trombe idroeoliche; i risultati per noi più

significativi sono però quelli di carattere generale, che riassumiamo di seguito.

La pressione dell'aria, nelle varie condizioni di prova – ma sempre con portavento aperto – variava fra 700 e 810 mm d'acqua; il consumo di acqua era di circa 6 m<sup>3</sup>/minuto e l'aria prodotta era circa 15 Sm<sup>3</sup>/minuto. La resa era quindi di circa 2.5 Sm<sup>3</sup> di aria per ogni m<sup>3</sup> di acqua. Beaunier e Gallois osservano, a questo proposito, che la resa è assai superiore a quella di un particolare compressore a pistoni, azionato da una ruota idraulica e un albero a camme [21]. Poiché tale compressore risultava conveniente rispetto ai mantici, emerge evidente l'assoluta convenienza delle trombe idroeoliche.

Per evidenziare l'evoluzione fra l'approccio empirico dei primi relatori [12-14], [17-19] e la situazione all'epoca della Rivoluzione Industriale, può essere interessante rilevare che un trattato di fisica del 1861 ([22], citato anche da [7]), a proposito della pressione esercitata da un liquido sulle pareti di un condotto entro il quale stia scorrendo, illustra brevemente il Principio di Bernoulli, senza peraltro avventurarsi a scrivere la relativa equazione, e come esempio di applicazione cita proprio le trombe idroeoliche, richiamando anche l'effetto Venturi.

## 7. LA FORTUNA DELLE TROMBE IDROEOLICHE

### Le trombe idroeoliche in Italia

Le prime applicazioni delle trombe idroeoliche riguardarono le fucine, gli organi idraulici e gli automi musicali. Successivamente, a partire dalla fine del Cinquecento, perfezionate e rese più efficienti, si diffusero praticamente in tutti i distretti minerari e metallurgici della Penisola, dove se ne trovano tuttora molti resti, o almeno esistono documentazioni della loro presenza nei secoli passati. In questo campo, di più diretto interesse per la storia della tecnologia, le prime applicazioni riguardarono le ferriere o fabbriche che riducevano minerale o ghisa, mentre le applicazioni agli altiforni furono più contrastate – anche a causa dell'umidità presente nell'aria – e richiesero ulteriori perfezionamenti.

Abbiamo già citato i vantaggi economici delle trombe idroeoliche. Ad essi se ne aggiungevano altri, di natura strettamente tecnica. I mantici, infatti, con l'insufflaggio alternato, non garantivano una ventilazione uniforme e, di conseguenza, l'uniformità della temperatura all'interno dei forni, con ripercussioni negative sulla qualità della ghisa prodotta [23]. Le trombe idroeoliche consentirono di superare questo inconveniente, come si rileva ad es. in [24]: «Il raggiungimento di una temperatura più elevata ... fu il campo nel quale ... si realizzarono i maggiori progressi, attraverso la sostituzione dei mantici di cuoio, con le trombe idroeoliche». Queste, peraltro, presentavano lo svantaggio di soffiare aria umida, il che spinse taluni a sconsigliarne l'uso, v. per es. [25] e [26].

Di fatto, le trombe idroeoliche si diffusero rapidamente in Toscana ed ebbero grande successo in tutta Italia, in Corsica ed in Francia, mentre furono scarsamente utilizzate nell'Europa centrale e settentrionale e in Gran Bretagna, forse anche a causa delle diverse caratteristiche mineralogiche delle varie vene di ferro [23].

In molti casi, si conoscono le principali vicende storiche degli impianti, che spesso furono in uso fino alla metà dell'Ottocento, e in certi casi, addirittura fino alla metà del Novecento. Citiamo di seguito alcuni dei principali distretti minerari e metallurgici italiani in cui si trova documen-



**Figura 12.** Brescia, Museo del Ferro: Imbocco delle trombe idroeoliche. Nella fotografia di destra è visibile in primo piano il tubo portavento, di costruzione posteriore. L'impianto non è più funzionante.

tato l'impiego delle trombe idroeoliche.

In Toscana si possono ricordare Cecina (Livorno) [8], Castel Focognano nel Casentino, San Marcello Pistoiese, Mammiano Basso (Pistoia). A Maresca (Pistoia) le trombe furono costruite nel 1623 (Archivio di Stato di Firenze, citato da [27]).

A Ferriere in Val Nure (Piacenza) le trombe furono adottate attorno al 1655, ma furono mantenute solo per le fucine, mentre per il forno si preferì tornare ai mantici (Archivio di Stato di Piacenza, citato da [27]).

In Lombardia, le trombe idroeoliche furono introdotte in Val Trompia nel 1745 [28] e nel forno fusorio di Livemmo (Brescia) nel 1767; da notare però che già nel 1608, a proposito di Lavinone in Val Sabbia, si parla (in: B. Soldo, *Descrizione della Valle Sabbia fatta da Bartolomeo Soldo ad istanza dell'Ill.mo Sig. Vincenzo Gussoni*, citato da [29]) di un «forno da ferro senza mantici, senza rota, ma solo col vento causato da l'acqua che artificiosamente casca in certe concavità artificiosamente fatte ... come fanno li altri forni che vanno con rote et mantici, va con manco spesa assai, cosa stupenda et degna d'esser veduta».

A Brescia, una fucina da rame, ora sede del Museo del Ferro, utilizzava alcune trombe idroeoliche, delle quali si conservano intatti gli imbocchi, v. Fig. 12.

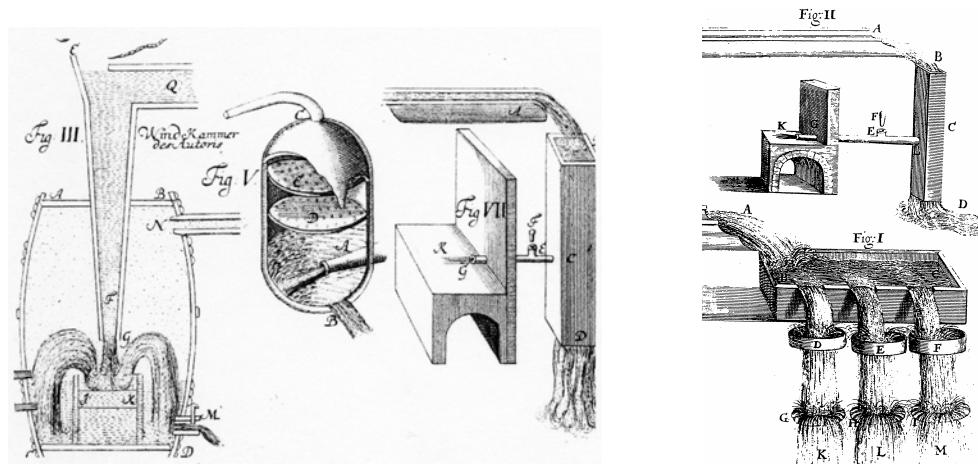
In Piemonte, tra il 1784 e il 1788 sorse a Rondolere una installazione metallurgica per il trattamento della magnetite. Sia nell'alto forno, sia nel forno di affinazione della ghisa, la ventilazione forzata era ottenuta con una tromba idroeolica [30]. A Mezzanile (Torino), dal '200 agli anni '60 del XX secolo era largamente diffusa la lavorazione dei chiodi, collegata allo sfruttamento delle risorse minerarie locali; nella borgata Forneri la "fucina neuva" era dotata di una tromba idroeolica in legno, ora restaurata.

In Campania, nella Valle del Canneto presso Amalfi esisteva una ferriera, i cui forni erano alimentati da trombe idroeoliche [31].

A Mongiana (Cosenza) dall'ultimo trentennio del XVIII secolo fu in funzione per circa un secolo un importante impianto metallurgico. Un incaricato di effettuarvi un sopralluogo ([32], citato da [33]), scrive: «Le Fornaci e Forge ricevono l'azione da un vento che produce l'acqua che giunge per mezzo di alcuni aquidotti, passa in alcune canalette e precipita dentro delle trombe di ferro acre e di legno, da queste passa in una cassa di piperno, o legno percuotendo un masso di ferro acre, urta l'aria intromessa, che trovando a uscire in un canale laterale, ossia Camino di vento, giunge con molta veemenza alle fornaci e alla forgia e nello stesso tempo sorte l'acqua per sotto.» L'impianto è costato circa mille ducati ma, per la semplicità di funzionamento, la manutenzione è ridotta al minimo, non crea problemi e risulta economicamente insignificante.

### Le trombe idroeoliche in Europa

Le più antiche testimonianze sulle trombe idroeoliche riguardano l'Italia. Anche se non è definitivamente provato che questo significhi che esse sono nate qui, se si accetta l'ipotesi, avanzata in questa sede, della loro derivazione dalle camere a sifone di Erone, l'ipotesi della



**Figura 13.** a) J. Leupold, 1724. *Theatrum Machinarum Generale*, Tab. XLVII (parziale): Camere del vento. b) W. Pope, 1665. *Phil. Trans. 1665-1666*, 1, 21-26: A Way of Producing Wind by the Fall of Water.

loro origine italiana si rafforza, in relazione con gli studi degli Autori greci e latini sviluppati in Italia nel Quattrocento. È infatti lecito ritenere che le opere di Erone fossero note ben prima della traduzione latina del Commandino.

È comunque accertato che le trombe idroeoliche si diffusero nei distretti metallurgici di Italia, Francia e Spagna.

Le notizie più dettagliate, dopo l'Italia, riguardano la Francia ([1], 1751-1772; [18], 1804) e la Corsica [34]: addirittura, a causa della fama e della diffusione dell'Enciclopedia, nel XIX e in parte ancora nel XX secolo l'invenzione delle trombe idroeoliche era attribuita proprio ai Francesi. In Germania, G. Schott ([16], 1657-1658) descrive dettagliatamente la "Camera Aeolia" di A. Kircher, ripresa anche da J. Leupold ([17], 1724), v. Fig. 13a), mentre E. Swedenborg ([25], 1734) tratta l'applicazione delle trombe idroeoliche negli impianti metallurgici, e attribuisce la loro invenzione agli Italiani.

In Spagna, l'introduzione delle trombe idroeoliche si fa risalire a certo Pablo Antonio de Rivadeneira [35], che nel 1630 illustrò il suo metodo per soffiare aria senza l'uso di mantici, ottenendo nel 1633 il relativo brevetto reale.

In Inghilterra, la prima notizia riguardo le trombe idroeoliche pare sia l'informazione contenuta in una lettera dell'astronomo Walter Pope, pubblicata nelle Phil. Transactions [36], nella quale descrive – non nascondendo la propria meraviglia – un congegno da lui visto vicino a Tivoli, che consente di soffiare aria senza fare uso di mantici. Dall'illustrazione che accompagna la lettera, v. Fig. 13b), si trae peraltro l'impressione che Pope non abbia in realtà ben compreso il funzionamento della tromba.

### L'evoluzione delle trombe idroeoliche

Come considerazione generale, possiamo osservare che confrontando fra loro le rappresentazioni più antiche, v. Figure da 9 a 12, e quelle più recenti, v. Figure 1 e 13, si rileva subito il notevolissimo progresso compiuto dalla tecnologia. Salta però anche agli occhi che questa, nel settore considerato – come in altra sede [37] si è osservato per altri settori – è giunta sì ad un elevato grado di maturità, ma i materiali sono rimasti gli stessi – prevale di gran lunga il legno – ed è rimasta la stessa la principale fonte di energia, che, ovviamente, è quella idraulica. La tecnologia è dunque riuscita ad ottenere macchine e impianti ben concepiti, realizzati con grande maestria e decisamente efficienti: visto a posteriori, però, tutto ciò suggerisce l'idea di un mondo – quello della tecnica – che non può più progredire senza un cambiamento radicale, quale quello che effettivamente avvenne con la Rivoluzione Industriale.

## 8. CONCLUSIONI

Volendo ricostruire un quadro storico generale, sembra di poter affermare che le trombe idroeoliche trovarono i loro primi impieghi – presumibilmente, a partire dal Quattrocento – nelle fucine dei fabbri, nei giochi dei giardini e negli organi idraulici; successivamente furono introdotte nei forni fusori e negli altiforni, dove furono apprezzate per la loro convenienza economica. Per queste ultime applicazioni dovettero venire perfezionate, essendo necessario ottenere maggiore potenza, pressione più elevata e minore contenuto di

umidità: in questo modo si evolvettero, diventando espressione di una tecnologia d'avanguardia.

La prima idea e il successivo sviluppo delle trombe idroeoliche si basarono sull'intuizione e sull'empirismo. Quando la tecnica incominciò ad avere a disposizione mezzi per affrontarne scientificamente lo studio, era ormai troppo tardi: con l'avvento delle macchine a vapore e lo sviluppo generale della tecnologia – favoriti, del resto, dallo stesso progresso scientifico – le trombe idroeoliche persero rapidamente rilevanza, rimanendo in uso presso impianti e fucine via via sempre meno importanti, ai margini o addirittura alla retroguardia dello sviluppo tecnologico.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] D. Diderot, J. B. Le Rond d'Alembert, 1751-1772. *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*.
- [2] A. Latanza, 1995. *Il ripristino dell'organo idraulico del Quirinale*. Roma, Libreria dello Stato. ISBN 88 240 3933 2.
- [3] V. Marchis, 2010. *Storia delle macchine – Tre millenni di cultura tecnologica*. Editori Laterza, Seconda edizione. ISBN 978 88 420 7487 8.
- [4] Erone d'Alessandria, I sec. d. C. (?), *Heronis Alexandrini spiritalium liber a Federico Commandino Urbinate ex Graeco nuper in Latinum conversus*, Urbini, 1575.
- [5] Al-Jazari, 1206. *The Book of Knowledge of Ingenious Mechanical Devices*. A cura di Donald Routledge Hill, Dordrecht, 1974.
- [6] P. Barbieri, 1986. “Organi e automi musicali idraulici di Villa d'Este a Tivoli”. L'Organo, XXIV, 3-61, Pàtron Editore, 1990.
- [7] P. Barbieri, 2004. “Ancora sulla Fontana dell'organo di Tivoli e altri automatismi sonori degli Este (1576-1619)”. L'Organo, XXXVII, 187-221, Pàtron Editore, 2005.
- [8] *Nuovo Dizionario universale tecnologico o di arti e mestieri e della economia industriale e commerciale compilato dai signori Lenormand etc., Prima trad. italiana*, 1840, Volume 25 B, 275-280 (Google eBook).
- [9] Filalete, 1764. “Seguito della descrizione di Filalete Naturalista Toscano intorno la fabbricazione del Ferro in Toscana”. Giornale d'Italia, XIX, 10 novembre, 141-142 e 145-146.
- [10] M. N. Garella, 1839. “Sur la fabrication de la fonte et du fer en Toscane”. Annales des Mines, Troisième Série, XVI, 3-84.
- [11] Boni B., 1958. “Sull'origine italiana delle trombe idroeoliche”. La fonderia italiana, n. 5, 161-168.
- [12] M. A. della Fratta et Montalbano, 1584. *Pratica Minerale*. All'Insegna del Giglio, Firenze, 1985, ristampa anastatica dell'ed. Manolessi, Bologna 1678, a cura di M. Cima.
- [13] Giovanni Battista Della Porta, 1589. *Della Magia Naturale Libri XX*, appresso Antonio Bulifon, Edizione 1677.
- [14] Giovanni Branca, 1629. *Le Machine*, Roma, per Iacomo Mascardi.
- [15] M. Cima, 1991. *Archeologia del ferro*. Torino, Edizioni Nautilus.

- [16] E. Battisti, G. Saccaro Battisti, 1984. *Le Macchine Cifrate di Giovanni Fontana*. Arcadia Edizioni, Milano.
- [17] Athanasius Kircher S. J., 1650. *Musurgia Universalis*.
- [18] Gaspar Schott S.J., 1657-1658. *Mechanica hydraulico-pneumatica*. Würzburg, Francoforte sul Meno, H. Pigrin.
- [19] Jacob Leupold, 1724. *Theatrum Machinarum Generale. Schau-platz Des Grundes Mechanischer Wissenschaften*. Leipzig, Christoph Zunckel.
- [20] Beaunier et Gallois, 1804. “Expériences faites sur les Trompes de la Fonderie de Poullaouen”. Journal des Mines, an XII N 91, Germinal an 12, 37-48.
- [21] Baillet, 1796. “Description des Soufflets cylindriques en fonte du Pays de Namur”. Journal des Mines, an IV N 16, 9-20.
- [22] P. A. Daguin, 1861. *Traité elementaire de Physique théorique et expérimentale avec les applications à la Météorologie et aux Arts Industriels*. Toulouse, E. Privat – Paris, Dezobry et Magdeleine.
- [23] A. Nesti, 2001. “La siderurgia toscana nel XVIII secolo”. Ricerche storiche, XXXI, 62-90.
- [24] A. Quattrucci, 1994. *La Magona del ferro*. Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, ISBN 978887104942 7.
- [25] E. Swedenborg, 1734. *Opera Philosophica et Mineralia. Regnum Subterraneum sive minerale*. Friedrich Hekel, Leipzig.
- [26] G. B. Brocchi, 1808. *Trattato mineralogico e chimico sulle miniere di ferro del dipartimento del Mella*. Nicolò Bettoni, Brescia.
- [27] E. Baraldi, 2001. “Mantici idraulici, trombe, forni e fucine, fabbriche e ferriere in Italia dal XIII al XVIII secolo”. Ricerche storiche, XXXI, 41-59.
- [28] AA. VV., 2010. *La via del ferro e delle miniere in Valtrompia*. Comunità Montana di Valle Trompia, ISBN 978 88 95878 02 7.
- [29] G. Marchesi, 2004. *Cosa stupenda et degna d'esser veduta*. Brescia, Officina delle idee.
- [30] M. Venturino Gambari, S. Carrea, 2006. “L'area Archeo-Metallurgica di Rondolere”. In: *Archeologia e Territorio*, MiBAC, Edizioni MP Mirabilia, 94-97.
- [31] L. Centola & Associati, 2009. *Water Power – Il potere dell'acqua*. Alinea Editrice.
- [32] *Memoria sullo stabilimento di Mongiana fatta dal Cap. Settimo per ordine del Sig. Maggiore Sappel Comandante l'Artiglieria in Calabria*. Biblioteca Nazionale di Napoli. Sez. Manoscritti Ms. 63/1.
- [33] B. De Stefano Manno, G. Matacena, s.i.d. *Le Reali Ferriere ed Officine di Mongiana*. <http://www.trattoriaelim.it/Le%20Reali%20Ferriere/indice.htm>
- [34] P-J. Campocasso, 2001. “La production indirecte du fer en Corse (1635-1885)”. Ricerche storiche, XXXI, 91-136.
- [35] *Registro y relation general de minas de la corona de Castilla – Segunda y tercera parte*, 1632.
- [36] W. Pope, 1665-1666. “Concerning the Mines of Mercury in Friuli; And a Way of Producing Wind by the Fall of Water”. Phil. Trans. 1665-1666, 21-26.
- [37] Meneghetti U., 2012. “Le camme nella storia della tecnologia”. *Scienza e Tecnica nel Settecento e nell'Ottocento*. CLUEB, Bologna, ISBN 978 88 491 3697 5.

## APPENDICE: DESCRIZIONE DELL'ARGAGNO DI CECINA

Dal *Nuovo Dizionario universale tecnologico o di arti e mestieri e della economia industriale e commerciale compilato dai signori Lenormand etc.*, Prima trad. italiana, Volume 25 (reperibile come Google eBook).

«In Toscana a Valpiana ed alla Pescia usansi trombe; a Cecina parte trombe e parte una macchina idraulica composta di capacità che alternativamente riempionsi d'aria e d'acqua. [...]. L'alto fornello di Cecina è avvivato in parte da due trombe [...], ed in parte da una macchina soffiante idraulica di costruzione particolare della quale cercheremo dare un'idea in poche parole. Questa macchina, chiamata ivi argagno, è composta principalmente di due recipienti di muro larghi 4 braccia 1/2 (2,623 m), lunghi 7 braccia (4,08 m), e dell'altezza media di 2 braccia 3/4 (1,60 m). Questi due recipienti sono collocati sopra un bacino nel quale arriva una corrente d'acqua. Il fondo di questo bacino è di 1,75 m più alto del suolo dei recipienti, e tiene due aperture, per le quali l'acqua scorre alternativamente nell'uno o nell'altro recipiente; a misura che l'acqua innalzasi in quelli, solleva un galleggiante la cui asta attraversa la volta del recipiente, e quand'è pervenuta all'altezza di 2 braccia 1/4 a 2 braccia 1/2 (1,30 m), col mezzo di una leva a gomito libera uno scatto che permette ad un altro galleggiante, fatto di una palla cava di rame, ch'era stato fino allora trattenuto a forza al fondo dei recipienti, d'innalzarsi prestamente traendo seco un bilico, il quale, comunicando lo stesso moto sotto un dato angolo a tre altri bilici, produce immediatamente: 1.º la chiusura della cateratta per la quale l'acqua scorre dal bacino superiore nel recipiente, e l'apertura di quella mediante la quale il recipiente si dee vuotare; 2.º l'apertura della cateratta per la quale l'acqua del bacino va nel secondo recipiente, e la chiusura della cateratta per la quale questo vuotasi. Ciascun recipiente tiene alla parte superiore due aperture, l'una delle quali è chiusa da una valvola che s'apre dal di fuori al di dentro, e serve ad introdurre l'aria fino a che il recipiente si vuota; l'altra è munita d'una valvola che s'apre dal di dentro al di fuori, e lascia scappare l'aria mentre che il recipiente si riempie d'acqua. Da questa descrizione segue che il volume dell'acqua consumato da questa macchina indica con sufficiente esattezza il volume d'aria che somministra, meno le dispersioni e l'attrito nei tubi di condotta.

Il volume di ciascun recipiente è di 17,20 mc; ma non giungendo l'acqua che ad un'altezza di 1,30 m invece di 1,60 m ch'è quella del recipiente, non occupa se non se un volume di 13,98 mc. Per avere il reale volume, conviene sottrarre dall'uno e dall'altro 0,455 mc, ch'è il volume occupato dalla cassa nella quale è la cateratta di scarico: non rimane allora pel volume dei recipienti che 16,745 mc e per quello dell'acqua che 13,525 mc. Ciascun recipiente si riempie una sola volta ed un quarto al minuto; il volume d'acqua introdotto nei recipienti, e quindi il volume d'aria che ne esce, è di  $13,525 \times 2,5 = 33,813$  mc; ma a motivo dello spazio nocivo (3,20 mc) che resta nei recipienti, delle dispersioni o degli attriti, questo volume deve essere diminuito per lo meno di 1/4, sicchè non rimangono più che 25,360 mc.»

# SOLVING THE DIRECT GEOMETRICO-STATIC PROBLEM OF 3-3 CABLE-DRIVEN PARALLEL ROBOTS BY AN INTERVAL ANALYSIS BASED ALGORITHM

Alessandro Berti

*Dept. of Industrial Engineering (DIN),*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: alessandro.berti10@unibo.it*

Jean-Pierre Merlet

*COPRIN Project,*

*French National Institute for Research in Computer Science and Control (INRIA), Sophia-Antipolis, France*

*E-mail: jean-pierre.merlet@inria.fr*

Marco Carricato

*Dept. of Industrial Engineering (DIN),*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: marco.carricato@unibo.it*

**Abstract.** This paper studies the direct geometrico-static analysis of under-constrained cable-driven parallel robots with 3 cables. The task consists in finding all equilibrium configurations of the end-effector when the cable lengths are assigned. An interval-analysis-based procedure is proposed to numerically find the real solutions of the problem for a robot of generic geometry. The main characteristics of the algorithm are here discussed and some examples are proposed.

## 1. INTRODUCTION

Cable-driven parallel robots (CDPRs) employ cables in place of rigid-body extensible legs in order to control the end-effector pose. CDPRs strengthen classic advantages characterizing closed-chain architectures versus serial ones, like reduced mass and inertia, a larger payload to robot weight ratio, high dynamic performances, etc., while providing peculiar advantages, such as a larger workspace, reduced manufacturing and maintenance costs, ease of assembly and disassembly, high transportability, and superior modularity and reconfigurability. Thanks to these characteristics this manipulators gained increasing interest among researchers.

A CDPR is *fully-constrained* if the pose of the end-effector is completely determined when actuators are locked and, thus, all cable lengths are assigned. A CDPR is, instead, *under-constrained* if the end-effector preserves some degrees of freedom (dofs) once actua-

tors are locked [1, 2]. This occurs either when the end-effector is controlled by a number of cables  $n$  smaller than the number of dofs that it possesses with respect to the base or when some cables become slack in a fully-constrained robot. The use of CDPRs with a limited number of cables is justified in several applications (such as, for instance, rescue, service or rehabilitation operations [3–5]), in which the task to be performed requires a limited number of controlled freedoms (only  $n$  dofs may be governed by  $n$  cables) or a limitation of dexterity is acceptable in order to decrease complexity, cost, set-up time, likelihood of cable interference, etc. Furthermore, a theoretically fully-constrained CDPR may operate, in appreciable parts of its geometric workspace, as an under-constrained robot, namely when a full restraint of the end-effector may not be achieved because it would require a negative tension in one or more cables. Even though the above considerations motivate a careful study of under-constrained CDPRs, little research was conducted on them [2, 6–14].

A major challenge in the kinetostatic analysis of under-constrained CDPRs comes from the fact that, when the cable lengths are assigned, the end-effector is still movable, so that the actual configuration is determined by the applied forces. Accordingly, *loop-closure* and *mechanical-equilibrium equations* must be simultaneously solved and displacement analyses, which are aimed at determining the overall robot configuration when a set of  $n$  variables is assigned, become *geometrico-static problems* [2]. These are considerably more complex than displacement analyses of rigid-link parallel manipulators [15] and only limited results were presented so far [7, 9, 10].

Only recently Carricato and Merlet [2] proposed a general methodology for the kinematic, static and stability analysis of general under-constrained  $n$ - $n$  CDPRs, i.e. manipulators in which a fixed base and a mobile platform are connected to each other by  $n$  cables, with  $n \leq 5$  and with cable exit points on the base and anchor points on the platform being distinct. A successful implementation of this methodology, based on exact-arithmetic elimination procedures, allowed the direct geometrico-static problem (DGP) of the 3-3 CDPR to be solved [11]. A least-degree univariate polynomial in the ideal generated by the equations governing the problem was found and the DGP of the 3-3 CDPR was proven to admit at the most 156 solutions in the complex field. However, the approach used in [11] has the following drawbacks.

- Elimination by exact-arithmetic-based procedures requires equations with rational coefficients. However, when geometrical parameters are approximated by rationals having large integer denominators and numerators, the size of the coefficients may become extremely large and very difficult to manage. In addition, solving high-order polynomials in a reliable way may be difficult, as the calculation of coefficients is very sensitive to numerical errors.
- It is not possible to incorporate constraints on the unknowns, so that all roots (both complex and real, regardless of the tension sign) must be calculated and then post-processed in order to discard unfeasible ones.

Effective alternatives are provided by approaches based on floating-point arithmetic, such as homotopy continuation or interval analysis. In this paper, a method based on interval analysis is proposed. This computing technique was shown to be very efficient in solving the direct kinematics of rigid-link parallel robots [16], but its efficiency is strictly related to the heuristics incorporated in the problem-solving algorithm. The computation time for a given

problem may vary from a few seconds, if the right heuristics are adopted, to several hours with a poor implementation.

This paper is organized as follows. Section 2. provides basic notions of interval analysis. Section 3. presents the geometrico-static model of the 3-3 CDPR and it discusses the set of equations governing the DGP. Section 4. describes the structure of the code and the procedures incorporated therein. Section 5. presents the results obtained from case studies. Section 6. draws some conclusions.

## 2. INTERVAL ANALYSIS

A short introduction to interval analysis is presented in the following. More informations may be found in [17, 18].

The *real interval*  $X = [\underline{x}, \bar{x}]$  is defined as the set of real numbers  $y$  such that  $\underline{x} \leq y \leq \bar{x}$ . The *width* of the interval is  $\bar{x} - \underline{x}$  and its *mid-point* is  $(\bar{x} + \underline{x}) / 2$ . An *interval vector*  $\mathbf{X}$ , also called a *box*, is a list of intervals. The mid-point of a box is the vector whose components are the mid-points of its interval components.

If  $f(\mathbf{x})$  is a function in  $n$  unknowns, with  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , and  $\mathbf{B} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  is a box comprising an interval for each unknown, an interval evaluation  $F(\mathbf{B})$  of  $f$  over  $\mathbf{B}$  is an interval  $[\underline{F}, \bar{F}]$  such that, for any  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ ,  $\underline{F} \leq f(\mathbf{x}) \leq \bar{F}$ . There are many ways to implement an interval evaluation of a function but the simplest one is the *natural evaluation*, in which each arithmetic operation and elementary mathematical function is substituted by an interval equivalent. For example, if  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  and  $X = [4, 5]$ , the natural evaluation of  $f$  over  $X$  is:

$$f([4, 5]) = [4, 5]^2 - 2[4, 5] + 1 = [16, 25] - [8, 10] + [1, 1] = [7, 18] \quad (1)$$

It is worth emphasizing that the bounds provided by the natural evaluation of  $f$  are not exact: the upper (lower) bound may be larger (lower) than the actual maximum (minimum) of the function image, namely  $f(\mathbf{B}) = \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbf{B}\} \subseteq F(\mathbf{B})$ . Ordinarily, the overestimation decreases with the width of the box over which  $f$  is evaluated, and there are cases and methods that allow one to get bounds as tight as possible.

The following properties hold:

- if  $0 \notin [\underline{F}, \bar{F}]$ , then there is no value of  $\mathbf{x}$  such that  $f(\mathbf{x}) = 0$  (Property A);
- the bounds of  $F$  are exactly the minimum and the maximum of  $f(\mathbf{B})$  when  $f$  may be expressed so as to contain a single occurrence of each unknown  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (Property B);
- interval evaluation may be implemented on a computer in a ‘guaranteed’ way, by taking into account numerical round-off errors;
- interval arithmetic is not restricted to algebraic functions, but it may be used for all mathematical functions of engineering relevance.

The structure of a generic interval-analysis-based algorithm to solve a system of  $n$  equations in  $n$  unknowns is as follows. Let  $\mathbf{B}_1 = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  be a box and  $\mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})] = \mathbf{0}$  a vector equation to be solved within  $\mathbf{B}_1$ .  $\mathcal{L}$  is a list of boxes, initially set as  $\mathcal{L} = \{\mathbf{B}_1\}$ . An index  $i$ , initialized to 1, indicates which box  $\mathbf{B}_i$

in  $\mathcal{L}$  is currently being processed, while  $N$  denotes the number of boxes in  $\mathcal{L}$ .  $\mathcal{S}$  is another list, initially empty, storing the solutions. The interval evaluation of  $f_j$  over  $\mathbf{B}_i$  is denoted as  $F_j(\mathbf{B}_i)$ , with  $j = 1, \dots, n$ . A key component of the algorithm is the evaluation operator  $\mathcal{E}$ , which takes a box  $\mathbf{B}_i$  as an input and it returns:

- 1, if both the width of  $F_j(\mathbf{B}_i)$  is smaller than a given threshold  $\varepsilon$  and  $F_j(\mathbf{B}_i)$  includes 0 for any  $j$ ; in this case,  $\mathbf{B}_i$  is deemed a solution and it is stored in  $\mathcal{S}$ ;
- $-1$ , if  $F_j(\mathbf{B}_i)$  does not include 0 for at least one  $j$ ;
- 0, otherwise.

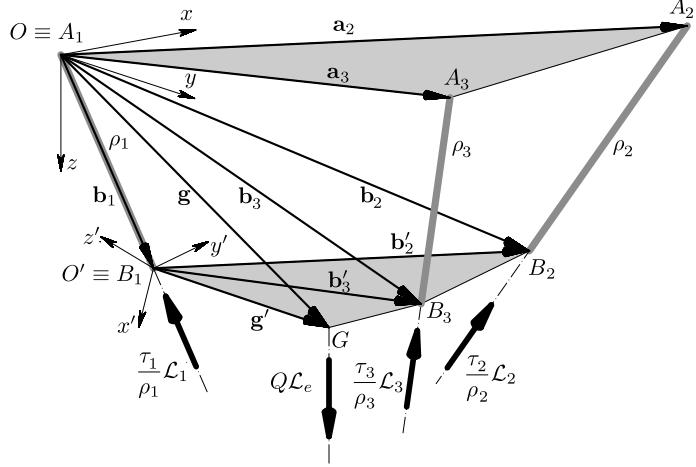
Another key component is the filter operator  $\mathcal{F}$ , which takes a box as an input and it returns:

- $-1$ , if there is no solution in the input box;
- a box smaller than the input one, if the filter determines that the removed part of the input box cannot contain a solution;
- the input box, otherwise.

The overall algorithm proceeds along the following steps:

- 1:**  $i = 1, \mathcal{L} = \{\mathbf{B}_1\}, \mathcal{S} = \{\}, N = 1$ ;
- 2:** if  $i > N$ , then return  $\mathcal{S}$ ;
- 3:** if  $\mathcal{F}(\mathbf{B}_i) = -1$ , then  $i = i + 1$ , go to 2, else  $\mathbf{B}_i = \mathcal{F}(\mathbf{B}_i)$ ;
- 4:** compute  $\mathcal{E}(\mathbf{B}_i)$ 
  - a**) if  $\mathcal{E}(\mathbf{B}_i) = -1$ , then  $i = i + 1$ , go to 2;
  - b**) if  $\mathcal{E}(\mathbf{B}_i) = 1$ , then add  $\mathbf{B}_i$  to  $\mathcal{S}$ ,  $i = i + 1$ , go to 2;
  - c**) if  $\mathcal{E}(\mathbf{B}_i) = 0$ , select a variable  $x_k$  and bisect  $X_k$  in the middle point, create two new boxes  $\mathbf{B}'_i$  and  $\mathbf{B}''_i$  from  $\mathbf{B}_i$ , replace  $\mathbf{B}_i$  with  $\{\mathbf{B}'_i, \mathbf{B}''_i\}$  in  $\mathcal{L}$ ,  $N = N + 1$ ,  $i = i + 1$ , go to 2.

The above algorithm always terminates, since the size of a box always decreases after a bisection. Provided that the new boxes emerging from a bisection are put at the top of the list, there is usually no problem of memory storage. The efficiency of the algorithm mainly depends on the effectiveness of the operators  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{F}$ , and thus on the heuristics adopted to implement them. In Section 4., some important tools of interval analysis are presented, which drastically reduce the computation time.



**Figure 1.** Geometric model of a cable driven parallel robot with three cables.

### 3. GEOMETRICO-STATIC MODEL

A mobile platform is connected to a fixed base by 3 cables. The  $i$ th cable ( $i = 1, 2, 3$ ) exits from the base at point  $A_i$  and it is connected to the platform at point  $B_i$  (Fig. 1). The platform is acted upon by a force of constant magnitude  $Q$  applied at point  $G$ , e.g. the platform weight acting through its center of mass. This force is described as a 0-pitch wrench  $Q\mathcal{L}_e$ , where  $\mathcal{L}_e$  is the normalized Plücker vector of its line of action.

$Oxyz$  is a Cartesian coordinate frame attached to the base in  $O$ , whereas  $O'x'y'z'$  is a Cartesian frame appended to the moving platform in  $O'$ . Without loss of generality, the coordinate frames are chosen in such a way that  $O \equiv A_1$ ,  $O' \equiv B_1$ , the  $z$  axis is directed as  $\mathcal{L}_e$ , point  $A_2$  lies in plane  $xz$  and point  $B_2$  lies in plane  $x'z'$ . By this choice, the position vectors of points  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  and  $G$  in  $Oxyz$  and of points  $B_1, B_2, B_3$  and  $G$  in  $O'x'y'z'$  may be respectively expressed as

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{a}_2 = [a_{2x}, 0, a_{2z}]^T, \quad \mathbf{a}_3 = [a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}]^T, \\ \mathbf{b}_1 &= [x_1, y_1, z_1]^T, \quad \mathbf{b}_2 = [x_2, y_2, z_2]^T, \quad \mathbf{b}_3 = [x_3, y_3, z_3]^T, \quad \mathbf{g} = [g_x, g_y, g_z]^T, \\ \mathbf{b}'_1 &= [0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{b}'_2 = [b'_{2x}, 0, b'_{2z}]^T, \quad \mathbf{b}'_3 = [b'_{3x}, b'_{3y}, b'_{3z}]^T, \quad \mathbf{g}' = [g'_x, g'_y, g'_z]^T, \end{aligned} \quad (2)$$

with  $a_{ij}$ ,  $b'_{ij}$  and  $g'_j$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = x, y, z$ ) being known geometric parameters and  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) and  $g_j$  ( $j = x, y, z$ ) being variables describing the platform pose.

#### Fundamental geometric and static equations

If  $\rho_i$  is the assigned length of the  $i$ th cable (taken as strictly positive), when *all* cables are active (i.e. in tension) the set of geometrical constraints imposed on the platform comprises 3 relations, namely

$$\|\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\|^2 = \rho_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Since the platform has 6 dofs, its pose is ultimately determined by mechanical equilibrium. The normalized Plücker vector of the line associated with the  $i$ th cable is  $\mathcal{L}_i/\rho_i$ , where, in axis coordinates,  $\mathcal{L}_i = [(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i); \mathbf{p}_i \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)]$  and  $\mathbf{p}_i$  is any vector from an arbitrarily-chosen reference point  $P$  (called, for brevity, *moment pole*) to the cable line. Accordingly, the wrench exerted by the  $i$ th cable on the platform is  $(\tau_i/\rho_i) \mathcal{L}_i$ , with  $\tau_i$  being a positive scalar representing the intensity of the cable tensile force. Static equilibrium may then be expressed as

$$\underbrace{[\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \mathcal{L}_3 \quad \mathcal{L}_e]}_{\mathbf{M}(P)} \begin{bmatrix} \tau_1/\rho_1 \\ \tau_2/\rho_2 \\ \tau_3/\rho_3 \\ Q \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

with  $\tau_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ .

When a direct geometrico-static problem (DGP) is solved, the cable lengths are assigned. Accordingly, Eqs. (3) and (4) form a coupled system of 9 relations whose unknowns are the platform-pose variables, grouped in the array  $\mathbf{X}$ , and the cable tensions, grouped in the array  $\boldsymbol{\tau}$ . The efficiency of the interval-analysis-based problem-solving algorithm is strictly related to the complexity of these relations. In particular, the occurrences of the same variable in each equation should be limited as much as possible (Property B). In this perspective, the most suitable choice of the *parameterization of the platform pose* and of the *formulation of the static constraints* is extremely important. These issues are discussed in the following sections.

It must be observed that, although here all cables are assumed to be active, the number of tensioned cables is a priori unknown. Accordingly, the overall solution set is obtained by solving the DGP for all possible constraint sets  $\{\|B_i - A_i\| = \rho_i \mid i \in \mathcal{W}\}$ , with  $\mathcal{W} \subseteq \{1, 2, 3\}$  and  $\text{card}(\mathcal{W}) \leq 3$ , and by retaining, for each corresponding solution set, only the solutions for which  $\|B_k - A_k\| \leq \rho_k$  and  $k \neq \mathcal{W}$ . In general, this amounts to solving 7 DGPs, namely, 1 DGP with 3 cables in tension, 3 DGPs with 2 cables in tension and 3 DGPs with 1 cable in tension. (the solution of the problem with a single taut cable is trivial, whereas the complete solution of the DGP of a CDPR suspended by 2 taut cables is available in [12]).

### Parameterization of the platform pose

A minimal representation of the platform pose is given by a set  $\mathbf{X}$  of 6 variables, one for each dof possessed by the end-effector. Such a representation may be obtained by using a vector  $\mathbf{x}$  identifying the position of a point in the platform, e.g.  $B_1$ , and an array  $\boldsymbol{\Phi}$  grouping the Rodrigues parameters defining the platform orientation with respect to the fixed frame. The substitution of these variables in Eqs. (3) and (4) provides 9 scalar relations in 9 unknowns, i.e.  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\Phi}$  and  $\boldsymbol{\tau}$ . The relations in Eq. (3) are polynomials of degree 4 in  $\mathbf{X}$ , whereas the relations in Eq. (4) are polynomials of degree 3 in  $\mathbf{X}$  and degree 1 in  $\boldsymbol{\tau}$ . A parameterization of this kind is used in [11]. Here, an alternative strategy is adopted.

The platform pose  $\mathbf{X}$  is described by 9 variables, namely the components of the position vectors of points  $B_1$ ,  $B_2$  and  $B_3$  in the  $Oxyz$  frame (Fig. 1):

$$\mathbf{b}_1 = [x_1, \quad y_1, \quad z_1] \quad \mathbf{b}_2 = [x_2, \quad y_2, \quad z_2] \quad \mathbf{b}_3 = [x_3, \quad y_3, \quad z_3], \quad (5)$$

These variables are not independent, but they must satisfy the following geometrical

constraints:

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \|\mathbf{b}'_2\|^2 &= 0 \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - \|\mathbf{b}'_3\|^2 &= 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - \|\mathbf{b}'_3 - \mathbf{b}'_2\|^2 &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

By this parameterization, the relationships in Eq. (3) assume the form

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2 &= 0 \\ (x_2 - a_{2x})^2 + y_2^2 + (z_2 - a_{2z})^2 - \rho_2^2 &= 0 \\ (x_3 - a_{3x})^2 + (y_3 - a_{3y})^2 + (z_3 - a_{3z})^2 - \rho_3^2 &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

and the position vector of  $G$  in  $Oxyz$  may be expressed as

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}_1 + \alpha(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) + \beta(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1) + \gamma[(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1)], \quad (8)$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are known constants obtained by solving the system

$$\alpha \mathbf{b}'_2 + \beta \mathbf{b}'_3 + \gamma (\mathbf{b}'_2 \times \mathbf{b}'_3) - \mathbf{g}' = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Accordingly, by choosing  $O$  as the moment pole, matrix  $\mathbf{M}(P)$  in Eq. (4) may be explicitly written as

$$\mathbf{M}(O) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 - a_{2x} & x_3 - a_{3x} & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 - a_{3y} & 0 \\ z_1 & z_2 - a_{2z} & z_3 - a_{3z} & -1 \\ 0 & -a_{2z}y_2 & a_{3y}z_3 - a_{3z}y_3 & -g_y \\ 0 & a_{2z}x_2 - a_{2x}z_2 & a_{3z}x_3 - a_{3x}z_3 & g_x \\ 0 & a_{2x}y_2 & a_{3x}y_3 - a_{3y}x_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

and static equations become

$$x_1 \frac{\tau_1}{\rho_1} + (x_2 - a_{2x}) \frac{\tau_2}{\rho_2} + (x_3 - a_{3x}) \frac{\tau_3}{\rho_3} = 0 \quad (11a)$$

$$y_1 \frac{\tau_1}{\rho_1} + y_2 \frac{\tau_2}{\rho_2} + (y_3 - a_{3y}) \frac{\tau_3}{\rho_3} = 0 \quad (11b)$$

$$z_1 \frac{\tau_1}{\rho_1} + (z_2 - a_{2z}) \frac{\tau_2}{\rho_2} + (z_3 - a_{3z}) \frac{\tau_3}{\rho_3} - Q = 0 \quad (11c)$$

$$-a_{2z}y_2 \frac{\tau_2}{\rho_2} + (a_{3y}z_3 - a_{3z}y_3) \frac{\tau_3}{\rho_3} - Qg_y = 0 \quad (11d)$$

$$(a_{2z}x_2 - a_{2x}z_2) \frac{\tau_2}{\rho_2} + (a_{3z}x_3 - a_{3x}z_3) \frac{\tau_3}{\rho_3} + Qg_x = 0 \quad (11e)$$

$$a_{2x}y_2 \frac{\tau_2}{\rho_2} + (a_{3x}y_3 - a_{3y}x_3) \frac{\tau_3}{\rho_3} = 0 \quad (11f)$$

Equations (6), (7) and (11) form a square system of 12 scalar relations in the 12 variables grouped in the array

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{X}^T, \boldsymbol{\tau}^T]^T = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3]^T. \quad (12)$$

The polynomial relations in Eqs. (6) and (7) have degree 2 in  $\mathbf{X}$ , whereas the relations in Eq. (11) have degree 2 in  $\mathbf{X}$ , degree 1 in  $\tau$  and total degree 2 in  $\mathbf{Y}$ .

The described parameterization of the platform pose, which uses 9 variables, is redundant, since a minimal representation is achieved by only 6 variables (cf. [11]). However, the redundant parameterization is preferred here, since it yields simpler lower-order polynomials, which prove to be stabler and more efficient when interval analysis methods are implemented to solve them. In fact, by property B (Section 2.), using simpler expressions is valuable even at the price of introducing a larger number of variables, in order to limit overestimation in interval evaluation. Following this approach a 15-variables parameterization was tested. The unknowns  $x_G, y_G, z_G$  were added to  $\mathbf{X}$  and the system of equations was completed with the following distance relations:

$$\begin{aligned} (x_G - x_1)^2 + (y_G - y_1)^2 + (z_G - z_1)^2 - \|\mathbf{b}'_1 - \mathbf{g}'\|^2 &= 0 \\ (x_G - x_2)^2 + (y_G - y_2)^2 + (z_G - z_2)^2 - \|\mathbf{b}'_2 - \mathbf{g}'\|^2 &= 0 \\ (x_G - x_3)^2 + (y_G - y_3)^2 + (z_G - z_3)^2 - \|\mathbf{b}'_3 - \mathbf{g}'\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Anyway, this approach has proved to be inconvenient since the increased number of unknowns produces a big amount of boxes during the bisection process and even if their evaluation is faster thanks to the reduced complexity of the expressions, the computation time drastically increases.

### Formulation of the static constraints

The DGP requires simultaneously solving the relations emerging from both the geometrical and the static constraints. According to Section 3., these constraints may be set up as a system of 12 equations having  $\mathbf{Y}$  as unknown, namely Eqs. (6), (7) and (11).

However, performances of interval analysis procedures are heavily influenced by both the number of unknowns and the complexity of the equations. For this reason, different sets of equations were tested before choosing the most performing.

As we saw in the previous section, increase the number of the unknowns in order to have simpler equations didn't bring good results for this problem. So, also the alternative strategy, consisting in trying to reduce the number of the unknowns, was investigated.

The number of unknowns may be decreased by eliminating cable tensions. By observing that Eq. (11) is linear in  $\tau_1, \tau_2$  and  $\tau_3$ , 3 linearly independent relationships may be selected within the system, say (11a), (11d) and (11e), and solved for the tensions. The expressions this way calculated may be substituted back into Eqs. (11b), (11c), (11f), thus forming a system of 3 equations in  $\mathbf{X}$  only, namely Eqs. (10b'), (10c') and (10f'). The system comprising these relationships, together with Eqs. (6) and (7) was implemented in the solution routine. This parameterization comprises 9 equations in 9 unknowns (i.e.  $\mathbf{X}$ ) and it is usually faster than the adopted one. However, this new system of equations often become ‘nearly’ singular and this produces very high computation times, making this approach unreliable. Choosing different sets of relationships in Eqs. (11) to calculate cable tensions did not seem to solve the problem so this strategy was discarded.

An alternative, more elaborated, strategy to eliminate cable tensions, presented in [11], may be designed by observing that Eq. (4) admits a solution only if

$$\text{rank} [\mathbf{M}(P)] \leq 3. \quad (14)$$

Hence, by setting all  $4 \times 4$  minors of  $\mathbf{M}(P)$  equal to zero and by conveniently changing the moment pole, a large set of linearly independent relations only comprising the platform-pose variables may be derived, i.e.

$$p_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k = 1 \dots N_p, \quad (15)$$

where  $N_p$  is an integer significantly larger than the number  $N_X$  of variables contained in  $\mathbf{X}$ . For the DGP to admit a solution, the above equations must be dependent, though in a non-linear way. When complemented with Eqs. (6) and (7), Eq. (15) allows the pose  $\mathbf{X}$  to be directly solved. The price paid for the elimination of cable tensions is that the polynomials comprised in Eq. (15) are much more involved than those in Eq. (11). In particular, they have a higher degree, more terms and more complicated coefficients. A partial simplification is obtained as follows [11].

Since the moment vector of the first column of  $\mathbf{M}(O)$  is zero (Eq. (10)), setting  $\det \mathbf{M}_{j456,1234}(O) = 0^1$ , for  $j = 1 \dots 3$ , yields

$$[x_1, \quad y_1, \quad z_1]^T \det \mathbf{M}_{456,234}(O) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \det \mathbf{M}_{456,234}(O) = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Since  $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)$  may not vanish by assumption ( $\rho_1 \neq 0$ ), Eq. (16) provides

$$\det \mathbf{M}_{456,234}(O) = 0. \quad (17)$$

Two analogous equations may be obtained by conveniently changing the moment pole, namely

$$\det \mathbf{M}_{456,134}(A_2) = 0, \quad (18)$$

$$\det \mathbf{M}_{456,124}(A_3) = 0. \quad (19)$$

The system of equations formed by Eqs. (6), (7), (17), (18) and (19) was tested and gave interesting results. For ordinary robot geometries, such that the base is larger than the platform and cable lengths position the platform well within the workspace, this parameterization showed to be more performing than the original one but when the base and the platform of the robot have similar dimension the original parameterization remains the most effective.

So, after several tests, the former parameterization formed by (6), (7) and (11) has proved to be the most effective and reliable. It must be noted also that since cable tensions appear as unknowns, lower and upper bounds for  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  and  $\tau_3$  may be conveniently specified. In particular, the lower bound may be conveniently set equal to 0, to avoid solutions with negative cable tension. The upper bound may be chosen, instead, on the basis of the maximum tensile strength of the cables.

#### 4. THE PROBLEM-SOLVING ALGORITHM

The problem-solving code was developed by using the C++ library ALIAS [19], which contains interval-analysis-based algorithms developed by the INRIA team COPRIN.

---

<sup>1</sup>The notation  $\mathbf{M}_{hij,klm}(O)$  denotes the block matrix obtained from rows  $h$ ,  $i$  and  $j$ , and columns  $k$ ,  $l$  and  $m$ , of  $\mathbf{M}(O)$ .

## Code structure

The structure outlined hereafter follows the scheme presented in Sec. 2..

The main procedure initially retrieves, from convenient text files, the geometric data of the manipulator, the search domain and the configuration parameters of the ALIAS functions incorporated into the code. The operations successively performed by the algorithm may be resumed as follows. At the generic  $i$ th step, a first filter  $\mathcal{F}_1$ , which implements the 2B method (described in Sec. 4.), tries to shrink, or even eliminate, the current box  $\mathbf{B}_i$ . After that, the evaluation operator  $\mathcal{E}$  tests if  $\mathbf{B}_i$  may contain solutions or not. If the test is negative, the box is discarded. If the test is positive and the width of the box is smaller than a given threshold  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{B}_i$  is deemed to be a solution and it is added to the solution list  $\mathcal{S}$ . If the test is positive, but the width of the box is larger than  $\varepsilon$ , another filter  $\mathcal{F}_2$ , which implements the 3B method (described in Sec. 4.), is applied to further contract the box and then  $\mathbf{B}_i$  is bisected. The adopted bisecting strategy consists in splitting the variable having the largest width.

## Domain initialization

The first step of the code consists in initializing the search domain. It is worth observing that the efficiency of interval analysis algorithms is significantly influenced by the size of the initial search space, so determining the tightest bounds for the unknowns, if they exist, is a necessary condition in order to obtain good performances from these methods. Fortunately, in robotic applications this task is quite easy since the end-effector lies inside a workspace defined by the physical constraints of joints and actuators. For the particular case of CDPRs, a first approximation (called **search domain I**) of the starting intervals for the unknowns in  $\mathbf{X}$  may be easily determined by observing that points  $\mathbf{b}_i$  (with  $i = 1\dots 3$ ) have to lie on the spheres centered in  $A_i$  and having radii  $\rho_i$ . In axis coordinate the starting intervals for points  $\mathbf{b}_i$  are:

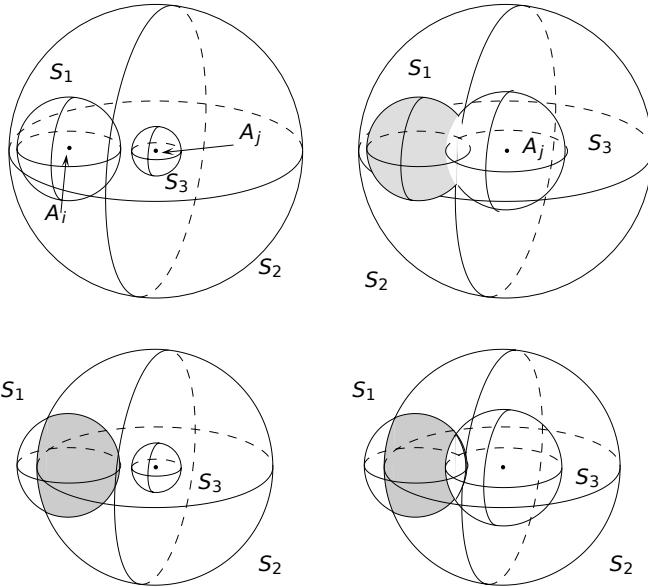
$$\begin{aligned} X_i &= [a_{ix} - \rho_i, a_{ix} + \rho_i] \\ Y_i &= [a_{iy} - \rho_i, a_{iy} + \rho_i] \\ Z_i &= [a_{iz} - \rho_i, a_{iz} + \rho_i] \end{aligned} \quad (20)$$

These intervals can be reduced considering that the distance between points  $\mathbf{b}_i$  is fixed. Let  $d_{ij}$  be the distance between the points  $\mathbf{b}_i$  and  $\mathbf{b}_j$ , the starting intervals for the unknowns may be updated as follows (called **search domain II**):

$$\begin{aligned} X_i &= [\text{Max}(a_{jx} - \rho_j - d_{ij}), \text{Min}(a_{jx} + \rho_j + d_{ij})] \\ Y_i &= [\text{Max}(a_{jy} - \rho_j - d_{ij}), \text{Min}(a_{jy} + \rho_j + d_{ij})] \\ Z_i &= [\text{Max}(a_{jz} - \rho_j - d_{ij}), \text{Min}(a_{jz} + \rho_j + d_{ij})] \end{aligned} \quad (21)$$

for  $i, j$  in  $[1\dots 3]$ .

A more sophisticated strategy to compute the initial search domain for this problem was proposed by Merlet in [16] and it is outlined hereafter. Let consider a pair of cables with attach points  $B_i, B_j$  on the platform and denote  $D_{ij}$  as the distance between  $A_i$  and  $A_j$ . As already explained before, point  $B_i$  lies on a sphere  $S_1$  centered at  $A_i$  with radius  $\rho_i$  and at the same time it is constrained to lie inside a sphere  $S_2$  centered at  $A_j$  with radius  $\rho_j + d_{ij}$  and, if  $\rho_j \geq d_{ij}$ , to lie outside a sphere  $S_3$  centered at  $A_j$  with radius  $\rho_j - d_{ij}$ . Hence, four different cases may occur for  $B_i$  (Fig. 2):



**Figure 2.** The four different cases for the possible location of  $B_i$  (presented in gray) related to the location of  $A_j$ , the leg length  $\rho_j$  and the distance between  $B_i, B_j$  [16].

1. If  $\rho_i < (\rho_j + d_{ij}) - D_{ij}$  and  $\rho_i < D_{ij} - (\rho_j - d_{ij})$ , point  $B_i$  will lie on the sphere  $S_1$ .
2. If  $\rho_i < (\rho_j + d_{ij}) - D_{ij}$  and  $\rho_i \geq D_{ij} - (\rho_j - d_{ij})$ , point  $B_i$  will lie on the part of the sphere  $S_1$  bordered by the intersection between  $S_1$  and  $S_3$  which is the farthest from  $A_j$ .
3. If  $\rho_i \geq (\rho_j + d_{ij}) - D_{ij}$  and  $\rho_i < D_{ij} - (\rho_j - d_{ij})$ , point  $B_i$  will lie on the part of the sphere  $S_1$  bordered by the intersection between  $S_1$  and  $S_2$  which is the closest to  $A_j$ .
4. If  $\rho_i \geq (\rho_j + d_{ij}) - D_{ij}$  and  $\rho_i \geq D_{ij} - (\rho_j - d_{ij})$ , point  $B_i$  will lie between the part of the sphere  $S_1$  the closest to  $A_j$  delimited by the intersection between  $S_1$  and  $S_2$  and the part of the sphere  $S_1$  the closest to  $A_j$  delimited by the intersection between  $S_1$  and  $S_3$ .

In the first case, no further information on the bound for the coordinate of  $B_i$  can be added compared to the bound found previously with the relations (21). For the three other cases, we assume first that the direction  $A_i, A_j$  is the direction of the  $x$ -axis of the reference frame. For the second case, we assume that  $C_1$  and  $C_3$  are respectively the circle projection of  $S_1$  and  $S_3$  in the  $x, z$  plane and let  $N_1, N_2$  be the intersection points between  $C_1$  and  $C_3$ , both having the same  $x$  coordinate  $x_N$ . Then,  $x_N$  is an upper bound for the  $x$  coordinate of  $B_i$ . For the third case, let  $C_2$  be the circle projection of the sphere  $S_2$  in the  $x, z$  plane and let  $M_1$  and  $M_2$  be the two intersection points of  $C_1$  and  $C_2$  (which have the same  $x$  coordinate  $x_M$ ). Clearly,  $x_M$  is a lower bound for the  $x$  coordinate of  $B_i$  which is a better lower bound than the one found with Eqs. (21). Furthermore, if  $\rho_j + d_{ij} < D_{ij}$  then  $z_M$ ; the  $z$  coordinate

of  $M$  is an upper bound for the  $z$  coordinate of  $B_i$  while  $-z_M$  is a lower bound. As there is a circular symmetry in the problem,  $-z_M$  and  $z_M$  are also lower and upper bounds for the  $y$  coordinate of  $B_i$ . As in the second case,  $x_N$  is an upper bound for the  $x$  coordinate of  $B_i$ .

Using this procedure a new bounding box  $B$  is obtained for  $B_i$ . Now, if  $A_i, A_j$  are not on the  $x$ -axis of the reference frame there is a rotation matrix  $R$  that allows us to convert a vector in our bounding box frame to a vector in the reference frame. Applying this rotation matrix on  $B$  will allow us to obtain a bounding box in the reference frame and update accordingly the bounds for the  $n$  unknowns. This process may be repeated for each pair of legs and the obtained search space is called **search domain III**.

### Evaluation operator

The evaluation operator  $\mathcal{E}$  is implemented by means of the ALIAS procedure *Solve\_General\_Gradient\_Interval* (SGGI). If the Jacobian matrix of the system to be solved exists and it may be computed, SGGI improves interval evaluation of functions by conveniently using gradients and by taking advantage of possible monotonicities [17]. SGGI also uses Moore theorem [18] to determine if a unique solution exists in a given box, in which case Krawczyk method is applied to compute the solution [19]. In addition, the *inflation method* [19] is used to increase the width of the box in which the computed solution remains unique, thus working as a filter for neighboring boxes.

A possible improvement of  $\mathcal{E}$  may be achieved by using Kantorovitch theorem [20] instead of Moore's one, to verify if a single solution exists in a given box: this theorem usually speeds up computation, especially for simple equations such as those implemented within this parameterization. This method tests every box in order to check if a solution exists and it is unique. This algorithm is safe, as it only fails when, with the current computer arithmetics, the value of at least one equation cannot be safely determined over a box reduced to a point. This also means that no other algorithm will be able to solve the system.

### Filtering operators

The performances of the algorithm largely depend on the filter operators  $\mathcal{F}_1$  and  $\mathcal{F}_2$ . Their basic operation is described hereafter.

**Filter  $\mathcal{F}_1$ : the 2B method** The 2B filter consists in rewriting each equation as the equality of two terms, thus determining if the interval evaluations of both terms are consistent and, if not, using consistency to improve the width of the interval for one or more unknowns.

Let, for instance, the equation  $x^2 - 2x + 1 = 0$  be considered. By introducing the new variable  $X = x^2$ , the original equation may be re-written as  $X = 2x - 1$ . Now, let  $[\underline{u}, \bar{u}]$  be the interval evaluation of  $2x - 1$ . If  $\bar{u} > 0$ , then the inverse function of  $X$  indicates that  $x$  should lie in  $[-\sqrt{\bar{u}}, \sqrt{\bar{u}}]$  and, by this information, the current interval of  $x$  may be updated. If  $\underline{u} > 0$ , the inverse function of  $X$  shows that  $x$  should lie outside  $[-\sqrt{\underline{u}}, \sqrt{\underline{u}}]$ : if the range of  $x$  is included in this interval, then there is no solution to the equation in the current box.

This process may be repeated for each unknown in the equation and for a number of runs depending on the rate of contraction obtained for each interval.

**Filter  $\mathcal{F}_2$ : the 3B method** By this approach, the range  $X_j = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$  for one variable  $x_j$  in a given box  $B_i$  is replaced by  $[\underline{x}_j, \underline{x}_j + \delta]$ , where  $\delta$  is an arbitrary small number, while

the ranges for the other variables remain unchanged. Then, the algorithm tests whether, for the new ranges, the system may have some solution, either by using the 2B method and/or by evaluating the equations. If the answer is negative, the range for  $x_j$  in the box  $\mathbf{B}_i$  is changed to  $[\underline{x}_j + \delta, \bar{x}_j]$ . The process is then repeated on the new range, but the width of the test interval is now doubled, i.e. the algorithm tests the interval  $[\underline{x}_j, \underline{x}_j + 2\delta]$ . The process is repeated until the no-solution test is no longer satisfied. Within the 3B filter, the 2B method may also be applied to update the range for all unknowns.

The same process may be repeated on the right side of the interval, by trying to decrease the upper bound of  $X_j$  (in this case, the interval test is  $[\bar{x}_j - \delta, \bar{x}_j]$ ).

### **Parallel implementation**

Most interval-analysis-based algorithms are appropriate for a distributed implementation. Indeed, processing a given box does not generally depend on the processing of the other boxes in the list. The implementation may be as follows. A master computer manages the list and it sends a box to a slave computer. The slave executes the algorithm, by performing a few bisections. Then, it returns the remaining boxes to the master and it waits for a new box to process. Such a scheme may be easily implemented in a network of workstations. The decrease of computation time will be, in general, less than proportional to the number of slaves, due to the overhead of the data transmission between the master and the slaves.

This approach may also take advantage of modern multi-core CPU architectures. By following this scheme and by using POSIX thread libraries, a distributed implementation of the DGP code was prepared and used on a single workstation with a multi-core CPU. In the first step, an instance of  $\mathcal{E}$  generates a few boxes and it stores them in the list  $\mathcal{L}$ . Then, a number of threads equal to the number of CPUs is created, with each one taking a box from  $\mathcal{L}$ . A local instance of  $\mathcal{E}$  performs an assigned number of bisections and it appends the generated boxes to  $\mathcal{L}$ . The solutions found, if any, are appended to the solution list  $\mathcal{S}$ . Even though implementing this algorithm on a single machine is not as effective as a distributed implementation over a computer network, the results are quite good.

## **5. DISCUSSION OF RESULTS**

### **Performances and possible improvements**

Extensive numerical investigation was performed to test the efficiency and robustness of the code, as well as to show the performances of the interval analysis approach. Two meaningful examples are reported in Section 5.. In these examples different strategies to compute the search domain were employed and the different results were reported. It's worth emphasizing that if the dimensions of the platform and the base are similar the difference between search domain II and III is negligible.

A number of possible improvements may be conceived in order to enhance the efficiency of the code. In particular, the evaluation operator  $\mathcal{E}$  may be improved by using Kantorovitch theorem [20] instead of Moore's one, to verify if a single solution exists in a given box. Furthermore, the 2B filter  $\mathcal{F}_1$  may be enhanced by introducing additional tests based on larger sets of relations chosen from the minors of matrix  $\mathbf{M}$  (cf. Eq. (10)). Indeed, when dealing with interval analysis, additional equations may allow lower computation times to be attained, as they enrich the set of available tests that may be used to exclude portions of the domain from the solution search. Another possible improvement may be obtained by using Rohn

**Table 1.** Geometric parameters, search domain and solutions for Example 1.

Data	$\mathbf{a}_2 = [10, 0, 0]^T \quad \mathbf{a}_3 = [0, 12, 0]^T \quad (\rho_1, \rho_2, \rho_3) = [7.5, 10.0, 9.5] \quad Q = 1$											
	$\mathbf{b}'_2 = [1.41, 0, 0]^T \quad \mathbf{b}'_3 = [0.71, 0.71, 1]^T \quad \mathbf{g}' = [0.71, 0.71, 0]^T$											
	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$x_3$	$y_3$	$z_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Search Domain I	-7.5	-7.5	-7.5	0	-10	-10	-9.5	2.5	-9.5	0	0	0
	7.5	7.5	7.5	20	10	10	9.5	21.5	9.5	2	2	2
II	-7.5	1.08	-7.5	0	1.08	-10	-1.42	2.5	-9.5	0	0	0
	7.5	7.5	7.5	10.93	10	10	9.5	11.43	9.5	2	2	2
III	-6.69	1.08	-6.69	0	1.08	-6.94	-1.42	2.5	-6.9	0	0	0
	6.69	5.62	6.69	10.93	10	6.94	9.5	11.43	6.9	2	2	2
	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$x_3$	$y_3$	$z_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Results	1.68	3.67	6.32	2.80	4.13	5.58	1.93	5.06	6.19	0.55	0.33	0.55
	1.38	4.48	5.85	2.62	3.90	5.51	1.54	3.83	4.61	0.68	0.31	0.61
	2.79	4.50	4.85	3.51	6.15	4.48	4.20	4.96	4.80	0.29	0.79	0.91
	3.52	4.06	5.23	2.48	3.24	5.73	2.26	4.63	5.55	0.53	0.51	0.58
	3.60	5.33	3.86	2.23	4.98	3.86	3.22	3.97	3.92	0.59	0.78	0.96
	1.34	3.47	6.51	2.40	3.33	5.58	1.36	4.26	5.34	0.68	0.25	0.49

extremal test [21] in order to check if  $M$  is rank-deficient or not. This variants will be implemented in an upgraded version of the code. This will also be able to filter stable equilibrium configurations among the admissible ones (cf. [2]).

## Examples

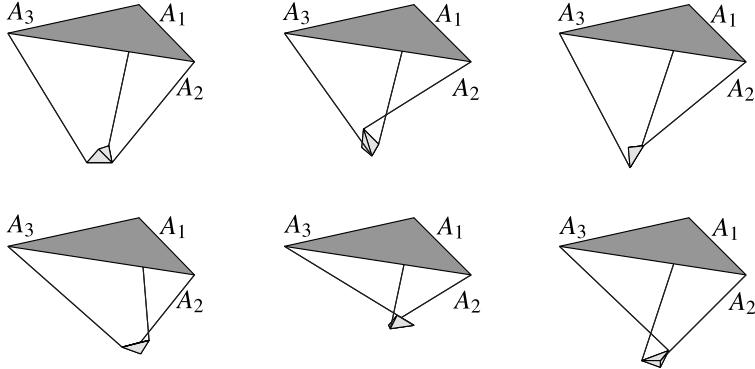
The results reported in the following examples were obtained by a personal computer Toshiba<sup>®</sup> with processor Intel<sup>®</sup> Core i7 CPU M620, 2.67 GHz, equipped with 2 cores and 4 threads. All lengths are expressed in meters and the load applied on the platform is in newtons. For both examples, the threshold  $\varepsilon$  defined in Section 4. is set equal to 0.001, whereas the parameter  $\delta$  of the 3B filter discussed in Section 4. is set equal to 0.01. The geometric parameters, the search domains obtained with different strategies and the solutions found are reported in Tables 1 and 2. In Example 1, drawn from [11] the base is considerably larger than the platform, as it is likely to occur in practice, whereas in Example 2 the dimensions of the two links are almost the same, so that (at the equilibrium) the cables are almost parallel. The computation time for Example 1 is 200s for single core implementation and 120s for parallel implementation. The computation time for Example 2 is 21s for single core implementation and 15s for parallel implementation. Equilibrium configurations found for Example 1 are shown in Fig. 3.

## 6. CONCLUSIONS

This paper applied interval-analysis methods to solve the direct geometrico-static problem of cable-driven parallel robots with 3 cables. The task consists in finding all equilibrium configurations of the end-effector when the cable lengths are assigned. The problem is challenging,

**Table 2.** Geometric parameters, search domain and solutions for Example 2.

Data	$\mathbf{a}_2 = [10, 0, 0]^T \quad \mathbf{a}_3 = [0, 12, 0]^T \quad (\rho_1, \rho_2, \rho_3) = [7.5, 10.0, 9.5] \quad Q = 1$											
	$\mathbf{b}'_2 = [9.90, 0, 0]^T \quad \mathbf{b}'_3 = [4.98, 4.98, 7]^T \quad \mathbf{g}' = [4.98, 4.98, 0]^T$											
Search Domain	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$x_3$	$y_3$	$z_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
	I	-7.5	-7.5	-7.5	0	-10	-10	-9.5	2.5	-9.5	0	0
		7.5	7.5	7.5	20	10	10	9.5	21.5	9.5	2	2
	II	-7.5	-7.4	-7.5	0	-7.4	-10	-9.5	2.5	-9.5	0	0
		7.5	7.5	7.5	19.4	10	10	9.5	19.9	9.5	2	2
	III	-7.5	-7.4	-7.5	0	-7.4	-10	-9.5	2.5	-9.5	0	0
Results		7.5	7.5	7.5	19.4	10	10	9.5	19.9	9.5	2	2
		5.54	4.50	0.77	3.93	-1.86	7.72	-1.79	6.21	7.32	0.68	0.66
		3.13	-1.22	6.71	1.22	4.68	-1.01	4.91	8.50	7.34	0.77	0.66
		-1.42	1.95	7.10	7.95	4.80	8.53	4.48	3.65	-0.67	0.58	0.57
		-0.76	0.13	7.46	8.66	2.25	9.65	1.98	9.53	8.96	0.23	0.43
		-3.98	6.25	1.17	5.43	8.89	-0.37	1.72	8.90	8.81	0.14	0.26
												1.07



**Figure 3.** Solutions of Example 1.

since loop-closure and equilibrium equations must be solved simultaneously.

The algorithm searches for all real solutions within a predetermined domain, whose frontier is computed so as to ensure that all possible solutions are enclosed within. The domain is subdivided into regions. An evaluation operator verifies if a region contains a solution, whereas some filter operators exclude portions which cannot contain roots. Regions whose assessment is uncertain are bisected and further assessed. The code is able to discard solutions in which one or more cables are subject to negative tensile forces.

Interval analysis requires great experience to be implemented with success and choosing the right heuristics has a dramatic impact on the effectiveness of this tool. The evaluation

operator adopted in the current version performs a sharper interval evaluation of functions by using gradients and by taking into account possible monotonicities. The filter operators are based on the 2B and 3B consistency methods, which significantly reduce the number of boxes processed and, thus, the computation time. Interval analysis has a structure that is appropriate for parallel implementation. Accordingly, a distributed version of the algorithm was presented that takes advantage of modern multi-core CPUs. Finally, three equation sets emerging from different formalizations of the static equilibrium were implemented and a comparison between their main advantages and disadvantages was reported.

The results obtained by the numerical experimentation conducted so far are promising. The code is robust and reliable, and it is able to find all solutions of the problem for a generic geometry within a few minutes. The code has wide margins of improvement, by enhancing the implemented heuristics. In this perspective, a number of refinements were identified that should significantly enhance the computation efficiency and that will be implemented in an upgraded version of the code.

## REFERENCES

- [1] A. Ming and T. Higuchi, 1994, “Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires—Part 1: Concept, design and control,” *Int. Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, vol. 28, no. 2, pp. 131–138.
- [2] M. Carricato and J.-P. Merlet, 2010, “Geometrico-static analysis of under-constrained cable-driven parallel robots,” in *Advances in Robot Kinematics: Motion in Man and Machine* (J. Lenarčič and M. M. Stanišić, eds.), pp. 309–319, Springer, Dordrecht.
- [3] D. Surdilovic, J. Zhang, and R. Bernhardt, 2007, “STRING-MAN: wire-robot technology for safe, flexible and human-friendly gait rehabilitation,” in *Proc. of the 2007 IEEE Int. Conference on Rehabilitation Robotics*, (Noordwijk, The Netherlands), pp. 446–453.
- [4] G. Rosati, P. Gallina, and S. Masiero, 2007, “Design, implementation and clinical tests of a Wire-Based robot for neurorehabilitation,” *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, vol. 15, no. 4, pp. 560–569.
- [5] J.-P. Merlet and D. Daney, 2010, “A portable, modular parallel wire crane for rescue operations,” in *Proc. of the 2010 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, (Anchorage, USA), pp. 2834–2839.
- [6] M. Yamamoto, N. Yanai, and A. Mohri, 2004, “Trajectory control of incompletely restrained Parallel-Wire-Suspended mechanism based on inverse dynamics,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 20, no. 5, pp. 840–850.
- [7] A. Fattah and S. K. Agrawal, 2006, “On the design of cable-suspended planar parallel robots,” *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 127, no. 5, pp. 1021–1028.
- [8] T. Heyden and C. Woernle, 2006, “Dynamics and flatness-based control of a kinematically undetermined cable suspension manipulator,” *Multibody System Dynamics*, vol. 16, no. 2, pp. 155–177.

- [9] N. Michael, S. Kim, J. Fink, and V. Kumar, 2009, “Kinematics and statics of cooperative multi-robot aerial manipulation with cables,” in *Proc. of the ASME 2009 Int. Design Engineering Technical Conferences*, vol. 7A, (San Diego, USA), pp. 83–91, paper no. DETC2009-87677.
- [10] Q. Jiang and V. Kumar, 2010, “The direct kinematics of objects suspended from cables,” in *Proc. of the ASME 2010 Int. Design Engineering Technical Conferences*, vol. 2A, (Montreal, Canada), pp. 193–202, Paper no. DETC2010-28036.
- [11] M. Carricato and J.-P. Merlet, 2011, “Direct geometrico-static problem of under-constrained cable-driven parallel robots with three cables,” in *Proc. of the 2011 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, (Shanghai, China), pp. 3011–3017.
- [12] M. Carricato and J.-P. Merlet, 2011, “Inverse geometrico-static problem of under-constrained cable-driven parallel robots with three cables,” in *Proc. of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, (Guanajuato, Mexico), pp. 1–10, Paper No. A7\_283.
- [13] G. Abbasnejad and M. Carricato, 2012, “Real solutions of the direct geometrico-static problem of under-constrained cable-driven parallel robots with 3 cables: a numerical investigation,” *Meccanica*.
- [14] J.-F. Collard and P. Cardou, 2012, “Computing the lowest equilibrium pose of a cable-suspended rigid body,” *Optimization and Engineering*.
- [15] J. M. McCarthy, 2011, “21st century kinematics: synthesis, compliance, and tensegrity,” *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 3, no. 2, pp. 020201/1–3.
- [16] J.-P. Merlet, 2004, “Solving the forward kinematics of a Gough-Type parallel manipulator with interval analysis,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 23, no. 3, pp. 221–235.
- [17] L. Jaulin, 2001, *Applied interval analysis: with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics*, vol. 1. Springer Verlag.
- [18] R. Moore and F. Bierbaum, 1979, *Methods and applications of interval analysis*, vol. 2. Society for Industrial Mathematics.
- [19] J. P. Merlet, “ALIAS-C++.” <http://www-sop.inria.fr/coprin/logiciels/ALIAS/ALIAS-C++/ALIAS-C++.html>, 2007.
- [20] R. Tapia, 1971, “The Kantorovitch theorem for Newton’s method,” *American Mathematic Monthly*, vol. 78, no. 1.ea, pp. 389–392.
- [21] C. Jansson and J. Rohn, 1999, “An algorithm for checking regularity of interval matrices,” *SIAM J.l on Matrix Analysis and Applications*, vol. 20, no. 3, pp. 756–776.



# **PROGETTAZIONE E GESTIONE DI SISTEMI DI ASSEMBLAGGIO INDUSTRIALE AD ELEVATA FLESSIBILITÀ: FULLY FLEXIBLE ASSEMBLY SYSTEMS**

Aldo Rossi

*Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale*

*Università degli Studi di Padova, Italia*

*E-mail: [aldo.rossi@unipd.it](mailto:aldo.rossi@unipd.it)*

Giulio Rosati

*Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale*

*Università degli Studi di Padova, Italia*

*E-mail: [giulio.rosati@unipd.it](mailto:giulio.rosati@unipd.it)*

Maurizio Faccio

*Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale*

*Università degli Studi di Padova, Italia*

*E-mail: [maurizio.faccio@unipd.it](mailto:maurizio.faccio@unipd.it)*

Andrea Carli

*Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale*

*Università degli Studi di Padova, Italia*

*E-mail: [andrea.carli@mechatronics.it](mailto:andrea.carli@mechatronics.it)*

Christian Finetto

*Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale*

*Università degli Studi di Padova, Italia*

*E-mail: [christian.finetto@mechatronics.it](mailto:christian.finetto@mechatronics.it)*

**Abstract.** L'assemblaggio flessibile è la risposta alla domanda in forte crescita, per molte realtà industriali, di poter affrontare in modo economico la realizzazione di piccoli lotti produttivi. Questa memoria presenta l'analisi dell'efficienza di un sistema di assemblaggio innovativo chiamato *fully-flexible assembly system (F-FAS)*, recentemente presentato dagli autori [1], concentrando l'attenzione sull'ottimizzazione dei suoi criteri progettuali e di gestione. L'articolo, dopo aver definito le principali caratteristiche del sistema F-FAS, ne introduce i parametri di efficienza. Infine è presentato lo studio ed i risultati sull'ottimizzazione dei criteri progettuali e di gestione del ciclo di lavoro.

**Keywords:** Sistemi automatizzati e flessibili di assemblaggio, F-FAS, design, sequencing.

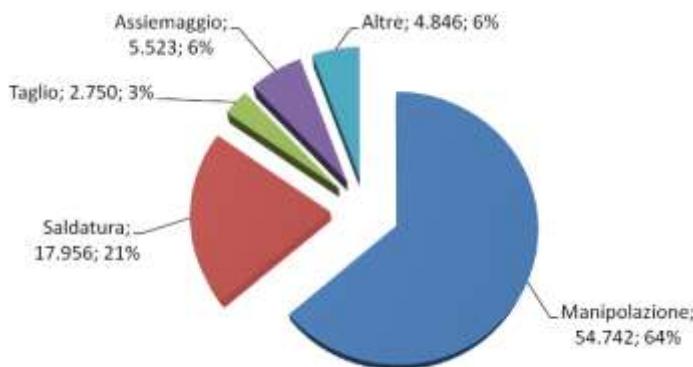
## 1. INTRODUZIONE E STATO DELL'ARTE

Al giorno d'oggi il mercato è caratterizzato da prodotti sempre più vari e con cicli di vita sempre più brevi. Per adattarsi a questo contesto e per restare competitive a livello internazionale, molte aziende stanno adottando dei sistemi di assemblaggio flessibili (FAS). Tali sistemi devono garantire, oltre alla flessibilità, anche un'elevata produttività e un basso costo unitario diretto, il che richiede lo sviluppo di nuove tecnologie per i moderni sistemi di assemblaggio [1]. Come noto, le strategie di assemblaggio tradizionali possono essere classificate come sistemi di assemblaggio manuale, sistemi di assemblaggio (automatico) flessibili e sistemi di assemblaggio (automatico) dedicato [2]. Se si desidera ottenere un'elevata flessibilità, una prima possibilità è ricorrere all'assemblaggio manuale. Questo può però influire negativamente sulla produttività, dato che l'assemblaggio manuale è soggetto a fluttuazioni della qualità e dei tempi ciclo, è legato a problematiche di salute e sicurezza degli operatori ed è fortemente influenzato da fattori ergonomici i quali, se non ottimizzati, possono influenzare negativamente la produttività.

Delle due soluzioni per l'assemblaggio automatico elencate precedentemente, l'assemblaggio dedicato rappresenta l'approccio tradizionale all'automazione industriale ma questo presenta forti elementi di rigidità, in particolare al mix produttivo [3].

I tradizionali sistemi flessibili di assemblaggio (FAS) presentano come elemento di flessibilità l'utilizzo di manipolatori antropomorfi che consentono di eseguire molteplici attività di montaggio sfruttando i 6 gradi di libertà del sistema. Dati recenti su questo tipo di robot, come dimostra la Fig. 1, indicano come un buon numero di applicazioni industriali li utilizzino inseriti in sistemi per l'assiemaggio.

In un sistema FAS tradizionale questi manipolatori sono alimentati, delle parti da assemblare, tipicamente tramite vibro-alimentatori o sistemi simili. Questa parte del sistema FAS presenta elementi di rigidità notevole, poiché il cambio o la modifica di un componente può richiedere l'inserimento di nuovi vibro-alimentatori. Per questo motivo recentemente gli autori hanno introdotto e sviluppato FAS innovativi, capaci di coniugare il problema della produttività con quello della flessibilità [1]. Di fatto i progressi nel campo dei sistemi di controllo dei robot e dei sistemi di visione hanno reso più accessibili i sistemi di assemblaggio flessibile, anche se spesso si deve trovare un compromesso tra efficienza e flessibilità [4].



**Figura 1.** Utilizzo di manipolatori in applicazioni industriali in Italia (UCIMU 2011).



**Figura 2.** Il sistema F-FAS

La cella di lavoro F-FAS (Fully flexible Assembly System) presentata dagli autori sfrutta un sistema di visione per il riconoscimento in linea d'insiemi di componenti assemblabili, il quale viene integrato con un robot dedicato al pick and place e con un vibro-alimentatore completamente flessibile. La combinazione di questi elementi permette di ottenere una cella di lavoro robotizzata con la massima flessibilità e quindi una riduzione dei costi orari di produzione dovuti alle operazioni di setup e all'intervento degli operatori umani, e una riduzione del costo dell'hardware. In particolare in questo studio si vogliono analizzare i fattori critici di progettazione e gestione del sistema F-FAS proposto al fine di massimizzarne la produttività.

## 2. IL SISTEMA F-FAS

La cella robotizzata di assemblaggio che proponiamo differisce dai tradizionali sistemi FAS in particolar modo per il suo sistema di alimentazione dei componenti. Una vasca vibrante, contenente tutti i componenti da assemblare per completare il lotto in produzione, è utilizzata per far cadere casualmente alcuni componenti su un piano vibrante; il piano è retroilluminato ed una telecamera è utilizzata per identificare i componenti su di esso presenti, calcolando la loro posizione ed orientazione, in modo che essi possano essere presi dal manipolatore industriale. Le vibrazioni del piano sono utilizzate per movimentare i componenti presenti e riorientarli. La Fig. 2 mostra il prototipo di F-FAS con indicati tutti i suoi vari sottosistemi, presente nei laboratori di Automazione e Robotica del Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali dell'Università di Padova.

Il sistema F-FAS è composto dai seguenti sottosistemi:

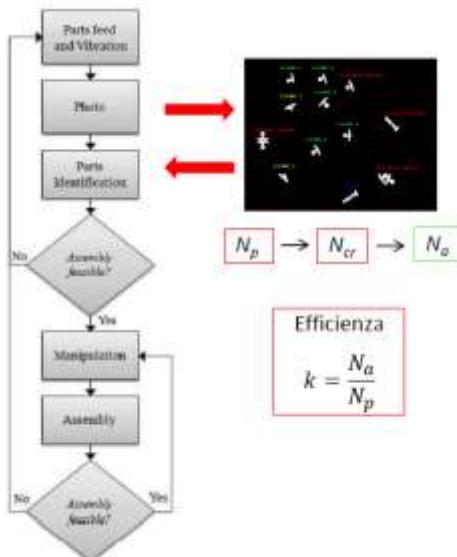
- un sistema di alimentazione completamente flessibile: comprendente una vasca vibrante, un piano vibrante e una telecamera; questo sistema di alimentazione è in grado di alimentare diverse tipologie di piccoli componenti contemporaneamente con nessuna necessità di reconfigurazione; d'altra parte la produttività è limitata dal tempo di acquisizione ed elaborazione dell'immagine, poiché questo è un tempo morto nel ciclo di lavoro [5], [6].
- una o più maschere flessibili di assemblaggio;

- un manipolatore programmabile, il cui ciclo di lavoro si deve adattare automaticamente al particolare insieme di componenti identificati di volta in volta dalla telecamera.

Un ciclo di lavoro tipico del sistema F-FAS è mostrato in Fig. 3: dopo che la vasca e il piano hanno vibrato una prima volta, viene acquisita ed elaborata un'immagine per identificare i componenti presenti sul piano. Il numero di oggetti presenti sul piano è indicato come  $N_p$ . A questo punto può verificarsi una o più situazioni di questo tipo:

- alcuni componenti non sono riconosciuti; questo può accadere ad esempio quando due oggetti sono parzialmente sovrapposti;
- alcuni componenti riconosciuti non sono prendibili dall'end-effector del manipolatore poiché sono troppo vicini gli uni agli altri;
- alcuni componenti sono riconosciuti e prendibili; il numero di questi componenti sarà indicato con  $N_{cr}$ .

Solo i componenti appartenenti all'ultimo gruppo possono essere usati per l'assemblaggio. Tuttavia solo una parte di loro viene effettivamente utilizzata nell'assemblaggio ed il loro numero è indicato con  $N_a$ . Solo certe combinazioni di componenti, infatti, permettono di assemblare un prodotto. Se almeno un prodotto può essere assemblato ( $> 0$ ), il manipolatore sarà istruito per la presa dei componenti e il loro posizionamento nella maschera di assemblaggio. Altrimenti il processo ricomincerà con una nuova fase di alimentazione (quando il numero di parti disponibili risulta minore del limite inferiore) e/o la ri-orientazione dei componenti. La Fig. 3 mostra il ciclo di funzionamento del sistema F-FAS. Come mostrato in Fig. 4 l'efficienza del sistema dipende dal numero delle parti  $N_a$  che vengono mediamente raccolte in ciascun ciclo di lavoro rispetto alle parti  $N_p$  disposte sul piano vibrante.



**Figura 3.** Ciclo di funzionamento del sistema F-FAS

### 3. EFFICIENZA DEL SISTEMA F-FAS: VARIABILI DI PROGETTAZIONE

L'efficienza del sistema F-FAS dipende dal numero delle parti  $N_a$  che vengono mediamente raccolte in ciascun ciclo di lavoro rispetto alle parti  $N_p$  disposte sul piano vibrante. Essa può essere definita quindi come:

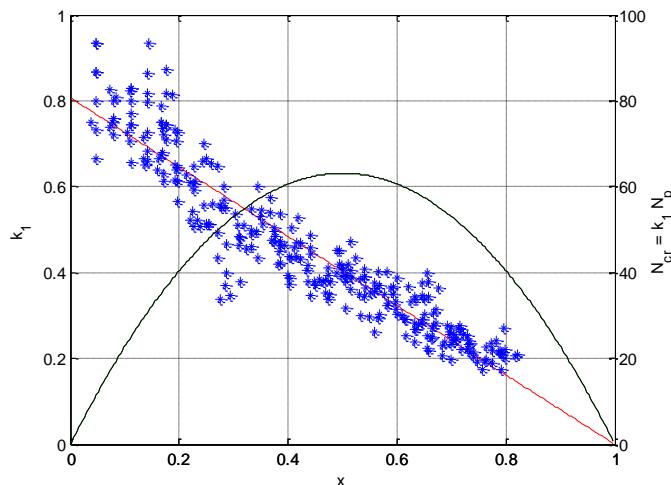
$$k = \frac{N_a}{N_p} = \frac{N_{cr}}{N_p} \frac{N_a}{N_{cr}} = k_1 k_2 \quad (1)$$

dove  $k_1$  è il rapporto tra il numero di parti riconosciute e prendibili ed il numero di parti sul piano e  $k_2$  è il rapporto tra le parti prese e quelle prendibili. Il primo parametro dipende dal livello di saturazione sul piano legato alle caratteristiche geometriche delle parti (variabili di produzione) e dalle dimensioni del piano (variabili di sistema). Il secondo parametro dipende dal mix produttivo (variabili produttive) e dalla natura aleatoria del sistema di alimentazione delle parti.

Dalle analisi sperimentali svolte attraverso il prototipo di F-FAS presente nei laboratori di robotica dell'Università di Padova è emerso che il fattore  $k_1$  è funzione pressoché lineare del livello di saturazione del piano di lavoro, dove  $N_{p,max}$  è il numero max di componenti che possono essere posti sul piano, in funzione delle loro caratteristiche geometriche, mentre  $K1_{max}$  è il massimo valore di  $K1$  raggiungibile.

$$k_1 = k_{1,max} \left( 1 - \frac{N_p}{N_{p,max}} \right) = k_{1,max}(1 - x) \quad (2)$$

La Fig. 4 riporta l'andamento sperimentale di  $K1$  in blu, contro quello teorico (linea rossa), al variare di  $x$ . Al fine di valutare poi l'andamento di  $K2$ , che è funzione come detto di variabili produttive come il mix o l'aleatorietà del processo di alimentazione, è stato sviluppato un simulatore del comportamento della cella F-FAS. Il simulatore è stato validato confrontando i suoi risultati con quelli sperimentali dati dal prototipo. L'obiettivo è analizzare al pari di  $K1$  il rapporto tra  $K2$  e  $K2_{max}$  al variare dei parametri produttivi significativi.



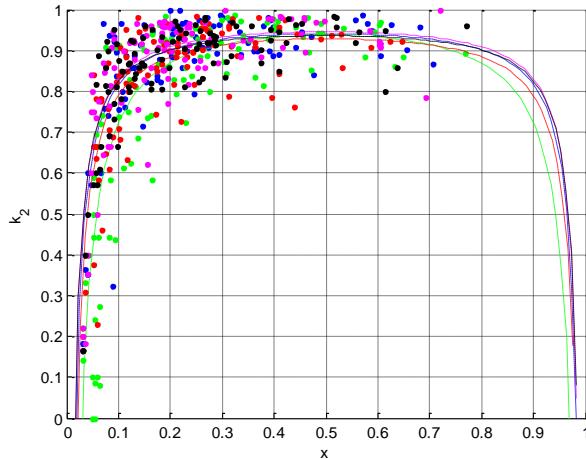
**Figura 4.**  $k1$  in funzione di  $x$ : sperimentale (stelle blu) e teorico (linea rossa)

La relazione ottenuta è definita da:

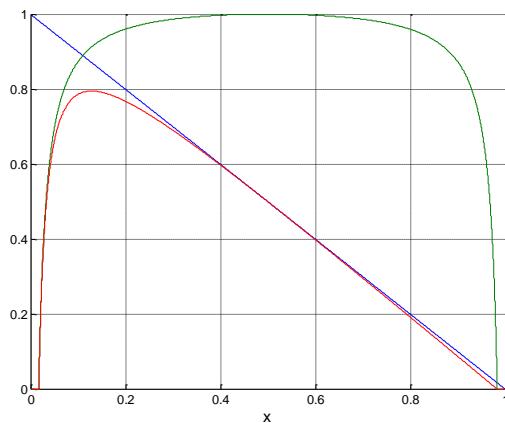
$$k_2 = \frac{N_a}{N_{cr}} = m \left( 1 - \frac{c}{N_{cr}} \right) = m \left( 1 - \frac{c}{k_{1,max} N_{p,max}} \frac{1}{x - x^2} \right) = m \left( 1 - \frac{c_n}{x - x^2} \right) \quad (3)$$

dove il parametro  $c$  rappresenta il minimo numero di parti necessarie per assemblare almeno un modello, mentre  $m$  è un parametro di scala. L'andamento è riportato in Fig. 5.

Combinando insieme i due risultati, in blu (retta) quello di  $k1$ , in verde (curva superiore) quello di  $k2$ , si ottiene l'andamento in rosso (curva inferiore) di Fig. 6.



**Figura 5.** Trend di  $k2$  per diversi mix produttivi (colori) al variare di  $x$



**Figura 6.** Andamento di  $k1/k1,max$  (linea blu),  $k2/k2,max$  (linea verde) e  $k/(k1,max \cdot k2,max)$  (linea rossa) in funzione di  $x$ .

La Fig. 6 dimostra che c'è un setting ottimale del sistema F-FAS per un certo valore di  $x$ , setting che ottimizza l'efficienza  $k$  media del sistema durante i vari cicli. Sviluppando i calcoli è possibile vedere che:

$$x_{opt} = \sqrt{c_n} = \sqrt{\frac{c}{k_{1,max}N_{p,max}}} \quad (4)$$

$X_{opt}$  rappresenta il rapporto tra  $N_p$  e  $N_{p,max}$ . Questo significa che il numero di pezzi che mediamente devono stare sul piano per ogni ciclo di funzionamento del sistema F-FAS può essere ottimizzato. Il valore di ottimo di  $x$ , e quindi di  $N_p$  è funzione del numero minimo di componenti che servono per assemblare un modello  $c$ , del numero di pezzi che saturano il piano  $N_{p,max}$  e dal valore  $k_{1,max}$  il quale dipende da fattori legati al sistema (tipo pinza, dimensioni piano, ecc.) e da fattori produttivi quali la geometria dei pezzi o la loro dimensione, perimetro, ecc.

#### 4. EFFICIENZA DEL SISTEMA F-FAS: VARIABILI DI GESTIONE DEL CICLO DI LAVORO

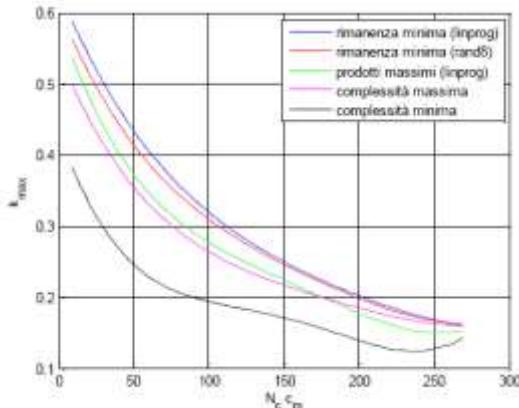
La gestione del ciclo di lavoro del sistema F-FAS ha anch'essa influenza nell'efficienza del sistema. In particolare il problema della definizione della sequenza con cui assemblare i vari modelli, una volta definito l'ordine di produzione da evadere inteso come tipologia e numero di modelli da assemblare, ha un forte impatto nell'efficienza del F-FAS. Tale problema nel mondo dell'assemblaggio con diversi modelli di prodotti presenti (mixed model) è conosciuto con il nome di sequenziamento [7], [8].

Utilizzando il simulatore del sistema F-Fas per analizzare il comportamento del fattore  $k_2$  è stato possibile valutare l'efficienza del sistema, fissati i parametri progettuali quali quelli definiti nel paragrafo precedente, al variare della sequenza di produzione.

In particolare, dato un insieme di pezzi sul piano, riconosciuti e prendibili (ossia all'interno dell'insieme  $N_{cr}$ ), può accadere che sia possibile assemblare più modelli diversi, appartenenti all'ordine di produzione iniziale da evadere. E' chiaro che l'assemblaggio di un modello vincola poi nelle fasi successive l'assemblaggio di altri modelli condizionando l'efficienza del sistema F-FAS.

Sono state analizzate diverse procedure di sequenziamento quali:

- complessità minima: assemblo nel ciclo per primo il modello con il minor numero di parti;
- complessità massima: assemblo nel ciclo per primo il modello con il maggior numero di parti;
- rimanenza minima (proglin): assemblo nel ciclo per prima la sequenza che lascia il minor numero di parti sul piano, dove tale sequenza è ottenuta tramite una procedura di ottimizzazione derivante da programmazione lineare;
- rimanenza minima (rand8): assemblo nel ciclo per prima la sequenza che lascia il minor numero di parti sul piano, dove tale sequenza è ottenuta tramite una procedura di ottimizzazione derivante da un algoritmo di ricerca random;
- prodotti massimi: assemblo nel ciclo per prima la sequenza che assembla il maggior numero di modelli.



**Figura 6.** Andamento del fattore di efficienza  $k_{max}$  al variare delle regole di sequenziamento dei modelli e per diversi valori del prodotto  $Nc \cdot Cm$

La Fig. 6 riporta i risultati del confronto di queste diverse procedure di sequenziamento al variare del prodotto  $Nc \cdot Cm$ , dove  $Nc$  rappresenta il numero di tipologie differenti di parti presenti nell'alimentatore (numero di diversi componenti), mentre  $Cm$  rappresenta il numero medio di parti che compone un modello assemblato.

L'andamento mostrato in Fig. 6 dimostra che, per tutte le tipologie di mix produttivo analizzato definite dal prodotto  $Nc \cdot Cm$ , la regola di sequenziamento a rimanenza minima è la migliore. Ovviamente procedure che definiscono univocamente la soluzione ottima come la programmazione lineare rendono più performanti gli algoritmi di ricerca casuale. Questi ultimi tuttavia danno soluzioni molto vicine all'ottimo con prestazioni di calcolo notevolmente migliori dell'ottimizzazione lineare. D'altra parte l'efficienza media cala all'aumentare di  $Nc$ , cioè del numero di tipologie differenti di parti presenti nell'alimentatore (numero di diversi componenti), e di  $Cm$ , ossia del numero medio di parti che compone un modello assemblato.

## 5. CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Il presente contributo ha l'obiettivo di analizzare il sistema Fully Flexible Assembly system (F-FAS) recentemente introdotto, focalizzandosi sui suoi parametri di progettazione e di gestione. La memoria riporta i risultati sperimentali e di simulazione su entrambi questi ambiti dimostrando come:

- Esiste una ottimizzazione di alcuni parametri di progetto al fine di massimizzare l'efficienza del sistema. In particolare il valore di ottimo di  $Np$ , ossia il numero medio di parti da avere sul piano per ciclo, è funzione del numero minimo di componenti che servono per assemblare un modello  $c$ , del numero di pezzi che saturano il piano  $Np,max$  e dal valore  $k1,max$  il quale dipende da fattori legati al sistema (tipo pinza, dimensioni piano, ecc.) e da fattori produttivi quali la geometria dei pezzi o la loro dimensione, perimetro, ecc.
- Esiste la possibilità di ottimizzare parametri di gestione quale il sequenziamento dei modelli da assemblare. I risultati dimostrano come per tutte le tipologie di mix produttivo analizzato definite dal prodotto  $Nc \cdot Cm$  la regola di sequenziamento a rimanenza minimia è la migliore. Ovviamente procedure che definiscono univocamente la soluzione ottima come la programmazione lineare performano

meglio di algoritmi di ricerca casuale, i quali tuttavia danno soluzioni molto vicine all'ottimo con prestazioni di calcolo notevolmente migliori dell'ottimizzazione lineare. D'altra parte l'efficienza media cala all'aumentare di  $N_c$ , cioè del numero di tipologie differenti di parti presenti nell'alimentatore.

Gli sviluppi futuri riguardano attualmente l'applicazione del sistema F-FAS in diversi contesti industriali quali il settore della produzione dell'occhiale, della produzione di gioielli, della preparazione della componentistica per la produzione di schede elettroniche PTH e del montaggio di prodotti del settore meccanico a basso numero di componenti ma di dimensioni mediamente maggiori di quelle definite nei settori precedentemente descritti. L'obiettivo è quello di validare sul campo i risultati sperimentali ottenuti, diffondendo la tecnologia di assemblaggio F-FAS nel tessuto industriale, valutandone al contempo le prestazioni al variare del settore.

## REFERENZE

- [1] Rosati G., Faccio M., Carli A., Rossi A., 2013. "Fully Flexible Assembly System (F-FAS): A New Concept in Flexible Automation". *Assembly Automation*. **33**(1), pp. 8–21
- [2] Rampersad H., 1994. *Integrated and Simultaneous Design for Robotic Assembly*. John Wiley & Sons
- [3] Wolfson W., Gordon S. J., 1997. "Designing a parts feeding system for maximum flexibility". *Assembly Automation*. **17**(2), pp. 116-121
- [4] M. Magnusson, P. Boccardelli e S. Börjesson, 2009. "Managing the Efficiency-Flexibility Tension in Innovation: Strategic and Organizational Aspects". *Creativity and Innovation Management*. **18**(1), pp. 2-7
- [5] G. Rosati, G. Boschetti, A. Biondi e A. Rossi, 2009. "On-line dimensional measurement of small components on the eyeglasses assembly line". *Optics and Lasers in Engineering*. **47**(3-4), pp. 320-328
- [6] G. Rosati, G. Boschetti, A. Biondi e A. Rossi, 2009. "Real-time defect detection on highly reflective curved surfaces, Optics and Lasers in Engineering". *Optics and Lasers in Engineering*. **47**(3-4), pp. 379-384
- [7] Battini D., Faccio M., Persona A., Sgarbossa F., 2009. "Balancing-sequencing for a mixed model assembly system in case of finite buffer capacity". *Journal of Advanced Manufacturing Technology*. **44**(3-4), pp. 345-359
- [8] Azzi A., Battini D., Faccio M., Persona A., 2012. "Sequencing Procedure For Balancing The Workloads Variations in case of Mixed Model Assembly System with Multiple Secondary Feeder Lines". *International Journal of Production Research*. **50**(21), pp. 6081-6098



# METODO DI PROGETTAZIONE DI SISTEMI DI FIXTURE PER L'ASSEMBLAGGIO DI TELAI AUTOMOBILISTICI MEDIANTE ANALISI DI SENSIBILITÀ

A. O. Andrisano, M. Ansaloni, G. Berselli, E. Bonazzi, F. Gherardini, F. Leali, M. Pellicciari, F. Pini, C. Renzi, A. Vergnano

Dipartimento di Ingegneria “Enzo Ferrari”

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

E-mail: enrico.bonazzi@unimore.it

**Abstract.** I sistemi di fixture influenzano enormemente i processi di assemblaggio in molti campi della meccanica, in quanto influiscono direttamente sul calcolo della catena di tolleranza. La memoria illustra un metodo di progettazione che permette di comparare e valutare differenti sistemi di fissaggio, considerando sia la posizione che il tipo di locatori. Poiché i sistemi di fixture possono essere considerati dei sistemi multi-prestazionali, il confronto viene eseguito attraverso l’impiego di opportuni indici di sensibilità. Il metodo è stato applicato ad un caso di studio in ambito automotive relativo alla saldatura in continuo di estrusi in alluminio, con l’obiettivo di garantire misure di gap con la minore variabilità possibile.

**Keywords:** sistema di fixture, analisi di sensibilità, assemblaggio telai automotive

## 1. INTRODUZIONE

Nell’industria automobilistica, la qualità finale del processo di assemblaggio riveste un ruolo fondamentale, in particolar modo nella produzione di telai auto di alta gamma, dove l’elevata precisione di produzione/assemblaggio è necessaria per garantire rigidità, performance e sicurezza. La buona riuscita del processo di assemblaggio dipende fortemente dall’accuratezza e dalla robustezza del sistema di fixture (SF), essendo quest’ultimo responsabile della posizione relativa dei vari sotto-assiemni del telaio durante l’esecuzione del processo, e.g. saldatura. Ogni piccolo disallineamento tra i vari elementi può portare allo scarto dell’intero chassis.

Un SF è un dispositivo composto da locatori, morsetti e supporti la cui progettazione assume un’importanza fondamentale in campo ingegneristico. Ad esso è associato il 10-20% del costo totale del sistema di produzione [1] e spesso costituisce un importante collo di bottiglia nella realizzazione di prodotti/processi complessi.

Il processo di progettazione dei SF può essere suddiviso in quattro fasi: setup planning, fixture planning, unit design e verification [2-4]. Durante il setup planning la parte e le informazioni tecnologiche vengono analizzate al fine di determinare il numero di setup richiesti per realizzare tutte le operazioni del processo produttivo, e per definire gli opportuni datum per ogni setup. La fase di fixture planning definisce lo schema dei locatori basandosi sui requisiti di fissaggio. Tale schema identifica sia le superfici della parte che deve essere bloccata dal SF, sia la posizione corrispondente dei punti di localizzazione e di fissaggio. Il numero e la posizione di suddetti punti deve essere tale da garantire che tutti i

gradi di libertà della parte siano adeguatamente vincolati. Nella terza fase, gli elementi più adatti per la localizzazione e il fissaggio precedentemente individuati, vengono progettati e prodotti. Nell'ultima fase, infine, il SF viene testato, allo scopo di garantire il soddisfacimento di tutti i requisiti che ne hanno guidato il processo di progettazione [5-9]. Nell'attuale ambiente industriale però, viene utilizzato un metodo prevalentemente basato sull'esperienza dei progettisti, attraverso un approccio di tipo trial and error.

Numerose tecniche e strumenti Computer Aided Fixture Design (CAFD) sono state proposte negli ultimi anni per la progettazione dei SF, in particolar modo per quanto riguarda il campo delle lavorazioni meccaniche, mentre un interesse minore è stato rivolto ai problemi legati all'assemblaggio.

Tuttavia molte problematiche sono ancora oggi aperte. In particolare, sembra mancare un reale metodo di confronto dei SF che tenga conto non solo della disposizione, ma anche del tipo di locatore impiegato (dato che rappresenta un fattore evidente di influenza sulle performance finali del SF).

Nel presente articolo si propone una metodologia CAE volta a integrare questo aspetto nel processo di progettazione. Per comparare e valutare i diversi SF, è stata impiegata un'analisi di sensibilità, in grado di considerare contemporaneamente la posizione e la tipologia dei locatori. In particolare è stato affrontato il problema della determinazione del set di locatori da impiegare, al fine di garantire determinati requisiti funzionali di un assieme. La sezione 2 illustra brevemente lo stato dell'arte attuale riguardante i sistemi CAFD; la sezione 3 descrive la metodologia proposta; la sezione 4 illustra un caso di studio e i risultati dell'analisi di sensibilità; infine le conclusioni sono presentate nella sezione 5.

## 2. STATO DELL'ARTE

L'attuale ricerca scientifica sui CAFD si focalizza principalmente sullo sviluppo di due tematiche: come rappresentare e raccogliere le conoscenze legate alla progettazione dei SF attraverso un ambiente Computer Aided, e come implementare tale procedura ingegneristica nella realtà industriale.

Wang et al. [1] descrivono vari ambiti di ricerca che sono promettenti in ambito CAFD: *knowledge modeling*, *data mining*, apprendimento automatico (*machine learning*). Inoltre evidenziano l'importanza assoluta che la progettazione del SF riveste all'interno del percorso di sviluppo di prodotto/processo e suggeriscono di considerarla come un'attività obbligatoria per gli ingegneri. Boyle et al. [2] presentano una ricerca bibliografica comprensiva di oltre settantacinque strumenti CAFD, soffermandosi in particolare sulle proposte riguardanti la fase di progettazione dei SF e sulle tecnologie su cui questi ultimi si basano. Gli autori arrivano alla conclusione che deve essere prestata maggiore attenzione all'integrazione con cui gli approcci CAFD esplicano le quattro fasi del processo di progettazione, dal momento che, ad oggi, essi risultano essere molto segmentati. Il loro raggruppamento in un unico quadro, permetterebbe di migliorare la comprensione globale di tutti i requisiti di base dei SF, fondamentale per guidare in maniera efficace il processo di progettazione. Wang et al. [3] propongono un metodo denominato *Case-Based Reasoning*, volto allo studio e alla sistematizzazione dei risultati più importanti ottenuti nell'ambito della progettazione dei SF degli ultimi anni. Tale metodo identifica una procedura per ricavare rapidamente un SF concettuale.

Hunter et al. [4] sviluppano ulteriormente alcuni modelli per la raccolta e la modellazione delle conoscenze riguardanti la progettazione di SF, estendendoli a molti campi applicativi. In particolare presentano un *knowledge template* basato sulla distinzione tra task di analisi e di sintesi. Il *knowledge template* rappresenta uno schema con cui

definire le entità più utilizzate nella progettazione di SF per lavorazioni meccaniche. Secondo gli autori, tale approccio può essere facilmente riutilizzato in un processo automatico [5] per la progettazione di SF, per l'ispezione, il montaggio o la saldatura.

L'implementazione di una procedura ingegneristica per la progettazione dei SF utilizzabile in ambito industriale, parte dalla ricerca delle possibili soluzioni concettuali del SF. La problematica riguardante la disposizione dei componenti del SF viene affrontato da numerosi autori. In particolare, Roy et al. [6] propongono un algoritmo euristico per la selezione automatica della posizione dei locatori e dei morsetti per una data geometria della parte. Gli stessi presentano inoltre la sua integrazione in una struttura *knowledge-based*. Ngoi et al. [7] propongono alcuni principi di progettazione e suddividono i SF in tre differenti tipologie di unità, in base alla loro funzione: localizzazione, fissaggio, supporto. Qui et al. [8] presentano un metodo di progettazione dello schema del SF attraverso il calcolo dell'influenza data dagli elementi del SF e dalla parte stessa sulla precisione finale.

Yu et al. [9] descrivono un approccio per determinare velocemente e automaticamente i principali punti di bloccaggio a partire dalla geometria del pezzo. La procedura consiste nell'estrazione dei contorni del pezzo, nella loro semplificazione, nella determinazione di possibili piani di serraggio sulla parte e nella selezione dei piani ottimali.

Numerosi altri autori presentano opere circa l'ottimizzazione dei SF. Wu et al. [10] propongono un'analisi geometrica per la progettazione del SF considerando differenti posizioni dei locatori. Pelinescu et al. [11] utilizzano molteplici criteri di qualità , al fine di definire la miglior soluzione: la scelta finale dipende da un compromesso tra i vari requisiti di prestazione. Kaya [12] impiega algoritmi genetici al fine di definire il FS ottimale (considerato come insieme di locatori, morsetti e supporti), che minimizzi gli errori di deformazione elastica del componente da lavorare. Liu et al. [13] propongono un metodo di ottimizzazione del SF per la fresatura periferica di un pezzo caratterizzato da bassa rigidezza.

Dall'analisi dello stato dell'arte è stato possibile distinguere due proprietà fondamentali del SF: il layout e la configurazione. Il layout rappresenta la posizione spaziale dei locatori. La configurazione, invece, è costituita dalla tipologia dei locatori utilizzati (puntalini, perni, etc.). Tali proprietà discendono dal principio di localizzazione che si intende utilizzare per posizionare il componente nello spazio e dai requisiti progettuali.

Durante la seconda fase del processo di progettazione (*fixture planning*), la configurazione del SF è solitamente assunta come dato e nessuna analisi viene fatta per investigare i suoi effetti sulle misurazioni finali.

Il problema dell'analisi dei differenti tipi di locatori è marginalmente affrontata in letteratura e non viene sufficientemente sviluppata dagli odierni strumenti CAFD. Pertanto, al fine di realizzare un processo di progettazione completo del SF, è necessario affrontare questo problema.

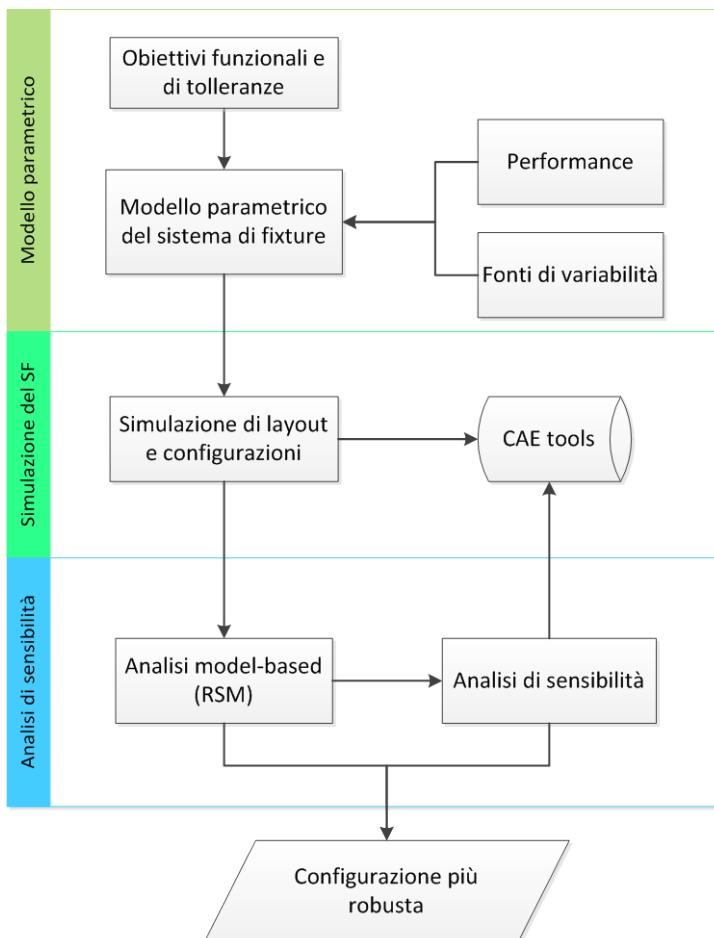
### 3. METODO

Dopo la fase di *setup planning*, sono praticabili due possibili scenari di progettazione: nel primo i requisiti geometrici e tecnologici determinano sia il layout che la configurazione, imponendo corrispondenti scelte progettuali. Quando però i requisiti non definiscono completamente la tipologia e la disposizione dei locatori, è possibile adottare differenti soluzioni. In questo caso il progettista solitamente si basa sul proprio know-how per la loro determinazione. Tale scelta avviene a partire dal fatto che è necessario vincolare i sei gradi di libertà ed evitare possibili inflessioni nel caso di componenti deformabili.

Seguendo l'approccio CAFD, invece di basarsi sull'esperienza del progettista, diventa necessario disporre di una metodologia che permetta di scegliere tra differenti configurazioni e layout. Tale scelta deve essere effettuata dopo aver individuato gli obiettivi, o i requisiti, dell'insieme finale. La formalizzazione degli obiettivi è possibile attraverso un approccio *model-based* del SF.

Per analizzare gli effetti di differenti configurazioni di SF, è necessario un modello che leggi la funzionalità dei differenti tipi di locatori e le tolleranze sugli stessi, con i requisiti funzionali dell'insieme. L'effetto finale delle tolleranze dei locatori dipende dalla tipologia degli stessi. Questo porta a configurazioni che consentono tolleranze più ampie.

Dopo tali considerazioni si propone la metodologia illustrata in Fig.1. Essa si compone di differenti fasi.



**Figura 1.** Diagramma di flusso relativo alla metodologia proposta

Il metodo di progettazione si basa su tre passi. Nel primo si ha la definizione del modello teorico parametrico a partire dagli obiettivi funzionali del SF (es. la posizione e l'orientamento di un dato gap tra due sottogruppi) e dal campo di tolleranza desiderata (es. obiettivo di tolleranza), in funzione del processo tecnologico o delle specifiche di qualità. Il secondo passo è la simulazione numerica delle catene di tolleranza, realizzata attraverso la variazione statistica di ogni tolleranza, per i diversi layout e configurazioni considerati. A tal proposito è stato utilizzato uno strumento “Computer Aided Tolerance” (CAT). L'ultimo passo consiste nell'eseguire l'analisi di sensibilità della configurazione del sistema per ogni dato layout, al fine di identificare il SF più adatto e robusto, e raggiungere gli obiettivi funzionali e di tolleranza.

Una criticità di questo approccio è l'individuazione di un metodo che permetta di confrontare le varie configurazioni del SF. Generalmente non è possibile comparare diverse tipologie di locatori principalmente per due motivi: sono interessati da differenti tipologie di tolleranze; hanno differenti funzioni (e.g. un foro riferisce differenti direzioni rispetto a un puntalino).

### Criteri di performance di qualità

Nel presente lavoro vengono presentati una serie di indici di qualità, necessari per confrontare le diverse configurazioni del SF. Tali indici si basano sull'analisi della sensibilità del SF.

Un SF è caratterizzato dall'avere differenti obiettivi di progettazione[14]. Quindi è necessario valutare il sistema in relazione ai requisiti e alle performance complessivi. Tra i differenti contributi presenti in letteratura vari utilizzano l'analisi di sensibilità per valutare l'andamento delle prestazioni, in relazione alla variazione dei parametri che caratterizzano un sistema [15-16]. In particolare in [17] viene mostrato come estendere l'analisi di sensibilità a processi tecnologici o prodotti ingegneristici, utilizzando l'approccio *model-based* e considerando simultaneamente differenti requisiti sulle prestazioni. Seguendo questo approccio l'analisi di sensibilità viene utilizzata per misurare la robustezza di un SF.

Matematicamente il problema della sensibilità può essere formulato attraverso l'introduzione di un vettore n-dimensionale  $\bar{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  di parametri e un vettore m-dimensionale  $\bar{f} = [f_1, \dots, f_m]^T$  delle performance di sistema. Questi vettori sono legati dalla relazione  $\bar{f} = \bar{f}(\bar{q})$ . La variazione delle performance  $\Delta$ , causata dalla deviazione dei parametri, può essere approssimata dalla relazione lineare :

$$\Delta = J \cdot dq \quad (1)$$

Nella precedente equazione  $J$  rappresenta la matrice Jacobiana del sistema, valutata per una particolare set di parametri, ed essa descrive la sensibilità del sistema. In letteratura ([15]) viene indicato il limite di validità di (1). Il dominio che contiene tutte le possibili variazioni dei parametri è lo spazio delle variazioni (Variation Space) [17]. La norma del vettore  $\Delta$  permette di legare le variazioni di performance, secondo gli obiettivi di processo:

$$\|\Delta\|_2^2 = [J \cdot dq]^T \cdot [J \cdot dq] = \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 \quad (2)$$

Nell'equazione (2) il valore del quadrato della norma è uguale alla somma dei quadrati delle singole performance di tolleranza. Posto che la matrice caratteristica di progettazione (Characteristic Design Matrix) sia  $A = J^T \cdot J$ , l'equazione (2) diventa:

$$\|\Delta\|_2^2 = [dq]^T \cdot A \cdot [dq] \quad (2.1)$$

Le equazioni (2) e (2.1) indicano che la matrice caratteristica di progettazione è definita semi-positiva e ha  $n$  autovettori ortonormali e  $n$  autovalori non negativi. Il numero di autovalori positivi è pari al suo rango.

Gli autovettori di  $A$  definiscono forma, dimensione e orientazione di un iper-ellissoide, all'interno di una famiglia, a seconda del valore scalare  $\|\Delta\|_2$  e i punti della superficie dell'iper-ellissoide sono rappresentati dal medesimo valore  $\|\Delta\|_2$ .

Dal momento che la lunghezza dei semiassi è inversamente proporzionale all'autovalore, le performance risultano meno sensibili lungo la direzione dell'autovalore maggiore e più sensibili nella direzione di quello minore. Quando alcuni autovalori assumono un valore nullo, l'iper-ellissoide degenera in un cilindroide.

In [17] si introduce il *Feasible Space*, definito come la porzione dello spazio di variazione dove le performance totali del sistema sono accettabili. Quando il Feasible Space è descritto topologicamente da un cilindroide, esso diventa illimitato e non può essere eseguita l'analisi di sensibilità per una data direzione. Pertanto il cilindroide deve essere ricondotto ad un iper-ellissoide, a condizione che le direzioni degli assi principali rimangano le stesse [15].

Un criterio topologico per eseguire l'analisi di sensibilità può essere ora definito. La robustezza del sistema è massima quando la sua sensibilità è minimizzata. In tale condizione, la dimensione del Feasible Space risulta massima e la Tolerance Box ricopre la maggior parte possibile del Feasible Space, senza superare i limiti dell'ellisse. I valori assunti al di fuori dell'ellisse provocano la degradazione delle prestazioni finali e devono, pertanto, essere scartati.

Alcuni indici di sensibilità possono essere introdotti per valutare le dimensioni e l'orientazione del Feasible Space. I migliori candidati alla progettazione sono descritti dai seguenti indici, presentati in ordine di importanza [17]:

- Minimo valore per il massimo autovalore della matrice caratteristica di progettazione ( $\lambda_N$ );
- Massimo Feasible Space ( $V_f$ );
- Rapporto minimo tra Feasible Space e l'iper-volume della Tollerance Box  $n$ -dimensionale ( $\beta_U$ ).

#### 4. CASO DI STUDIO

In molti ambiti industriali, e.g. automotive ed aerospace, la minimizzazione del peso delle strutture è una necessità che deve essere affiancata da elevati livelli di efficienza produttiva e di performance del prodotto [18]. Ne è un esempio il caso di telai automobilistici, che hanno elevata influenza sulla diminuzione del peso totale del veicolo e sulle sue prestazioni. Tale riduzione può essere ottenuta attraverso la sostituzione dei componenti ottenuti tramite tecnologie di produzione massive, e.g. fusione, con componenti estrusivi, che permettono di raggiungere gli obiettivi prefissati [19].

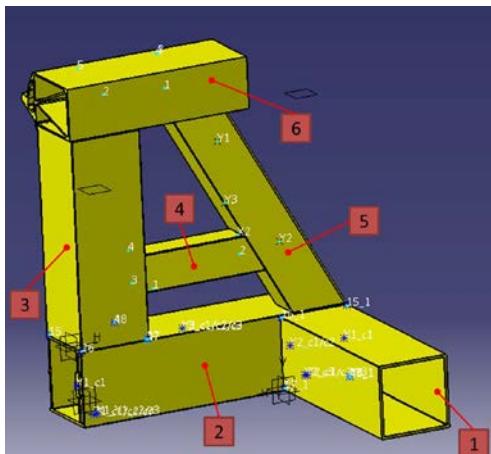
L'adozione di nuovi componenti comporta la riprogettazione del processo tecnologico utilizzato per la realizzazione del telaio attraverso: lo sviluppo di nuovi metodi produttivi, l'adozione di tecnologie innovative e l'utilizzo di un approccio integrato [20].

L'assieme assunto come caso di studio è composto da una serie di componenti estrusi che devono essere sottoposti a un successivo processo di saldatura in continuo. Tale tecnologia impone dei vincoli sulle distanze relative tra le superfici funzionali che dovranno essere unite, Fig. 2. Le parti sono caratterizzate da opportune tolleranze. Queste sono il risultato dei processi tecnologici e delle successive operazioni, necessari per l'ottenimento dei componenti. Le tolleranze geometriche e dimensionali sono presentate in [21]. Il problema consiste nell'assicurare la distanza ottimale tra le parti, necessaria per la saldatura. Per garantire ciò è essenziale progettare un appropriato SF che permetta di posizionare le parti in maniera corretta, tenendo conto delle tolleranze di progetto.

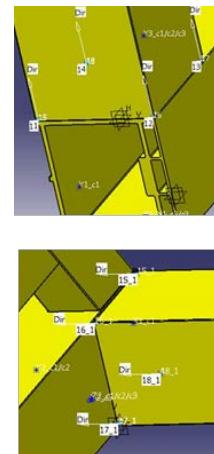
Il layout è stato assunto come imposto, per ciascuna delle configurazioni, da vincoli sulla geometria delle parti. Quindi la problematica da affrontare è la determinazione del tipo di locatori da impiegare, investigando gli effetti delle tolleranze sui gap.

Nel caso di studio proposto ci si è concentrati su due specifici obiettivi del sistema il cui comportamento influenzano il risultato finale, Fig. 3. Il metodo proposto permette la valutazione delle performance del sistema considerandole contemporaneamente. Al fine di riprodurre le variazioni geometriche è stato impiegato uno strumento Computer Aided Tolerance (CAT), in grado di simulare e analizzare la catena di tolleranze. Il software scelto è 3DCS® della Dimensional Control System Inc.

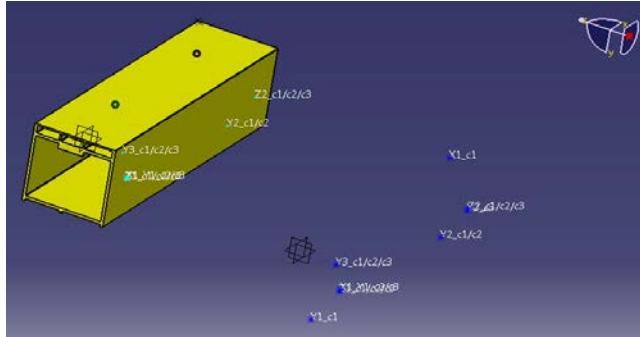
Nel caso specifico, è stata presa in considerazione la variazione di posizione di un'unica parte (parte N°2), mentre le altre sono state mantenute in posizione nominale. Per tale componente è stato possibile definire tre configurazioni del SF.



**Figura 2.** Sottotelaio assemblato



**Figura 3.** Definizione dei Gap1 e Gap 2



**Fig. 4.** Simulazione per punti del sistema di fixture

### Simulazione di differenti configurazioni

La metodologia di localizzazione utilizzata, considerando il componente perfettamente rigido, è stato il metodo 3-2-1. Il primo problema affrontato è stato la determinazione della direzione principale per la localizzazione della parte. Pertanto si è assunta come direzione principale la Y, la direzione Z come secondaria e infine la direzione X come terziaria. Il software consente di simulare il sistema di fissaggio, senza la necessità del modello CAD, attraverso la rappresentazione dei locatori mediante punti, Fig.4.

Con queste ipotesi le tre possibili configurazioni sono:

- C1: 6 pad, uno per ogni grado di libertà;
- C2: 4 pad e 1 pin che sopprime due gradi di libertà (sul piano X-Y);
- C3: 3 pad, 1 pin che sopprime due gradi di libertà (sul piano X-Y) e 1 pin che vincola il rimanente grado di libertà (Y).

Ai punti che simulano i pad è stata attribuita una tolleranza di posizione lungo la relativa direzione di riferimento, al fine di simulare la variazione dimensionale dei locatori. Per i punti che rappresentano i pin è stata utilizzata una tolleranza tale da far variare la loro posizione in un intorno circolare del valore nominale sul piano X-Y. Ciò equivale a simulare la variazione della condizione di accoppiamento perno/foro.

Nell'analisi effettuata sono state impostate due misure tra la parte di riferimento e le altre: una lungo la direzione Z, l'altra lungo la direzione Y. Le due misurazioni tra le parti sono state effettuate attraverso quattro rilevamenti punto-a-punto per ognuna (Fig. 3). Questo perché le variazioni geometriche delle superfici portano a spostamenti che non sono riconducibili a semplici offset delle stesse. Pertanto la distanza minima viene calcolata tenendo conto del minore dei quattro, al fine di monitorare la presenza di interferenza tra le parti.

Attraverso una serie di simulazioni è stato possibile ottenere le superfici di risposta dei gap in funzione delle tolleranze dei locatori e della parte.

$$f_i(\bar{q}) = \alpha_i + \bar{\beta}_i^T \bar{q} + \bar{q}^T Q_i \bar{q} \quad (3)$$

I coefficienti delle diverse superfici sono presentate in Tab. 1.

**Tabella 1.** Coefficienti delle curve di risposta per ogni gap e configurazione.

Coeff.	G1			G2		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3
$\alpha$	1.012111	1.063422	1.067034	1.016076	1.107286	1.092760
$\beta_1$	-0.003355	-0.319909	-0.447733	-0.002213	-0.284497	-0.174928
$\beta_2$	-0.096880	-0.009028	-0.316297	-0.064478	-0.287083	-0.298923
$\beta_3$	-0.002567	-0.147043	-0.006208	-0.322104	-0.105526	-0.345294
$Q_{11}$	0.001626	-0.649195	-0.203982	0.001168	-0.538888	-0.229279
$Q_{12}$	0.001996	0.005180	0.181026	0.001301	0.004202	0.202515
$Q_{22}$	-0.926778	-0.000979	-0.331034	-0.721200	-0.001376	-0.377633
$Q_{13}$	0.000141	0.183990	0.003281	-0.000087	0.140971	0.003702
$Q_{23}$	0.002931	0.011046	0.006038	0.002074	0.008860	0.006773
$Q_{33}$	0.000238	-0.189944	0.000172	-0.000190	-0.133593	-0.000341

## 5. RISULTATI

Dopo aver eseguito le simulazioni, attraverso lo strumento CAT è stato possibile indagare quali siano le tolleranze principali che influenzano i gap per ogni configurazione. In questo modo si è quantificata l'importanza relativa di ogni tolleranza all'interno di una determinata configurazione.

I risultati mostrano che, per la configurazione C1, la tolleranza che ha peso maggiore agisce lungo la direzione Y per entrambi i gap, inoltre la tolleranza sui pad in direzione Z ha un elevata influenza sul gap 2. Per la configurazione C2, non sono presenti tolleranze con un effetto trascurabile per entrambi i gap, ma, in questo caso, il fattore principale è la tolleranza sui pad in direzione Y. Nella configurazione C3 la tolleranza su entrambi i pin non è il contributore principale, ma assume maggiore importanza la tolleranza sui pad in direzione Y.

Dopo aver generato le superfici di risposta, è stata eseguita l'analisi di sensibilità considerando simultaneamente entrambi gli obiettivi di progetto.

Il risultato di tale analisi permette di scegliere la configurazione che offre le prestazioni globali migliori.

Dalla tabella 2 si evince che la configurazione C3 è quella che è in possesso di una migliore combinazione degli indici rispetto ai criteri di valutazione descritti alla fine del paragrafo 3.

**Tabella 2.** Indici di sensibilità per ogni configurazione.

	$\beta_u$	$V_f$	$\hat{\lambda}_{N \max}$
<b>C1</b>	0.4058	2.21E-04	1.7087
<b>C2</b>	0.2387	2.82E-04	1.4466
<b>C3</b>	0.1546	2.35E-04	1.0701

## 6. CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stato investigato il problema della selezione della configurazione di un sistema di fixture, ed in particolare la tipologia dei locatori. In letteratura l'approccio alla progettazione del sistema di fixture è principalmente finalizzato alla definizione e all'ottimizzazione del layout. Tale approccio non considera gli effetti derivanti dall'uso di differenti tipi di locatori. Una delle maggiori problematiche è rappresentata dalla difficoltà di comparare le differenti configurazioni, ovvero le diverse funzioni dei locatori. Dato che un sistema di fixture può essere considerato un sistema multi-prestazionale, il confronto fra diverse configurazioni è stato eseguito introducendo opportuni indici di sensibilità. Quindi sono stati definiti alcuni criteri di qualità di prestazione, al fine di valutare le performance totali di un sistema di fissaggio. Utilizzando uno strumento CAT è stato possibile utilizzare un approccio model-based per eseguire l'analisi di sensibilità.

I risultati di tale analisi permettono di valutare quali tolleranze sui locatori influenzino in misura maggiore gli obiettivi di progettazione. La metodologia proposta può essere applicata e inclusa all'interno della fase di progettazione del sistema di fissaggio.

Infine è stato analizzato, come caso di studio, un assemblaggio di un sottogruppo di telaio automotive, composto da differenti parti estruse, assemblabili mediante saldatura. Dall'analisi delle configurazioni possibili si evince che gli effetti delle tolleranze dei locatori sugli obiettivi di progetto sono fortemente dipendenti dalle configurazioni stesse. Pertanto si sottolinea l'esigenza di eseguire tale tipologia di analisi antecedentemente alla progettazione del layout dei locatori.

## REFERENCES

- [1] Wang, H., Rong, Y., Li, H., Shaun, P., 2010. "Computer aided fixture design: Recent research and trends". *Computer-Aided Design*, **42**(12), December, pp.1085–1094.
- [2] Boyle, I., Rong, Y., Brown, D.C., 2011. "A review and analysis of current computer-aided fixture design approaches". *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **27**(1), February, pp. 1–12.
- [3] Wang, H., Rong, Y., 2008. "Case based reasoning method for computer aided welding fixture design". *Computer-Aided Design*, **40**(12), December, pp. 1121-1132.
- [4] Hunter, R., Vizan, A., Perez, J., Rios, J., 2005. "Knowledge model as an integral way to reuse the knowledge for fixture design process". *Journal of Materials Processing Technology*, **164–165**, May, pp.1510–1518.
- [5] Hunter, R., Rios, J., Perez, J.M., Vizan, A., 2006. "A functional approach for the formalization of the fixture design process". *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, **46**(6), May, pp. 683–697.

- [6] Roy, U., Sun, P.L., 1994. "Selection of preliminary locating and clamping positions on a workpiece for an automatic fixture design system". *Computer Integrated Manufacturing Systems*, **7**(3), August, pp. 161-172.
- [7] Ngoi, B., Tay, M., Wong, C. 1997. "Development of an Automated Fixture Set-up System for Inspection". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **13**(5), May, pp. 342-349.
- [8] Qin, G.H., Zhang, W.H., Wan, M. 2006. "A mathematical approach to analysis and optimal design of a fixture locating scheme". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **29** (3-4), June, pp. 349–359.
- [9] Yu, J., Wen, T., Hu, Q., 2010. "Research on Automatic Planning of Main Clamping Points in Rapid Fixture Design System". *Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, FSKD 2010.
- [10] Wu, Y., Rong, Y., Ma, W., LeClair, S. 1998. "Automated modular Fixture planning: Geometric analysis". *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **14**(1), February, pp. 1-15.
- [11] Pelinescu, D., Wang, M.Y. 2002. "Multi-objective optimal fixture layout design". *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, **18**(5), October, pp. 365–372.
- [12] Kaya, N. 2006. "Machining fixture locating and clamping position optimization using genetic algorithms". *Computers in Industry*, **57**(2), July, pp. 112–120.
- [13] Liu, S.G., Zheng, L., Zhang, Z.H., Li, Z.Z., Liu, D.C. 2007. "Optimization of the number and positions of fixture locators in the peripheral milling of a low-rigidity workpiece". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **33**(7), July, pp. 668–676.
- [14] Hoffman, E.G. 2004. *Jig and Fixture Design*. Cengage Learning, Chap. 1, pp. 1.
- [15] Zhu, J.M., Ting, K.L. 2001. "Performance Distribution Analysis and Robust Design". *ASME Journal of Mechanical Design*, **123**(1), February, pp. 11–17.
- [16] Chen, W., Allen, J., Tsui, K.L. and Mistree, F. 1996. "A Procedure for Robust Design: Minimizing Variations Caused by Noise Factors and Control Factors". *ASME Journal of Mechanical Design*, **118**(4), December, pp 478–485.
- [17] Andrisano, A.O., Ansaloni, M., Leali, F., Pellicciari, M., Vergnano, A. 2011. "A novel method for sensitivity analysis and characterization in integrated engineering design". *International Conference on Innovative Methods in Product Design - Proceedings*, IMPoVe 2011.
- [18] Schubert, E., Klassen, M., Zerner, I., Walz, C., Sepold, G. 2001. "Light-weight structures produced by laser beam joining for future applications in automobile and aerospace industry". *Journal of Materials Processing Technology*, **115**(1), August, pp. 2–8.
- [19] Cavazzuti, M., Baldini, A., Bertocchi, E., Costi, D., Torricelli, E., Moruzzi, P. 2011. "High performance automotive chassis design: a topology optimization based approach". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **44**(1), July, pp 45-56.
- [20] Andrisano, A.O., Leali, F., Pellicciari, M. 2005. "Integrated Design of a Robotic Cell for Lasts Roughing". *Proceedings of International Conference on Automation, Control and Instrumentation - IADAT - International Association for the Development of Advances in Technology Bilbao (ESP)*.
- [21] European Standard 755-9 :2008. Aluminium and aluminium alloys - Extruded Rod/Parts, tube and profile - part9: Profiles, tolerances on dimensions and form.



# **ROTATION AXIS IDENTIFICATION AT THE HUMAN TIBIO-TALAR AND TALO-CALCANEAL JOINTS BY THE BURMEISTER THEORY**

Nicola Sancisi

*Department of Industrial Engineering (DIN),*

*University of Bologna,*

*Viale del Risorgimento 2,*

*40136, Bologna, Italy*

*E-mail: nicola.sancisi@unibo.it*

Vincenzo Parenti Castelli

*Department of Industrial Engineering (DIN),*

*Health Sciences and Technologies - Interdepartmental Centre for Industrial Research*

*(HST-ICIR),*

*University of Bologna,*

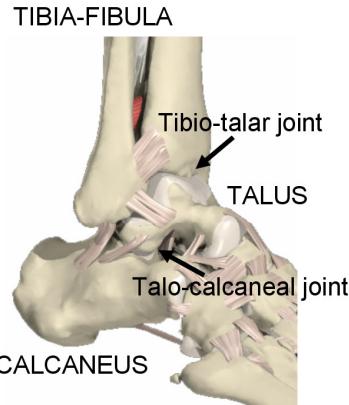
*Viale del Risorgimento 2,*

*40136, Bologna, Italy*

*E-mail: vincenzo.parenti@unibo.it*

**Abstract.** A correct identification of the human joint rotation axes is important in several applications, such as prosthesis and exoskeleton design, and multibody modelling of the human body. This identification is particularly difficult at the ankle joint, where two different articulations are observed, namely the tibio-talar joint (connecting the tibia and talus) and the talo-calcaneal joint (connecting the talus and calcaneus). The motion of both these joints could be approximated to some extent with a rotation about a single axis; thus, the ankle requires the identification of two distinct axes in order to correctly describe the joint motion. A new method is proposed in this study for the identification of the tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes that does not require the measure of the talus motion. This feature is particularly important for in vivo measurements, since non-invasive experimental techniques do not allow the talus motion to be obtained, due to the inaccessibility of this bone. The method also exhibits other advantages: the rotation axes are identified simultaneously and thus their identification accuracy is independent; the method is not based on optimization techniques and thus it does not require the definition of an objective function; it is robust; it makes it possible to obtain the talus motion. The theoretical bases of the method are presented and a case study is used to assess the potentiality of the identification procedure.

**Keywords:** ankle, tibio-talar joint, talo-calcaneal joint, rotation axis, identification, Burmester theory



**Figure 1.** The ankle: the tibio-talar and talo-calcaneal joints [1]

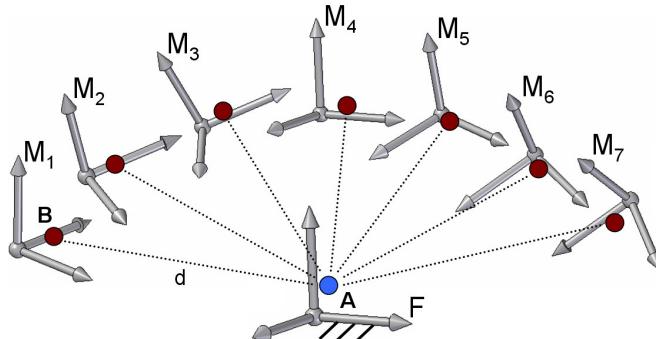
## 1. INTRODUCTION

An accurate analysis of human joint motion is fundamental to assess the correct joint functionality. Therefore it is important in many research fields, such as the design and setting of prostheses, orthoses and exoskeletons, and the multibody modelling of the human body. This analysis is complicated in the ankle by the presence of two distinct joints, as shown in Fig. 1: the tibio-talar joint connects the tibia complex (composed of the tibia and fibula) and talus, while the talo-calcaneal joint connects the talus and calcaneus. Since the fibula motion is not considered in this study, for the sake of conciseness the tibia complex will be referred to as simply the tibia.

Experimental evidence have shown that both the tibio-talar and talo-calcaneal joints exhibit a spatial motion [2–6] and spatial models were defined to represent the three-dimensional motion of the ankle bones [7–11]. However, *in vitro* experiments [3–5] have shown that the instantaneous helical axes of each of the two joints are near, i.e. have a small angular and position dispersion, to two relevant single axes. As a consequence, the spatial motion of each of the two joints is still approximated to a rotation about a fixed axis in certain applications, where there is the need to simplify the complex ankle geometry: standard gait analysis [12, 13], multibody modelling of the foot or of the lower limb [14–16], design of prostheses, orthoses and exoskeletons [17–21] are examples of such applications. For all these cases, accurate identification of the two ankle rotation axes, one at the tibio-talar, the other at the talo-calcaneal joint, becomes crucial for the correct description of the ankle motion.

Several mathematical procedures have been proposed for the identification of the axes of rotation at the human joints, based on computation of the joint helical axes [22–25], or on the minimization of least-squares cost functions [26, 27]. A further technique has been proposed that allows the identification of a joint rotation axis by means of the Burmester theory [6]: when compared to standard methods based on helical axis computation, the new technique exhibited a similar accuracy and a lower sensitivity to experimental inaccuracies.

To apply all these procedures to the ankle, the motion of all ankle bones, namely the tibia, talus and calcaneus, have to be experimentally measured. Unfortunately, the talus motion cannot be obtained *in vivo* by non-invasive techniques, because of the inaccessibility to



**Figure 2.** The Burmester problem: A and B are the Burmester points on the fixed and moving body respectively,  $d$  is their distance

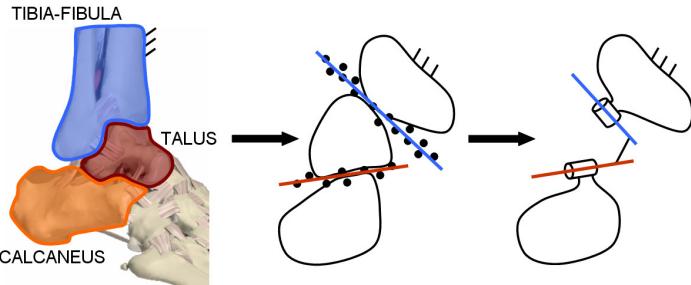
the internal talus bone: only the tibia-calcaneus relative motion can be measured in these conditions. If only the tibia-calcaneus motion is known, the tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes cannot be correctly identified by the cited procedures: only a single ankle axis could be obtained that, however, has not a particular physical or anatomical relevance. Thus, the cited procedures can be used for *in vitro* experiments, but cannot be applied *in vivo*. To identify both rotation axes from *in vivo* measurements, optimization methods have been proposed to fit a multibody model of the ankle on experimental data [12]. However, these methods require the definition of an arbitrary objective function to minimize.

In this paper, a new method is proposed for the identification of the tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes. The method is based on a particular use of the Burmester theory as in [6] but, differently to the previous study, it allows a simultaneous identification of both axes directly from the tibia-calcaneus motion: no talus motion has to be measured experimentally. The approach is purely geometrical and the identified axes keep a clear physical relevance. With respect to optimization methods, no objective function is required and the identification accuracy of the two axes is independent: the definition of an axis does not influence the other. The procedure is also applied on a case study and some preliminary results are presented, in order to assess the potentiality of the method.

## 2. THE BURMESTER THEORY

The Burmester theory is generally used for the synthesis of mechanisms by precision points, but it is used here in an original way to identify the rotation axes of the tibio-talar and talo-calcaneal joints. The Burmester theory states that given 7 relative spatial configurations of two rigid bodies, up to 20 pairs of points (one on the first body, the other on the second one) exist that do not change their distance at all the 7 configurations (Fig. 2). These points will be called Burmester points (BPs) hereinafter. Polynomial solutions were proposed for the Burmester problem that allow all BPs to be obtained for a given set of 7 relative spatial configurations [28, 29].

Particular degenerate solutions of the Burmester problem can be obtained for special relative motions between the two rigid bodies. A first degenerate case is observed when the moving body (M) rotates about a fixed axis of the fixed body (F). In this case, all points of M do not change their distance from the points of F on the rotation axis: as a consequence,



**Figure 3.** Identification of the tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes

all points of M and the points of F on the rotation axis are the BPs for this problem. If the M motion is only near to a rotation about a single fixed axis, the problem still admits up to 20 solutions (i.e. 20 pairs of BPs), as in the standard problem, but the BPs on F are nearly aligned in the neighbourhood of the rotation axis. This observation was used in [6] to identify the tibio-talar rotation axis, when the talus motion is known.

A second degenerate case is obtained when the M motion is a rotation about two axes, the first one fixed to M, the second one fixed to F. In other words, the relative motion between M and F can be seen as the motion of two rigid bodies interconnected by an intermediate body through revolute joints. In this case, all points of M on the first axis do not change their distance from the points of F on the second axis: thus, these two axes contain all BPs for this problem. If the motion of each of these two joints is only near to a rotation about a fixed axis, the Burmester problem is definite and admits up to 20 solutions, but the BPs are nearly aligned in the neighbourhood of the two rotation axes. This second degenerate case well represents the ankle geometry, as shown in Fig. 3: if the tibia is fixed, the calcaneus is a moving rigid body that is connected to the tibia by an intermediate body (i.e. the talus) through the tibio-talar and talo-calcaneal joints, whose motion is near to a rotation. This aspect allows the rotation axes of these two joints to be identified, by measuring the tibia-calcaneus motion only.

In this sense, the proposed technique is an extension of the method proposed in [6]. The previous method indeed was based on the first degenerate case and required the measure of the talus motion; on the contrary, the new technique only needs the calcaneus-tibia motion, simplifying the experimental session and allowing all required measurements to be performed *in vivo*.

### 3. IDENTIFICATION PROCEDURE

Many non-invasive experimental techniques make it possible to obtain the spatial configurations of bones by measuring the 3D coordinates of several markers placed on skin, on bone cortex or on other supports inserted into the bones themselves. In this study, the proposed identification procedure is applied on data measured *in vitro* on an ankle specimen. However, as noted above, the procedure can be applied also for *in vivo* measurements, obtained by means of different experimental protocols.

The tibia is connected to a rig and a pin is inserted into the calcaneus, protruding posteriorly. The calcaneus is then moved along a full passive flexion arc, by lifting and lowering the pin. Two trackers are attached to the tibia and calcaneus respectively, and their relative poses

(i.e. positions and orientations) are recorded by means of an optoelectronic system. In particular, the motion is represented by a sequence of 26 relative poses in this case, from the maximum plantarflexion (-35.8 degrees) to the maximum dorsiflexion (3.6 degrees). Anatomical reference systems are defined for the tibia and calcaneus [8, 9], and each pose is represented by means of the position vector  $\mathbf{P}_j$  ( $j = 1, \dots, 26$ ) of the origin of the calcaneus reference frame represented in the tibia reference frame, and of the rotation matrix  $R_j$  ( $j = 1, \dots, 26$ ) for the transformation of vector components from the calcaneus to the tibia reference frame.

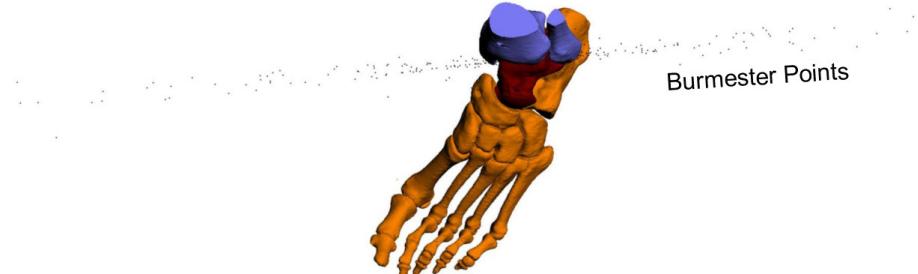
Every combination  $\mathcal{S}$  of 7 poses chosen among the 26 experimental ones allows a particular Burmester problem to be defined. In this case, 100 different pose combinations  $\mathcal{S}_k$  ( $k = 1, \dots, 100$ ) are randomly chosen and, as a consequence, 100 different Burmester problems are defined. All BPs of each problem are computed by means of the procedure proposed in [28]. In particular, all BPs on the tibia from all problems are collected in a single point cloud represented in the tibia reference frame; the same is done for the BPs on the calcaneus, where the relevant point cloud is represented in the calcaneus frame. The few outliers that fall very far from the ankle anatomy are removed. Finally, the point cloud on the tibia is approximated by a least-squares best-fitting line; the same approximation is performed for the calcaneus point cloud. These two lines represent the rotation axes of the tibio-talar and the talo-calcaneal joints.

#### 4. RESULTS

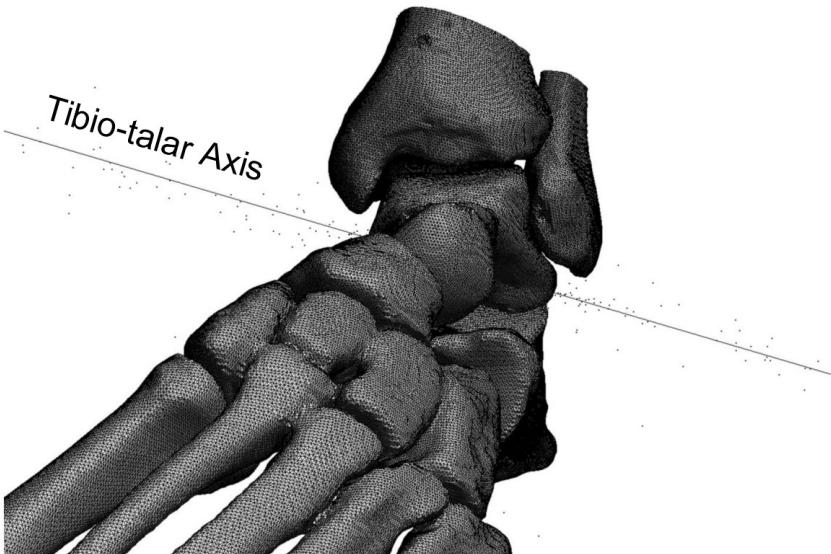
The BPs are found clearly aligned along an axis, both for the tibio-talar and for the talo-calcaneal joints. Figure 4 shows the BPs on the tibia from a top view; similar results are obtained on the calcaneus. This optimal alignment makes the identification of the rotation axes quite easy. The tibio-talar rotation axis is represented in Fig. 5(a) on a frontal view of the ankle; both rotation axes are shown together in Fig. 5(b).

Analysis of the literature shows that the identified axes are actually anatomical. Previous investigations [3, 4, 6] have shown that the tibio-talar rotation axis is near to the line passing through the distal tips of the malleoli: this characteristic is evident also in Fig. 5(a). Position and orientation of the talo-calcaneal axis are also similar to those obtained *in vitro* from different experimental data with different techniques [30], even if this axis is more sensitive to external loading conditions and its variability among specimens is higher [20, 30].

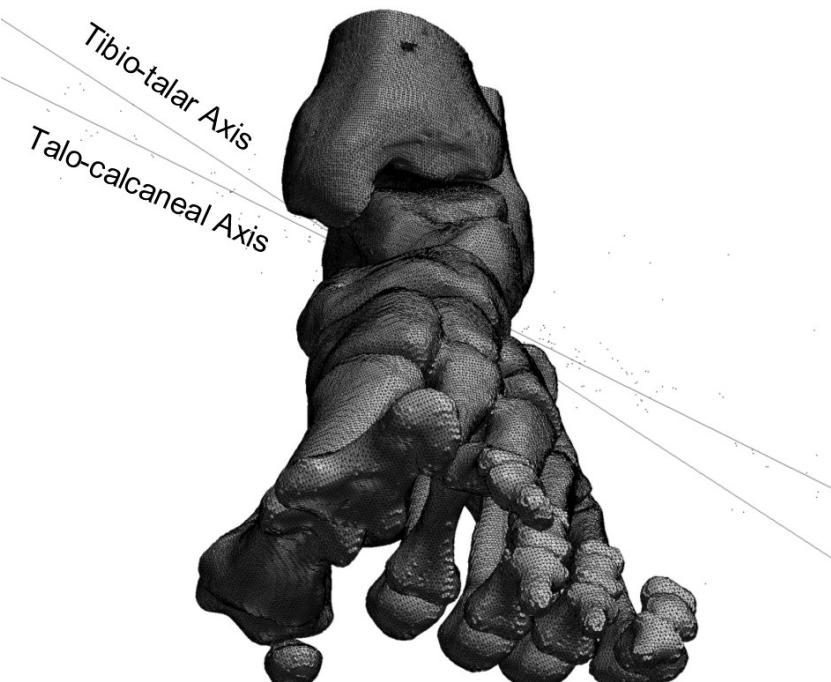
Though preliminary, all these observations make it possible to conclude that the proposed identification method is robust. Despite rough unfiltered experimental data are used,



**Figure 4.** BPs on the tibia: top view

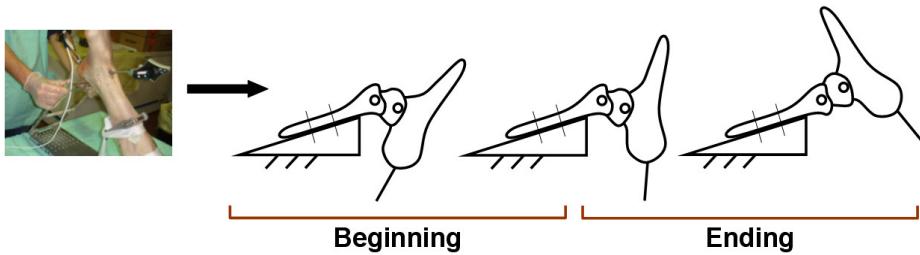


(a)



(b)

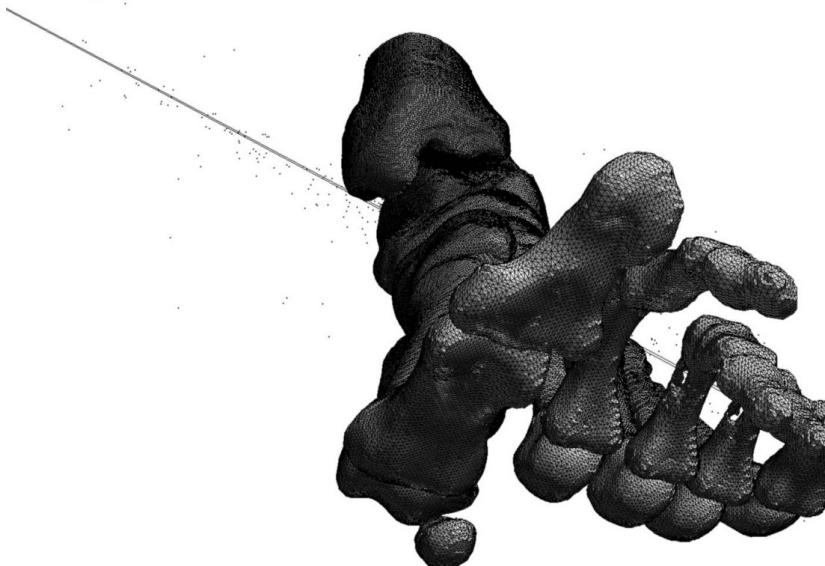
**Figure 5.** Tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes



**Figure 6.** The two parts of the experimental motion and the corresponding mobility of the talo-calcaneal joint

the BPs are indeed optimally aligned along two lines and the two rotation axes are anatomical. Moreover, it should be noted that the method allows a clear talo-calcaneal axis to be defined even with a motion, i.e. the passive flexion, as considered in this study, that produces a reduced mobility at the talo-calcaneal joint [30]. A further evidence of the accuracy and robustness of the method can be obtained by splitting the experimental motion in two parts (i.e. beginning and ending) and by computing the talo-calcaneal axis at these two parts. It can be shown indeed (Fig. 6) that the performed experimental protocol produces the full mobility of the talo-calcaneal joint at the beginning part. At a certain flexion angle, indeed, the talo-calcaneal joint reaches its full-mobility, and starting from that angle the calcaneus and talus approximately move as a single rigid body (Fig. 6): at the ending part of the considered motion, the talo-calcaneal rotation axis is very near to the tibio-talar one. This aspect can be observed also with the proposed method: when only the ending part of experimental motion is considered, the identified tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes are almost the same, as shown in Fig. 7.

As final remarks of this study, it is worth focusing on applications of the proposed method. The procedure indeed is devised for the identification of the two rotation axes at the ankle joint, but it could be extended to other analyses. First of all, this method allows the talus motion to be devised after the identification, with no further experimental measures. Indeed, the ankle can be represented as a mechanical system composed of three rigid bodies interconnected by two revolute joints, the talus being the intermediate member: after rotation axis identification, the talus motion can be obtained by an inverse kinematic analysis of the results. Thus, the method could be used to simplify *in vitro* measurements: a good approximation of the talus motion can be obtained without actually measuring it. Furthermore, as done in the analysis of Fig. 6-7, the method could be used to study the actual variation of the rotation axes at the tibio-talar and talo-calcaneal joints during motion: it is sufficient to divide the full flexion arc into several parts, and to identify the joint rotation axes at each part with the proposed procedure. Finally, the same method and therefore the same advantages can be used for any system that can be modelled as the ankle, i.e. three rigid bodies interconnected by two hinge or quasi-hinge joints, as represented in Fig. 3. For instance, this approach could allow the identification of the rotation axes when the motion of all bodies cannot be measured easily, or it could generally simplify the experimental measurements, since the markers or trackers have to be attached just on the first and the third body.



**Figure 7.** The two rotation axes at the ending part of the experimental motion

## 5. CONCLUSIONS

A new method based on the Burmester theory is presented for the identification of the rotation axes at the tibio-talar and talo-calcaneal joints. A case study is used to assess the potentiality of the identification procedure.

The main advantage of the method is that it only requires the motion of the calcaneus with respect to the tibia for the identification of the two axes: the motion of the talus is not needed and, on the contrary, it could be obtained after the axis identification without measuring it. Both rotation axes at the ankle joint are correctly separated instead of a single ankle axis: this aspect improves the accuracy of the identification. The method proves to be reliable and robust, allowing both the tibio-talar and talo-calcaneal axes to be easily identified from rough unfiltered experimental data. The procedure is not based on optimization methods and does not require the definition of an arbitrary objective function. Moreover, the identification of the two axes is simultaneous and independent, so that the identification accuracy of one axis does not depend from the other one.

The features of the method make it particularly useful for the experimental identification of the tibio-talar and talo-calcaneal rotation axes in *in vivo* measurements performed with non-invasive techniques.

## 6. ACKNOWLEDGMENTS

The financial support of MIUR is gratefully acknowledged. The authors also thank Dr Alberto Leardini and Dr Claudio Belvedere for their help during the experimental session.

## REFERENCES

- [1] Primal Pictures, 2003. *Primal 3D Interactive series*. Primal Pictures Ltd.

- [2] Siegler, S., Chen, J., and Schneck, C. D., 1988. “The three-dimensional kinematics and flexibility characteristics of the human ankle and subtalar joints – Part 2: kinematics”. *Journal of Biomechanical Engineering*, **110**, pp. 364–373.
- [3] Lundberg, A., Svensson, O. K., Nemeth, G., and Selvik, G., 1989. “The axis of rotation of the ankle joint”. *Journal of Bone and Joint Surgery [Br]*, **71**(1), pp. 94–99.
- [4] Leardini, A., O’Connor, J. J., Catani, F., and Giannini, S., 1999. “Kinematics of the human ankle complex in passive flexion: a single degree of freedom system”. *Journal of Biomechanics*, **32**(2), pp. 111–118.
- [5] Leardini, A., Catani, F., Giannini, S., and O’Connor, J. J., 2001. “Computer-assisted design of the sagittal shapes of a ligament-compatible total ankle replacement”. *Medical and Biological Engineering and Computing*, **39**(2), pp. 168–175.
- [6] Sancisi, N., Parenti-Castelli, V., Corazza, F., and Leardini, A., 2009. “Helical axis calculation based on Burmester theory: experimental comparison with traditional techniques for human tibiotalar joint motion”. *Medical and Biological Engineering and Computing*, **47**(11), pp. 1207–1217.
- [7] Di Gregorio, R., Parenti-Castelli, V., O’Connor, J. J., and Leardini, A., 2007. “Mathematical models of passive motion at the human ankle joint by equivalent spatial parallel mechanisms”. *Medical and Biological Engineering and Computing*, **45**(3), pp. 305–313.
- [8] Franci, R., and Parenti-Castelli, V., 2007. “A 5-5 one degree of freedom fully-parallel mechanism for the modelling of passive motion at the human ankle joint”. In Proceedings of ASME-IDE TC/CIE 2007, Las Vegas, USA, pp. 1–8.
- [9] Franci, R., Parenti-Castelli, V., Belevedere, C., and Leardini, A., 2009. “A new one-dof fully parallel mechanism for modelling passive motion at the human tibiotalar joint”. *Journal of Biomechanics*, **42**, pp. 1403–1408.
- [10] Baldisserri, B., and Parenti-Castelli, V., 2012. “A new 3D mechanism for modeling the passive motion of the tibia-fibula-ankle complex”. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **4**, pp. 021004–1–021004–7.
- [11] Sancisi, N., and Parenti-Castelli, V., 2012. “Synthesis of spatial mechanisms to model human joints”. In *21th Century Kinematics*, M. McCarthy, ed. Springer, pp. 49–84.
- [12] Van den Bogert, A. J., Smith, G. D., and Nigg, B. M., 1994. “In vivo determination of the anatomical axes of the ankle joint complex: an optimization approach”. *Journal of Biomechanics*, **23**(12), pp. 1477–1488.
- [13] Leitch, J., Stebbins, J., and Zavatsky, A. B., 2010. “Subject-specific axes of the ankle joint complex”. *Journal of Biomechanics*, **43**, pp. 2923–2928.
- [14] Dul, J., and Johnson, G. E., 1985. “A kinematic model of the human ankle”. *Journal of Biomedical Engineering*, **7**, pp. 137–143.
- [15] Scott, S. H., and Winter, D. A., 1991. “Talocrural and talocalcaneal joint kinematics and kinetics during the stance phase of walking”. *Journal of Biomechanics*, **24**(8), pp. 743–752.
- [16] Pandy, M. G., and Andriacchi, T. P., 2010. “Muscle and joint function in human locomotion”. *Annual Review of Biomedical Engineering*, **12**, pp. 401–33.
- [17] Segal, D., Wiss, D. A., and Whitelaw, G. P., 1985. “Functional bracing and rehabilitation of ankle fractures”. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, **199**, pp. 39–45.
- [18] Polliack, A. A., Swanson, M. C., Landsberger, S. E., and McNeal, D. R., 2001. “Development of a testing apparatus for structural stiffness evaluation of ankle-foot orthoses”. *Journal of Prosthetics and Orthotics*, **13**, pp. 74–87.
- [19] Giannini, S., Leardini, A., and O’Connor, J. J., 2000. “Total ankle replacement: review of the designs and of the current status”. *Foot and Ankle Surgery*, **6**, pp. 77–88.

- [20] Dettwyler, M., Stacoff, A., Kramers-de Quervain, I. A., and Stüssi, E., 2004. “Modelling of the ankle joint complex. reflections with regards to ankle prostheses”. *Foot and Ankle Surgery*, **10**, pp. 109–119.
- [21] Vickerstaff, J. A., Miles, A. W., and Cunningham, J. L., 2007. “A brief history of total ankle replacement and a review of the current status”. *Medical Engineering and Physics*, **29**, pp. 1056–1064.
- [22] Woltring, H. J., 1990. “Data processing and error analysis”. In *Biomechanics of Human Movement Applications in Rehabilitation Sports and Ergonomics*, N. Berme and A. Cappozzo, eds. Bertec Corporation, pp. 203–307.
- [23] Woltring, H. J., Long, K., Osterbauer, P. J., and Fuhr, A. W., 1994. “Instantaneous helical axis estimation from 3-D video data in neck kinematics for whiplash diagnostics”. *Journal of Biomechanics*, **27**(12), pp. 1415–1432.
- [24] Schwartz, M. H., and Rozumalski, A., 2005. “A new method for estimating joint parameters from motion data”. *Journal of Biomechanics*, **38**(1), pp. 107–116.
- [25] Teu, K. K., and Kim, W., 2006. “Estimation of the axis of a screw motion from noisy data—A new method based on Plücker lines”. *Journal of Biomechanics*, **39**(15), pp. 2857–2862.
- [26] Halvorsen, K., Lesser, M., and Lundberg, A., 1999. “A new method for estimating the axis of rotation and the center of rotation”. *Journal of Biomechanics*, **32**(11), pp. 1221–1227.
- [27] Hiniduma Udagama Gamage, S. S., and Lasenby, J., 2002. “New least squares solutions for estimating the average centre of rotation and the axis of rotation”. *Journal of Biomechanics*, **35**(1), pp. 87–93.
- [28] Innocenti, C., 1995. “Polynomial solution of the spatial Burmester problem”. *Journal of Mechanical Design*, **117**(1), pp. 64–68.
- [29] Liao, Q., and McCarthy, J. M., 2001. “On the seven position synthesis of a 5-SS platform linkage”. *Journal of Mechanical Design*, **123**(3), pp. 74–79.
- [30] Leardini, A., Stagni, R., and O’Connor, J. J., 2001. “Mobility of the subtalar joint in the intact ankle complex”. *Journal of Biomechanics*, **34**(6), pp. 805–809.

# **DESIGN AND MANUFACTURING OF A HAND-AND-WRIST EXOSKELETON PROTOTYPE FOR THE REHABILITATION OF POST-STROKE PATIENTS**

Marco Troncossi

*Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: marco.troncossi@unibo.it*

Claudio Mazzotti

*Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: claudio.mazzotti4@unibo.it*

Mohammad Mozaffari Foumashi

*Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: Mohammad.mozaffari2@unibo.it*

Diego Zannoli

*Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: diego.zannoli@unibo.it*

Vincenzo Parenti-Castelli

*Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: vincenzo.parenti@unibo.it*

**Abstract.** In the field of robot-aided neuro-rehabilitation, the “BRAVO” project aims at defining a new approach to the development of assistive and rehabilitative robots for upper limb motor-impaired users, in order to perform complex visuomotor tasks. Within this framework the authors designed and manufactured the distal part of the overall exoskeleton, i.e. the hand-and-wrist system. The hand exoskeleton has 2 degrees of freedom (DOFs) for the flexion/extension of the thumb and for the flexion/extension of the group composed by the other four fingers. The functions of opening and closing is controlled by the patient’s brain signals detected via a brain-computer interface. The wrist unit has 2 DOFs for the actuation of the prono-supination and flexion/extension movements. The arm exoskeleton and the wrist unit are controlled through a complex scheme involving trajectory planning (based on the patient’s current gaze) and a hybrid position/force control. This paper outlines the scope of the entire project and illustrates the development of the wrist-and-hand exoskeleton prototype.

**Keywords:** Stroke, Robot-Assisted Rehabilitation, Hand Exoskeleton, Wrist Exoskeleton

## 1. INTRODUCTION

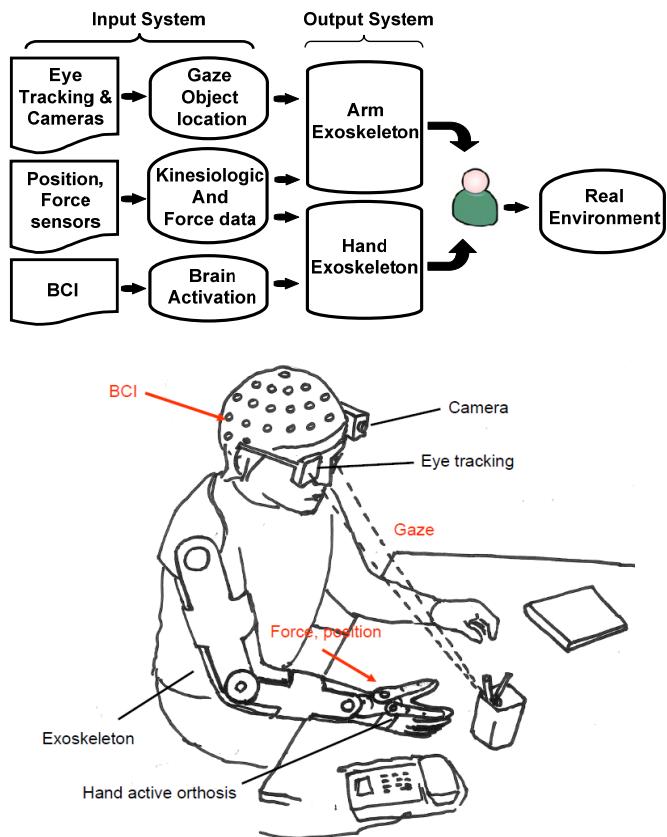
The objective of the project called BRAVO (“Brain computer interfaces for Robotic enhanced Action in Visuo-motOr tasks”) is to define a new approach to the development of rehabilitative and assistive robots for motor impaired users to perform complex visuomotor tasks that require a sequence of reaches, grasps and manipulations of objects [1]. BRAVO aims at developing new robotic interfaces and HW/SW architectures for rehabilitation and restoration of motor function in patients with upper limb sensorimotor impairment through extensive rehabilitation therapy and active assistance in the execution of Activities of Daily Living. The final system developed within this project will include a robotic arm exoskeleton and a hand orthosis that will be integrated together for providing force assistance. The popular paradigm of Assist-as-needed guided the development of the overall system. In a few words, the user’s active participation in performing the rehabilitation exercises is the final goal: the exoskeleton should provide as much force/movement assistance as needed to accomplish the task, whereas it should enable the patient who does not need power assistance to move autonomously. In this latter case, the machine should not contrast the upper limb and hand “free” movements.

The main novelty introduced by the BRAVO project is the control of a complete upper-limb exoskeleton system (arm and hand) through the active prediction of intention/action. The classical approach to rehabilitation and assistive robotics is based on a robot, whose action is activated by the user’s movement detected by means of force and position sensing. This is not a reliable way of controlling the robot when the user is motor impaired so that he/she can present spasticity, tremor, reduced motor function, muscle weakness. Current limitations of existing devices rely in the absent or reduced capability to predict the intended action of the patient. Conversely, the BRAVO system integrates the preliminary information about the movement to carry out with a prediction of the user’s intended action, by interpreting the user’s current gaze and brain activation measured through an eye-tracking system and brain-computer interfaces, BCIs, respectively and by suitable force measurements to control the arm and hand exoskeletons respectively (Fig. 1). The system functionalities can be illustrated through the following sequence of operations performed in a structured environment:

1. the user decides to grasp and move an object;
2. the user looks toward the object that he/she is going to grasp;
3. the eye tracking system gets the direction of gaze by catching the eye saccade movements that normally anticipate movement (Fig. 2);
4. being in a structured training environment, the control system now knows the position of the object;
5. the arm exoskeleton will be controlled in order to assist the user in reaching the object and orienting the hand for preparing the grasping phase;
6. the user decides to close his hand;
7. his intention is detected by the BCI;
8. the hand orthosis will assist the user in the grasping movement.

Object placing and hand opening will be assisted with analogous procedure.

In this context, our team had the main goal to design the terminal part of the robotic system, that is the wrist unit and the hand exoskeleton to be attached to an existing arm exoskeleton with 4 DOFs (active shoulder and elbow), i.e. the *L-Exos* (Fig. 2) developed by the colleagues we are collaborating with in the BRAVO project [2].



**Figure 1.** BRAVO system architecture scheme.



**Figure 2.** Control architecture of the arm, based on an eye-tracking system.

## 2. WRIST UNIT

Based on literature [3–9] and on preliminary design choices we defined a priori the required characteristics and technical specifications, the main ones being:

- backdrivability;
- good wearability for neurological patients;
- limited weight;
- interference avoidance;
- 2 DOFs for prono/supination (P/S) and flexion/extension (F/E);
- range of motion of 150° for both P/S and F/E;
- payload force of 50 N on the terminal device, corresponding to a moment of 5 Nm at the joint axes;
- velocity of 30 deg/s;
- adjustable forearm length in the range 230–280 mm.

In particular we decided to integrate the L-Exos with a 2 DOFs wrist, actuating P/S and F/E, to finally have a 6 DOFs limb exoskeleton able to assist all the human articulation movements with exception of the ulnar/radial deviation. This solution results functional and quite easy to control.

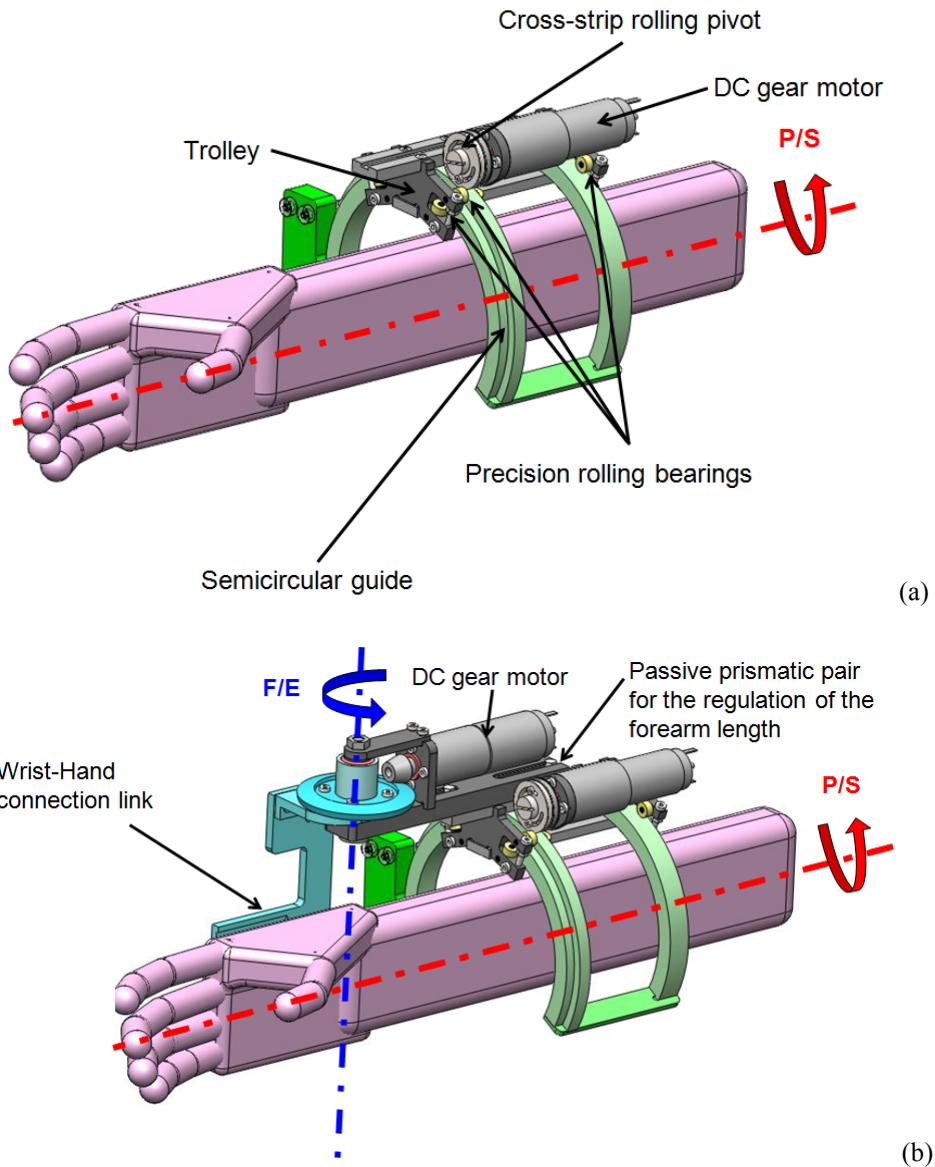
Among the several solutions that were considered, we decided to design a device based on a serial kinematic chain, with the P/S group being the first active joint, followed by the group actuating the F/E (Fig. 3). An open double-ring, which permits an easy fitting also to neurological patients with possible spastic force, forms the circular frame upon which a moving link, actuated by a DC gear motor, can rotate around the forearm axis (Fig. 3a). In order to facilitate the backdrivability, sliding friction is prevented by using rolling element in this actuated revolute joint, both for the supports and for the power transmission system that exploits two steel flexible strips wrapping and unwrapping around the motor pulley and the ring frame (cross-strip rolling pivot).

Connected to the rotating link through a prismatic passive joints, which permits to regulate the distance between the wrist and elbow axes, is the second group of the wrist unit (Fig. 3b) that actuates the F/E movement of a connection link which is rigidly attached to the hand exoskeleton. The motion about the F/E axis is driven by a DC gear motor through a bevel gear transmission. Finally, the terminal device of the wrist unit is a connection link which is to be rigidly attached to the hand exoskeleton frame.

## 3. HAND EXOSKELETON

A terminal exoskeleton device must be integrated into the rehabilitation manipulator, in order to assist motor-impaired subjects in grasping cylindrical objects. To this purpose, we designed a hand exoskeleton with 2 DOFs, for the actuation of the F/E movements of the thumb and of the other four-finger group, respectively. Required characteristics and technical specifications were defined [10]:

- suitability to rehabilitate acute patients for cylindrical grasping;
- backdrivability;
- limited weight;
- adaptability to different hand sizes;
- 2 DOFs for the thumb F/E and for the four-finger F/E;
- target cylindrical objects with diameters in the range 55 – 120 mm;
- payload: 30 N for the grasping force (flexion) and 10 N per finger for the resistant spastic force in the extension movement.

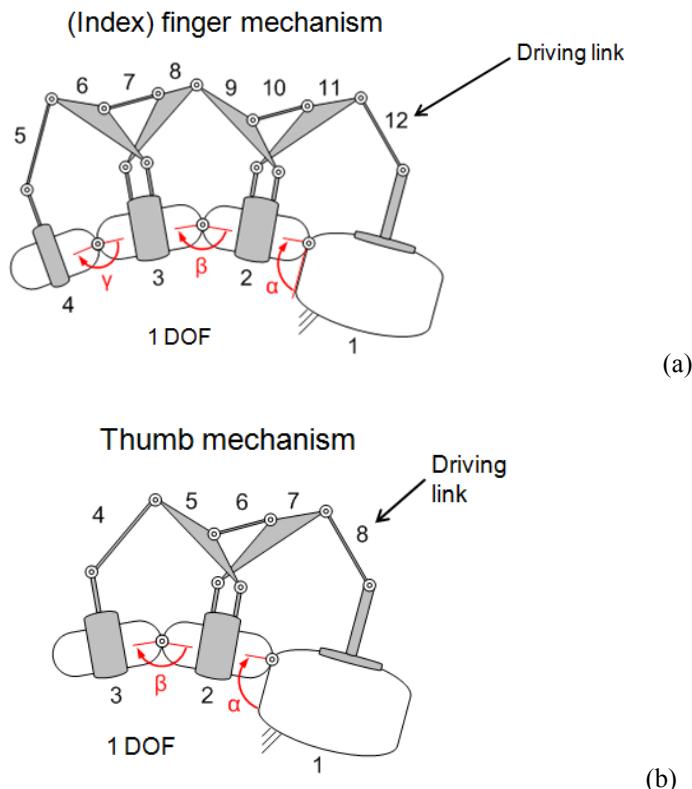


**Figure 3.** CAD model of the wrist unit.

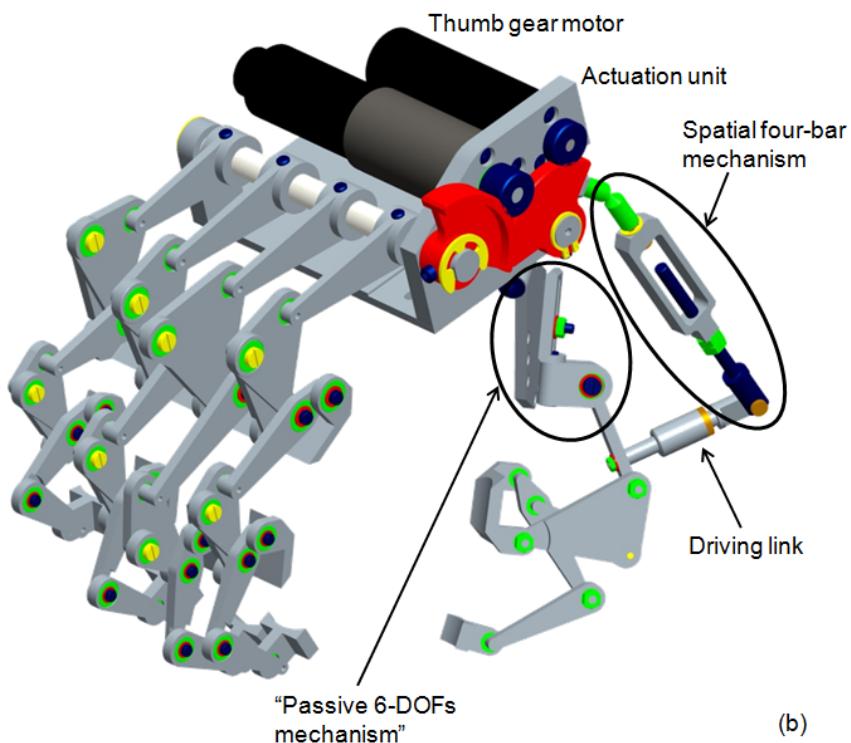
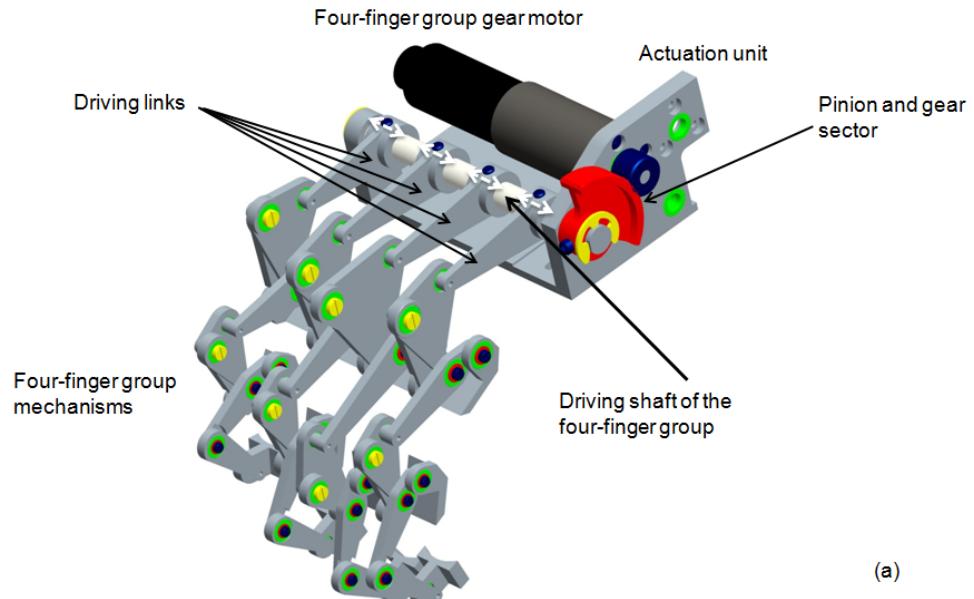
The reference unit for the synthesis of the hand exoskeleton mechanism was the single finger [11]. The mechanisms that we designed for the four fingers have 12 links and 16 revolute joints each (Fig. 4a), comprising human phalanges and articulations that take part of the mechanism itself (links 2, 3, and 4 in Fig. 4a), resulting in mechanisms with 1 DOF. The driving links of the four-finger mechanisms (link 12) will be rigidly attached to the same driving shaft. For the thumb we kept the same idea, but we considered to fix the position of the thumb first phalanx, resulting in a simpler solution (Fig. 4b).

The resulting five exoskeleton fingers are connected to the corresponding human fingers, externally to the backside in order not to disturb object grasping.

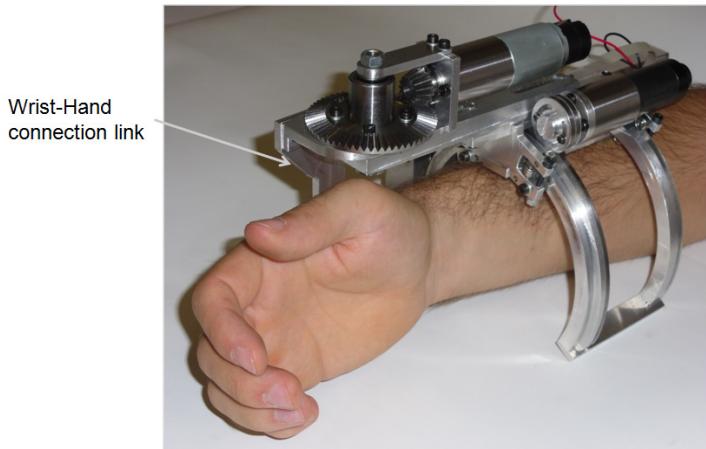
The two motors that actuate the two groups of finger exoskeletons are placed on a base (Fig. 5a) that is fixed to the wrist-hand connection link on one side and attached by means of Velcro strips to the human backside on the other one. A single shaft is coupled to the gear motor axis through an ordinary gearing stage, that transmit motion and torque all to the driving links of the four finger mechanisms, that thus move synchronously. It is possible to passively adjust the axial position of the driving links along the shaft in order to fit different human hand sizes. A second DC actuator is devoted to the control of the thumb mechanism (Fig. 5b) which assists the F/E movement of the second and third phalanges of the human thumb on a given plane. This plane of motion can be selected and fixed during the initial fitting of the device over the human hand, thanks to the presence of an internal passive mechanism that permits to place and orientate the axis of motion of the thumb mechanism driving link. Fasteners and simple screws are used to this purpose. The thumb actuator axis and the revolute axis of the driving link are thus generally skew: a spatial four-bar linkage, with two revolute joints and two spherical joints, is thus used to transmit motion and power from the former to the latter.



**Figure 4.** Kinematic schemes of the finger exoskeletons.



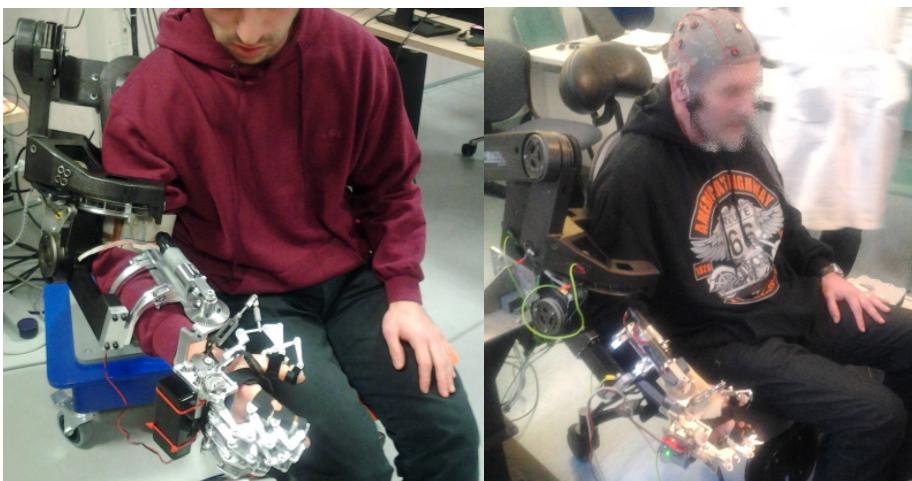
**Figure 5.** CAD model of the hand exoskeleton.



**Figure 6.** Wrist unit prototype.



**Figure 7.** Hand exoskeleton prototype.



**Figure 8.** Wrist-and-hand exoskeleton integrated into the L-Exos arm exoskeleton.

#### **4. PROTOTYPES AND PRELIMINARY TESTS**

Prototypes of both the wrist unit and the hand exoskeleton were manufactured at the laboratory of the Department of Engineering for Industry of the University of Bologna. Figure 6 shows how the wrist prototype appears without a carter. The first tests performed suggested to improve the backdrivability of the F/E group, and this can be easily achieved by lubricating the bevel gears (which were tested in dry friction conditions so far). Also the weight (1.2 kg) is an issue and should be reduced by properly selecting plastic materials instead of metal and by optimizing a number of components.

Figure 7 shows the pictures of the hand exoskeleton prototype that was built, whose performances in terms of velocity, range of motion and forces proved good (as for the wrist), even though some problem must be solved, above all in the thumb area. In particular, the transmission chain is not stiff enough (so that some component should be re-designed) and its architecture should be optimized to maximize force transmissibility. We are currently work on this perspective now.

Figure 8 shows two pictures of the *L-Exos* arm integrated with the wrist-and-hand exoskeleton, worn by a healthy subject and a neurological patient respectively. A number of tests on single sub-systems were performed so far, above all to explore the potentialities of the control systems. The eye tracking system was firstly tested on healthy subjects for the control of the arm exoskeleton (Fig. 2), as well as the BCI was preliminarily used to control the opening/closure of the hand exoskeleton worn by healthy subjects, whereas the BCI was tested very recently for a more complex control, that is the control of manipulating and grasping functions of the whole system assisting a neurological patient. Although the last operation would not be required in the final functioning of the overall system, we wanted to understand how complex could be the information detectable with the BCI. Next step will be the integration of both the eye tracking and BCI control systems with the whole upper limb exoskeleton, leading to its clinical implementation, that is the final goal of the BRAVO project.

#### **5. CONCLUSIONS**

This paper reviewed the activity done by the authors within the BRAVO project (whose framework is illustrated). In particular, the wrist unit and the hand exoskeleton designs were described and the outcomes of preliminary tests performed on the two prototypes were briefly discussed. The current progress of the project foresees the modification of the transmission system of the thumb (to improve transmissibility) and some minor modifications to the geometry of the wrist unit to reduce weight and optimize the interference avoidance. After these minor revisions, the most important stage is the final one, that is experimental testing on neurological patients that will conclude the BRAVO project activities in August 2013.

#### **Acknowledgements**

The BRAVO project is within the framework of Project SEED 2009, funded by the Italian Institute of Technology (Genoa, Italy), which is gratefully acknowledged.

## REFERENCES

- [1] Bergamasco, M., Frisoli, A., Fontana, M., Loconsole, C., Leonardis, D., Troncossi, M., Mozaffari-Foumashi, M., Parenti-Castelli, V., 2011. "Preliminary Results of BRAVO Project - Brain Computer Interface for Robotic Enhanced Rehabilitation". *Proceedings of ICORR 2011, IEEE 12th International Conference on Rehabilitation Robotics*, June 29 – July 1, 2011, Zurich (Switzerland), pp. 364–370.
- [2] Frisoli, A., Rocchi, F., Marcheschi, S., Dettori, A., Salsedo, F., Bergamasco, M., 2005. "A new force-feedback arm exoskeleton for haptic interaction in virtual environments". *Eurohaptics Conference, 2005 and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*, 18-20 March, 2005, Pisa (Italy), pp. 195- 201.
- [3] Gupta, A., 2006. "Design of a haptic arm exoskeleton for training and rehabilitation". *Mecatronics*, **11**(3), pp. 280–289.
- [4] Tsagarakis, N.G., Caldwell, D.G., 2003. "Development and Control of a 'Soft-Actuated' Exoskeleton for Use in Physiotherapy and Training". *Autonomous robots*, **15**(1), pp. 21–33.
- [5] Winter, D.A., 2009. Biomechanics and motor control of human movement. John Wiley & Sons Ed.
- [6] Volpe, B.T., Williams, D., Celestino, J., Charles, S.K., Lynch, D., Hogan, N., 2007. "Robot-Aided Neurorehabilitation: a Robot for Wrist Rehabilitation". *Autonomous robots*, **15**(3), pp. 327–335.
- [7] Pehlivan, A.U., Celik, O., O'Malley, M.K., 2011. "Mechanical Design of a Distal Arm Exoskeleton for Stroke and Spinal Cord Injury Rehabilitation". *Proceedings of ICORR 2011, IEEE 12th International Conference on Rehabilitation Robotics*, June 29 – July 1, 2011, Zurich (Switzerland), pp. 1–5.
- [8] Masia, L., Rodriguez, N.N., Casadio, M., Morasso, P., Sandini, G., Giannoni, P., 2009. "Adaptive training strategy of distal movements by means of a wrist-robot". *Second International Conferences on Advanced in Computer-Human Interactions*, 1-7 February 2009, Cancun (Mexico), pp. 227–233.
- [9] Koenemann, E.J., Shultz, R.S., Wolf, S.L., Herring, D.E., Koenemann, J.B., 2004. "A pneumatic muscle hand therapy device". *IEEE International Conference on Engineering in Medicine and Biology Society*, pp. 2711–2713.
- [10] Troncossi, M., Mozaffari-Foumashi, M., Carricato, M., Parenti-Castelli, V., 2012. "Feasibility Study of a Hand Exoskeleton for Rehabilitation of Post-Stroke Patients". *Proceedings of ESDA 2012 - 11th Biennial ASME Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, July 2-4, 2012, Nantes (France), Vol. 3, pp. 137-146.
- [11] Mozaffari-Foumashi, M., Troncossi, M., Parenti-Castelli, V., 2012. "Design of a new hand exoskeleton for rehabilitation of post-stroke patients". In: *19th CISM-IFToMM RoManSy Symposium (ROMANSY2012)*, Paris (France), June 12-15, 2012.

# **FINITE ELEMENT MODELING OF SPUR AND HELICAL GEARS**

Angelo Oreste Andrisano

*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: angelooreste.andrisano@unimore.it*

Francesco Pellicano

*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: francesco.pellicano@unimore.it*

Marco Barbieri

*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: marco.barbieri@unimore.it*

Elisabetta Fava

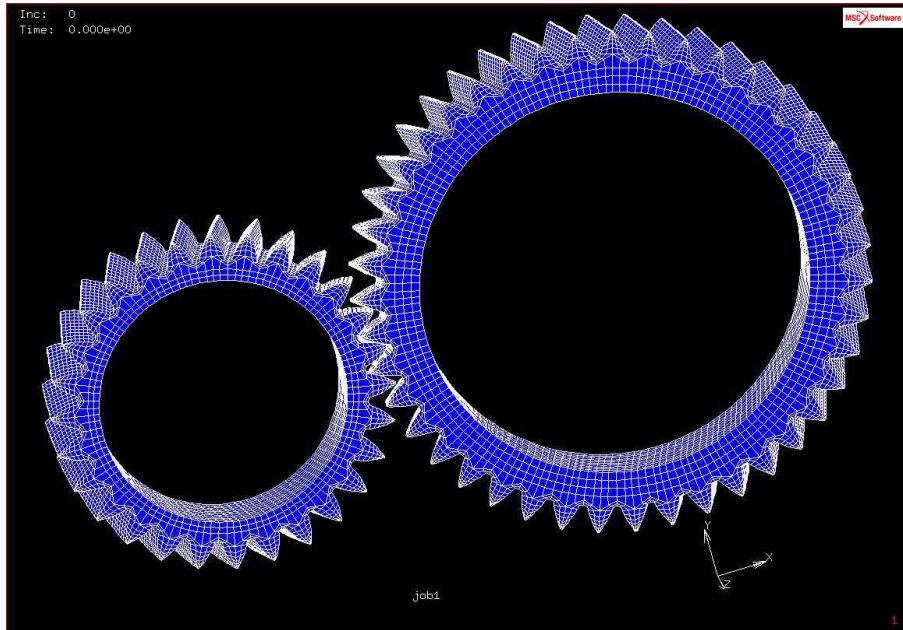
*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: 65878@studenti.unimore.it*

**Abstract.** This paper deals with the finite element modeling of tridimensional spur and helical gears, including gears with micro-geometric profile modifications and crowning. An adaptive mesh has been created in order to increase the number of elements in correspondence of the contact area among the teeth, without changing the elements elsewhere. In this way, high accuracy can be reached in terms of contact pressures and subsurface stresses, avoiding higher computational costs. Contact pressures, contact areas and static transmission error have been investigated varying different parameters: the load, the magnitude of crowning, the magnitude and the roll angles of start and end profile modifications. These tests have been done in order to understand which modifications improve the gear performances. Lastly, a genetic algorithm has been implemented to get the optimized set of modifications, starting from the unmodified gears, with a huge time saving.

**Keywords:** spur gears, finite elements, profile modifications, contact pressure

## **1. INTRODUCTION**

The design of the gears must take into account several aspects in order to reach not only the greatest efficiency of the transmission, but also to increase the gear life and to decrease noises and vibrations, ensuring the respect of the norms and the comfort for the users.



**Figure 1.** Three dimensional finite element model of an helical gear.

## 2. MINIMIZING CONTACT PRESSURES AND TRANSMISSION ERRORS

The traditional structural design of gears must be accompanied by the study of the contact and the static transmission error. The contact shape and the contact pressure trend during the meshing cycle show the possible presence of impacts, which cause wear and noise; the transmission error, generated by the elastic deflection of the teeth, is also indicative of the presence of noise and vibrations. In this work, micro geometric profile modifications have been applied to the tip and to the root of the teeth, in order to reduce the impacts during the start and the end of the meshing and the peak to peak of the transmission error. The advantage of this removal of material resides in the fact that the existing designs are not in any way altered in the macro geometry of the wheels; however, only some modifications improve the described parameters and, among them, the optimal one is not known, so it is necessary to do several attempts and to rely on the expertise of the designer.

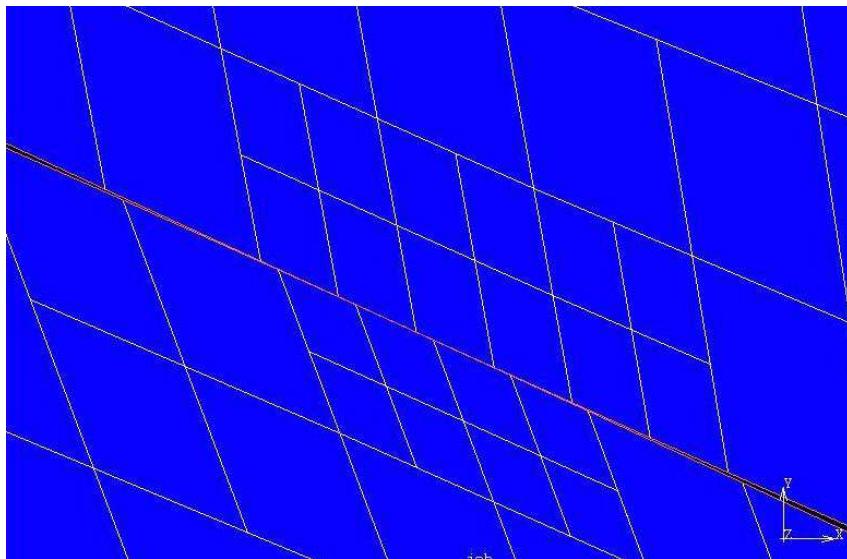
## 3. FINITE ELEMENT ANALYSIS

It is clear that the analysis of all the described aspects requires advanced design tools, thus, the attention has been paid to the creation of a finite element software, Helicalpair, able to model a three dimensional gear (Figure 1), to describe correctly the teeth profile with the modifications, to calculate the transmission error and to manage the contact, in order to find the suitable set of profile modifications. In order to validate the developed software, the results were compared with those of a commercial software, Calyx. Moreover, it was

implemented a genetic algorithm that returns as output the optimal profile modifications, with the obvious advantage of not having to try a large number of changes and, therefore, a considerable saving of time. To test the software, the case-studies of spur gears and helical gears with various sets of profile modifications, different values of crowning and two different load values have been taken into account.

#### 4. HELICALPAIR MESH DESCRIPTION

The extension of the contact is different when the load varies, maintaining the other parameters equal, thus a fixed mesh implies a wrong description of the contact, especially at low loads. For this reason, the mesh created by this software is an adaptive mesh: starting from a basic grid on the tooth, it is densified in correspondence of the tooth and the contact (Figure 2). The densifying of the mesh in correspondence of the tooth is necessary for the control of fatigue stresses and subsurface stress gradients, while the one in correspondence of the contact ensures an accurate description of the contact shape and of the contact pressures. It must be noted that the densifying is not done on all the teeth, but only on five because it is assumed that for external wheels the number of meshing teeth is not higher than five. The advantage of this type of mesh is that accurate results can be reached in correspondence of the contact (the grid being sufficiently dense) without changing significantly the total number of nodes and, therefore, without burdening the calculation. It implies a considerable saving of time and memory. The approach is different from the one used by Calyx, which, for the calculation of the pressures, overlaps a grid on the tooth one, whose parameters and the densifying are decided by the user, so that it is not necessary to make any kind of densifying on the tooth.



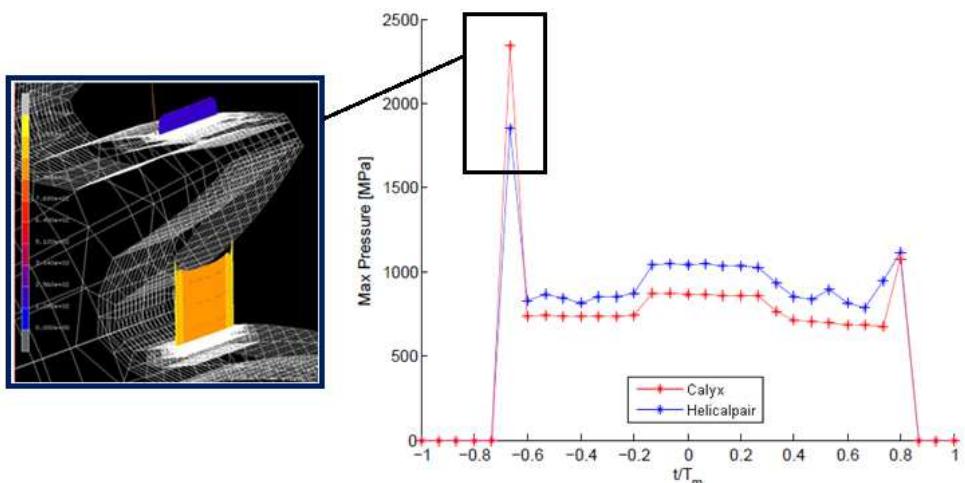
**Figure 2.** Adaptive mesh: the number of elements increases in correspondence of the contact.

## 5. MAXIMUM CONTACT PRESSURES: COMPARISON WITH CALYX

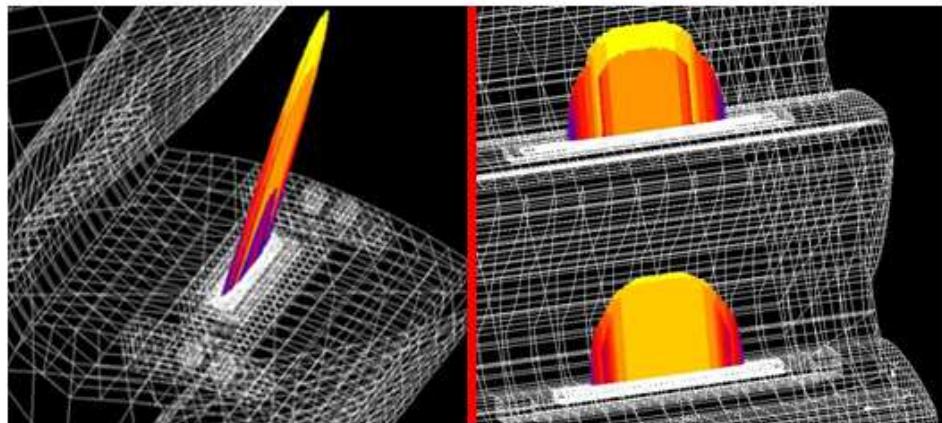
Built the mesh, the contact shape and the contact pressures of some gears have been analyzed and have been compared with those obtained with Calyx for the same case. From Figure 3 it can be seen the trend of the maximum contact pressures of a tooth from when it starts meshing to when it leaves (on the right) and the contact shape corresponding to the squared position (on the left) of a spur gear with no crowning and no profile modifications. Some areas can be distinguished:

- at the beginning and end of the meshing, numerical pressure spikes occur, which, having no meaning from the physical point of view, can be deleted from the graph by using a special function for both programs;
- in the middle of the meshing, the pressure is greater due to the single meshing teeth couple;
- elsewhere, the meshing teeth couples are two.

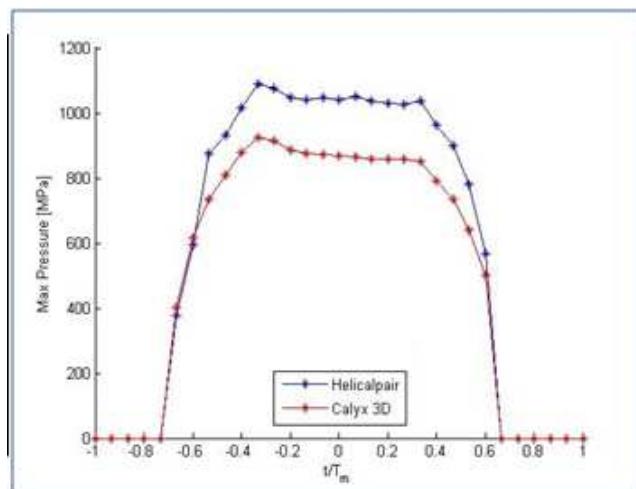
Consider, now, the same gear to which crowning (Figure 4) and profile modifications have been applied (Figure 5). The two images of Figure 4 represent the contact shape of a gear with crowning when the meshing teeth couples are respectively one and two: it is clear that the crowning leads to a reduction of the contact area and, therefore, to an increase of the maximum pressure, but the graph of their trend remains completely analogous to that of Figure 3. Figure 5 represents the trend of the maximum contact pressures of the same gear with the tip and root profile modifications: the removal of material in these positions allows to avoid impacts and provides a gradual variation of pressures in the first and in the last positions in which the tooth is mating. The description of these parameters is shown correctly by Helicalpair (blue line), even if it is slightly overestimated than the one shown by Calyx (red line): the blue curve is more regular and almost superimposable if the mesh is more densified in the area of contact.



**Figure 3.** Contact pressure in a spur gear without crowning and profile modifications.



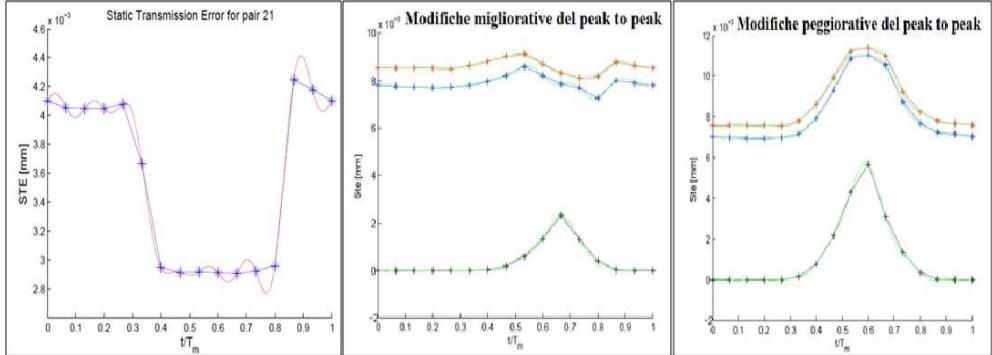
**Figure 4.** Contact shape in a spur gear with crowning: with a mating teeth couple, on the left; with two mating teeth couples, on the right.



**Figure 5.** Maximum contact pressure for a spur gear with profile modifications

## 6. TRANSMISSION ERROR: COMPARISON WITH CALYX

The transmission error due to the elastic deflections of the teeth has been analyzed. In the left image of Figure 6, the transmission error in the period of meshing of a spur gear without profile modifications is depicted: the transmission error is greater in correspondence of the phases of meshing in which there is only one meshing teeth couple and decreases when the couples become two (the central part of the graph). The peak-to-peak is obtained as the difference between the maximum value and the minimum value of the error in the meshing cycle (in this specific case is 1.4  $\mu\text{m}$  for a torque of 40 Nm).



**Figure 6.** Transmission error of a spur gear: with no profile modifications on the left; with improving ones (in the middle); with pejorative ones on the right.

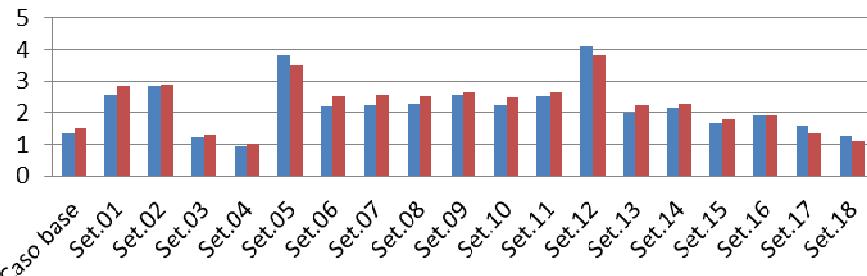
In Figure 6, moreover, the transmission errors of the same gear with profile modifications are shown: some modifications are ameliorative, with a peak-to-peak equal to 0.9 microns (in the center), while others are worse, with a peak -to-peak of 4.1 microns (on the right). It can be seen from this observation that the choice of the profile modifications may not be obvious and should be made on the basis of various attempts, linked also to the fact that the same modifications may be improving or worsening according to the variation of load and crowning. In fact, the transmission error also depends on these two parameters: in particular, it increases with an increase of both. From Figure 6 it can be seen that Helicalpair (blue line) correctly describes the trend of the transmission error in each case: the difference at each point with the transmission error calculated with Calyx (red line) is less than 10%, as well as the difference of the peak-to-peak calculated with the two programs.

## 7. OPTIMIZATION WITH THE GENETIC ALGORITHM: CASE STUDY 1

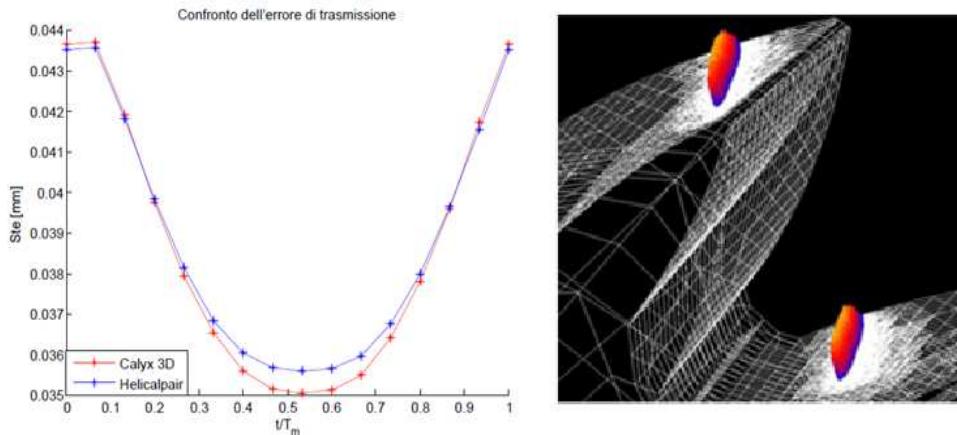
As a first case study for Helicalpair, a spur gear, for which various profile modifications have been proposed, has been considered at different values of crowning and different loads. Figure 7 shows the values of the peak-to-peak of the transmission error arising from different sets of profile modifications for a load of 40 Nm: this table confirms what was described in the previous section about the not always positive influence of the profile modifications on the transmission error. It can also be observed that the best modification reduces the peak-to-peak of about 30%. In order to understand if this parameter can be further reduced, but above all, to be able to predict the best modifications, a genetic algorithm has been implemented in Helicalpair for the gear profile optimization. Its principle resides in numerically reproducing the evolution of biological systems in order to create a best new family of solutions (usually called population) starting from a population already existing, by means of a number of genetic iterations. Applying this algorithm to the profile modifications, a set that reduces the peak-to-peak of 60% has been obtained in output. It confirms the goodness of the algorithm and its utility in the design phase.

## Peak to peak ETS 40 Nm

■ Ets Helicalpair ■ Ets Calyx



**Figure 7.** Peak to peak of the transmission error for the spur gear with different sets of profile modifications with an applied load of 40 Nm.



**Figure 8.** Helical gear with crowning: on the left, the transmission error; on the right the contact shape with two mating teeth couples.

## 8. HELICAL GEAR: CASE-STUDY 2

The program has been tested also on an helical gear. The more regular trend of the transmission error (Figure 8, on the left) of a helical gear than the one of a spur gear is mainly due to the fact that the tooth, in the former case, mating gradually, takes the load progressively. It can be seen again how the curves (blue for Helicalpair and red for Calyx) are almost identical. In Fig. 8 on the right, the contact when there are two mating teeth couples can be seen: the segment of contact for the helical gear is greater than for the spur gear.

## 9. CONCLUSIONS

An efficient finite element software for an advanced design of the gears has been developed. It allows to carry out an analysis not only in resistance of the component, but also an accurate description of the contact, the relative pressure and transmission error at the varying of the profile, the crowning and the load and allows to obtain optimized solutions. In such a way, the growing requirements that the market requires can be satisfied.

## REFERENCES

- [1] G. Bonori, M. Barbieri, F. Pellicano, “*Optimum Profile Modification of Spur Gears by Means of Genetic Algorithms*”, Journal of Sound and Vibrations 2008.
- [2] S. M. Vijayakar, H. R. Busby, D.R. Houser, “*Finite Element Analysis of quasi-prismatic bodies using Chebishev polynomials*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **24**, pp. 1461–1477, 1987.
- [3] M. Beghini, F. Presicce, C. Santus, “*Influence of the linear tip relief modification in spur gears and experimental evidence*”, Proceedings of 12th International Conference on Experimental Mechanics ICEM 12, Politecnico di Bari, 2004.
- [4] S. M. Vijayakar, “*Helical 3D User’s Manual*”, Advanced Numerical Solutions, Hilliard OH, 2005.
- [5] F. Presicce, C. Santus, “*Simulazione FEM per l’Analisi di Ingranaggi Cilindrici a Denti Diritti*”, Organi di Trasmissione, maggio 2007.
- [6] T. Eritenel , D. R. Houser, S. M. Vijayakar, J. M. Casella, “*Effect of Tooth Deflection and Corner Contact on Backside Separation (Backlash) of Gear Pairs*”, Proceedings of DETC.03, ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Chicago, Illinois, USA, 2003.

# AN EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS SYLLABUS AND COURSE DESIGN

Alessandro Freddi

*Academy of Science of the Institute of Bologna, Italy*

*E-mail: alessandro.freddi@unibo.it*

**Abstract.** Historically the Experimental Analysis Course was assembled as a collection of tools for finding solutions, where analytical theories did not exist. With the development of numerical methods this task is partially overruled, even if experimental analysis remains a invaluable tool for building phenomenological theories and for phenomena clarification. Today it has assumed the new task of supporting reliability analysis, of monitoring and controlling the life of working systems and allowing life extension estimations, especially in the common case of a lack of data.

**Keywords:** Experimental Stress Analysis, Course Syllabus, Tasks, Applications.

## 1. INTRODUCTION

The Experimental Method is essentially the mathematical/logical treatment of empirical data, [1]. The Experimental Stress Analysis was the main tool for building the structural mechanics, [2], i.e. all the phenomenological theories that assist the engineer in his task of evaluating the life, safety and reliability of mechanical structures, allowing the design practice development.

Following these premises, a Syllabus of a Course of Experimental Stress Analysis, according to the author experience, must be organized according to the following items, [3]:

- presentation of main experimental methods together with their limits, [4], [5], [6], [7]
- application of the most suitable methods to the main subjects of the structural engineering
- illustration of the methods by laboratory paradigmatic examples. This philosophy inspired the selection of the methods: along the years it was taken advantage of the researches developed in Laboratory time after time, and special attention was paid to unusual problems of strength of materials, not generally treated in other Courses but useful for a good training in mechanical design. Active exercises with groups of no more than six-eight students were devoted to:
  - Strain gages mounting and connection to circuits,
  - Load-cell building and calibration with many degrees of freedom
  - Static and fatigue tests performing on universal and special testing machines

- Strain gauges measurements in real mechanical parts
- Brittle Lacquers use for supporting strain gages applications
- Plane and 3-D Photoelastic and holographic interferometry examples
- Demonstrations of Fracture Mechanics tests on big compact specimens (up to 150 mm thickness).
- Illustrations in a Biomechanics Laboratory of several applications of experimental techniques to bones and prostheses by strain gauges, photoelastic coating, digital image correlation use.
- Organization an writing of technical reports.

Clarification of the analytical theories limits and approximations which generally have no emphasis in other Courses, but are essential in mechanical engineering education, is the first task of the Course. Just to compare theoretical and experimental methods correctly, some lectures are devoted to the concepts of accuracy, precision and resolution of every experimental method. This opens the door to statistical approach to the discipline, not only to descriptive aspects but also to the inference capability of statistics that allows performing previsions.

A review of *Hitachi* in seventies (but valid today too), selected the following items as the main phenomena and causes of industrial failures with the corresponding incidences on total failures number, [8]:

- fatigue (59,8 %)
- static fracture and creep (13,4 %)
- brittle fracture (10,3 %)
- buckling and excess of deformation (8,9 %)
- wear and fretting (4,0%)
- corrosion (3,6%).

The second part of the Course has been devoted to applications about the main chapters of structural mechanics, which have special relationship with the quoted phenomena:

- Static loads
- Impact loads
- High Cycle Fatigue
- Low Cycle Fatigue
- Fracture Mechanics

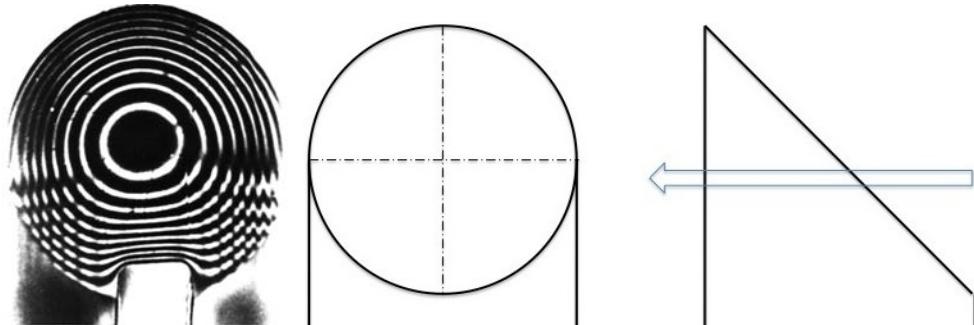
A general Course scheme is synthesized in the matrix of Fig. 1, where the horizontal rows are the methods and in the columns the mechanics fields. Leaving to specialized books the methods description, the intersections between rows and columns are the applications developed in the Course.

## **2. APPLICATIONS OF EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS TO THE THEORY OF ELASTICITY**

The fundamental theories of Boussinesq, Hertz and Saint Venant find an excellent illustration in the full-field methods applications as e.g. photoelasticity. Less investigated problems as the torsion of prismatic and circular bars, find a vivid analogy by the optical methods use.

	Applications	Statics	Dinamics	HC Fatigue	LC Fatigue	Fracture Mech	Biomechanics
Methods							
Strain gauges							
Brittle lacque							
Photoelasticity							
Holography							
Espi							
DIC							
Reliability assessment							

**Figure 1:** Matrix scheme of the proposed syllabus.



**Figure 2:** The membrane analogy through photoelastic fringes.

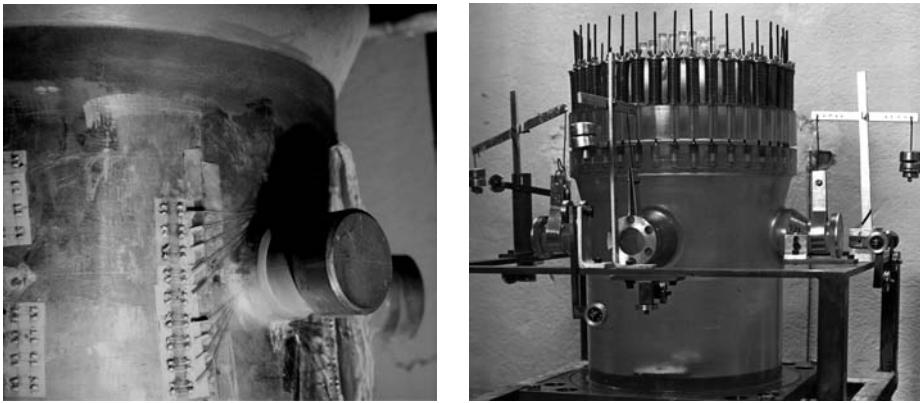
### Analogy in torsion problem

The Wedge method offers a nice representation of the tangential stress distribution in cylindrical beams in torsion when discontinuities are present: the membrane analogy is visualized optically by contour lines [9], [10] and shear stresses can be easily derived in any point of the section, Fig.2. The relationship between the shear stress, tangent to the contour curves and the gradient in perpendicular direction of the contour line is shown by the formula for estimating stresses in any point,  $\frac{dn}{dx} = \frac{\tau}{f}$  with  $f$  photoelastic constant.

### Pressure vessels design

The use of 3D-photoelasticity for determining the state of stress in complex components as pressure vessels is today totally overruled by numerical methods.

In spite of this fact, building physical models and analyzing directly the state of strain and stress, remains a way not only for validating numerical calculations, but mostly for acquiring design sensitivity of the critical areas of stress concentration in the wall of pressure vessels, as transition areas between nozzles and body that exhibit states of stress not easy to determine,

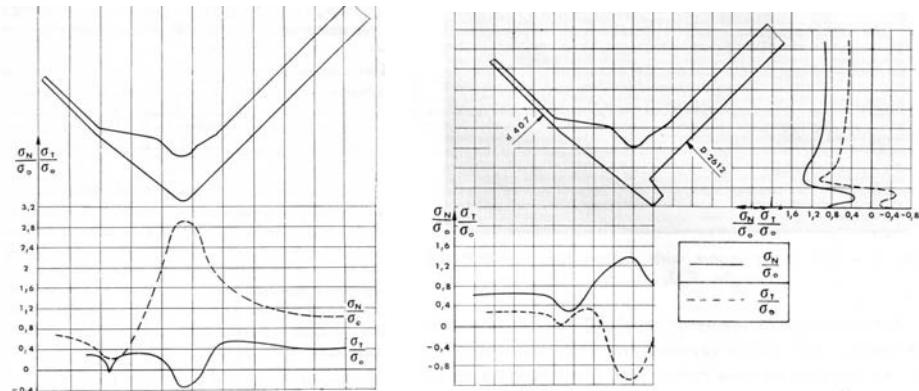


**(a)** Model of a reactor pressure vessel instrumented by strain gauges on the discontinuities of the four nozzles.

**(b)** Photoelastic model of a pressure vessel loaded by internal pressure, by bending and torsion moments as well as by axial and shear loadings applied externally on the nozzles.

**Figure 3:** Strain gauges and photoelastic tests on pressure vessels

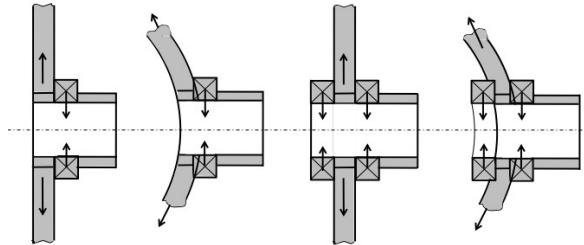
[11]. The frozen-stress photoelasticity gave full information on the 3D state of stress: the symmetry plane offers directly the main stresses lying in the plane and, if sub-sliced, allows the determination of the state of stress perpendicular to the plane itself. Then the most important state of stress is visualized in a way that allows a deep understanding of the phenomenon and the development of designer mentality. The advantage of the experimental approach is not in the completeness of the information that requires too great deal of time compared with numerical methods, but in stimulating in the experimenter a special attitude to identify



**(a)** Stresses in longitudinal symmetry plane in flush type nozzles.

**(b)** Stresses in longitudinal symmetry plane in through type nozzles.

**Figure 4:** State of stress in the symmetry longitudinal planes in flush and through type nozzles. The last reduces stress peaks.

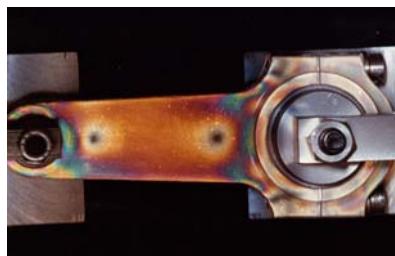


**Figure 5:** Interpretation of different solutions for reinforcement areas on the nozzles in a cylindrical pressure vessel. The symmetric solutions reduce the maximum peak stresses.

the controlling variables for the design of the best nozzles shapes. The analysis addresses the designer on the difference between the stress distributions for two different nozzles types, Fig. 4, [12]: flush-type, (left side) versus through-type (right side). Fig.5 shows the physical interpretation on the effect of the reinforcements in the discontinuities. The solution consisting in the deformation balance between the external and internal parts of the through-type nozzle is the most favorable for reducing stress peaks in the corner.

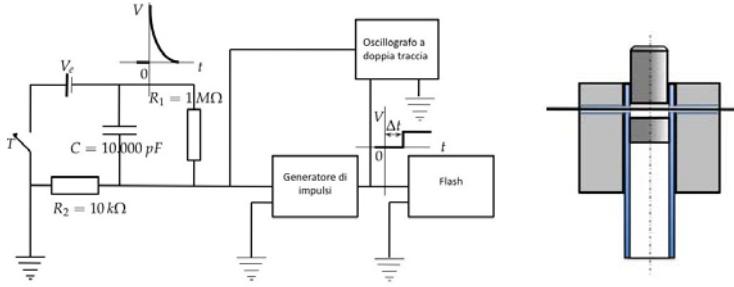
### 3. ANALYSIS OF LOCAL NON-LINEARITY

Overcoming locally the elastic limits is a common practice of advanced design, but it must be carefully controlled in fatigue phenomena, [13]. For visualizing and measuring this localized criticality the photoelastic coating method as well as the digital image correlation method are all suitable in simulated static conditions. The strain gauges must be employed in real fatigue conditions if the gauge type is compatible with fatigue application and the gradient of strain with the grid dimensions and with adhesives properties. Fig. 6 shows, e.g. stresses at the root of a notch in a connecting rod loaded statically in tension. It is not impossible that in certain anomalous circumstances in this point the yield stress can be reached and a low cycle fatigue phenomenon could be added, for some instants of time, to the normal high cycle fatigue during the rod service and reduce the component life.



(a) High strains at the notch in a connecting rod revealed by reflection photoelasticity.

**Figure 6:** Strains beyond the elastic limit in geometrical discontinuities in a connecting road (for F1 engine) in a simulated static loading condition.



(a) Electrical circuit for a controlled delay (A. Burchiani, 1969).

(b) A bullet of 9 mm in diameter is shot by compressed air and switches on an electrical contact.

**Figure 7:** Device for impact generation on the border of a plane specimen.

#### 4. ANALYSIS OF STRESS WAVES DUE TO IMPACT

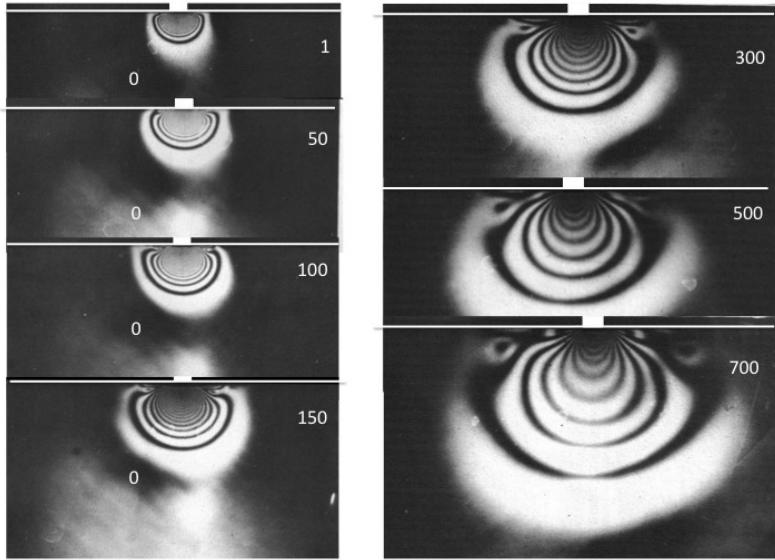
Impact theory is one of the most attracting development of the theory of elasticity but only experiments clarify some details of stress waves generation, [9], [14].

An experimental apparatus [15] can be built utilizing a photoelastic bench with a flash light, an open camera as registration device and an electronic circuit for varying the interval of time between impact and flash activation, in order to delay the instant of wave recording to the instant of the impact, Fig. 7. This is obtained through a bullet, shot by compressed air against the border of a flat transparent plate. Fig.8 shows the photoelastic fringes obtained with a flash light with a duration of time of  $2 \mu s$  with the following time delay after the impact:  $1 - 50 - 100 - 150 - 300 - 500 - 700 - 1000 - 1200 \mu s$ .

#### Fringes analysis

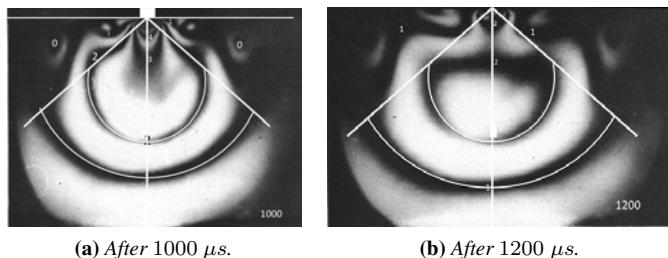
Even with the use a low modulus material with a high internal friction (that partially differentiates the results from the actual stress distribution in metallic plate), the fringes images suggest the following remarks:

- isochromatics give the maximum shear stresses in all the points but not the main stresses which can be obtained by the oblique incidence method.
- the propagation front exhibits a semicircular shape Fig. 8 of compression longitudinal waves. On the symmetry line any transversal rotation is inhibited and the wave is only longitudinal.
- In order to reduce the waves velocity it was selected a plate of  $6.4 \text{ mm}$  thickness of poliurethanic resin with  $E$  equal to  $5.66 \text{ MPa}$ . The theoretical longitudinal wave velocity is  $c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{1-\nu^2}} = 80 \text{ m/s}$ .
- the transversal waves propagate with a lower velocity of  $\sqrt{G/\rho} = 37 \text{ m/s}$ , and cover a distance of about one half compared with the longitudinal waves. The maximum effect of transversal waves is at about 60 degrees to the symmetry axis, where the isochromatics show a curvature change, Fig. 9. Only the first light close to zero order along the symmetry line, corresponding to a very low level of stress, propagates with the velocity of sound in that media.



(a) First series of images from 1 to 700  $\mu s$ .

**Figure 8:** Photoelastic images of stress waves at several interval of time from the impact instant (in  $\mu s$ ).

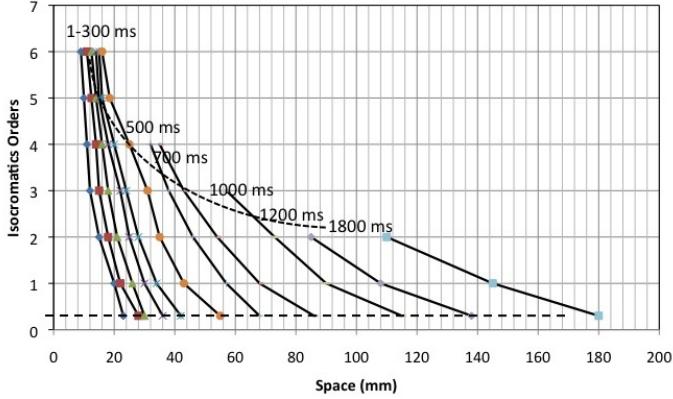


**Figure 9:** Detail of the fringes with the fringes distortion due to transversal waves at about 60 degrees from the symmetry axis.

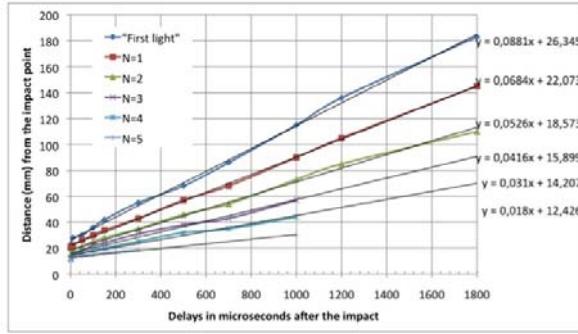
- The stress velocity of the different fringes is not constant: the higher orders are slower. After a time of about 1200  $\mu s$  the maximum value is shifted respect to the impact point. Fig.10 shows the sequence of the order at several instants of time and Fig.11 shows the linearity of the waves fronts of different fringe orders.

## 5. ANALYSIS OF LOCAL STRESSES IN HIGH CYCLE FATIGUE

One of the contribution of the experimental method in supporting the phenomenological theory of fatigue at high number of cycles is given by the illustration of the role of the dynamic advantage due to the cyclic local loadings at the root of a geometrical discontinuity.



**Figure 10:** Isochromatics orders along the symmetry axis at different time intervals.



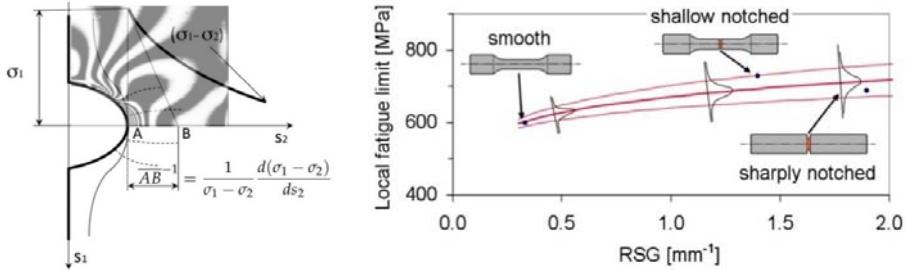
**Figure 11:** Isochromatics front of  $1 - 2 - 3 - 4 - 5$  orders and of the first light along the symmetry line.

According to the classic theory, the effect of the stress concentration factor  $K_t$  is mitigated by the sensitivity factor  $\eta = f(\text{material})$ , depending on the local accommodation of the micro-plasticity; so the real effect is represented by  $K_f < K_t$ . For non-saintvenantian bodies, i.e. bodies of large dimensions in three directions, stress concentration as well as fatigue notch factor cannot be defined and the approach based on the support factor  $n$  seems more valuable and general. According to this theory, the support factor is a function of the Relative Stress Gradient (RSG) that can be evaluated numerically or experimentally with optical methods better than by strain gages, Fig. 12 (a).

By the photoelasticity, the relative stress gradient can be expressed how, [9]:

$$\chi' = \frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds_2} \quad (1)$$

where  $\sigma_1$  is the main stress along isostatics 1, while  $\sigma_2$  is main stress along the isostatics 2. The stress  $\sigma_1$  during the loading phase in tension, is tangent to the border of the notch in vertical direction i.e. tangent to  $s_1$ , while  $\sigma_2$  is perpendicular to the first and tangent to the



(a) How to determine the relative stress gradient by isochromatic pattern. (b) The new  $n$  – curve for a Titanium Alloy (Ti-6Al-4V) obtained by three types of specimens loaded in bending.

**Figure 12:** The meaning of the support effect and the relative stress gradient determination by photoelasticity.

second trajectory  $s_2$ . Because  $\sigma_2 = 0$ , Eqn. 1 gives:

$$\chi' = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_2} + \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds_2} \quad (2)$$

Eqn. 2, for the 2<sup>nd</sup> Maxwell equilibrium equation  $\frac{d\sigma_2}{ds_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0$ , becomes:

$$\chi' = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_2} - \frac{1}{\rho_1} \quad (3)$$

where  $\rho_1$  is the local radius of the root of the notch. The Relative Stress Gradient (RSG) is the inverse of the intercept  $AB$  of the straight line on the  $s_2$  axis diminished by the inverse of  $\rho_1$ , Fig. 12:

$$\overline{AB}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_2} \quad (4)$$

The  $n$  – curve can be estimated extrapolating from three values instead of two, as in Fig. 12 (b), that shows an example of the n-curve, determined by rotating bending, for a Titanium Alloy, for smooth, shallow-notched and a sharply notched specimens, with Relative Stress Gradient RSG varying from 0.5 to 2.0, [16].

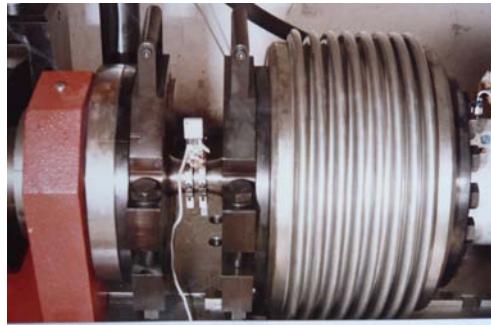
## 6. ANALYSIS OF LOCAL STRAINS IN LOW CYCLE FATIGUE

The most relevant contribution of Experimental Stress Analysis to the low cycle fatigue (*LCF*) theory is due to the use of strain gages as sensors in *strain controlled* in laboratory, as well as in field tests, [17]. The results of these experimental procedure have totally changed the interpretation of the fatigue life at high levels of deformation.

Fracture surfaces for strain controlled tests, Fig. 13 (a), are in circumferential direction while in torque controlled tests, the direction of the crack, [18], [19] is at 45 degrees from the axis. Specimens with full section are tested on the torsion machine shown in Fig. 13 (b), especially designed and built for torque up to 25 Nm capacity.



(a) Failure surface of a shear controlled full specimen of 50 mm.



(b) Example of low cycle fatigue in torsion controlled by shear deformation on specimens of 25 mm of diameter.

**Figure 13:** A shear controlled torsion tests for full specimens: the fracture arises along the plane of maximum shear stress.

## 7. ANALYSIS OF STRESSES IN FRACTURE MECHANICS

The experimental stress analysis is particularly useful and suitable for exploring the singularity at the crack tips in loaded bodies. The experimental determination of Stress Intensity Factors can be done by several techniques as photoelasticity, holographic interferometry, [20], strain gages [21], as well as through digital image correlation methods.

### Photoelastic determination of the Stress Intensity Factor

A first task of experimental validation of the approximate theory of the Stress Intensity Factor (SIF) is clarified by the following Figures. A way for determining the intensity factor  $K_I$  by photoelasticity is shown in Fig. 15. The circular crack is internally pressurized that is equivalent to an external uniform loading in one direction. The photoelastic fringe pattern (contour lines of maximum shear stress) for a circular internal crack in a 3D-specimen uniformly loaded, see Fig. 15 (a), match the contour lines obtained by the analytical solution with one term Fig. 14 (a) but better with contour lines derived with three terms of the series development, (b). It is possible to write an equation that relates  $K_I$  (at a certain distance  $r$  from a crack tip) to the photoelastic order  $N$ , to photoelastic constant  $f_\sigma$  and to the slice thickness  $d$ :

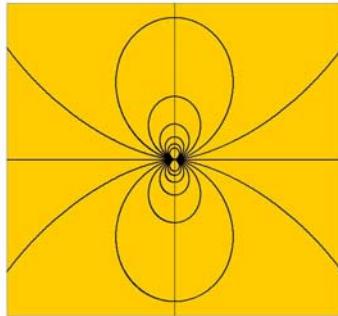
$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{f_\sigma} = N\sqrt{r}$$

or, introducing the constant  $C = \frac{\sqrt{2\pi}f_\sigma}{d}$

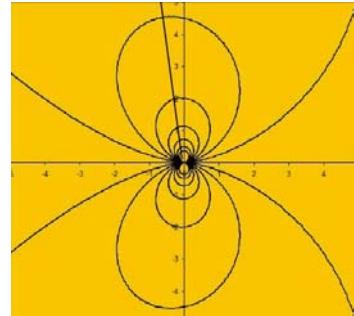
$$K_I = N\sqrt{r} \cdot C \quad (5)$$

The steps for the experimental determination of  $K_I$  are the following:

- after recording the  $N$  values and the distances  $r$  from the fringes pattern (a) in a direction perpendicular to the crack plane, the product  $K_I/C = N \cdot \sqrt{r}$  is plotted in a diagram (b) as function of  $\sqrt{r}$ , the root of the distance of the isochromatics from the crack tip.

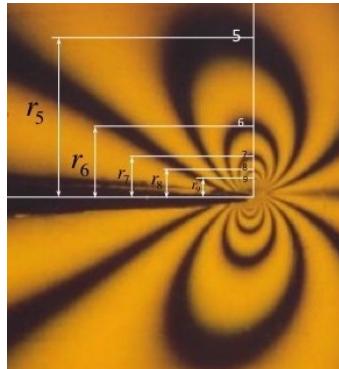


(a) Theoretical solution of the first term approximation for a crack in uniformly loaded.

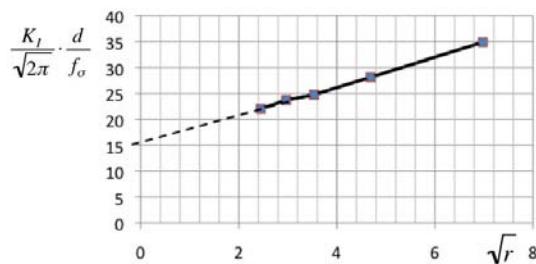


(b) Theoretical solution with three terms approximation of series development.

**Figure 14:** Theoretical shear stress distribution for circular cracks uniformly loaded.



(a) photoelastic fringes in a circular shaped internal pressurized crack.



(b) Interpolation for determining the limit value of  $K_I$ .

**Figure 15:** Derivation of Stress Intensity Factor by photoelastic fringes.

- the interpolating curve is linearly extrapolated up to intercepting the vertical axis. The term  $N \cdot \sqrt{r}$ , for the Eqn. 5, is proportional to the factor  $K_I$ .  $C$  is defined by the thickness of the model and by the photoelastic constant.
- the limit as  $\sqrt{r}$  approaches zero is the definition of  $K_I$ .

The method gives only an approximation, as it will be clarified in a successive paper of the author, where a better solution will be given utilizing the Least Square Method.

### Determination of the stress intensity factor by holographic interferometry

The following example refers the application of holographic interferometry to the determination of the Stress Intensity Factor in points of a crack tip. For the determination of the SIF in

one point the following theoretical expression for the displacements must be used:

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7)$$

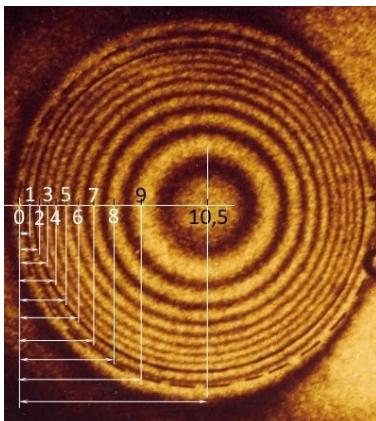
where  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Eqn. 7 for  $\theta = \pi$  becomes  $v = \frac{2K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu)$ .

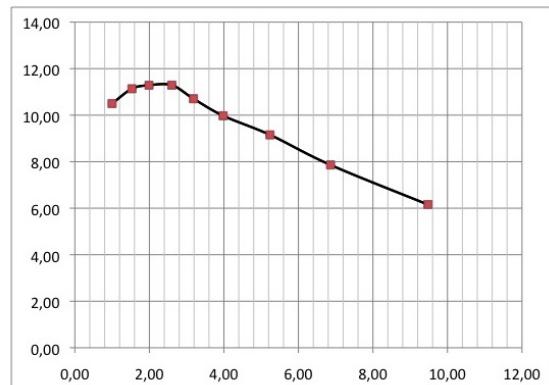
Since the displacement  $v$  is given by  $N\lambda/2 \cos^2 \alpha$ , [20], the following expression joins the stress intensity factor and the fringe order  $N$ :

$$\frac{2K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 - \nu) = N\lambda/2 \cos^2 \alpha$$

- The values  $N$  and the fringes distances  $r$ , see Fig.16 (a), allow to build a diagram of  $N/\sqrt{r/a}$  as a function of  $1/\sqrt{r/a}$  in the perpendicular direction of each crack tip point, Fig. (b).
- the curve is linearly extrapolated to intercepting the coordinate axis, limiting the extrapolation to the central points of the experimental data, avoiding points outside the definition area of  $K_I$ . This is a critical choice that has been discussed in a recent Symposium memory of the same author [22].



(a) Displacements for a crack of two circular coplanar cracks in an uniform stress field with  $\sigma = 2$  bar .



(b) Relationship between the stress intensity factor and the displacements along a radius.

**Figure 16:** Stress Intensity factor evaluation in a tip point (in ordinate  $N/\sqrt{r/a}$ , in abscissa  $1/\sqrt{r/a}$ ).

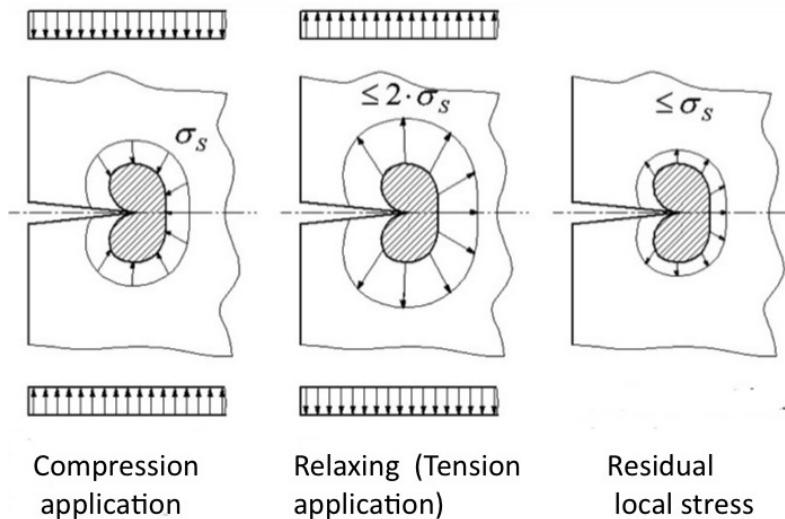
- being the constant term  $C = \frac{\sqrt{2\pi}\lambda E}{8(1-\nu^2)\cos^2\alpha}$ , the value of SIF  $\frac{N}{\sqrt{r}} \cdot C$  is obtained dividing the limit of  $N/\sqrt{r/a}$  by  $\sqrt{a}$  and multiplying it by the constant  $C$ . This value can be compared with the theoretical expression of  $K_I$  of a circular crack:  $2p\sqrt{\frac{a}{\pi}}$ .

### Determination of $K_I$ by strain gauges measurements: case of a crack in an uniform compression stress state [21]

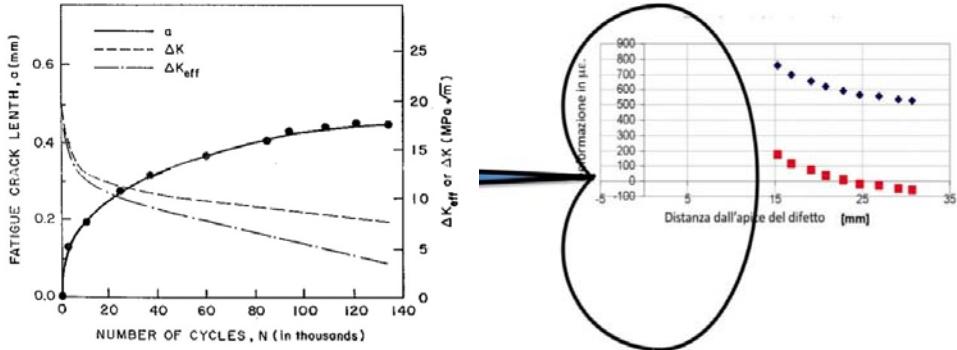
The special case presented here does not compromise the generality of the method: it is unusual condition of a crack generated in a compressive state of stress where enucleation and propagation can be present due to an inverse mechanism of plasticity at the crack tip, well known in literature, [23], Fig. 17. It is suitable to separate two different phases, Fig. 17:

- a first phase of an uniform compressive loading at great distance from the crack, generates a local compressive stress  $\sigma_s$  with plastic compressive deformation at the crack tip
- a second phase of external load relaxing is equivalent to the application of a tensile stress, that locally generate a tension stress  $\leq 2\sigma_s$

The residual stress resulting from the algebraic sum of both local contributes of the loading cycle is a stress  $\leq \sigma_s$  that is positive and responsible of a crack propagation. The diagram Fig.18 (a) due to Pippian, [23] shows that if cyclic loading is added from zero to a positive value, the crack length  $a$  is going to increase with the first cycles and after to stabilize and the velocity of the crack propagation to decrease without reaching zero. In the present example the velocity decreases from  $4 \cdot 10^{-4}$  to  $6 \cdot 10^{-6} \text{ mm/cycle}$ . The  $K_I$  measurement is carried out according to the following steps:



**Figure 17:** Residual stress generation after a cycle of compression-relaxing.



(a) Crack propagation in cyclic compression (from Pippan, [23]). (b) Extension of the plastic zone at the surface.

**Figure 18:** The behavior of a crack pre-loaded by a compressive state of stress.

- the column is pre-loaded in compression (in the present example the pre-stress is equal to  $-583 \mu\epsilon$  equivalent to a stress of  $\sigma = -120 \text{ MPa}$ )
- a chain of strain-gauges is applied in the perpendicular direction of the propagation direction of the crack and calibrated at zero load
- a the column is loaded with in tension
- the strains are measured and the values of strains reported in Fig.18 (b) (higher points with rhombic symbols)
- from this values the nominal pre-compression strain is subtracted and the remaining strains reported in the diagram with the lower quadrate symbols.
- The Fracture Mechanics equation for the points along the crack direction is:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (8)$$

Since:

$$\epsilon = \frac{1 - \nu}{E} \quad (9)$$

the following Eqn. relates the residual deformation  $\epsilon_y$  to the Stress Intensity Factor:

$$K_I(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E \cdot \epsilon_y(r)}{1 - \nu} \cdot \sqrt{2\pi r} \quad (10)$$

The SIF determination must be performed remembering that, for the Eq. 10, the measured  $K$  at several distance from the crack tip is far to be constant. Fig. 19 shows the distribution of  $K_I$  versus  $\sqrt{2\pi r}$  at several distances  $r$ .

It is wrong to find  $K_I$  extrapolating the curve for  $r$  approaching 0. The reason is due to the fact that on the external surface a plane state of stress is present with a very large plastic

zone, Fig. 18 (b) and it is nonsensical to estimate a value of  $K_I$  from a plane stress state on the surface. This extrapolation would give an improper value of  $K_I$  equal to  $2301.3 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ , Fig. 19. A reasonable solution can be found avoiding the extrapolation for  $r = 0$  but extrapolating at the boundary of the plastic zone, i.e. at a  $r$  equal to the plastic zone size  $r_p$  or  $2r_p$ . (The second hypothesis is based on the redistribution of the state of stress due to equilibrium reasons). The procedure requires an iterative calculation [21] of  $K_I$  because the radius of the plastic zone is in turn depending on this factor; the steps are the following:

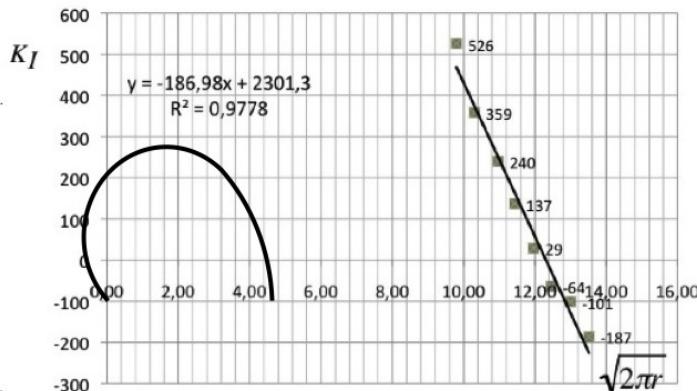
- the plastic radius  $r_p$  is calculated through the formula:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{I(i=1)}}{R_s} \right)^2 \quad (11)$$

where  $K_{I(i=1)}$  is the first tentative value equal e.g. to 2301.3, Fig. 19 and the yield stress  $R_s$  is  $315 \text{ MPa}$  for steel used for this component. The first  $r_p(i = 1)$  radius is evaluated.

- A new value  $K_{I(i=2)}$  is calculated for a value of the axial coordinate equal to  $\sqrt{2\pi r_p}$ , with  $r = r_p$ .
- with this new value  $K_{I(i=2)}$  the plastic radius is again evaluated together with the new coordinate  $\sqrt{2\pi r_p}$  through Eqn. 11 for  $i = 2$ .
- The procedure continues iteratively up to the convergence between the tentative value of the stress intensity factor and the value obtained by the calculation. After 22 iterations a value of  $K_{I(i=22)} = 1444 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}} = 46 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  is obtained. For a dimension of the plastic zone equal to the double of the previous one, then for an abscissa of  $\sqrt{4\pi r_p}$ , the convergence is reached after 39 iterations and  $K_{I(i=39)}$  is  $1250 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}} = 40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

With the previous observations on the dimension of the plastic zone, it seems more realistic to assume the larger value of  $K_I$  between the two, corresponding to a smaller plastic zone



**Figure 19:** Relationship between  $K_I$  ( $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ ) and the root of the radius from the crack tip,  $r$  in  $\text{mm}$ .

size, closer to the plastic zone size of a plane strain state, present in the internal part of thick bodies. Properly the internal plastic radius can be estimated with the formula:

$$r_p = \frac{(1 - 2\nu)^2}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_s} \right)^2 \quad (12)$$

## 8. ANALYSIS OF STRESS IN ORTHOPEDIC BIOMECHANICS

A wide possibility of application of experimental stress analysis methods to Biomechanics has led to a great development and improvement of orthopedic surgery, [24], [25], [26], [27], [28]. Just limiting the presentation to a main topic, it is worth mentioning the characterization of long bones and stability of cemented hip stems through tests on implantable materials and bio-materials, on simulacra as well as on prosthesis implant. The experimental techniques most frequently used are, Fig. 20:

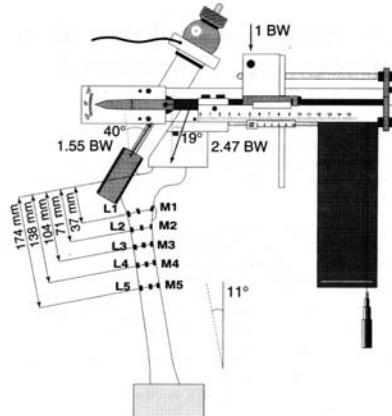
- strain gauges
- displacement measurement through *LVDT* and Extensometers
- force measurements by load cells and piezo transducers.

The main research fields is fatigue crack propagation and toughness of biomaterials for which inspection of cracks and initial defects are essential. The steps of this research can be summarized as following:

- tests on implantable materials and biomaterials.
- tests on simple structures.
- tests on prosthesis-implant.



(a) Application of strain gauges to a femur bone and to the hip prosthesis in a fatigue apparatus.



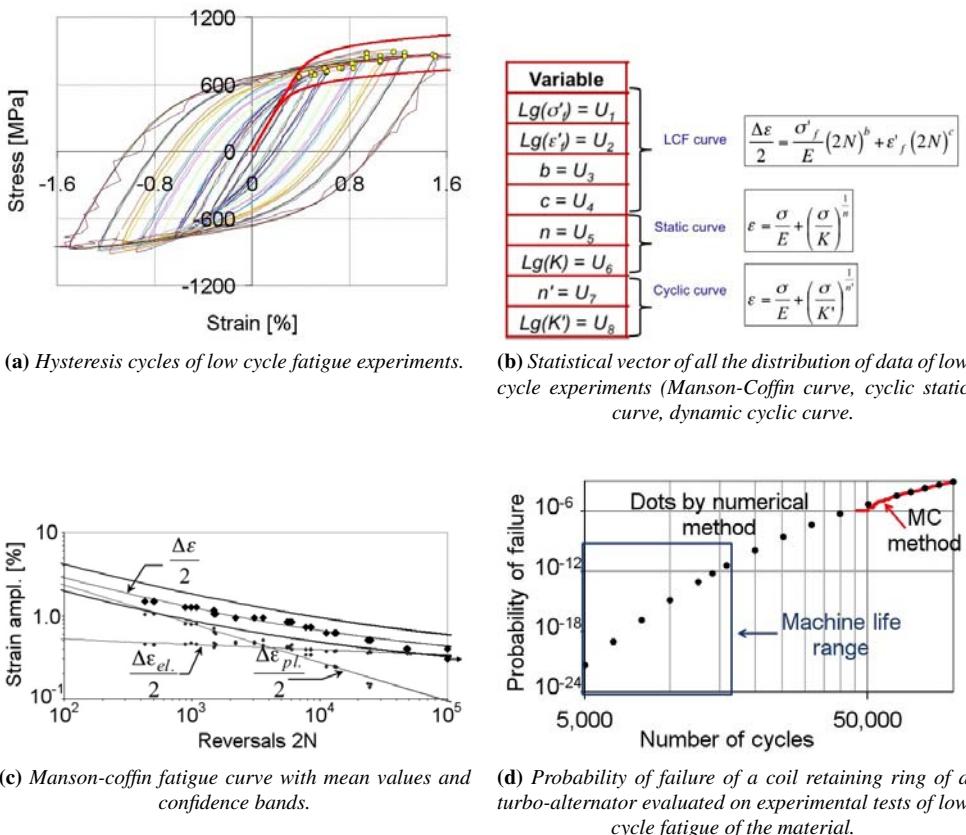
(b) Design of a device for simulating loading on the hip prosthesis and the muscle reaction on trochanter [25].

**Figure 20:** Experimental apparatus and details of a device for loading the femur simulating muscles and loads distribution.

## 9. RELIABILITY ASSESSMENT

The answer to states of stress and strain depends also on numerous conditions of the structural element and on production processes. What is eventually important is not the knowledge of the state of stress, but an estimate, on the basis of this information, of the behavior of the structural element, in order to assess its reliability, [29], [30].

Let us show how low cycle fatigue testing can be organized for utilizing experimental data for a reliability analysis, Fig. 21. To do this is necessary to consider all the experimental results in their actual nature of random values and to introduce a reliability model for estimating the probability of reaching a critical state, [32]. In order to obtain reasonable previsions, every experimental result must be given in such a way to allow to interpret it not as single values but as statistical variables. Tests must be replicated a sufficient number of times to estimate experimental errors. In this way the variables can be defined by probability density functions with their typical values as mean, variances etc. This example demonstrates that the experimental approach is the only possibility to give scientific base to typical and important engineering quests as life extension of huge and expensive systems, through an adequate estimation of the probability of failure for prolonged service.



**Figure 21:** Experimental approach on a low cycle fatigue problem oriented to a reliability analysis, with the evaluation of the probability of failure for several design lifes [31].

## 10. CONCLUSIONS

The specific rationale of this syllabus is the following: the perspective of the experimentalist offers new and complementary points of view on the mechanics of structures in comparison with the classical analytical or numerical approaches. That is the basic question that justify the insertion of a course of this type in the curriculum of a mechanical engineering student.

If the prevalent thought is that the modern numerical methods substitute totally the experimental approach, a course of this type is useless. Far too time is necessary for the lab work preparation and development, too expensive are the machines, devices and equipments necessary for experiments carrying on. If, vice-versa, the thought is that the experimental work as well as the typical detective mentality of the *inverse approach* at the structural problems are useful for the researcher formation, for the understanding of hidden criticality and for solving many engineering problems, this training is essential in the engineer education. Further help is given by the experimental method in discovering the causes of troubles and failures and in building engineering practices of modern design of technical systems, [33].

Far from declining in the time of modern numerical simulations, Experimental Stress Analysis offers invaluable conceptual tools for developing modern applied sciences.

## Acknowledgements

The author wishes to thank all his colleagues, laboratory technicians and collaborators who assisted him in designing the experiments and teaching the lessons in Experimental Stress Analysis Course. They helped with enthusiasm and generosity for many years, so that the apprentice and positive reactions of the students were always merit of this joined effort.

## References

- [1] Severino, E., 1970. *Storia della Filosofia*. Rizzoli Ed.
- [2] Bell, J.F., 1984. *Mechanics of Solids Vol. I : The Experimental Foundations of Solid Mechanics*. Editor C. Truesdell , Springer Verlag Berlin.
- [3] Olmi, G., Freddi, A., 2007. "Il Corso e il Laboratorio di Meccanica Sperimentale nel CDLS in Ing. Meccanica a Bologna". In Proc. of the AIAS National Conf., Ed. Cuzzolin.
- [4] Ajovalasit A., 2008. *Analisi sperimentale delle tensioni con gli estensimetri elettrici a resistenza*, Ed. Aracne.
- [5] Ajovalasit A., 2009. *Analisi sperimentale delle tensioni con la fotomeccanica. Fotoelasticità, moiré, olografia, speckle, correlazione immagini*, Ed. Aracne.
- [6] Dally, J.W. and Riley, W.F., 2005. *Experimental Stress Analysis*, Mc Graw-Hill Co. Fourth Ed. N.Y.
- [7] Kobayashi, A.S., 1993. *Handbook on Experimental Mechanics*, Second revised edition., VCH, SEM.
- [8] Ohchuda H., "Analysis of Service Failures of Hitachi Products (1970-1975)", 1979. *Hitachi Company Report*, Tokyo. Cited in Albalil H.H., Mora E.EE., 2002. "Mechanica de fractura y análisis de falla", Universidad national de Colombia, Bogotá ISBN 958-701-242-9, and in Wirshing P.H., 1993.: "Course on Structural Reliability and Probabilistic Mechanics", The University of Arizona.
- [9] Kuske, A. and Robertson, G., 1974. *Photoelastic Stress Analysis*. J. Wiley and Sons, London.
- [10] Freddi, A., 1967. "Il metodo di congelamento delle tensioni nella fotoelasticità: suoi recenti aspetti". *Rassegna internazionale di meccanica* F. Angeli, 1.

- [11] Freddi, A., 1972. "Photoelastic stress analysis of a nuclear reactor pressure vessel". *Meccanica J. of AIMETA*, Vol.7, 3.
- [12] Freddi A., 1972. "Photoelastic stress analysis of a nuclear reactor pressure vessel". *Meccanica J. of AIMETA*, Vol.7, Nr.3.
- [13] Curioni, S., Freddi, A., 1990. "Life prediction analysis with local strain approach". *ÖIAZ Zeitschrift des Österreichische Ingenieuren und Architekten Wien Heft 7/8. Juli/August 1990.*
- [14] Dally, J.W., Riley, W.F., Durelli "A photoelastic Approach to Transient Stress Problems Employing Low Modulus materials", 1959. *J. Appl. Mech.* Vol. 26, pp. 613-620.
- [15] Freddi, A. 1975. Esperimenti di fotoelasticità dinamica. Report Inst. Appl. Mecc. Bologna University.
- [16] Olmi, G., Freddi, A., 2012. "Resistenza a fatica della lega Ti-6Al-4V con e senza trattamento di pallinatura". In: Proceeding *GEF 2012*, DIE, Ind. Eng. Dept., Bologna University.
- [17] Olmi, G., Freddi, A., 2007. "Experimentelle Spannungsanalyse an einer Asphalt-fräsmaschine bei der Montage und im Betrieb". *Messtechnische Briefe*. 2/2007, pp. 2-15.
- [18] Freddi, A. 1987. "Integrity Assessment of Large forgings Containing Defects: A Fracture Mechanics Approach". *Int. J. Mat. & Prod. Tech.*, Interscience Ent. Ltd. Geneve. Mese, pp.1-3.
- [19] Curioni, S., Freddi A., Dal Re, V., Zannoni, M., 1986. "Fracture Mechanics Analysis of a NiCr-MoV Steel for a Turbine Disk". *Öiaz: Österreichische Ingenieur un architekten Zeitschrift*. 8/1986 pp. 320-324.
- [20] Freddi, A., Persiani, F., 1978. "Holographic Measurement of Magnification Factors for Embadded Interacting Defects in Transparent Models", *6th Int. Conf. on Exp. Stress Anal.*, VDI Berichte Nr.313.
- [21] Olmi, G., Freddi, A., 2005. "Crack initiation and propagation in a press column under compressive load". *Archiwum Budowy Maszyn.*, N. 52, pp. 323-340.
- [22] Freddi, A., 2013."Some Examples of System Parameters Identification by Experimental Stress Analysis". *YSESM, 24-28 April 2013*, oral presentation, Bari.
- [23] Pippa R., 1987. "The growth of short cracks under cyclic compression", *Fatigue Fracture Engineering Mat. and Struct.*, Vol. 9, pp. 319-328.
- [24] Freddi, A., Cristofolini, L., 1994."Pre-clinical biomechanical validation of hip prosthesis. A survey of the most common techniques" *Proceedings of XII School of Biomechanics-Editor. R. Bedzinski Politechnik of Wroclaw, Szklarska Poreba*, 20-23 October
- [25] Spirito G., Cristofolini L., Freddi A. 1999, "Deformation measurement by means of holographic interferometry with digital data analysis" *Abstracts of XVI Danubia-Adria Symposium on experimental methods in solid mechanics*. Cluj Napoca, Romania, 29 Sept.-2 Oct. 1999) Cluj Technical University, Cluj Napoca, Romania, pp. 17-18.
- [26] Prati E., Freddi A., 1979. "A critical evaluation of some current experimental models simulating the human knee joint". *Proc. VII Int. Congr. of Biomechanics, ISB*. Warszawa, Poland, Vol. 3-A, 1979.
- [27] Prati, E., Freddi, A., Ranieri, L.; Toni, A., 1984. "Metodologia sperimentale per l'analisi del danno di femori con protesi d'anca, sollecitati a fatica". *Chir. Org. Mov.*, LXIX. 3rd Meeting of Europ. Soc. of Biomech. Jan. 1982, Nijmegen, Olanda.
- [28] Prati, E., Freddi, A., Toni, A., 1985. "Indagine sperimentale sul comportamento a fatica di un femore con protesi d'anca". *Rassegna di Bioingegneria*, vol.10 n.2-3, pp. 149-157.
- [29] Birolini, A., *Qualität und Zuverlässigkeit technischer Systeme*. Springer Verlag, Berlin-1991 *Reliability Engineering* Ed. 2010, Springer Verlag, Berlin

- [30] Wirsching, P., Ortiz, K., 1992. "Reliability methods in mechanical and structural design". *13th Annual Seminar and Workshop*, January 20-24, 1992. The University of Arizona, College of engineering, Aerospace & Mech. Dept., Tucson, Arizona 85721.
- [31] Olmi G., 2012. "An Efficient Method for the Determination of the Probability of Failure on the Basis of LCF Data: Application to Turbogenerator Design", *SDHM*, vol.8, no.1, pp.61-89.
- [32] Olmi, G., 2012. "LCF experiments on turbogenerator steels and a new method for defining confidence bands". *JTE* 40, Nr. 4.
- [33] Freddi, A., 2010. "Some Reflections upon the Design by Experiment of Mechanical Structures". In Proceeding of Konstruktionsmethodik fuer Fahrzeug-Konzepte, Braunschweig, pp. 159-176.

# INTEGRAZIONE DI METODI NUMERICI E SPERIMENTALI: UNA PROSPETTIVA BIOMECCANICA

Luca Cristofolini

*Dipartimento di Ingegneria Industriale*

*Università di Bologna*

*Email: luca.cristofolini@unibo.it*

**Abstract.** La biomeccanica dell'osso è stata ampiamente studiata in passato sia con esperimenti in vitro, che con modelli numerici. Nella maggior parte dei casi viene scelto uno dei due approcci, senza sfruttare le sinergie. Sia gli esperimenti che i modelli numerici soffrono di limitazioni relative alla loro accuratezza e ai rispettivi campi di applicazione. Gli esperimenti in vitro sono in grado di migliorare i modelli numerici tramite: (i) l'individuazione dei più importanti scenari di fallimento, (ii) identificazione del modello con le proprietà dei materiali misurati sperimentalmente, (iii) validazione quantitativa basata sulle proprietà meccaniche (deformazione, spostamenti) misurate direttamente da campioni fisici da testare in parallelo all'attività modellazione. Analogamente, i modelli numerici possono migliorare gli esperimenti in vitro: (i) identificando le più rilevanti configurazioni di carico tra un certo numero di compiti motori che non possono essere replicati in vitro, (ii) identificando semplificazioni accettabili per la simulazione in vitro; (iii) ottimizzando l'uso di trasduttori per minimizzare gli errori e fornire misurazioni nei punti più rilevanti, (iv) esplorando una varietà di condizioni diverse (proprietà dei materiali, interfaccia, ecc), che richiederebbe un enorme sforzo sperimentale. Prendendo ad esempio uno studio del femore, si mostra come una combinazione di modellazione numerica ed esperimenti controllati all'interno dello stesso gruppo di ricerca può essere progettato per creare un circolo virtuoso in cui vengono utilizzati i modelli per migliorare gli esperimenti, gli esperimenti sono utilizzati per migliorare i modelli, e la loro combinazione offre in sinergia risultati più dettagliati e più affidabili di quanto possa ottenersi utilizzando singolarmente uno dei due approcci.

**Parole chiave:** Biomeccanica, ossa umane, la modellazione numerica; test meccanici in vitro, analisi della sensitività; validazione sperimentale

## 1. INTRODUZIONE

L'empirismo è predominante nelle scienze naturali, mentre la modellazione matematica è tradizionalmente limitata ai modelli induttivi che estrapolano da osservazioni sperimentali. Al contrario, la fisica è radicata nel metodo scientifico, in cui la modellazione matematica deduttiva ed abduttiva giocano un ruolo centrale nella formulazione e la falsificazione delle ipotesi. Questa dicotomia rende difficile una definizione condivisa di una relazione metodologica tra esperimenti e modelli matematici. Alcuni ricercatori vedono con grande sospetto qualsiasi modello deduttivo, confidando solo dati empirici da esperimenti. Altri considerano la modellazione matematica come un dominio di ricerca autosufficiente, senza

bisogno di alcuna prova empirica diretta. Inoltre, per l'estrema specializzazione della ricerca nella maggior parte dei gruppi di ricerca si sono lentamente separate le competenze di modellazione matematica dalle competenze sperimentali, e non è raro vedere gruppi di cui solo una di queste abilità è veramente sviluppata. Questo è un peccato: la complessità del comportamento biomeccanico del sistema muscolo-scheletrico è enorme; per avanzare la comprensione, si dovrebbe essere pronti ad utilizzare ogni tecnica empirica disponibile. La resistenza ossea è stata ampiamente studiata con esperimenti controllati o modelli numerici. Molto raramente è stata utilizzata una combinazione di entrambi.

Gli scenari di carico applicati *in vitro* generalmente seguono due diverse filosofie che riflettono la complessità del sistema muscolo-scheletrico umano. Nel primo caso, i singoli componenti del carico sono applicati all'osso, senza un rapporto diretto con qualsiasi specifica scenario di carico *in vivo*. Una revisione di questo approccio è stata recentemente pubblicata [1]. Questo approccio è stato inizialmente applicato in studi di ossa intere nel 1970 [2, 3], ed è ancora spesso utilizzato (per esempio [4-6] per diverse ragioni. Prima di tutto, molti segmenti ossei *in vivo* sono sottoposti ad una grande varietà di scenari di carico nel corso di una serie di compiti motori [7]. Piuttosto che replicare un gran numero di condizioni di carico, in alcuni casi è preferibile applicare separatamente le componenti principali di carico all'osso (flessione in diversi piani, torsione e in alcuni casi assiale carico). Inoltre, spesso non vi sono indicazioni circa l'intensità e la direzione dei carichi applicati *in vivo* alle ossa: per esempio, vi è ancora dibattito sulla funzione di ammortizzatore del perone umano [8-10]. Quando le informazioni sono scarse o inesatte è preferibile aggirare il problema, concentrandosi su uno scenario carico semplificato (e meglio controllato). Nel secondo caso, quando la conoscenza sulle condizioni di carico *in vivo* è sufficiente ed è necessario includere la complessità dei carichi *in vivo* nella simulazione *in vitro*, le prove sperimentali mirano a replicare le componenti del carico applicate durante attività motorie selezionate [11, 12]. Per rappresentare il range fisiologico di configurazioni di carico, diversi compiti motori devono essere simulati [13-15]. In generale, nelle simulazioni *in vitro* che coinvolgono un sistema di carico più complesso, anche l'azione dei gruppi muscolari interessati deve essere simulata [16-21].

Negli ultimi quattro decenni, il comportamento meccanico di strutture ossee è anche stato studiato per mezzo di modelli matematici. Data la complessità delle strutture muscolo-scheletriche, le equazioni matematiche che descrivono il loro comportamento complesso si risolvono mediante modelli numerici approssimati [22]. I modelli numerici più comunemente utilizzati in biomeccanica sono modelli agli elementi finiti (FE) [23]. Un modello FE è un modello numerico che consente il calcolo delle grandezze fisiche selezionate (ad esempio tensione, deformazione, rischio di frattura) in base alla discretizzazione della struttura in elementi di geometria semplice (per il quale esiste una soluzione numerica approssimata, con adeguate risorse di calcolo). Modelli FE inoltre sono stati ampiamente utilizzati per la determinazione delle sollecitazioni meccaniche che le attività fisiologiche, le condizioni patologiche, o il trattamento chirurgico (protesi articolare, fissazione della frattura, mastoplastica, ecc) inducono nelle ossa [24-30]. I modelli FE possono essere utilizzati anche per studiare i fenomeni meccanico-biologici alla base dell'adattamento osseo [31]. Modelli FE, rispetto alle tecniche più sperimentali, offrono il vantaggio di stimare la distribuzione delle tensioni/deformazioni sull'intera struttura invece che in pochi punti o regioni selezionate, e permettono un'esplorazione efficace dell'effetto dei parametri di studio più rilevanti. Procedure di modellazione personalizzate (*subject-specific*) [32, 33] consentono la creazione di un modello FE di un segmento osseo da Tomografia Computerizzata (TC) le immagini. L'elaborazione delle immagini e la

generazione del modello FE [34-37] consente di sviluppare modelli FE *subject-specific* da dati diagnostici *in vivo*. Ciò rende possibile stimare grandezze meccaniche (ad esempio lo stress meccanico, il rischio di fratture) che altrimenti non possono essere misurati nelle ossa di soggetti viventi senza procedure invasive, e spesso eticamente inaccettabili [38].

Non si dovrebbe mai dimenticare che entrambi sia i modelli numerici e che gli esperimenti *in vitro* sono modelli della manifestazione fisica sotto studio. Pertanto, sia la loro rilevanza che la loro affidabilità non possono essere dati per scontati. Un uso sinergico di modelli numerici ed esperimenti *in vitro* può fornire contemporaneamente corroborazione ai due tipi di modelli, ed eventualmente una più profonda comprensione dell'evento fisico in oggetto. Ci sono pochi studi in cui la modellazione numerica ed esperimenti controllati *in vitro* sono combinati in un singolo studio: nel più di questi studi, gli esperimenti sono usati per corroborare/falsificare i modelli numerici (questo processo è generalmente chiamato validazione [22]). La validazione è un aspetto cruciale dal momento che è l'unica procedura che consente di quantificare l'affidabilità di un modello per una applicazione clinica [39]. Dopo il lavoro pionieristico di Huiskes [40], alcune opere in seguito hanno riportato l'accuratezza dei modelli FE nel predire la deformazione misurata sperimentalmente nell'osso [34, 36, 41-48]), e i micro-movimenti osso-impianto [49]. Altri studi si sono concentrati sulla previsione di parametri concentrati come la rigidità strutturale [50] o il carico di rottura [51].

Purtroppo, la combinazione di approcci numerici e sperimentali è più spesso limitata ai fini di validazione, senza alcun contributo in direzione opposta (dai modelli FE verso e a supporto degli esperimenti *in vitro*). Pertanto, il grande potenziale d'integrazione sperimentale - numerica è in molti casi un processo a senso unico.

Lo scopo di questo lavoro è prima di tutto di spiegare in dettaglio come gli esperimenti controllati *in vitro* dovrebbero essere utilizzati per identificare i parametri rilevanti dei modelli FE (identificazione), e per valutare quantitativamente l'accuratezza dei modelli FE (validazione). Allo stesso tempo, sarà discusso il potenziale dei modelli FE per migliorare gli esperimenti *in vitro*. Questo manoscritto mira a dimostrare che non solo la validazione di modelli FE è necessaria, ma che si dovrebbe sempre ricercare una combinazione di modellazione numerica ed esperimenti controllati all'interno dello stesso gruppo di ricerca, per creare un circolo virtuoso in cui vengono utilizzati i modelli per migliorare gli esperimenti, gli esperimenti sono utilizzati per migliorare i modelli, e la loro combinazione sinergica aumenta la conoscenza che abbiamo sul sistema muscolo-scheletrico. Mentre la maggior parte degli esempi di questo articolo si concentra sulla modellazione dell'intero osso (a livello d'organo), gli stessi concetti si applicano quando sono coinvolti modelli su larga scala (arto o corpo intero), o modelli di scala inferiore (livello di tessuto e sub-tessuto).

## 2. PUNTI DEBOLI E PRE-REQUISITI DEI MODELLI NUMERICI

### Limiti dei modelli numerici

Non si dovrebbe mai dimenticare che un modello non può spiegare qualcosa di totalmente sconosciuto e inaspettato. I modelli matematici sono invenzioni della mente umana, e possono "sapere" solo ciò che è già in parte conosciuto. Pertanto, i modelli numerici possono essere utilizzati solo per indagare scenari noti (o almeno plausibili). In una certa misura questo è vero anche per i modelli sperimentali: gli esperimenti *in vitro* vengono progettati tenendo a mente alcuni scenari di fallimento specifici. Tuttavia, non è raro che durante un esperimento *in vitro* qualcosa di totalmente atteso accada, che indica l'esistenza di altri potenziali scenari di fallimento; questo non può accadere a un modello numerico.

Oltre a tale limitazione primaria, ci sono altri limiti legati alla specificità dei modelli numerici. La limitazione più grande viene dal processo alla base di ogni modello: l'idealizzazione. Osserviamo la realtà fisica, e da questa osservazione sviluppiamo una rappresentazione idealizzata del fenomeno di interesse, che descriveremo in termini matematici [52]. Tale idealizzazione può trascurare alcuni aspetti (idealizzazione aristotelica), o può assumere per vero qualcosa che sappiamo essere falso (idealizzazione galileiana: ad esempio, un oggetto di massa nulla). In entrambi i casi, questo processo è associato con alcune limitazioni della validità del modello, che non possono essere eliminate. Per esempio, un modello in cui il contatto viene considerato senza attrito non sarà mai in grado di chiarire nulla sull'abrasione.

Un secondo limite di modelli numerici deriva dagli strumenti numerici utilizzati [22]. Qualsiasi soluzione numerica è approssimata: tale approssimazione definisce una "risoluzione" per il nostro modello. Dettagli ed eventi che sono più fini di questa risoluzione non possono essere studiati con quel modello. Alcune approssimazioni numeriche, come quelle causate da precisione finita di calcolo, sono generalmente trascurabili. Tuttavia, nel metodo FE ci sono altri problemi come la discretizzazione del dominio di integrazione che potrebbe indurre errori critici. Per esempio, una stima FE del contatto alla punta di un oggetto appuntito (ad esempio la punta o la filettatura di una vite ossea) non è affidabile fino a due-tre elementi di distanza (a meno che non si utilizzino strumenti FE dedicati per modellare adeguatamente tale contatto localizzato).

Il terzo problema del metodo FE riguarda la cosiddetta identificazione del modello. Questa consiste nella determinazione dei valori da assegnare ai parametri del modello (ad esempio: modulo di Young, coefficiente di attrito, proprietà dei materiali anisotropi, tasso di rimodellamento osseo, vincoli, carichi). In generale, questi valori derivano da misure sperimentali o da altra stima: in entrambi i casi tale informazione è disponibile con precisione limitata. Tale incertezza nei parametri del modello si propaga alle previsioni del modello. Qualsiasi tentativo di investigare numericamente fenomeni il cui effetto è paragonabile a tale incertezza di previsione è per definizione impossibile.

### **Requisiti dei modelli FE: identificazione dello scopo del modello**

Come detto sopra, un modello di un segmento osseo determinato o ragione anatomica non è universale e non è in grado di rimediare ad eventuali domande biomeccanici. Pertanto, il campo di applicazione del modello dovrebbe essere definito in modo chiaro e poco ambiguo possibile. I modelli possono essere utilizzati semplicemente per rappresentare un fenomeno (ad esempio a scopo didattico, per la memorizzazione). Modelli possono essere utilizzati anche per valutare correlazioni tra porzioni di realtà. Se un modello in grado di indagare la correlazione, si è tentati di citare in giudizio anche per la quantificazione e la previsione dei fenomeni biomeccanici. Si tratta di categorie generali, ma il campo di applicazione di modellazione devono essere definiti con maggiore dettaglio: ipotizzando perseguiamo un ambito di modellazione predittiva, dovremmo definire quale porzione della realtà vogliamo catturare, quale quantità biomeccaniche abbiamo bisogno di stimare, a quali condizioni (ad esempio, quello che scenari di carico, le condizioni del paziente, ecc.).

### **Requisiti dei modelli FE: idealizzazione e sviluppo**

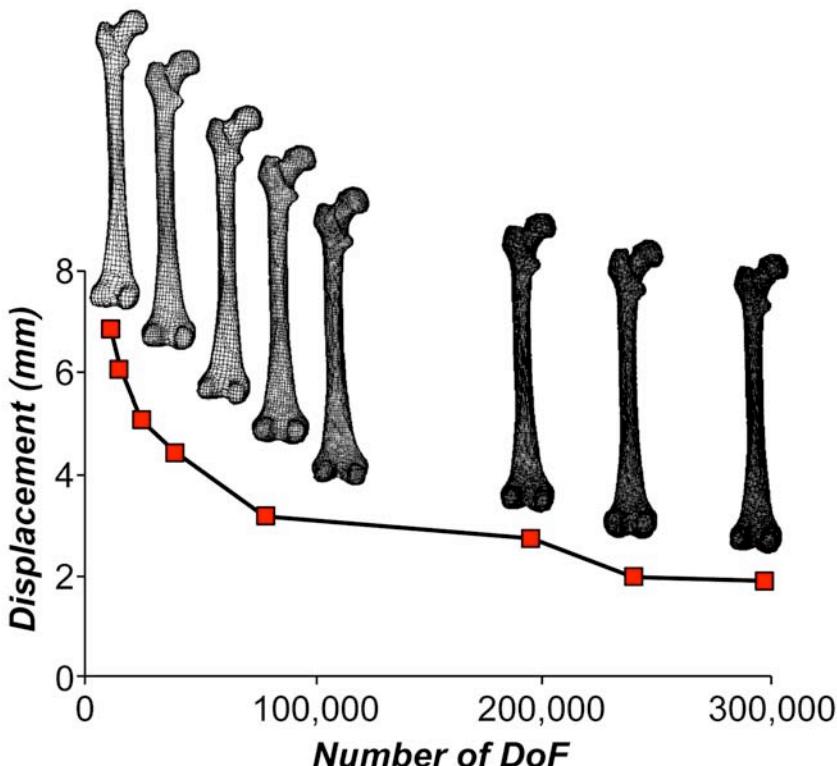
Un modello consiste in un'idealizzazione di una porzione di realtà, osservando come grandezze meccaniche/biologiche sono organizzate nello spazio e nel tempo, e come interagiscono tra di loro. Nella modellazione scientifica, questo artefatto cognitivo deve

essere espresso in termini logici: i modelli possono essere suddivisi in modelli induttivi (cioè modelli di regressione, modelli di dati), modelli deduttivi (cioè modelli basati sulle leggi della fisica) o modelli abduttivi (cioè i modelli bayesiani).

Il modello è ora trasformato in uno strumento che può essere utilizzato praticamente per affrontare il problema pratico. Tipicamente, l'idealizzazione si traduce in una forma matematica, che viene poi risolta per un insieme di valori iniziali per via analitica (cioè esatta) o numerica (in forma approssimata). A causa della complessità dei modelli coinvolti nella biomedicina, la maggior parte dei modelli sono risolti numericamente.

### **Requisiti dei modelli FE: verifica**

Quando un modello matematico è risolto numericamente, è importante quantificare la precisione di tale soluzione approssimata. Per i modelli lineari, è generalmente possibile stimare gli errori associati alla soluzione numerica. Per i modelli FE si possono usare indicatori *post-hoc* come i residui sulle tensioni, o un test di convergenza (Figura 1) su parametri come l'energia potenziale di tutta la struttura, gli spostamenti e le tensioni nei punti d'interesse. Questo approccio consente di stimare l'errore dovuto alla discretizzazione spaziale del dominio, che è uno degli aspetti più delicati della modellazione FE [53].



**Figura 1** – Test di convergenza per verificare l'adeguatezza delle maglie utilizzate per modellare un femore umano: in questo caso, lo spostamento sotto carico in un determinato punto dell'osso (il centro della testa del femore) mostra un asintoto.  
(Copyright del consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

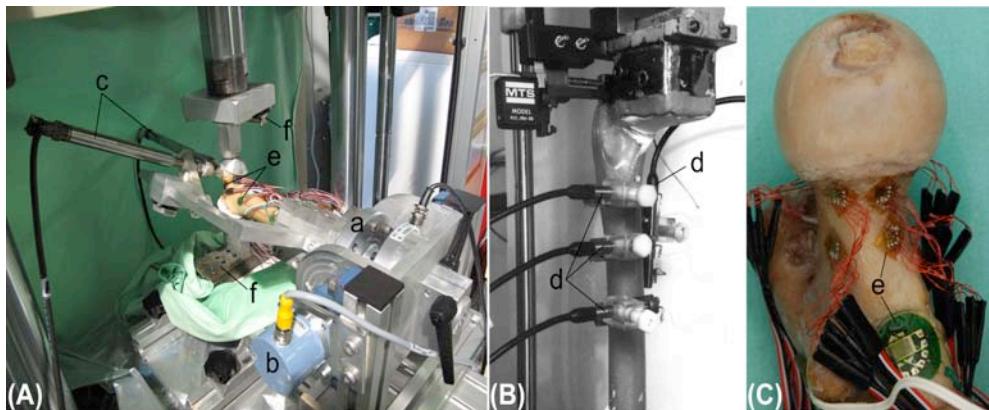
## **Requisiti dei modelli FE: analisi di sensitività**

I modelli FE stimano lo stato di un sistema (ad esempio la distribuzione di sollecitazione/deformazione) a partire da un insieme di valori iniziali (proprietà del materiale, carichi applicati, condizioni al contorno, etc). È importante verificare come un’incertezza su tali parametri in ingresso influisce sulle stime fornite dal modello. Prima di tutto, perché i valori iniziali utilizzati per l’identificazione del modello sono sempre associati con un errore: dobbiamo fare in modo che questa incertezza non pregiudichi le conclusioni che si intende trarre dal modello. In secondo luogo, se si nota che il modello è estremamente sensibile a piccole variazioni di alcuni valori iniziali, questo può suggerire che l’idealizzazione, o la sua implementazione matematica o numerica sono critiche. Assumendo che si abbia una stima attendibile della incertezza associata a ciascuno dei parametri da utilizzare nel modello, si consiglia di eseguire un’analisi di sensitività, per valutare come queste incertezze si propagano attraverso il modello e influenzano il risultato del modello. Questo può essere fatto con una semplice analisi esplorativa, come la progettazione di esperimenti (DOE) e simili strategie semplificate Taguchi [54], ovvero utilizzando un approccio più complesso basata sull’incorporazione di un modello FE all’interno di una simulazione statistica tipo Monte Carlo. L’analisi di sensibilità è il modo migliore per scoprire la presenza di difetti veramente imprevedibili nel modello.

## **I modelli agli elementi finiti necessitano una validazione**

Se i passi precedenti vengono eseguiti correttamente, la precisione della soluzione numerica è nota. Pertanto, si può “misurare” l’accuratezza predittiva del modello confrontando il risultato con le grandezze fisiche corrispondenti, misurate in un esperimento fisico controllato. Come principio generale non si dovrebbe mai dimenticare che affermazioni come l’“osso è elastico” sono false. Intendiamo dire che se il comportamento dell’osso è modellato utilizzando equazioni viscoelastiche, i risultati saranno generalmente più accurati che non usando altri tipi di modelli reologici (ad esempio puramente elastico). Ogni modello è ragionevolmente accurata entro certi limiti (il campo di applicazione di modellazione deve essere compatibile con tali limiti): nessun materiale si comporta in modo elastico-lineare a tempo indeterminato, e la maggior parte dei materiali ad alta temperatura si comportano in modo viscoelastico. Si deve notare che la validazione (nel senso di determinare se un modello computazionale rappresenta l’evento fisico reale con sufficiente precisione [22]) non è neppure possibile in termini assoluti. Infatti, in una prospettiva filosofica, un accordo tra le previsioni del modello e le osservazioni fisiche non *valida* una teoria (come un modello, nel nostro caso). Al contrario, una sola eccezione è sufficiente a falsificare la stessa teoria [55]. In senso stretto, i modelli non possono essere validati: possono essere falsificati. Secondo Popper, tuttavia, un modello può essere “corroborato” se resiste a severi test, e allora non sarà necessario sostituirlo con un’altra teoria. In questa prospettiva, la validazione rispetto a una specifica serie di test e tolleranze pre-definite può essere un percorso legittimo per un processo decisionale concreto [22, 56].

Non c’è un unico approccio possibile per la validazione che si applichi a tutti i problemi. Quando non è ovvio quale modello matematico è più adatto, un approccio tipo *inferenza forte* è consigliabile ([57], vedi sotto). L’inferenza forte consiste nell’avere due o più teorie/modelli candidati, e farli competere rispetto ai risultati di uno o più esperimenti controllati. Si deve sempre ricordare il rasoio di Occam: se due modelli mostrano simile accuratezza predittiva, il più semplice dovrebbe essere scelto.



**Figura 2** – Esempi di trasduttori per la sperimentazione biomeccanica *in vitro*: (A) setup per misurare la deformazione ossea durante la caduta; (B) sistema per misurare micro-movimenti osso-protesi; (C) dettaglio di misurazione della deformazione sulla superficie ossea. I seguenti tipi di trasduttori sono visibili: (a) cella di carico torsionale misura il carico nel femore; (b) encoder rotativo misura l'inclinazione del provino sotto carico; (c) due LVDT misurano la deformazioni complessiva del provino (femore, in questo caso), (d) 4 LVDT per misurare i micro-movimenti impianto-osso, (e) due tipi di estensimetri (rosette sovrapposte triassiali). Sono altresì visibili i cuscinetti lineari (f) impiegati per eliminare qualsiasi iperstaticità.

(Copyright consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

### 3. LIMITI DEGLI ESPERIMENTI *IN VITRO*

Mentre gli esperimenti *in vitro* possono aiutare a risolvere alcuni problemi di modelli FE, si dovrebbe anche essere consapevoli dei limiti delle misure sperimentali. Prima di tutto, gli esperimenti *in vitro* sono lunghi e richiedono trasduttori e datalogger costosi per misurare grandezze fisiche quali deformazione / spostamento / forza (Figura 2). Inoltre, la misura sperimentale è influenzata sia errori casuali e sistematici [58].

#### Errori sperimentali: errore sistematico

L'errore sistematico può essere indotta da una serie di fattori:

**Preparazione / utilizzo dei trasduttori:** in molti casi vengono utilizzati trasduttori sofisticati (ad esempio estensimetri). Una preparazione scadente può causare letture estremamente inaccurate [59-61].

**Perturbazione indotta dai sistemi di misura:** questo è un principio noto che si applica a qualsiasi campo (vedi il principio di indeterminazione di Heisenberg). In questo caso, quando un sensore di deformazione è applicato ad un osso, ne rinforza la superficie riducendone lo stato di sollecitazione. Ciò comporta una sottostima sistematica della effettiva deformazione. È stato dimostrato che in materiali relativamente cedevoli come il tessuto osseo, tale perturbazione indotta da estensimetri [62-64] o rivestimenti fotoelastici [65, 66] può arrivare al 10-20%.

**Sistemi di riferimento anatomici ambigui o mal definiti:** un sistema di riferimento è necessario per consentire l'allineamento e il posizionamento dei carichi consistente rispetto

ai campioni anatomici [67]. Poiché tali sistemi di riferimento si basano spesso sull'identificazione soggettiva di punti di riferimento ossei, diversi operatori realizzeranno diverso allineamento dei campioni. Di conseguenza, la direzione del carico applicato non è riproducibile.

**Scarsa informazione circa i carichi *in vivo*:** Nella maggior parte dei casi, *nelle* simulazioni *in vitro* devono basarsi su informazioni parziali, sulla base di un numero limitato di soggetti, e spesso con grosse semplificazioni [11]. Solo di recente, e solo per un numero limitato di regioni anatomiche, sono stati misurate *in vivo* le forze durante delle attività fisiologiche(ad esempio: [68-70]).

**Configurazione di carico mal progettata:** in alcuni casi il sistema di carico è progettato in modo tale da non consentire il controllo del carico applicato. Un esempio è quello di vincoli iperstatici (spesso presenti nella letteratura biomeccanica), dove componenti di carico aggiuntive vengono generati all'interno del sistema di carico [71].

### **Errori sperimentali: errore casuale**

L'errore casuale (rumore) è di natura diversa. Esso può essere indotto da:

**Rumore di misura:** tutti i sistemi di misura, compresi quelli meccanici, sono affetti da "rumore", tra cui le vibrazioni meccaniche, interferenze elettromagnetiche, ecc [72, 73]. Questo è particolarmente vero per la misura di spostamento e deformazione tramite tecniche di correlazione di immagini digitali recentemente sviluppate (DIC) [74].

**Incertezza nella posa dei provini:** il vincolo, e l'applicazione dei carichi ai segmenti ossei può essere difficile a causa della geometria irregolare. Il risultato è una variabilità tra le ripetizioni della prova o tra i campioni [11, 75].

**Incertezza nel posizionamento e allineamento dei trasduttori:** se un trasduttore è malposizionato/disallineato in modo casuale, la lettura è affetta da un errore imprevedibile [13, 75, 76].

**Scarsa ripetibilità dei carichi applicati:** nella maggior parte dei casi vengono utilizzate macchine di prova materiali o simulatori dedicati. In tutti questi casi, attuatori, dispositivi di carico e sistemi di controllo inevitabilmente introducono qualche errore casuale [73, 75].

### **Costo degli esperimenti *in vitro***

L'aggiunta di qualsiasi nuovo parametro misurato, o la replica di misura di grandezze fisiche in altre punti di misura è associato con la necessità di utilizzare più trasduttori, insieme a data-logger più potenti. L'aumento del numero di trasduttori è anche associato ad un aumentato complessità (e possibili errori) della configurazione di prova. Inoltre, se un esperimento *in vitro* deve essere eseguita ripetutamente in condizioni simili (ad esempio per studiare diversi dispositivi impiantabili, diverse configurazioni di carico, condizioni di interfaccia, etc.), aumenta quasi proporzionalmente il costo sperimentale e lo sforzo necessario replicare. Pertanto, gli esperimenti *in vitro* non sono il miglior strumento per l'esecuzione di studi comparativi su un gran numero di condizioni, o per analisi di sensibilità per esplorare un molteplici scenari.

## **Disponibilità di provini di tessuto per prove *in vitro***

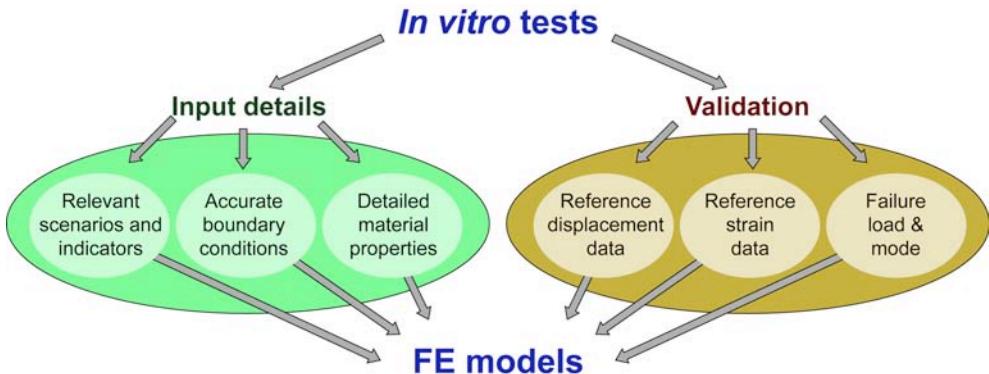
La disponibilità di campioni di tessuto umano è limitata, sia per motivi pratici, che per motivi etici. Per queste ragioni, in molti casi, la dimensione campionaria degli esperimenti *in vitro* è statisticamente sottodimensionata: in pochissimi si usano più di 10 provini, mentre in molti casi il campione è limitato ad un singolo esemplare d'osso [4]. Questo impedisce di trarre conclusioni robuste da un punto di vista statistico, a meno che l'effetto da rilevare non sia talmente pronunciato da poter essere rilevato statisticamente anche con una piccola numerosità del campione [54]. Anche la conservazione dei tessuti pone seri problemi. Infatti, è stato dimostrato che sia imbalsamazione e il congelamento può alterare significativamente le proprietà meccaniche del tessuto, se non si usano specifiche procedure [77-80].

## **Linee guida per progettare e migliorare un setup *in vitro***

Anche se questo aspetto è a volte poco considerato, anche gli esperimenti *in vitro* sono solo i modelli della manifestazione fisica sotto indagine. Pertanto, la somiglianza di un esperimento *in vitro* all'evento fisico in esame non può essere data per scontata. Tale somiglianza dovrebbe essere valutata confrontando l'esperimento *in vitro* contro alcune prove più dirette dell'evento fisico: nel caso di prova di osso, il dato di riferimento potrebbe essere ad esempio uno studio clinico sulle fratture ossee, o la misurazione *in vivo* della cinematica e/o dei carichi in gioco.

Gli esperimenti *in vitro* dovrebbero essere progettati come un compromesso tra il desiderio di rendere di replicare le condizioni fisiologiche il più strettamente possibile includendo molti dettagli complessi, e la necessità di controllare con precisione dell'esperimento rendendolo più semplice possibile [81]. Quando si progetta un esperimento si deve tenere a mente che l'esperimento, come qualsiasi altro modello, è in grado di catturare solo alcuni dettagli di una realtà che è molto più complessa. Pertanto, gli esperimenti *in vitro* devono essere progettati in funzione di uno specifico quesito scientifico. I dettagli che non sono rilevanti per tale quesito devono essere omessi, in quanto ridurrebbero solo il controllo globale che abbiamo sull'esperimento [12]. In altre parole, citando Albert Einstein: "*Make things as simple as possible, but not simpler*" (dobbiamo rendere le cose più semplici possibile, ma non più semplici).

Come pre-requisito, l'affidabilità di esperimenti *in vitro* deve essere valutata, in modo da stimare l'incertezza per ogni grandezza misurata. Misurazioni ripetute sullo stesso campione sono cruciali per valutare la ripetibilità di misura intrinseca. Allo stesso tempo, ripetizioni per provini diversi sono necessarie per valutare la variabilità inter-provino [12, 58]. Un utile supporto può essere fornito da modelli FE per individuare e ridurre le fonti di errore sperimentale in modo da garantire che un esperimento *in vitro* fornisca risultati sufficientemente precisi per essere utilizzati in applicazioni clinicamente rilevanti, o per supportare modelli FE [12].



**Figura 3** – Schema a blocchi che mostra come gli esperimenti *in vitro* sono in grado di supportare i modelli FE. Due vie sono possibili: l’identificazione dei parametri del modello, e la validazione delle previsioni del modello.

(Copyright consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

#### 4. IL RUOLO DEGLI ESPERIMENTI *IN VITRO* NEL MIGLIORARE I MODELLI AGLI ELEMENTI FINITI

Gli esperimenti non possono essere utilizzati per affrontare i limiti dei modelli FE relativi alla precisione numerica ed al *post-processing* sopra descritte. Tuttavia, altre limitazioni riguardano l’importanza di fornire ai modelli FE dei parametri di ingresso affidabili (identificazione), e di confrontare i modelli FE con misure di riferimento affidabili (validazione). Qui di seguito è elencata una serie di ruoli che gli esperimenti possono svolgere per migliorare i modelli FE a livello di organo (vedi anche Figura 3). Tali prove meccaniche devono includere un approccio multi-scala, in modo da fornire informazioni alle diverse scale dimensionali, da tutto il corpo fino al livello di tessuto e sub-tessuto [82, 83]. Nelle pagine seguenti, la maggior parte dei dettagli fa riferimento a modelli a livello di organo (cioè un intero femore o scapola). Tuttavia, i principi di base rimangono validi anche quando le altre scale sono coinvolte, come nella modellazione del corpo intero o in simulazione micro-FE a livello tissutale.

##### Identificazione preliminare degli scenari ed indicatori più rilevanti

Come detto sopra, i modelli possono affrontare solo scenari noti: se i dettagli di un modello FE (ad esempio, le configurazioni di carico, tipo di elementi, raffinatezza maglia) sono scelti per fornire le informazioni più accurate per un indicatore scelto (ad esempio lo sollecitazione meccanica nel tessuto osseo), il modello potrebbe essere inadatto per la previsione di altre grandezze (ad esempio spostamenti impianto-osso, o il rischio di frattura). In una certa misura questo è vero anche per gli esperimenti *in vitro* (che si basano su modelli *in vitro* di realtà). Tuttavia, siccome gli esperimenti *in vitro* si basano su campioni fisici, sono intrinsecamente più vicini alla realtà, e quindi sono meglio in grado di descrivere gli aspetti della realtà che potrebbero sfuggire del tutto ad un modello FE. Una volta che le prove *in vitro* hanno identificato il modo più rilevante del fallimento, o lo scenario di carico più critico, un modello FE può essere appositamente progettato o messo a punto per affrontare tale modalità o scenario.

## **Equazioni costitutive e criterio di collasso**

Un modello FE progettato per prevedere il comportamento strutturale, la forza a livello d'organo, o la risposta osso-impianto, di solito adotta un presupposto di continuità a livello di tessuto osseo. Modelli del genere richiedono la definizione di proprietà meccaniche continue a livello del tessuto osseo tessuto. Come indicato nell'introduzione, i modelli FE *subject-specific* da dati TC sono di recente diventati la scelta elettiva per valutare possibili applicazioni cliniche. Approcci alternativi sono stati studiati per generare un modello a livello d'organo che incorpora le informazioni a livello di tessuti (e quindi modella esplicitamente l'architettura trabecolare) [84]. Tuttavia, a causa della necessità di un'impressionante potenza di calcolo, e di immagini cliniche ad alta risoluzione (micro-CT), tali modelli non possono attualmente essere utilizzati per applicazioni cliniche.

Il tessuto osseo è disomogeneo, anisotropo, e in certa misura viscoelastico [85-88]. La viscoelasticità può essere trascurata per la maggior parte degli studi biomeccanici che valutano le tensioni nell'osso come conseguenza di carichi fisiologici [89]. Tuttavia, quando velocità di deformazione è un fattore importante (es. urto), la viscoelasticità dell'osso può essere inclusa considerando l'effetto di velocità di deformazione durante l'assegnazione del modulo elastico [90]. Il modulo di elasticità (modulo di Young) del tessuto osseo può variare di oltre il 50% per l'osso corticale, e di oltre il 500% per l'osso spongioso, a seconda del sito anatomico, della direzione del carico, e del donatore [91, 92, 93, 99]. La maggior parte di questa variabilità può essere spiegata in termini di disomogeneità. Tuttavia, nei primi modelli FE, il tessuto osseo è stato modellato come un materiale completamente omogeneo e isotropo [94, 95], dove l'unica distinzione era tra tessuto corticale e trabecolare. L'assegnazione di costanti elastiche medie a tutta la struttura ossea è associata a grandi errori (dello stesso ordine di grandezza dell'incertezza associata con il modulo di Young). Sono da aspettarsi in media errori dell'ordine del 10-50%, con punte locali largamente superiore al 100%.

Più di recente, la disomogeneità osso è stato introdotto nei modelli FE di ossa sotto l'ipotesi di assunzione di meccanica del continuo [96, 97], misurando la densità del tessuto osseo da scansioni TAC [98], e calcolando il osso modulo di Young dalla densità del tessuto [90, 99-101]. Il citato rapporto densità-elasticità è, tuttavia, ancora associato a una banda di confidenza molto ampia [89], che può essere ridotta con la verifica sperimentale. Prima di tutto, una parte significativa di questa incertezza è dovuta a errori sperimentali che possono essere ridotti seguendo le linee guida di prova adeguate [89, 102-104]. Tuttavia, rimane una componente di errore casuale, che è associata con la variabilità della dipendenza densità-elasticità tra soggetti. Pertanto un ulteriore possibile miglioramento, sebbene limitato a studi di validazione *in vitro*, potrebbe consistere nel caratterizzare il tessuto osseo dallo stesso campione di osso che viene modellato con gli elementi finiti. Tali prove devono essere eseguite dopo che il test a livello d'organo è stato completato secondo un paradigma stabilito per il test multi-scala di strutture ossee [82]. Tali test possono includere diverse tecniche di misura:

- L'istomorfometria da scansione micro-CT [105] può migliorare la valutazione della struttura ossea e l'anisotropia associata, andando a migliorare i modelli FE.
- Prove meccaniche sul materiale: campioni di tessuto di alcuni millimetri possono essere estratti in regioni selezionate e testate [89]. In questo caso, le proprietà del materiale misurate direttamente sono disponibili per le posizioni selezionate, per identificare i parametri di ciascuna regione del modello FE.
- Microstruttura con microscopia a luce polarizzata [106] fornisce una visione chiara nella disposizione microstrutturale del tessuto osseo, compreso

l'orientamento del collagene all'interno delle lamelle che compongono l'osso.

Tutte queste misure sperimentali del tessuto e sub-tessuto livello forniscono una migliore valutazione dei parametri, migliorando così l'identificazione del modello.

Infine, va ricordato che i rapporti di densità-elasticità citati possono identificare il modulo elastico in una sola direzione (tipicamente, la direzione della deformazione principale massima). Informazioni sulla anisotropia dell'osso migliorerebbero i modelli FE in modo significativo. Lo sviluppo di atlanti e modelli che incorporano le informazioni da una popolazione di ossa potrebbe essere un modo di procedere. È stato recentemente dimostrato per la mandibola che i modelli multi-scala micro-meccanici sono in grado di fornire l'intera serie di costanti elastiche ortotrope per il tessuto osseo a partire da informazioni sul contenuto di minerali da scansioni CT [107]. La conferma di questo modello micro-meccanico fino al livello del tessuto si è basata su prove meccaniche multi-scala [86, 108]. Ulteriori prove sperimentali a livello di organo sono necessarie per valutare se tale approccio può fornire risultati più accurati rispetto ai modelli disomogenei ma isotropi quando i carichi sono applicati in una direzione che enfatizza la risposta anisotropa [109].

## Validazione

Come già sottolineato, la validazione in termini assoluti non è possibile. Tuttavia, in certi casi può essere accettabile validare un modello numerico tramite il confronto con un certo numero di misure sperimentali. Nella maggior parte dei casi, questa è anche l'unica soluzione praticabile. Tali esperimenti costituiscono ovviamente solo una serie di casi individuali, e non possono coprire la gamma infinita di scenari reali. Esperimenti di validazione non sono necessariamente progettati per rappresentare una condizione fisiologica specifica o un compito motorio. Nella maggior parte dei casi, gli esperimenti di validazione sono progettati in modo da ottenere il miglior controllo delle condizioni sperimentali, e per fornire grandezze in uscita accessibili e misurabili (che per essere utilizzate per la validazione del modello numerico).

Le grandezze meccaniche più utili che possono essere dedotte da prove sperimentali sui segmenti ossei sono: deformazione principale e spostamenti in aree selezionati [4, 75]; carico di rottura [110] e il punto di innesco della frattura [111].

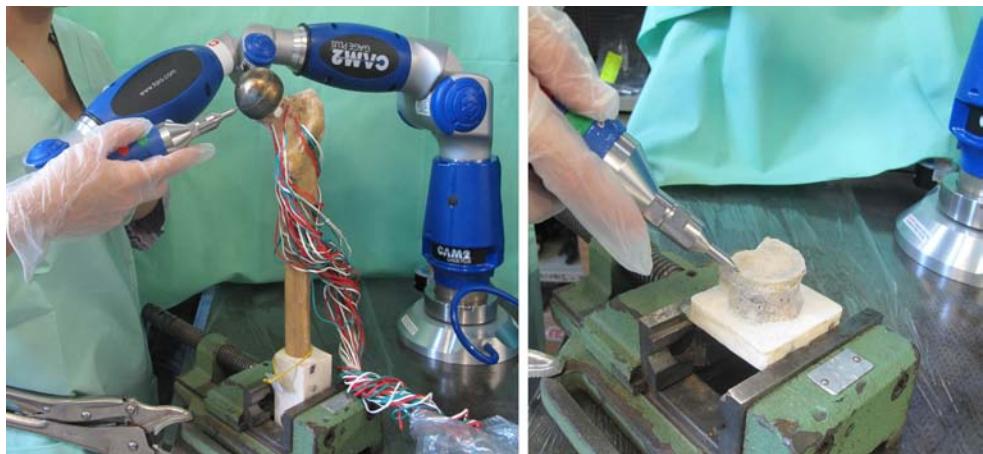
Deve essere chiaro che il confronto sperimentale-numerico deve essere effettuato su dati quantitativi, e dovrebbe essere un confronto uno-a-uno per ciascun campione, e per ogni misurazione all'interno di ciascun campione [47].

Dai suddette pre-requisiti di confronto numerico-sperimentali, e conoscendo le caratteristiche delle misure sperimentali, si possono identificare alcune criticità nel replicare le misure sperimentali nei modelli numerici:

- Corrispondenza uno-a-uno: per evitare fonti di errore relative alla variabilità inter-individuale (che è difficile da quantificare), il modello FE in corso di validazione deve corrispondere allo stesso esemplare fisico testato *in vitro*.
- Registrazione spaziale: per replicare condizioni al contorno e la posizione dei sensori, la relativa posa del sistema di riferimento del modello FE deve essere determinato rispetto a quello *in vitro*. Una procedura documentata per raggiungere questo obiettivo è: (i) digitalizzare il segmento osseo, più eventuali punti rilevanti, e il riferimento sperimentale tramite un misuratore di coordinate digitale (*digitizer*, Figura 4), (ii) utilizzare successivamente per un algoritmo *iterative closest point* (ICP), come proposto per la risoluzione di problemi di registrazione rigidi [112], per eseguire la registrazione della nuvola di punti acquisiti sulla superficie ossea estratta dai dati CT, e

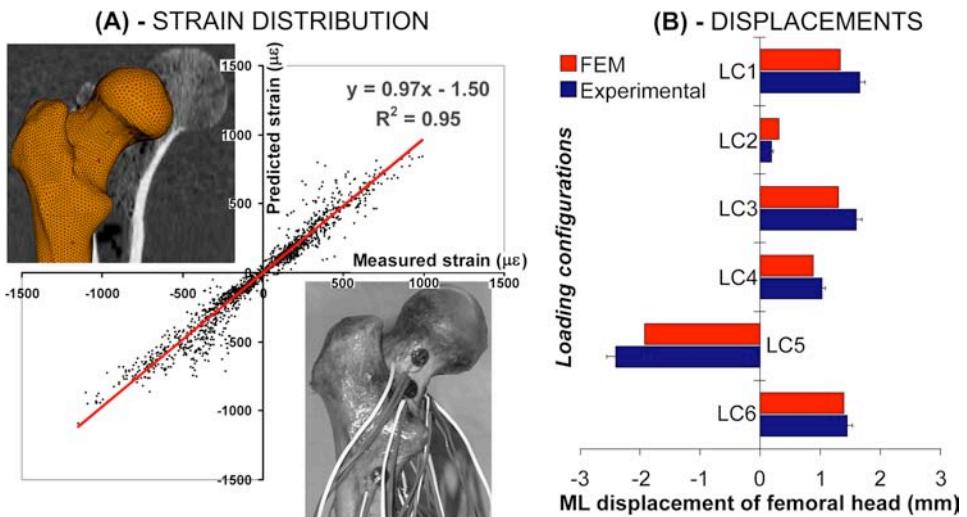
- per determinare la trasformazione tra il sistema di riferimento di laboratorio sperimentale e quello del modello FE. L'accuratezza media di tale procedura può essere inferiore a 0,9 millimetri [47]. Per esempio, la posizione dei trasduttori può essere utilizzata per rendere possibile una validazione punto per punto del modello FE contro deformazioni o spostamenti sperimentalmente acquisiti. Analogamente, la posizione relativa dei punti di applicazione del carico e le parti del sistema di caricamento può essere acquisita per migliorare l'identificazione dei modelli FE.
- Direzione di misura: nel caso siano previsti estensimetri monoassiali, o trasduttori direzionali la loro posa nel modello fisico deve venire misurata, per poterla riprodurre nel modello FE. Quando sono utilizzati estensimetri triassiali, le due deformazioni principali e la loro direzione sono disponibili per il confronto con le previsioni FE. Allo stesso modo, la direzione degli spostamenti misurati *in vitro* (dopo la compensazione di artefatti da movimento del corpo rigido) deve essere presa correttamente in considerazione per consentire confronti sperimentalmente-numerica.

Metriche di accuratezza locali e globali devono essere definite per validare quantitativamente un modello FE. Una precisione metrica globale può essere ottenuta graficando le deformazioni principali stimate dal modello FE contro le corrispondenti grandezze misurate sperimentalmente, per un certo numero di configurazioni di carico (Figura 5). La bontà della predizione può essere espressa dal coefficiente di determinazione (generalmente indicato come R<sup>2</sup>), e dalla pendenza e intercetta della curva di regressione. Idealmente, si dovrebbe trovare una relazione perfettamente lineare tra le misure e le previsioni ( $R^2 = 1$ ) con pendenza unitaria e intercetta zero. Tuttavia, possono verificarsi artefatti statistici quando i dati sono raggruppati in due grandi nuvole [113], il che avviene in genere quando vengono esaminati le due principali componenti di deformazione. In questo caso l'analisi deve essere integrata da una metrica locale, in termini di errore medio (calcolato come l'errore quadratico norma, anche conosciuto come Radice errore quadratico, RMSE medio), e di errore di picco.



**Figura 4** – Un digitalizzatore ad alta precisione può essere usato per acquisire la posizione dei punti rilevanti sui provini fisici in modo da individuare loro nella geometria del corrispondente modello FE. Nell'immagine a sinistra un digitalizzatore viene utilizzato per acquisire le coordinate spaziali dei punti di un femore strumentato con estensimetri. Nell'immagine a destra una vertebra lombare è digitalizzata per identificare le condizioni al contorno *in vitro*.

(Copyright del consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

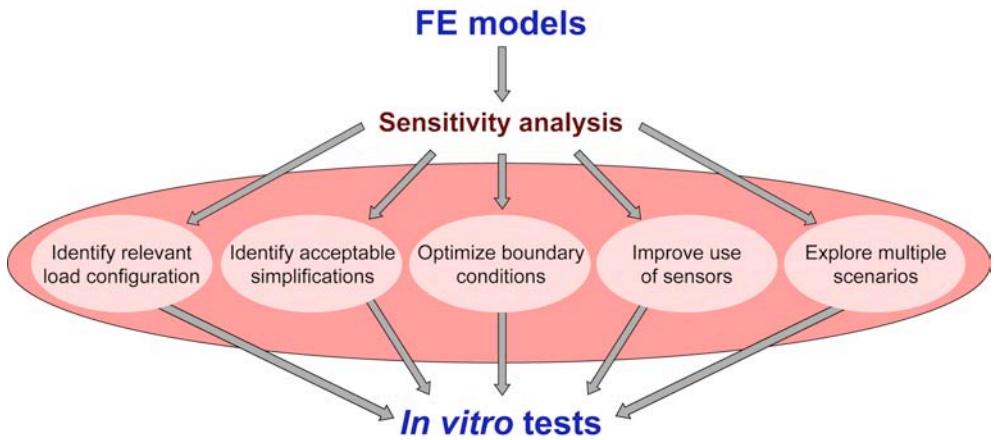


**Figura 5** – Valutazione dell’accuratezza delle previsioni FE confrontate con le misure sperimentali. La vicinanza della pendenza a 1.00 e la bontà di fit ( $R^2$  vicino a 1.00) indicano la capacità del modello FE nel replicare spostamenti e deformazione misurate nei campioni fisici. In questo caso, otto femori prossimali sono state studiati utilizzando un modello FE basato sulla TAC dei campioni fisici. (A) le deformazioni principali sono state misurate in 15 punti, per 6 diverse configurazioni di carico su tutti e 8 i femori (risultati presi da [47]). (B): spostamenti antero-posteriore e medio-laterale sulla testa femorale e diafisi femorale sono stati misurati con quattro trasduttori di spostamento per sei diverse configurazioni di carico (LC1 to LC6): in questo caso gli spostamenti medio-laterale attesi dal modello FE sono confrontati contro la corrispondente misurazioni *in vitro*.

(Copyright del consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

## 5. COME I MODELLI AGLI ELEMENTI FINITI POSSONO MIGLIORARE GLI ESPERIMENTI *IN VITRO*

Mentre il flusso di informazioni dagli esperimenti *in vitro* vero i modelli FE è un più noto (anche se non sempre sfruttato correttamente), anche le prove *in vitro* hanno la necessità di usufruire di modelli FE modulo di supporto. Infatti, le limitazioni degli esperimenti *in vitro* nella maggior parte dei casi sono legate alla necessità di ottimizzazione del setup sperimentale. In questa prospettiva, i modelli FE possono giocare un ruolo molto importante nell’aiutare ad ottimizzare il metodo di prova sperimentale. Ciò comprende (Figura 6): (i) indirizzare efficacemente il quesito di ricerca, (ii) ottimizzare l’utilizzo delle risorse sperimentali, e (iii) minimizzare le fonti di errore.



**Figura 6** – Schema a blocchi che mostra come i modelli FE possono essere usati per migliorare gli esperimenti *in vitro*. Lo strumento principale è quello dell’analisi di sensitività sui parametri che influenzano gli esperimenti.  
(Copyright del consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

### Identificazione degli scenari di prova più significativi

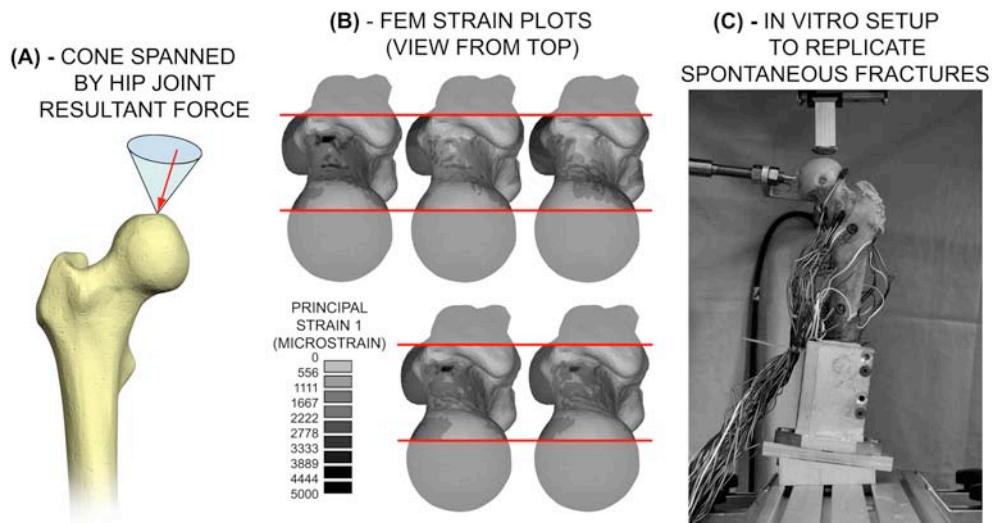
Uno dei punti più difficili quando si progetta una simulazione biomeccanica (sia *in vitro* che numerica) è la scelta della configurazione di carico (direzione e la grandezza delle forze applicate), che è più rilevante per il problema sotto osservazione [11, 81]. Per esempio, il rimodellamento osseo è guidato da carichi ciclici [114, 115]. Pertanto, per affrontare il rimodellamento osseo, vi è la necessità di simulare i compiti motori che si ripetono più frequentemente nella vita quotidiana. Al contrario, per indagare le fratture spontanee del femore (cioè quelle fratture derivanti da carichi fisiologico, e non da un evento traumatico [116, 117]), vanno simulati gli scenari di sovraccarico occasionali derivanti da un sovraccarico muscolo-scheletrico para-fisiologico [118].

Il problema della configurazione di carico è particolarmente critico nella biomeccanica ortopedica, dato che una vasta gamma di configurazioni di carico vengono esercitate durante le attività quotidiane, a seconda dello stile di vita dell’individuo, del compito motorio eseguito, e di una serie di fattori che variano all’interno dello stesso compito motorio, come il movimento, la velocità, l’ambiente, etc. Inoltre, con un dato compito motorio, l’intensità e la direzione delle forze applicate cambiano nel tempo. Per questi motivi, se il compito motorio più rilevante non è selezionato correttamente, oppure se l’istante più rilevante all’interno del compito motorio giusto non è simulato, la simulazione *in vitro* può essere fuorviante. In linea di principio, si può eseguire una serie di esperimenti preliminari *in vitro* per determinare quale dei possibili compiti motori è più rilevante, e, per l’attività motoria selezionata, quale istante è più cruciale. Tuttavia, eseguire una tale esplorazione *in vitro* può essere estremamente costoso e richiede tempo. Modelli FE (anche quelli semplificati) in questa fase possono essere estremamente utili ed efficaci per una esplorazione preliminare. Per esempio, lo scenario più rilevante per le fratture spontanee del femore prossimale [110], è stato identificato utilizzando modelli FE (Figura 7): in primo luogo, il cono che copre la gamma di direzioni attraversato dalle forze

risultanti all'anca è stato identificato per un certo numero di attività fisiologiche [119]. Poi, un modello FE validato è stato utilizzato per esplorare la distribuzione deformazione per un certo numero di configurazioni all'interno di tale cono, e per identificare la direzione di carico che ha indotto il più alto rischio di frattura nella regione del femore in esame. Infine, la configurazione di carico *in vitro* è stata progettata sulla base delle indicazioni del modello FE, dove il carico è stato applicato nella direzione che ha causato il più alto rischio di fratture nella regione di interesse [110]. Con un approccio simile, le più importanti configurazioni di carico per indagare la stabilità dell'impianto di steli d'anca sono stati identificati utilizzando un modello FE [120].

### Identificazione di un grado di semplificazione accettabile

Il carico meccanico nelle ossa dello scheletro deriva sia dalle forze articolari, ma anche (e spesso soprattutto) dall'azione dei muscoli [121-123]. Nella maggior parte dei casi, un gran numero di muscoli agiscono contemporaneamente sullo stesso osso. La simulazione *in vitro* di ciascuna forza muscolare richiede l'utilizzo di attuatori e controllori dedicati. È necessario trovare un compromesso tra un sistema sperimentale molto complesso che tiene conto di un gran numero di fattori, ma in molti casi soffre di scarso controllo delle condizioni di prova. In passato, gli esperimenti *in vitro* sono stati utilizzati per indagare quali gruppi muscolari devono essere inclusi in una data simulazione per fornire una configurazione di carico adeguato (es. [16, 124]). Tuttavia, i modelli FE permettono l'esecuzione di tali simulazioni esplorative in maniera più efficace [18, 21, 125, 126].



**Figura 7** – Sistema *in vitro* per generare fratture spontanee del femore: (A) il cono indicato mostra la gamma di direzioni della forza risultante all'anca durante le attività fisiologiche. (B)

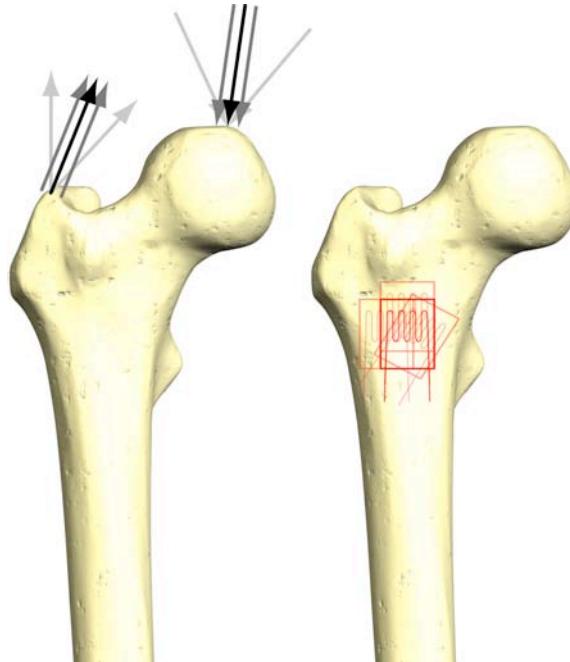
Un modello FE è stato utilizzato per stimare la distribuzione deformazione per differenti configurazioni di carico: le previsioni FE state usate per identificare la direzione di carico che causa il più elevato rischio di frattura. (C) Configurazione di carico *in vitro* progettata (in base alle previsioni FE) per replicare la configurazione di carico più critica. Il setup *in vitro* comprende trasduttori di spostamento (tipo LVDT) per misurare la freccia del femore sotto carico, ed estensimetri per misurare la deformazione della superficie ossea.

(Copyright del consorzio VPH-OP; riprodotto con permesso).

## Ottimizzazione delle condizioni di vincolo

L'errore sperimentale nei test biomeccanici *in vitro* deriva in larga misura da uno scarso controllo delle condizioni al contorno e le forze applicate al campione. Anche se le condizioni al contorno e l'applicazione della forza, in teoria, possono essere implementate sfruttando un opportuno sistema di riferimento [67, 127], la loro traduzione in pratica è associata a grandi errori che si propagano alla uscita dell'esperimento misurato.

Il punto di applicazione e la direzione delle forze *in vitro* sono affetti da errori sperimentali. Spesso alcune componenti di tali errori hanno scarso effetto sulla grandezza in esame (ad esempio la deformazione o il carico di rottura), mentre altri propagano sulla grandezza misurata in modo drammatico. Ad esempio, un sistema a sbalzo è spesso usato *in vitro* per applicare simultaneamente varie forze mentre utilizzando un unico attuatore [19, 71, 124]. È difficile prevedere a priori come tali incertezze in ingresso propagano alla misura, a causa della geometria irregolare dell'osso e della sua struttura disomogenea ed anisotropa. Questo problema non può essere risolto *in vitro*, perché riguarda l'incertezza intrinseca degli esperimenti *in vitro*. L'uso di modelli FE consente la simulazione di come errori in ogni componente di carico si propagano alle quantità misurate. Il setup sperimentale può essere progettato per dare la massima priorità al controllo di precisione per ridurre tali incertezze (ad esempio la posizione di una delle forze applicate, Figura 8) che colpisce più gravemente l'accuratezza dei risultati [17] usando analisi di sensitività supportata da modelli FE.



**Figura 8** – Le misure *in vitro* sono affette da errori di posizionamento ed allineamento dei componenti. Sinistra: la posizione, la direzione e l'intensità delle forze applicate *in vitro* ad un segmento osseo sono affetti da errori (linee grigie) rispetto alla posizione prevista (linea nera) [17, 75]. Destra: l'allineamento e la posizione degli estensimetri utilizzati nel segmento *in vitro* sono affetti da errori rispetto alla posizione prevista. Modelli FE possono essere usati per stimare come ciascuno di tali componenti di errore propaga alla grandezza misurata.

## Ottimizzazione dell'uso dei trasduttori

Il posizionamento e allineamento dei trasduttori è influenzato da errori (Figura 8). Una tale incertezza può essere stimata con ripetute applicazioni *in vitro*. Tuttavia, non può essere evitato questo errore. Se un trasduttore viene posizionato in una regione dove la quantità misurata ha una gradiente ripido, il malposizionamento o il disallineamento influenzano la misurazione uscita in misura maggiore. Modelli FE possono essere utilizzati per valutare la distribuzione della variabile misurata in modo da evitare di mettere trasduttori in zone in cui tali gradienti siano eccessivamente ripide [75, 128].

Alcuni trasduttori, quali estensimetri, forniscono un'uscita che è qualche media sull'area coperta dal trasduttore stesso (tipicamente pochi millimetri quadrati). Questo può essere vantaggioso: il trasduttore funziona come un filtro di media, riducendo l'effetto degli errori di posizione sopra descritti. Tuttavia, vi è anche un effetto collaterale negativo: i valori di picco sono sottostimati a causa di questo effetto levigante. Un modello FE può aiutare a definire la dimensione ottimale dell'estensimetro in base alla presenza di picchi locali e di gradienti [75].

Inoltre, i trasduttori meccanici nella maggior parte dei casi forniscono misure puntuali: un estensimetro misura la deformazione nel punto di applicazione; gli LVDT misurano moto relativo tra due punti ben definiti. Questi tipi di trasduttori non forniscono alcuna informazione circa la distribuzione della variabile misurata al di là dei punti di applicazione. Pertanto è importante che siano applicati i punti in cui la variabile di interesse è più rilevante. Modelli FE possono fornire una distribuzione preliminare della grandezza misurata in modo da suggerire dove dovrebbero essere applicati i trasduttori. Modelli FE sono stati a volte utilizzati per ottimizzare la posizione di estensimetri [75] e trasduttori di spostamento [13, 129, 130].

## Analisi di sensitività

In molte applicazioni cliniche, la sensitività di una grandezza alla variazione di uno o più parametri di ingresso deve essere valutata:

- Condizioni di carico diverse (ad esempio in relazione ai compiti motori diversi, o diversi livelli di attività dei pazienti) sollecitano le ossa o i costrutti osso-impianto in modi diversi [120, 125, 131].
- L'effetto della qualità ossea sulla resistenza ossea è estremamente cruciale per lo studio delle patologie ossee come l'osteoporosi, e per identificare indicazioni (o controindicazioni) di dispositivi impiantabili [132, 133].
- Durante lo sviluppo di un dispositivo protesico, il progettista ha bisogno di sapere se diversi materiali protesici garantiscono migliori o peggiori prestazioni quando accoppiati con l'osso [134-136].
- Condizioni di interfaccia tra un dispositivo impiantabile e l'osso ospite, o tra un dispositivo impiantabile e dei mezzi fissaggio (osteointegrazione rispetto a basso attrito di scorrimento, oppure opaco vs superficie lucida) può essere un fattore discriminante tra fallimento e successo [137-139].

L'esplorazione *in vitro* di tali variabili sperimentalmente richiederebbe un gran numero di esperimenti e campioni. I modelli FE sono sicuramente più efficaci in questo tipo di analisi di sensitività, e complementano gli esperimenti *in vitro* [140, 141].

## **6. LA *STRONG INFERENCE* (INFERENZA FORTE)**

Platt ha sottolineato che la ricerca scientifica potrebbe progredire in modo più efficace, se si seguisse l'approccio dell'inferenza forte (*Strong inference*) [57]. Infatti, il metodo classico basato su un'unica ipotesi probabilmente induce un bias. Un approccio basato su più ipotesi permette di superare questa limitazione [57]. La *Strong inference* si basa sul metodo scientifico classico e sulla inferenza induttiva che si basa sulla formulazione di ipotesi, e sull'esecuzione di esperimenti volti a confutare tali ipotesi. La differenza è nella sua applicazione sistematica, dato che la *Strong inference* consiste in quattro fasi:

1. Formulare più ipotesi alternative;
2. Ideare un esperimento (o vari dei essi), con possibili risultati alternativi, ognuno dei quali potrà escludere una o più delle ipotesi;
3. Esecuzione dell'esperimento in modo da ottenere un risultato chiaro;
4. Riciclare la procedura, formulando sub-ipotesi o ipotesi sequenziali per raffinare le possibilità che rimangono, e così via.

Più di recente, i suggerimenti per migliorare il metodo di *Strong inference*, ribattezzato “*Strong inference plus*” [142], include l'aggiunta di due fasi precedenti, prima del vero e proprio test delle ipotesi:

- a. Fase esplorativa, con l'obiettivo di chiarire quali fattori hanno un ruolo nel problema affrontato. È qui che la creatività scientifica può svolgere un ruolo cruciale. In questa fase, le intuizioni, osservazioni fortuite e teorie non sperimentate sono accettabili.
- b. La fase pilota dovrebbe iniziare quando la fase esplorativa ha fornito osservazioni ragionevolmente affidabili. Questa fase permette di ottimizzare gli esperimenti successivi (procedure di test, la dimensione del campione, ecc.). In questa fase, vengono eseguite una piccola serie di esperimenti. Questa è la prova sperimentale della fase esplorativa.

In questo contesto, un uso sinergico di esperimenti *in vitro* e modelli FE può consentire una efficace attuazione della *Strong inference*. I rispettivi ruoli di esperimenti *in vitro* e modelli FE devono essere chiaramente delineati. Nella fase esplorativa, tutti i possibili strumenti possono essere utili: prove *in vivo*, i casi aneddotici, esperimenti *in vitro* semplificati, modelli FE provvisori. La fase pilota coinvolge un gran numero di possibili scenari da esplorare. In questa fase, gli esperimenti *in vitro* possono fornire una percezione dei meccanismi alla base del problema. Allo stesso tempo, i modelli FE possono fornire analisi preliminari di sensibilità (anche sulla base di modelli grezzi e semplificati) per avere un'idea dei possibili fattori che influenzano. Come esempio, se la preoccupazione è il cedimento meccanico di un osso impiantato con un determinato dispositivo, un test *in vitro* può mostrare se la rottura è guidata da intaglio, da un cedimento dell'interfaccia, da fratture ossee, etc. Successivamente, un'analisi di sensitività effettuata con un modello FE può dare un'idea di quali fattori influenzano l'uscita più significativamente (qualità dell'osso, il peso corporeo del soggetto, ecc). La fase di verifica delle ipotesi può contare sia su prove *in vitro* e modelli FE: sulla base delle informazioni acquisite nella fase pilota, ora dovrebbe diventare chiaro che esperimenti sono necessari per indirizzare ciascuna delle ipotesi alternative. Una combinazione di test *in vitro* e modelli FE fornisce lo strumento più potente per affrontare ogni ipotesi.

## 7. CONCLUSIONI

In questo manoscritto abbiamo esplorato, attraverso una revisione della letteratura e la nostra esperienza nel misurare e prevedere la sollecitazione e la resistenza meccaniche delle ossa intatte e impiantate, come metodi sperimentali e numerici dovrebbero essere combinati sinergicamente al fine di ottenere di più della somma di quello che potremmo ottenere con ciascuno dei due metodi (numerico e sperimentale) usato a sé.

Infatti, la combinazione di modellazione FE ed esperimenti controllati all'interno dello stesso gruppo di ricerca può essere sfruttata per creare un circolo virtuoso in cui vengono utilizzati modelli per migliorare gli esperimenti (Figura 6), gli esperimenti sono utilizzati per migliorare i modelli (Figura 3). Ciò può essere realizzato nelle seguenti condizioni:

- Un requisito fondamentale è l'integrazione di un gruppo di calcolo e un gruppo sperimentale all'interno dello stesso gruppo di ricerca (in collaborazione con un team multidisciplinare tipico dei laboratori di bioingegneria, con medici, biologi, fisici, ingegneri, ecc.)
- L'integrazione e la collaborazione tra il gruppo che si occupa delle simulazioni numeriche, ed il gruppo sperimentale devono essere incoraggiati.
- Gli esperimenti *in vitro* devono essere progettati in collaborazione con i responsabili delle simulazioni numeriche, al fine di garantire che le condizioni di carico e le variabili misurate siano adatte per l'integrazione anche in modelli FE. Per avere un senso pratico ed avere una visione più chiara dei dati sperimentali, i ricercatori devono prendere parte alle fasi principali degli esperimenti *in vitro*.
- I ricercatori che conducono gli esperimenti devono cercare l'aiuto di chi si occupa dei modelli FE per raccogliere quante più informazioni possibile, attraverso l'analisi di sensitività supportata da un modello FE, in modo da ottimizzare il setup sperimentale.

Sappiamo tutti che questi sono obiettivi molto difficili da raggiungere. Ma, a nostro avviso, a lungo andare, questa è una grande opportunità per far progredire realmente la comprensione della biomeccanica del sistema muscolo-scheletrico.

## RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare un grande numero di collaboratori e colleghi: Marco Viceconti, Massimiliano Baleani, Fulvia Taddei, Enrico Schileo, Saulo Martelli, Mateusz M. Juszczyk, Paolo Erani, Lorenzo Zani. La grafica è dovuta a Luigi Lena. La Comunità Europea (progetti: IST-2004-026932 “Living Human Digital Library - LHDL” e #223865 “The Osteoporotic Virtual Physiological Human - VPH-OP”) e la Regione Emilia-Romagna (progetti di Tecnopolo) hanno co-finanziato questo studio.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Sharir A, Barak MM, Shahar R. Whole bone mechanics and mechanical testing. *Vet J.* 2008;177:8-17.
- [2] Simkin A, Robin G. The mechanical testing of bone in bending. *J Biomech\.* 1973;6:31-9.
- [3] Stein ID. Rib structure and bending strength: an autopsy study. *Calcif Tissue Res.* 1976;20:61-73.
- [4] Cristofolini L, Conti G, Juszczyk M, Cremonini S, Van Sint Jan S, Viceconti M. Structural behaviour and strain distribution of the long bones of the human lower limbs. *J Biomechanics.* 2010;43:826-35.
- [5] Dunlap JT, Chong AC, Lucas GL, Cooke FW. Structural properties of a novel design of composite analogue humeri models. *Ann Biomed Eng.* 2008;36:1922-6.

- [6] Heiner AD, Brown TD. Structural properties of a new design of composite replicate femurs and tibias. *J Biomech.* 2001;34:773-81.
- [7] Bergmann G. Charite – Universitaetsmedizin Berlin, “OrthoLoad” <<http://www.OrthoLoad.com>>. 2011.
- [8] Lambert KL. The weight-bearing function of the fibula. A strain gauge study. *J Bone Joint Surg Am.* 1971;53:507-13.
- [9] Takebe K, Nakagawa A, Minami H, Kanazawa H, Hirohata K. Role of the fibula in weight-bearing. *Clin Orthop Relat Res.* 1984;289:92.
- [10] Wang Q, Whittle M, Cunningham J, Kenwright J. Fibula and its ligaments in load transmission and ankle joint stability. *Clin Orthop Relat Res.* 1996;261-70.
- [11] O'Connor JJ. Load simulation problems in model testing. In: Miles AW, Tanner KE, editors. *Strain measurement in biomechanics.* London: Chapman & Hall; 1992. p. 14-38.
- [12] Cristofolini L. A critical analysis of stress shielding evaluation of hip prostheses. *Critical Reviews in Biomedical Engineering.* 1997;25:4&5:409-83.
- [13] Cristofolini L, Saponara Teutonico A, Savigni P, Erani P, Viceconti M. Pre-clinical assessment of the long-term endurance of cemented hip stems. Part 1: effect of daily activities - a comparison of two load histories. *Proc Inst Mech Eng [H].* 2007;221:569-84.
- [14] Heller M, Bergmann G, Deuretzbacher G, Dürselen L, Pohl M, Claes L, et al. Musculo-skeletal loading conditions at the hip during walking and stair climbing. *J Biomech.* 2001;34:883-93.
- [15] O'Connor DO, Burke DW, Jasty M, Sedlacek RC, Harris WH. In vitro measurement of strain in the bone cement surrounding the femoral component of total hip replacements during simulated gait and stair-climbing. *J Orthop Res.* 1996;14:769-77.
- [16] Cristofolini L, Viceconti M, Toni A, Giunti A. Influence of thigh muscles on the axial strains in a proximal femur during early stance in gait. *J Biomech.* 1995;28:617-24.
- [17] Cristofolini L, Viceconti M. Towards the standardization of in vitro load transfer investigations of hip prostheses. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design.* 1999;34:1-15.
- [18] Stolk J, Verdonschot N, Huiskes R. Hip-joint abductor-muscle forces adequately represent in vivo loading of a cemented total hip reconstruction. *J Biomech.* 2001;34:917-26.
- [19] Britton JR, Walsh LA, Prendergast PJ. Mechanical simulation of muscle loading on the proximal femur: analysis of cemented femoral component migration with and without muscle loading. *Clin Biomech.* 2003;18:637-46.
- [20] Szivek JA, Benjamin JB, Anderson PL. An experimental method for the application of lateral muscle loading and its effect on femoral strain distributions. *Med Eng Phys.* 2000;22:109-16.
- [21] Duda GN, Heller M, Albiner J, Schulz O, Schneider E, Claes L. Influence of muscle forces on femoral strain distribution. *J Biomech.* 1998;31:841-6.
- [22] Babuska I, Oden JT. Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2004;193:4057-66.
- [23] Zienkiewicz OC. *The finite element method in structural and continuum mechanics : numerical solution of problems in structural and continuum mechanics.* London: McGraw-Hill; 1967.
- [24] Hayes WC, Swenson LW, Jr., Schurman DJ. Axisymmetric finite element analysis of the lateral tibial plateau. *J Biomech.* 1978;11:21-33.
- [25] Orne D, Young DR. The effects of variable mass and geometry, pretwist, shear deformation and rotatory inertia on the resonant frequencies of intact long bones: a finite element model analysis. *J Biomech.* 1976;9:763-70.
- [26] Rybicki EF, Simonen FA. Mechanics of oblique fracture fixation using a finite-element model. *J Biomech.* 1977;10:141-8.

- [27] Simon BR, Woo SL, Stanley GM, Olmstead SR, McCarty MP, Jemmott GF, et al. Evaluation of one-, two-, and three-dimensional finite element and experimental models of internal fixation plates. *J Biomech.* 1977;10:79-86.
- [28] Long JP, Bartel DL. Surgical variables affect the mechanics of a hip resurfacing system. *Clin Orthop Relat Res.* 2006;453:115-22.
- [29] Martelli S, Taddei F, Moindreau M, Cristofolini L, Viceconti M. Pre-clinical validation of a new proximal epiphyseal replacement: design revision and optimisation by means of finite element models. *Journal of Biomechanics.* 2008;41:S34-S.
- [30] Taddei F, Viceconti M, Manfrini M, Toni A. Mechanical strength of a femoral reconstruction in paediatric oncology: a finite element study. *Proc Inst Mech Eng H.* 2003;217:111-9.
- [31] Ruimerman R, Hilbers P, van Rietbergen B, Huiskes R. A theoretical framework for strain-related trabecular bone maintenance and adaptation. *J Biomech.* 2005;38:931-41.
- [32] Viceconti M, Taddei F. Automatic generation of finite element meshes from computed tomography data. *Crit Rev Biomed Eng.* 2003;31:27-72.
- [33] Schileo E, Taddei F, Cristofolini L, Viceconti M. Subject-specific finite element models implementing a maximum principal strain criterion are able to estimate failure risk and fracture location on human femurs tested in vitro. *J Biomech.* 2008;41:356-67.
- [34] Taddei F, Schileo E, Helgason B, Cristofolini L, Viceconti M. The material mapping strategy influences the accuracy of CT-based finite element models of bones: An evaluation against experimental measurements. *Med Eng Phys.* 2007;29:973-9.
- [35] Viceconti M, Davinelli M, Taddei F, Cappello A. Automatic generation of accurate subject-specific bone finite element models to be used in clinical studies. *Journal of Biomechanics.* 2004;37:1597-605.
- [36] Lotz JC, Cheal EJ, Hayes WC. Fracture prediction for the proximal femur using finite element models: Part I--Linear analysis. *Journal Of Biomechanical Engineering.* 1991;113:353-60.
- [37] Keyak JH, Meagher JM, Skinner HB, Mote CD, Jr. Automated three-dimensional finite element modelling of bone: a new method. *Journal Of Biomedical Engineering.* 1990;12:389-97.
- [38] Aamodt A, Lund-Larsen J, Eine J, Andersen E, Benum P, Husby OS. In vivo measurements show tensile axial strain in the proximal lateral aspect of the human femur. *J Orthop Res.* 1997;15:927-31.
- [39] Viceconti M, Olsen S, Nolte LP, Burton K. Extracting clinically relevant data from finite element simulations. *Clin Biomech (Bristol, Avon).* 2005;20:451-4.
- [40] Huiskes R, Janssen JD, Sloof TJ. A detailed comparison of experimental and theoretical stress-analyses of a human femur. In: Cowin SC, editor. *Mechanical properties of bone.* New York: A.S.M.E.; 1981. p. 211-34.
- [41] Taddei F, Cristofolini L, Martelli S, Gill HS, Viceconti M. Subject-specific finite element models of long bones: An in vitro evaluation of the overall accuracy. *J Biomech.* 2006;39:2457-67.
- [42] Ota T, Yamamoto I, Morita R. Fracture simulation of the femoral bone using the finite-element method: how a fracture initiates and proceeds. *J Bone Miner Metab.* 1999;17:108-12.
- [43] Keyak JH, Fourkas MG, Meagher JM, Skinner HB. Validation of an automated method of three-dimensional finite element modelling of bone. *J Biomed Eng.* 1993;15:505-9.
- [44] Gupta S, van der Helm FCT, Sterk JC, van Keulen F, Kaptein BL. Development and experimental validation of a three-dimensional finite element model of the human scapula. *Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part H, Journal Of Engineering In Medicine.* 2004;218:127-42.

- [45] Anderson AE, Peters CL, Tuttle BD, Weiss JA. Subject-specific finite element model of the pelvis: development, validation and sensitivity studies. *J Biomech Eng.* 2005;127:364-73.
- [46] Bessho M, Ohnishi I, Matsuyama J, Matsumoto T, Imai K, Nakamura K. Prediction of strength and strain of the proximal femur by a CT-based finite element method. *J Biomech.* 2007;40:1745-53.
- [47] Schileo E, Taddei F, Malandrino A, Cristofolini L, Viceconti M. Subject-specific finite element models can accurately predict strain levels in long bones. *J Biomech.* 2007;40:2982-9.
- [48] Yosibash Z, Trabelsi N, Milgrom C. Reliable simulations of the human proximal femur by high-order finite element analysis validated by experimental observations. *J Biomech.* 2007;40:3688-99.
- [49] Taddei F, Martelli S, Gill HS, Cristofolini L, Viceconti M. Finite element modelling of resurfacing hip prosthesis: estimation of accuracy through experimental validation. *Journal of Biomechanical Engineering (ASME).* 2010;132:021002 (11 pages).
- [50] Cody DD, Hou FJ, Divine GW, Fyhrie DP. Femoral structure and stiffness in patients with femoral neck fracture. *J Orthop Res.* 2000;18:443-8.
- [51] Crawford RP, Cann CE, Keaveny TM. Finite element models predict in vitro vertebral body compressive strength better than quantitative computed tomography. *Bone.* 2003;33:744-50.
- [52] Frigg R, Hartmann S. Models in Science. In: (ed.) ENZ, editor. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition)2008.
- [53] Helgason B, Taddei F, Palsson H, Schileo E, Cristofolini L, Viceconti M, et al. A modified method for assigning material properties to FE models of bones. *Med Eng Phys.* 2008;30:444-53.
- [54] Montgomery DC. Design and analysis of experiments. 6th edition ed. New York: J. Wiley; 2005.
- [55] Popper K. The logic of scientific discovery. London/New York: Taylor and Francis; 2003.
- [56] Henninger HB, Reese SP, Anderson AE, Weiss JA. Validation of computational models in biomechanics. *Proc Inst Mech Eng H.* 2010;224:801-12.
- [57] Platt JR. Strong Inference. Certain systematic methods of scientific thinking may produce much more rapid progress than others. *Science, New series.* 1964;146:347-53.
- [58] Taylor JR. Introduction to Error Analysis. The Study of Uncertainties in Physical Measurements. 2nd Edition ed. Sausalito, CA, USA: University Science Books; 1997.
- [59] Viceconti M, Toni A, Giunti A. Strain gauge analysis of hard tissues: factors influencing measurements. In: Little EG, editor. *Experimental Mechanics Technology transfer between high tech engineering and biomechanics.* Amsterdam: Elsevier Science Publisher B.V.; 1992. p. 177-84.
- [60] Vishay, Micro-Measurements. Installation verification. Application Note VMM-8 (doc 11171). Malvern, PA, USA2005. p. 1-4.
- [61] Vishay, Micro-Measurements. Surface preparation for strain gauge bonding. Application Note B-129-8 (doc 11129). Malvern, PA, USA2009. p. 1-7.
- [62] Ajovalasit A, Zuccarello B. Local reinforcement effect of a strain gauge installation on low modulus materials. *J Strain Analysis in Engineering Design.* 2005;40:643-54.
- [63] Perry CC. Strain-gage reinforcement effects on low-modulus materials. Experimental techniques. 1985;9:25-7.
- [64] Perry CC. Strain-gage reinforcement effects on orthotropic materials. *Experimental Techniques.* 1986;16:20-4.
- [65] Zandman F, Redner SS, Riegner EI. Reinforcing effect of birefringent coatings. *Experimental*

- Mechanics. 1962;2:55-64.
- [66] Cristofolini L, Cappello A, Toni A. Experimental errors in the application of photoelastic coatings on human femurs with uncemented hip stems. *Strain*. 1994;30:95-103.
- [67] Cristofolini L. Chapter 184: Anatomical reference frames for long bones: biomechanical applications. In: Preedy VR, editor. *Handbook of Anthropometry: Physical Measures of Human Form in Health and Disease*. New York: Springer; 2012. p. 2971-99.
- [68] Bergmann G. Charite – Universitaetsmedizin Berlin, “OrthoLoad” <<http://www.OrthoLoad.com>> (online database interrogated on 10 January 2013). 2013.
- [69] Taylor SJG, Walker PS. Forces and moments telemetered from two distal femoral replacements during various activities. *J Biomech*. 2001;34:839-48.
- [70] Kotzar GM, Davy DT, Goldberg VM, Heiple KG, Berilla J, Heiple KGJ, et al. Telemeterized in vivo hip joint force data: a report on two patients after total hip surgery. *J Orthop Res*. 1991;9:621-33.
- [71] Cristofolini L, Viceconti M. In vitro stress shielding measurements can be affected by large errors. *Journal of Arthroplasty*. 1999;14:215-9.
- [72] Doyle JF, Phillips JW. Manual on experimental stress analysis. 5th Edition ed. Betel, CT: SEM; 1989.
- [73] Dally JW, Riley WF. Experimental stress analysis. 4th Edition ed. Knoxville: College House Enterprises; 2005.
- [74] Bay BK. Methods and applications of digital volume correlation. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2008;43:745-60.
- [75] Cristofolini L, McNamara BP, Freddi A, Viceconti M. In-vitro measured strains in the loaded femur: quantification of experimental error. *J Strain Analysis in Engineering Design*. 1997;32:193-200.
- [76] Cristofolini L, Viceconti M. Comparison of uniaxial and triaxial rosette gauges for strain measurement in the femur. *Experimental Mechanics*. 1997;37:350-4.
- [77] Ohman C, Dall'Ara E, Baleani M, Van Sint Jan S, Viceconti M. The effects of embalming using a 4% formalin solution on the compressive mechanical properties of human cortical bone. *Clin Biomech (Bristol, Avon)*. 2008;23:1294-8.
- [78] Currey JD, Brear K, Ziopoulos P, Reilly GC. Effect of formaldehyde fixation on some mechanical properties of bovine bone. *Biomaterials*. 1995;16:1267-71.
- [79] Linde F, Sorensen HC. The effect of different storage methods on the mechanical properties of trabecular bone. *J Biomech*. 1993;26:1249-52.
- [80] Yosibash Z, Padan R, Joskowicz L, Milgrom C. A CT-based high-order finite element analysis of the human proximal femur compared to in-vitro experiments. *J Biomech Eng*. 2007;129:297-309.
- [81] Currey J. Whole-bone mechanics: ‘the best is the enemy of the good’. *Vet J*. 2008;177:1-2.
- [82] Cristofolini L, Taddei F, Baleani M, Baruffaldi F, Stea S, Viceconti M. Multiscale investigation of the functional properties of the human femur. *Philos Transact A Math Phys Eng Sci*. 2008;366:3319-41.
- [83] Fenner JW, Brook B, Clapworthy G, Coveney PV, Feipel V, Gregersen H, et al. The EuroPhysiome, STEP and a roadmap for the virtual physiological human. *Philos Transact A Math Phys Eng Sci*. 2008;366:2979-99.
- [84] Van Rietbergen B, Huiskes R, Eckstein F, Ruegsegger P. Trabecular bone tissue strains in the healthy and osteoporotic human femur. *J Bone Miner Res*. 2003;18:1781-8.
- [85] Fung YC. Bone and cartilage. *Biomechanics - Mechanical properties of living tissues*. New

- York: Springer Verlag; 1980. p. 383-415.
- [86] Fritsch A, Hellmich C. ‘Universal’ microstructural patterns in cortical and trabecular, extracellular and extravascular bone materials: micromechanics-based prediction of anisotropic elasticity. *J Theor Biol.* 2007;244:597-620.
  - [87] Lakes RS, Katz JL. Viscoelastic properties of wet cortical bone. II. Relaxation mechanisms. *J Biomech.* 1979;12:679-87.
  - [88] Lakes RS, Katz JL. Viscoelastic properties of wet cortical bone. III. A non-linear constitutive equation. *J Biomech.* 1979;12:689-98.
  - [89] Helgason B, Perilli E, Schileo E, Taddei F, Brynjolfsson S, Viceconti M. Mathematical relationships between bone density and mechanical properties: a literature review. *Clin Biomech (Bristol, Avon).* 2008;23:135-46.
  - [90] Carter DR, Hayes WC. The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. *J Bone Joint Surg Am.* 1977;59:954-62.
  - [91] Hodgkinson R, Currey JD. Young’s modulus, density and material properties in cancellous bone over a large density range. *J Mater Sci: materials in medicine.* 1992;3:377-81.
  - [92] Reilly DT, Burstein AH, Frankel VH. The elastic modulus for bone. *J Biomech.* 1974;7:271-5.
  - [93] Rohl L, Larsen E, Linde F, Odgaard A, Jorgensen J. Tensile and compressive properties of cancellous bone. *J Biomech.* 1991;24:1143-9.
  - [94] Verdonschot NJ, Huiskes R, Freeman MA. Pre-clinical testing of hip prosthetic designs: a comparison of finite element calculations and laboratory tests. *Proc Inst Mech Eng [H].* 1993;207:149-54.
  - [95] Villarraga ML, Anderson RC, Hart RT, Dinh DH. Contact analysis of a posterior cervical spine plate using a three-dimensional canine finite element model. *J Biomech Eng.* 1999;121:206-14.
  - [96] Keaveny TM, Bartel DL. Effects of porous coating and collar support on early load transfer for a cementless hip prosthesis. *J Biomech.* 1993;26:1205-16.
  - [97] Viceconti M, Bellingeri L, Cristofolini L, Toni A. A comparative study on different methods of automatic mesh generation of human femurs. *Medical Engineering and Physics.* 1998;20:1-10.
  - [98] Kalender WA. A phantom for standardization and quality control in spinal bone mineral measurements by QCT and DXA: Design considerations and specifications. *Medical Physics.* 1992;19:583-6.
  - [99] Keller TS. Predicting the compressive mechanical behavior of bone. *Journal of Biomechanics.* 1994;27:1159-68.
  - [100] Morgan EF, Bayraktar HH, Keaveny TM. Trabecular bone modulus-density relationships depend on anatomic site. *J Biomech.* 2003;36:897-904.
  - [101] Wirtz DC, Schiffers N, Pandorf T, Radermacher K, Weichert D, Forst R. Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur. *Journal of biomechanics.* 2000;33:1325-30.
  - [102] Keaveny TM, Pinilla TP, Crawford RP, Kopperdahl DL, Lou A. Systematic and random errors in compression testing of trabecular bone. *J Orthop Res.* 1997;15:101-10.
  - [103] Lievers WB, Waldman SD, Pilkey AK. Minimizing specimen length in elastic testing of end-constrained cancellous bone. *J Mech Behav Biomed Mater.* 2010;3:22-30.
  - [104] Ohman C, Baleani M, Perilli E, Dall’Ara E, Tassani S, Baruffaldi F, et al. Mechanical testing of cancellous bone from the femoral head: experimental errors due to off-axis measurements. *J Biomech.* 2007;40:2426-33.
  - [105] Perilli E, Baruffaldi F, Visentin M, Bordini B, Traina F, Cappello A, et al. MicroCT examination of human bone specimens: effects of polymethylmethacrylate embedding on

- structural parameters. *J Microsc.* 2007;225:192-200.
- [106] Beraudi A, Stea S, Bordini B, Baleani M, Viceconti M. Osteon Classification in Human Fibular Shaft by Circularly Polarized Light. *Cells Tissues Organs.* 2009;191:260-8.
- [107] Hellmich C, Kober C, Erdmann B. Micromechanics-based conversion of CT data into anisotropic elasticity tensors, applied to FE simulations of a mandible. *Ann Biomed Eng.* 2008;36:108-22.
- [108] Fritsch A, Dormieux L, Hellmich C, Sanahuja J. Mechanical behavior of hydroxyapatite biomaterials: an experimentally validated micromechanical model for elasticity and strength. *J Biomed Mater Res A.* 2009;88:149-61.
- [109] Trabelsi N, Yosibash Z, Milgrom C. Validation of subject-specific automated p-FE analysis of the proximal femur. *J Biomech.* 2009;42:234-41.
- [110] Cristofolini L, Juszczyk M, Martelli S, Taddei F, Viceconti M. In vitro replication of spontaneous fractures of the proximal human femur. *J Biomechanics.* 2007;40:2837-45.
- [111] Juszczyk M, Cristofolini L, Kaniuk J, Schileo E, Viceconti M. A novel method for determining the time and location of abrupt fracture initiation in bones. *J Strain Analysis in Engineering Design.* 2010;45:481-93.
- [112] Besl P, McKay N. A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* 1992;14:239-56.
- [113] Draper NR, Smith, H. *Applied Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons; 1998.
- [114] Lanyon IE. Bone remodelling, mechanical stress, and osteoporosis. In: De Luca HF, editor. *Osteoporosis*. Baltimore: University Park Press; 1980. p. 129-38.
- [115] Fung YC. *Biomechanics : motion, flow, stress, and growth.* 1st Edition ed. New York: Springer; 1990.
- [116] Rockwood CAJ, Green DP, Bucholz RW. *Rockwood and Green's fractures in adults.* 3 ed. Philadelphia: J.B. Lippincott; 1991.
- [117] Jeffery CC. Spontaneous fractures of the femoral neck. *Orthop Clin North Am.* 1974;5:713-27.
- [118] Viceconti M, Taddei F, Cristofolini L, Martelli S, Falcinelli C, Schileo E. Are spontaneous fractures possible? An example of clinical application for personalised, multiscale neuro-musculo-skeletal modelling. *J Biomech.* 2012;45:421-6.
- [119] Bergmann G, Deuretzbacher G, Heller M, Graichen F, Rohlmann A, Strauss J, et al. Hip contact forces and gait patterns from routine activities. *J Biomech.* 2001;34:859-71.
- [120] Stolk J, Verdonschot N, Huiskes R. Stair climbing is more detrimental to the cement in hip replacement than walking. *Clinical Orthopaedics and Related Research.* 2002;405:294-305.
- [121] Arjmand N, Gagnon D, Plamondon A, Shirazi-Adl A, Lariviere C. Comparison of trunk muscle forces and spinal loads estimated by two biomechanical models. *Clin Biomech (Bristol, Avon).* 2009;24:533-41.
- [122] Pedersen DR, Brand RA, Davy DT. Pelvic muscle and acetabular contact forces during gait. *J Biomech.* 1997;30:959-65.
- [123] Duda GN, Schneider E, Chao EYS. Internal forces and moments in the femur during walking. *J Biomech.* 1997;30:933-41.
- [124] Finlay JB, Rorabeck CH, Bourne RB, Tew WM. In Vitro analysis of proximal femoral strains using PCA femoral implants and a hip-abductor muscle simulator. *J Arthroplasty.* 1989;4:335-49.
- [125] Polgar K, Gill HS, Viceconti M, Murray D, O'Connor JJ. Strain distribution within the human

- femur due to physiological and simplified loading: finite element analysis using the muscle standardized femur model. Proc Instn Mech Engrs Part H: J Engineering in Medicine. 2003;217:173-89.
- [126] Rohlmann A, Zander T, Rao M, Bergmann G. Realistic loading conditions for upper body bending. J Biomech. 2009;42:884-90.
  - [127] Van Sint Jan S, Della Croce U. Identifying the location of human skeletal landmarks: why standardized definitions are necessary--a proposal. Clin Biomech (Bristol, Avon). 2005;20:659-60.
  - [128] Stolk J, Verdonschot N, Cristofolini L, Toni A, Huiskes R. Finite element and experimental models of cemented hip joint reconstructions can produce similar bone and cement strains in pre-clinical tests. J Biomech. 2002;35:499-510.
  - [129] Cristofolini L, Varini E, Viceconti M. In-vitro method for assessing femoral implant-bone micromotions in resurfacing hip implants under different loading conditions. Proc Inst Mech Eng [H]. 2007;221:943-50.
  - [130] Cristofolini L, Affatato S, Erani P, Leardini W, Tigani D, Viceconti M. Long-term implant-bone fixation of the femoral component in total knee replacement. Proc Inst Mech Eng [H]. 2008;222:319-31.
  - [131] Dorey FJ, Amstutz HC. Editorial: The need to account for patient activity when evaluating the results of total hip arthroplasty with survivorship analysis. J Bone Jt Surg Am. 2002;84:709-10.
  - [132] NIH. Consensus Statement on Osteoporosis Prevention, Diagnosis, and Therapy, NIH Consens Statement Online, US Department of Health and Human Services, National Institute of Health, 2000 March 27-29; 17(1): 1-36. 2000.
  - [133] WHO. Assessment of fracture risk and its application to screening for postmenopausal osteoporosis. Report of a WHO study group. WHO Technical Report Series, World Health Organization, Geneva, Switzerland, 843: 1-130. 1994.
  - [134] Cheal EJ, Spector M, Hayes WC. Role of loads and prostheses material properties on the mechanics of the proximal femur after total hip arthroplasty. J Orthop Res. 1992;10:405-22.
  - [135] Lengsfeld M, Weiss H, Kienapfel H. [Morphological and numerical studies of the stress compatibility of patella implants]. Biomed Tech (Berl). 1992;37:222-9.
  - [136] McMinn D, Daniel J. History and modern concepts in surface replacement. Proc Instn Mech Engrs Part H: J Engineering in Medicine. 2006;220:239-51.
  - [137] Morita S, Yamamoto H, Furuya K, Ishihara K, Nakabayashi N. Enhanced strength in cemented stem fixation using adhesive acrylic cement as a metal coating material. J Biomed Materials Res. 1997;34:171-5.
  - [138] Goodman SB. The effects of micromotion and particulate materials on tissue differentiation. Bone chamber studies in rabbits. Acta Orthop Scand. 1994;65:2-43.
  - [139] Collier JP, Mayor MB, Chae JC, Surprenant VA, Surprenant HP, Dauphinais LA. Macroscopic and microscopic evidence of prosthetic fixation with porous-coated materials. Clin Orthop Relat Res. 1988;235:173-80.
  - [140] Martelli S, Taddei F, Cristofolini L, Gill HS, Viceconti M. Extensive risk analysis of mechanical failure for epiphyseal hip prostheses: a combined numerical-experimental approach. Proc Inst Mech Eng H. 2011.
  - [141] Schileo E, Taddei F, Martelli S, Cristofolini L, Moindreau M, Viceconti M. FE probabilistic approach to define the clinical indications of a new proximal epiphyseal replacement. Journal of Biomechanics. 2008;41:S35-S.
  - [142] Jewett DL. What's Wrong With Single Hypotheses. The Scientist. 2005;19:10.



# ACHIEVEMENT OF A UNIFORM CONTACT PRESSURE IN A SHAFT-HUB PRESS-FIT

Enrico Oliva

*Department of Engineering Enzo Ferrari,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: 68676@studenti.unimore.it*

Antonio Strozzi

*Department of Engineering Enzo Ferrari,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: astrozzi@unimore.it*

Andrea Baldini

*Department of Engineering Enzo Ferrari,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: abaldini@unimore.it*

Matteo Giacopini

*Department of Engineering Enzo Ferrari,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: matteo.giacopini@unimore.it*

Enrico Bertocchi

*Department of Engineering Enzo Ferrari,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: ebertocchi@unimore.it*

**Abstract.** The achievement is examined of a uniform elastic contact pressure in a frictionless, keyless, shaft-hub interference fit, obtained by properly shaping the mating profiles. The peculiarity of the hub mechanical response according to which, under the effect of a uniform pressure applied to the hub bore, the bore axial profile moves radially without any distortion, is exploited to simplify the determination of the mating profiles that return a uniform pressure. In particular, the hub radial deflection may be computed with a simple plane (polar) model, whereas only the shaft radial deflection requires a more complex analysis in cylindrical coordinates. Explicit approximate expressions are reported for the shapes to be conferred to the mating profiles to achieve a uniform pressure. Selected examples are presented to clarify the proposed design procedure, and to preliminarily explore the effect on the pressure profile of simple shape errors.

**Keywords:** contact mechanics, shaft-hub interference fit, uniform pressure

## 1. INTRODUCTION

The current years witness the recent explosion in new machining technology, not only CNC machines, but the more widespread use of multi-axis control. These new technologies have allowed continuous improvements in the finely tolerated manufacturing of the contacting profiles between mechanical components, and they have spurred the adoption of shapes of the contacting zones that can promote favourable stress distributions. Some representative examples extracted from the precision mechanics realm are perfunctorily described in the following.

With regard to the roller bearing field, the studies of Lundberg are reported in reference [1], p. 134, on the correction to be imparted to the axial profile of the roller extremities to achieve a uniform contact pressure in the roller axial direction. In reference [2], the reduction in the diameter of the roller extremities to spread the contact pressure evenly is found to be of the order of 1/1000<sup>th</sup> of the roller centre diameter.

In high performance engines, the inner surface of the small-end bush is generally inverse barrelled, where the barrelling serves to accommodate for the pin bending and, consequently, to limit the untoward pressure peaks at the contact extremities, reference [3]. For a commonplace 20 mm diameter steel pin, the barrelling of the bush profile is described in terms of an arc of a circle, whose radius is about 30 times the pin diameter.

In high tech pistons, pin bosses are adopted whose pin bores exhibit a diameter (partially) varying along the bore axis, reference [4]. In particular, a boss splayed seat whose diameter increases towards the small end lateral faces, is frequently employed to achieve a pin-hub contact pressure that stays more uniform in the pin axial direction. The splayed portion of the boss bore is generally limited to the zone closer to the small end lateral faces; its axial length is about one fourth of the pin diameter, and, for a 20 mm diameter pin, the increase in the bore diameter is about 30 micrometers, with a fine tolerance range smaller than 10 micrometers. The splayed profile is supplied to the CNC by reporting the coordinates of a series of subsequent points, whose axial step is in the region of 1 mm. In race applications, a non axisymmetric splayed profile is sometimes adopted, to account for the differences in intensity of the load pulling and pushing the conrod shank, and the consequent differences in the pin bending. In such high tech applications, a detailed knowledge of the temperature distribution in working conditions is required.

Finally, modifications of gear tooth profiles have been proposed in reference [5] to limit vibration and noise.

This paper focuses upon the elastic contact pressure distribution in a frictionless, keyless, shaft-hub press-fit; the shape of the contacting profiles that promotes the outcome of a uniform contact pressure is mathematically determined.

The available salient information on the contact stresses in a shaft-hub press-fit may be summarized as follows, see reference [6] and the reported literature review. When a cylindrical shaft of infinite length is press-fitted into a keyless cylindrical hub of finite axial length, stress concentrations take place at the shaft-hub contact extremities, whereas the contact stresses remain reasonably constant along the central portion of the contact. If the edges of the hub bore are sharp, infinite elastic pressure peaks occur at the contact extremities. Conversely, when the edges are rounded, pressure lateral bumps of finite intensity take place, and the contact pressure becomes null at the contact extremities; the Hertzian-type lateral bumps and the central flattish zone confer to the contact pressure distribution a camel-backed profile.

In reference [6], diagrams are presented for the prompt determination of the intensity of the stress lateral bumps, which mainly depends upon the radius adopted for the hub bore fillet. Within the range of fillet radii explored in reference [6], the minimum value of the stress peak is about 2.5 times the central pressure. It may be concluded that the fillet radii considered in reference [6] do not allow a constant pressure to be obtained, and, therefore, a specific investigation is needed to determine the shape to be conferred to the contacting profiles that returns a uniform contact pressure.

The shape optimization of contacting profiles has been the subject of a conspicuous number of studies, a representative paper based upon optimization procedures being reference [7]. In some works, the shaft-hub press-fit problem has expressly been considered, e.g. references [8-10], and the shape of the contacting profiles returning a uniform pressure has been determined for specific geometries and interferences. For the limit case of a thin walled cylinder subjected to a band of pressure, an analytical treatment is reported in reference [11].

The main aim of this paper is to derive manageable mathematical expressions of the above optimized profiles, that are practically useful in designing a press-fit exhibiting a uniform contact pressure. To this aim, it was found more convenient not to adopt a mathematically oriented optimization strategy of ample applicability, as in reference [7], but to exploit the peculiarities of the mechanical response of the specific problem of the shaft-hub contact, which are thoroughly examined in section 2.

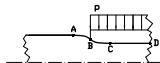
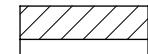
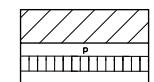
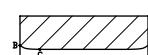
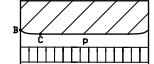
It is finally noted that the achievement of a constant contact pressure removes the lateral bumps that normally affect a press-fit, and, therefore, it limits the undesired outcome of yielding, e.g. reference [6]. Consequently, the elastically transmissible torque attains its maximum value. However, if fretting fatigue, possibly promoted by shaft bending, affects the press-fit, the constant pressure profile may no longer constitute the optimal design, since the presence of sharp edges of the hub bore limits the occurrence of relative slips and, consequently, it appears to preclude the onset of fretting fatigue, see references [12,13].

## **2. PECULIARITIES OF THE MECHANICAL RESPONSE OF THE SHAFT-HUB CONTACT**

In this section, the mechanical response is examined of a) an infinitely long shaft loaded by a band of uniform pressure, and b) a hub loaded along the whole axial length of its bore by a uniform pressure.

Starting from the point a), a cylindrical, possibly hollow, infinitely long shaft is assumed to be loaded by a band of uniform pressure. The band length equals the axial length of the hub, and it is supposed to be sufficiently long, so that the asymptotic radial deflection corresponding to a plane stress model is approached in the central part of the loaded portion, where the shaft shrinks uniformly, i.e., between the points lettered C and D in Fig. (1). (The critical value of the above band length is quantified in section 3. The assumption of a sufficiently long hub is removed in section 4.).

In addition, the shaft remains virtually undistorted in the regions far away from the loaded portion. The radial deflection of the shaft surface comprised between the two above regions constitutes a transition zone, defined by the letters A and C in Fig. (1). The letter B denotes the extremity of the applied pressure band. The curve of the radial deflection of the shaft surface is skew-symmetric with respect to the point B.

	unloaded	loaded
shaft		
hub with perfectly rectangular cross section		
hub with moderately shaped cross section		

**Figure 1:** the radial deflection of a shaft and of a hub

The mechanical problem of a cylindrical, possibly hollow, shaft, loaded by a band of uniform pressure, possesses a distinguished literature, in which the axisymmetric stress-strain field of the cylinder is frequently modelled in terms of a series involving Bessel functions, e.g. references [14-21]. Having in mind CNC and multi axis control-oriented profile descriptions, series expressions involving Bessel functions are practically unsuitable; in this paper, approximate but highly accurate and manageable expressions are presented for the corrections to be imparted to the contacting profiles to get a uniform contact pressure.

Moving to the point b), the hub is described in terms of a hollow cylinder of rectangular cross section and of finite length, loaded at its bore by a uniform pressure. When the hub is uniformly pressurized, the axial profile of its bore expands radially, remaining straight, see Fig. (1). This property does not appear to have been exploited in the technical literature addressing press-fitted couplings, and it constitutes the key point of this paper. (This property stems from the circumstance that in a ring uniformly pressurized along its inner border and subjected to a plane state of stress, the axial strain remains radially constant.) If the inner border of the undeformed hub is no longer straight, but it is moderately shaped, the above property will hold in a slightly approximate fashion, and the inner border will move radially, essentially conserving its shape, see Fig. (1). In other words, the above peculiarity, according to which the hub profile expands radially in a rigid fashion, essentially holds if the inner border modifications fall within the range of the mechanical tolerances, i.e., if the hub cross section is nominally rectangular. (The same assumption has been adopted in the modelling of pin in plate-type contact problems, in which the deformability of the contacting bodies is normally evaluated with reference to their nominal shapes, e.g. reference [22].)

It is noted that the above property is valid for any hub aspect ratio  $r_c/r_o$ , where  $r_c$  and  $r_o$  are the hub inner and outer radii, respectively ( $r_c$  nominally coincides with the shaft outer radius; the index  $c$  stands for “contact”). Contrary to the evaluation of the radial deflection of a shaft loaded by a band of pressure, the deflection of a hub loaded along its bore by a uniform pressure does not require any solution in cylindrical coordinates, since it remains axially constant and, therefore, it may be computed with a considerably simpler plane (polar) model.

The properties examined at the points a) and b) suggest the following approach to achieve a uniform contact pressure in a shaft-hub press-fit. The deformed shape of the shaft surface (in particular, the portion *B-C* of Fig. (1)) is evaluated for a general uniform pressure  $p$  and for general shaft inner,  $r_i$ , and outer,  $r_c$ , radii; this profile comprised between the letters *B* and *C* is attributed to the hub undeformed bore border (the central part of the hub bore remains cylindrical); under the effect of a uniform pressure  $p$ , the hub bore will expand radially, conserving its initial axial profile; the deformed shape of the shaft and the hub is the same, and, therefore, the established contact pressure is uniform.

(It is noted that it is more convenient to shape the hub bore and not the shaft, so that the axial position of the hub with respect to the perfectly cylindrical shaft is not influential.)

The shape conferred to the hub bore produces a uniform contact pressure only for a prescribed interference. This interference may be computed as the sum of the uniform radial expansion of the bore border and of the radial contraction of the central part of the shaft surface, comprised between the letters *C* and *D* in Fig. (1). Although the plane stress expression of the connection between the contact pressure and the interference is well documented, e.g. reference [23], it is reported here for the reader's convenience

$$p = \frac{E_h I}{2r_c} \frac{\frac{1}{r_c^2(1-\nu) + r_o^2(1+\nu)}}{\frac{r_o^2 - r_c^2}{r_c^2 - r_i^2}} + \frac{E_h}{E_s} \frac{\frac{1}{r_i^2(1+\nu) + r_c^2(1-\nu)}}{\frac{r_c^2 - r_i^2}{r_c^2 - r_i^2}} \quad (1)$$

Equation (1) quantifies the link between the contact pressure  $p$ , the diametral interference  $I$ , the inner,  $r_i$ , and outer,  $r_c$ , shaft radii, and the inner,  $r_c$ , and outer,  $r_o$ , hub radii (it is recalled that the shaft outer radius nominally coincides with the hub inner radius). In addition,  $E_s$  and  $E_h$  denote the Young's moduli of the shaft and the hub, respectively, whereas  $\nu$  is the Poisson's ratio, which is assumed to be the same for the shaft and the hub materials. In the design procedure favoured in this paper, Eqn. (1) is the only mathematical passage in which the hub outer radius,  $r_o$ , and the Young's modulus of the hub material,  $E_h$ , intervene.

In summary, the following design strategy is proposed. First, starting from the imposed value of the torque  $T$  to be transmitted, for a prescribed nominal geometry of the shaft and the hub, and for an estimated value of the coefficient of friction  $f$ , the intensity of the uniform elastic contact pressure  $p$  is computed with the classical formula, e.g. reference [24]

$$T = 2\pi f p r_c^2 l \quad (2)$$

where  $l$  is the hub axial length.

The diametral interference corresponding to the contact pressure  $p$  computed from Eqn. (2) is evaluated from Eqn. (1). The modification to be imparted to the hub bore profile to get a uniform contact pressure is derived from the evaluation of the surface deflection of the shaft subjected to a band of uniform pressure, and it is independent of both the hub aspect ratio,  $r_c/r_o$ , and of the Young's modulus,  $E_h$ , of the hub material, whose effects have already been accounted for in Eqn. (1). It may be concluded that, if an analytical expression is available of the shaft surface deflection under the effect of a band of uniform pressure and for a specific value of the hollow shaft aspect ratio  $r_i/r_c$ , the contact pressure may be made

uniform for any value of the hub aspect ratio  $r_c/r_o$  and of the Young's modulus of the hub material,  $E_h$ .

Two critical remarks are developed in the following. First, it has already been mentioned that the above property b), according to which the hub bore axial profile moves radially in a rigid fashion under the effect of a uniform pressure, is exactly valid only for a perfectly rectangular hub cross section. To achieve a shaft-hub uniform contact pressure, it is necessary to (moderately) modify the hub bore profile, so that the hub cross section is no longer perfectly rectangular, and, therefore, the hub bore profile does no longer move radially in a perfectly rigid manner under the effect of a uniform pressure. It is additionally noted that the shaft-hub contact may be classified as a relatively stiff problem, in the sense that perturbations of the contacting profiles may produce appreciable modifications of the pressure curve. (For instance, for small fillet radii of the hub bore edges, the pressure bumps appreciably vary with the fillet radius, reference [6].) It may therefore be suspected that the approach favoured in this paper, according to which the hub bore profile is assumed to expand radially in a rigid manner, may produce appreciable errors, and return a contact pressure that considerably deviates from the desired uniform distribution.

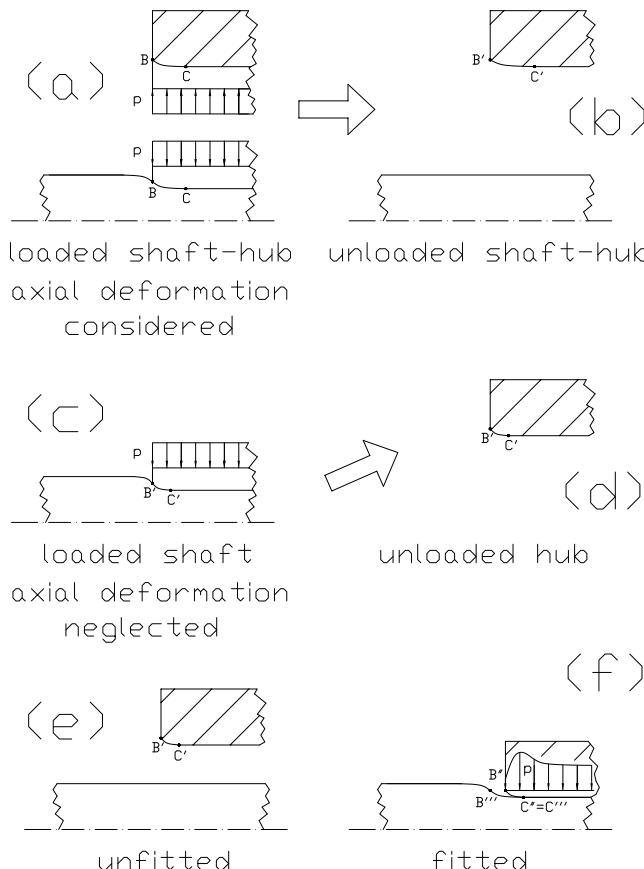
The second remark addresses the displacements of the contacting profiles in the direction perpendicular to the contact, i.e., in the shaft axis direction. By adopting a classical approximation of contact problems, the deformed shape of the shaft is evaluated by ignoring the above transverse displacements. Because of the presence of the axial displacements in actual press-fits, the shaft-hub mating profiles may no longer blend perfectly, so that the uniformity of the contact pressure may be compromised.

The simultaneous effects of the two above approximations have been examined numerically, and found to be negligible, as it emerges from the numerical examples of section 5.

The following qualitative observations refer to the above second remark, and they suggest that, if the profile to be conferred to the hub is taken from the radial deformation of the shaft surface without considering the shaft axial deformation, this approximation does not cause any indentation of the hub bore edges into the shaft and, therefore, it does not produce undesired lateral pressure spikes. In other words, this approximation is deemed to be "on the conservative side". In fact, when the shaft is frictionlessly fitted into the hub, the shaft elongates axially, whereas the hub shrinks axially.

A schematic drawing is presented in Fig. (2) to clarify the above aspects. In Fig. (2) (a) the shaft deformed profile between the points  $B$  and  $C$  (the axial deformation is accounted for), subjected to a band of uniform pressure  $p$ , is conferred to the deformed hub, see the hub bore curve between the points  $B$  and  $C$  in Fig. (2a), and the two contacting profiles match perfectly in the deformed situation. When the hub is unloaded, it elongates axially, so that the axial distance between the points  $B'$  and  $C'$  of Fig. (2b), referring to the undeformed hub, is higher than its axially deformed counterpart between the points  $B$  and  $C$  of the hub in Fig. (2a). The curve between the points  $B'$  and  $C'$  (and not between the points  $B$  and  $C$ ) is therefore the profile that must be conferred to the undeformed hub to get a perfectly uniform contact pressure  $p$ .

Figure (2c) illustrates an approximate, simplified approach, in which the axial displacements are neglected, favoured in this paper. The shaft deformed profile between the points  $B'$  and  $C'$  is evaluated by ignoring the shaft axial deformation (the shaft material may be idealized as orthotropic with a null Poisson's ratio in the axial direction), and this curve is conferred to the undeformed hub profile, between the points  $B'$  and  $C'$  of Fig. (2d). Figures 2 (e) and (f) depict the mechanical response during the press-fit of the hub shaped according to Fig. (2d). As a result of the fit, the hub shrinks axially, so that the axial distance between the points  $B''$  and  $C''$  of the hub of Fig. (2f) diminishes with respect to its unfitted counterpart between the points  $B'$  and  $C'$  of the hub in Fig. (2e), and it becomes perceptively shorter than that between the two corresponding points  $B'''$  and  $C'''$  of the shaft surface deformed by a uniform pressure band, Fig. (2f). As a result of the above approximation, consisting in neglecting the shaft axial displacement in the evaluation of the profile to be conferred to the undeformed hub bore, the two mating deformed profiles of the shaft and the hub do no longer match perfectly, Fig. (2f), where this mismatch is a function of the Poisson's ratio of the materials employed for the shaft and the hub. However,



**Figure 2:** the effect of the axial deformation of shaft and hub

fortunately, this mismatch acts in a way that precludes any undesired indentation of the hub bore edge into the shaft. Consequently, no pressure spikes occur, but a pressure profile becoming null at the shaft-hub contact extremities is expected to take place instead of a perfectly constant pressure distribution, see Fig. (4).

In the following section the determination is addressed of the radial deflection of the shaft surface.

### 3. RADIAL DEFLECTION OF THE SHAFT SURFACE

In section 2 it has been argued that a shaft-hub constant contact pressure may be achieved by attributing to the undeformed axial profile of the hub bore the deformed profile of the shaft. Consequently, the correct determination of the deformation of a shaft loaded by a band of uniform pressure of finite length constitutes a fundamental step in the approach favoured in this paper. In this section, the axial shape of an elastically deformed shaft under the effect of a discontinuous pressure profile is specifically addressed.

The salient properties of the curve describing the radial deflection of the surface for an infinitely long, cylindrical, possibly hollow shaft, subjected to a uniform band of pressure of finite length, have already been examined in section 2. In this section, some further details are considered.

First, instead of referring to the above band of pressure of finite length, following the pertinent bibliography, e.g. Fig. (9) of reference [14], it seems more convenient to consider the closely related reference loading formed by two adjacent bands of uniform pressure  $\pm p/2$  (the pressure jump is  $p$ ), for which the loading and, therefore, the radial deflection, are skew-symmetric, see the inset of Fig. (3) below. The corresponding displacement curve coincides with that obtained by imposing a similar pressure profile, but where the intensity of a pressure band is zero, whereas the intensity of the other band is  $p$ , (this pressure profile is a Heaviside function), apart from a constant translation  $u_0$  expressed by Eqn. (3) below, obtained for a plane stress modelling in which the imposed pressure is  $p/2$ . The surface radial deflection  $u$  is a 90° rotated, S-shaped curve, see Fig. (1), and it ranges between two opposite asymptotic values, whose absolute value is expressed by Eqn. (3).

$$u_0 = \frac{pr_c}{2E_s} \left( \frac{r_i^2 + r_c^2}{r_c^2 - r_i^2} - \nu \right) \quad (3)$$

In Eqn. (3),  $E_s$  denotes the Young's modulus of the shaft, and  $r_i$  and  $r_c$  are the shaft inner and outer radii, respectively. (For  $r_i \rightarrow 0$ , Eqn. (3) describes the surface radial deflection of both a) a cylinder with an unpressurized infinitesimal bore, and b) a solid cylinder, e.g. reference [25].)

With reference to the inset of Fig. (3) below, because of the skew-symmetric loading, the central radial deflection, i.e., where the two pressure bands join together, is zero. In addition, the radial displacement  $u$  approaches the corresponding asymptotic value (3) at an axial distance comparable to the shaft radius. This indication is confirmed by Fig. (18) of reference [14], and by Fig. (16) of reference [15] dealing with a solid shaft, in which the radial deflection approaches its asymptotic value for an axial distance from the centre of the S-shaped curve of about 0.6 times the shaft radius. Fig. (3) below suggests a decay length of 1.5 times the shaft outer radius.

The above indication may be further refined. In fact, in agreement with references [14,15], the surface radial deflection  $u$  may exceed, albeit moderately, its asymptotic value (3) before approaching it. The underlying mechanism is compared in reference [15] to the oscillations in the response of a beam resting on an elastic foundation; it is well known that the thin walled cylinder approximate theory may be likened to a beam resting on an elastic foundation, and, in fact, the displacement oscillations are more pronounced in hollow, thin walled shafts, see Fig. (3) below.

Although the problem of a cylinder subjected to an axisymmetric Heaviside pressure profile has been the subject of a conspicuous number of papers, a selection of which has been commented throughout this paper, the authors are unaware of the availability of manageable expressions of ample validity describing the radial deflection of the cylindrical surface in the neighbourhood of the pressure discontinuity.

### The Barton series solution reconsidered

To fill the above practical gap, following reference [14], the problem of a solid shaft loaded by two adjacent, infinitely long, pressure bands of opposite sign and of value  $\pm p/2$ , has been modelled as fictitiously periodic (the imposed period is 8 times the shaft outer radius), and trigonometric series expressions for the cylinder stress and strain fields have been obtained. In addition, following reference [15], the solution of reference [14], valid for solid cylinders, has been extended to hollow cylinders. A perfunctory description of the approach employed is presented hereinafter.

Following [14,15], the trigonometric series expansion of the stress function  $\Phi$  for this skew-symmetric problem with respect to  $z$  is

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n I_0(kr) + b_n kr I_1(kr) + c_n K_0(kr) + d_n kr K_1(kr)] \cos(kz) \quad (4)$$

where  $I$  and  $K$  denote Bessel functions of the first and second kind, respectively, and where

$$k = \frac{\pi n}{4r_c} \quad (5)$$

where  $r_c$  denotes the shaft outer radius.

If the shaft is solid, only the two Bessel functions of the first kind must be considered, reference [15]. In this case, it is convenient to adopt the following formulation of the stress function, [18], since the shear stress is null at the shaft surface,  $r=r_c$ , and the radial and hoop stresses coincide for  $r=0$ :

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \left[ 2(1-\nu) + kr_c \frac{I_0(kr_c)}{I_1(kr_c)} \right] I_0(kr) - kr I_1(kr) \right\} \cos(kz) \quad (6)$$

Following again reference [18], the series expression of the radial stress  $\sigma_r$  is

$$\sigma_r = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \begin{aligned} & \left[ -1 - kr_c \frac{I_0(kr_c)}{I_1(kr_c)} \right] I_0(kr) + \\ & + \left\{ kr + \frac{1}{kr} \left[ 2(1-\nu) + kr_c \frac{I_0(kr_c)}{I_1(kr_c)} \right] \right\} I_1(kr) \end{aligned} \right\} k^3 \sin(kz) \quad (7)$$

At the shaft surface,  $r=r_c$ , the radial stress becomes

$$\sigma_r(r_c) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ -kr_c \frac{I_0^2(kr_c)}{I_1(kr_c)} + \left\{ kr_c + \frac{2(1-\nu)}{kr_c} \right\} I_1(kr_c) \right\} k^3 \sin(kz) \quad (8)$$

By equating the above expression to the (opposite of the) Fourier series expansion of the fictitiously periodic, discontinuous pressure profile, reference [14], the following explicit analytical expression of the series coefficient  $a_n$  is obtained

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{2p}{\pi n k^3} \frac{1}{\left\{ -kr_c \frac{I_0^2(kr_c)}{I_1(kr_c)} + \left\{ kr_c + \frac{2(1-\nu)}{kr_c} \right\} I_1(kr_c) \right\}} & n \text{ odd} \end{cases} \quad (9)$$

Formulae (6) and (9) provide the explicit expression of the general series term  $\Phi_n$  for the stress function, from which the series expressions of the stresses and displacements may be computed for a solid shaft. In particular, the expressions of the radial displacement for a general radius and for the outer radius coincide with those reported in reference [14].

The explicit Eqn. (9) of  $\Phi_n$  allows its asymptotic behaviour for high values of the series index  $n$  to be computed; the asymptotic behaviour of the shaft stresses and displacements may thus be clarified, and the corresponding series may be accelerated, see appendix A. By employing the asymptotic expansions for the modified Bessel functions, see reference [26], p.377, an asymptotic expression of  $\Phi_n$  has been derived

$$\Phi_{n,asympt} = -32p \frac{r_c^3 \left( 1 - \frac{r}{r_c} + \frac{4(3-2\nu)}{\pi n} \right)}{\pi^2 n^2 \sqrt{n} \left( \pi \sqrt{n} \sqrt{\frac{r}{r_c}} + \sqrt{2} \right)} e^{-\frac{\pi n}{4} \left( 1 - \frac{r}{r_c} \right)} \cos(kz) \quad (10)$$

The asymptotic behaviour of the general series terms of the radial deflection for a general radius coincides with that obtained from Eqn. (10), thus constituting a partial check on its correctness. In particular, the general series term of the normalized surface deflection behaves asymptotically as

$$\left. \frac{u}{u_0} \right|_{asymptotic} = \frac{32(1+\nu)}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \sin(kz) \quad (11)$$

where  $u_0$  denotes the radial displacement for a uniform pressure equal to  $p/2$ , Eqn. (3).

In reference [14] the series expressing the radial deflection of a shaft surface loaded by contiguous, discontinuous pressure bands of intensity  $\pm p/2$  has not been accelerated, seemingly because the presence of the term  $1/n^2$  in Eqn. (11) guarantees a sufficiently fast convergence. However, there are several reasons that motivate the desire for a faster convergence of the above series. First, a detailed description of the shape of the shaft surface deflection requires the evaluation of the corresponding series for many axial positions; secondly, since, as a result of the series acceleration, the part of the displacement formula expressed in term of an infinite sum exhibits a general term asymptotically behaving as  $\sin(kz)/n^3$ , the derivatives up to the second degree may be analytically examined for  $z=0$ ; third, the expression of the summable series constitutes the basis for the derivation of an approximate analytical expression; fourth, by differentiating the expression of the radial deflection with respect to the axial coordinate  $z$ , the deflection due to a force collar is obtained, and the series part of this expression still converges sufficiently fast as a result of the series acceleration. This last observation clarifies that the approximate formulae possess an applicability field that is more general than the title problem.

In appendix A a series is considered that a) behaves asymptotically as  $\sin(kz)/n^2$ , and b) is analytically summable. This series allows the series solution to be accelerated by employing the Kummer method, e.g. reference [27], which consists in removing the slowly convergent part in the form of a series whose sum is expressible in finite form.

As mentioned above, the series acceleration of the surface radial deflection allows the properties of the first and second axial derivatives to be evaluated. In particular, the axial derivative of the surface radial deflection (which describes the deflection of a cylinder loaded by a collar of line force, see Fig. (218) of reference [18]), becomes infinite at the pressure discontinuity, see the point  $B$  of Fig. (1), and it behaves as  $\log(z)$ , as in the corresponding plane problem, reference [1], p.24 (the above feature is local and, therefore, it is hardly perceivable in graphical representations of the displacements, e.g. Fig. (18) of reference [14]); the second derivative with respect to  $z$  of the surface deflection is equally infinite, and it behaves as  $1/z^2$ , contrary to the corresponding plane problem, in which it behaves as  $1/z$ . (In reference [14] a critical comparison between plane and axisymmetric problems is presented.)

The above relatively simple calculations valid for a solid shaft have been extended to a hollow shaft. The series Eqn. (4) for the stress function must be employed, and two additional boundary conditions must be imposed, namely the annulling of the radial and shear stresses at the inner border, e.g. reference [21]. The analytical passages have been relegated to an algebraic manipulator; the formulae obtained are too complicated to be reported here. The series expression of the surface deflection of a hollow shaft may be accelerated with the same series valid for a solid shaft, since for the harmonics of high series index, the shaft radial thickness becomes ininfluent. However, the series acceleration becomes practically less effective as the shaft radial thickness diminishes.

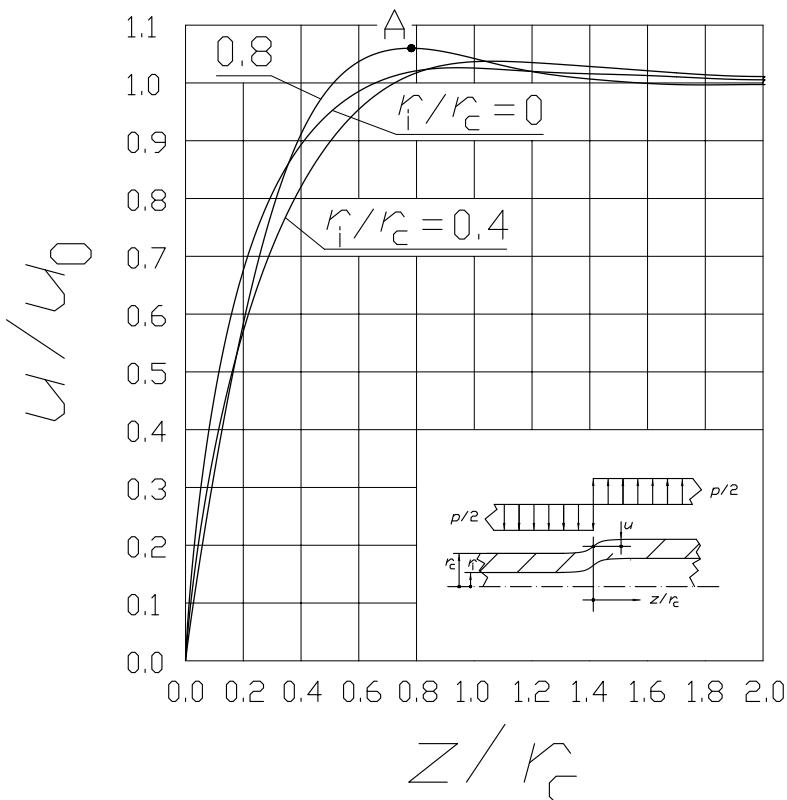
Manageable, accurate expressions have been obtained for the radial displacement of the cylindrical outer surface loaded by a discontinuous pressure profile formed by two adjacent

bands of intensity  $\pm p/2$ , see the inset of Fig. (3), for ratios between the shaft inner and outer radii,  $r_i/r_c$ , ranging between 0 and 0.9, with step 0.1.

In the displacement formulae, the radial deflection  $u(z)$  of the shaft surface is normalized with respect to its asymptotic value  $u_0$  of Eqn. (3), so that the corresponding expressions are not functions of the shaft outer radius  $r_c$ , and of the Young's modulus  $E_s$  of the shaft material, but they only depend on the shaft aspect ratio  $r_i/r_c$ , where  $r_i$  denotes the shaft bore radius, and, moderately, by the Poisson's ratio,  $\nu$ , which has been assumed to be 0.3 in formulae (25-33).

Figure (3) reports the normalized radial deflection of the shaft surface for the discontinuous pressure profile detailed in the inset, for a selection of  $r_i/r_c$  ratios, namely  $r_i/r_c=0., 0.4, 0.8$ . The curves are null for  $z/r_c=0$  and approach unity for  $z/r_c \geq 1.5$ .

The expression of the radial thickness,  $t$ , of the material to be removed from the cylindrical hub bore to get a uniform contact pressure must become null at the hub centre. Consequently, the expression of  $t(z)$ , where  $z$  is an axial coordinate whose origin coincides with a hub lateral side and points to the hub centre, is obtained from the expression



**Figure 3:** the normalized radial deflection of the shaft surface for a discontinuous pressure profile, for  $r_i/r_c=0., 0.4, 0.8$

$$t(z) = \left[ 1 - \frac{u(z)}{u_0} \right] u_0 \quad (12)$$

where the constant  $u_0$  is expressed by Eqn. (3), whereas  $u(z)/u_0$  is quantified by formulae (24-33) for a selection of  $r_i/r_c$  values. In particular, the radial thickness  $t$  of the hub bore material to be removed at the hub sides ( $z=0$ ) is exactly expressed by Eqn. (3), which in fact coincides with Eqn. (12) when  $z=0$ . In addition, the radial thickness  $t$  becomes essentially zero at an axial distance from the hub bore sides of about  $1.5 r_c$ , see Fig. (3).

Although the three curves of Fig. (3) are reasonably similar, the FE forecasts show that only the curve referring to the actual  $r_i/r_c$  ratio returns an essentially uniform contact pressure. In the following, some simplified approaches are discussed.

The FE forecasts clarify that the part of the profile that mainly dictates the shape of the contact pressure is the steep gradient zone. This observation suggests two alternative, approximate approaches. First, since the curve referring to  $r_i/r_c=0$  exhibits the steepest initial part with respect to higher values of the  $r_i/r_c$  aspect ratio, it may be employed instead of the curve addressing the actual value of  $r_i/r_c$ ; the resulting pressure profile will not remain perfectly constant, but it will become null at the shaft-hub contact extremities, without being affected by undesired lateral pressure spikes. This finding has been assessed with selected FE studies. In addition, the approximate curves, reporting the shaft radial displacement, are presented for a selection of  $r_i/r_c$  values. If the  $r_i/r_c$  value of the shaft to be considered is, say, 0.55, the corresponding radial displacement may be derived from the formulae of section 2 in two possible ways: a) by carrying out a linear interpolation; b) by referring to the closest  $r_i/r_c$  value, considered within a list of parameterized approximated formulas, lower than the actual value. This second approximation is justified by the above FE results.

Secondly, the curves for which the surface radial deflection perceptibly exceeds their asymptotic value before approaching it (i.e. the curves referring to  $r_i/r_c > 0.5$ ) may be substituted by simplified curves, in which this final diminution is neglected; for instance, with reference to Fig. (3) and to the curve addressing  $r_i/r_c=0.8$ , the simplified curve coincides with the original curve for the interval defined by  $z/r_c=0$  up to the point A, whereas the portion beyond the point A is kept horizontal. (The simplified curves are more easily machinable.) The FE forecasts indicate that this simplified curve produces a reasonably constant contact pressure profile, but the hub bore edge indents the shaft, thus causing undesired lateral pressure spikes. If this simplified approach is employed, it is necessary to compute the material to be removed for a certain interference, and then to adopt in practice a slightly lower value of the interference, see the numerical examples of section 5.

Some additional methods unsuccessfully employed to forecast the radial deflection of the shaft surface are perfunctorily mentioned in the following. First, the thin walled cylinder solution of reference [28], p. 466, cannot model the steep initial gradient of the radial deflection of the shaft outer surface. FE forecasts show that a hub bore profile based on the thin walled cylinder solution fails to return a uniform contact pressure, since undesired pressure spikes affect the contact extremities. The perturbation solution of references [29-32], suitable for modelling cylindrical problems and successfully employed in biomechanical problems, has been found to suffer from similar limitations. Finally, a series solution cast in terms of Legendre polynomials, for which explicit expressions of the series terms have recently been obtained in reference [33], was found to be unsuitable for this

application, since the Heaviside function hardly lends itself to be thoroughly described in terms of polynomials along a sizeable interval, see Fig. (1) of reference [34]. However, the solution in terms of Legendre polynomials has been found to be useful to retrieve some preliminary indications on the effects of some shape errors on the pressure profile, see section 6.

#### 4. HUBS OF LIMITED AXIAL LENGTH

To avoid confusion, axially short hubs have not been considered in the previous sections; they are specifically addressed in this section.

It has been underlined in section 3 that the radial deflection of a shaft loaded by a Heaviside pressure profile essentially reaches its asymptotic value at a distance of about 1.5 times the shaft outer radius. Consequently, for hubs whose axial length is higher than  $1.5 \times 2 = 3$  times the shaft outer radius, no interaction occurs between the two transition zones at the two extremities of the shaft-hub contact, each describing the radial deflection of the shaft outer surface between the points *B* and *C* of Fig. (1). Consequently, the approach presented in section 2 to achieve a uniform contact pressure is confidently applicable. Conversely, when dealing with axially shorter hubs, frequently encountered in the engineering practice, the approach favoured in this paper must be corrected to account for the mutual interactions between the shaft deformations at the two shaft-hub contact extremities.

In the following, two pressure profiles are considered, a) a pressure band of intensity  $p$ , whose axial length is finite and coincides with the hub length; b) a discontinuous pressure profile constituted by two adjacent pressure bands of intensity  $\pm p/2$ , see the inset of Fig. (3). To account for the mutual interactions between the shaft deformations at the two shaft-hub contact extremities, it is necessary to determine the surface radial deflection of an infinitely long shaft subjected to the pressure profile a); following Fig. (218) of reference [18], the above pressure profile a) may be obtained by superposing two pressure profiles b), axially shifted by a length equal to that of the hub. Consequently, the expression of the radial thickness,  $t$ , of the material to be removed from the hub bore lateral zones to get a uniform contact pressure is expressed by the following modification of Eqn. (12) (details are omitted for brevity)

$$t(z) = \left[ 2 - \frac{u(z)}{u_0} - \frac{u(l-z)}{u_0} \right] u_0 \quad (13)$$

where  $z$  is an axial coordinate whose origin coincides with a hub lateral side and points to the hub centre,  $l$  represent the hub axial length, and  $u(z)/u_0$  is expressed by formulae (24-33). The FE forecasts confirm that, for hubs of axial length  $l$  for which  $l/r_c > 3$ , Eqn. (12) is applicable; for shorter hubs, Eqn. (13) must be used, see the second example of section 5.

#### 5. SELECTED EXAMPLES

Some practical examples, partially extracted from reference [6], are presented in detail in this section, aimed at allowing the nonspecialist to correctly employ the proposed design procedure without excessively dwelling on the underlying theoretical aspects. It is recalled that  $r_i$ ,  $r_c$ , and  $r_o$  denote the shaft inner radius, the shaft outer radius (which nominally

coincides with the hub inner radius), and the hub outer radius, respectively. In addition,  $l$  is the hub axial length, and  $E_s$  and  $E_h$  are the shaft and hub Young's moduli, respectively, and  $\nu$  is the Poisson's ratio.

In the first example, the nominal geometry of the shaft and of the hub is defined by the following values:  $r_i = 0\text{mm}$ ,  $r_c = 16\text{mm}$ ,  $r_o = 40\text{mm}$ ,  $l = 60\text{mm}$ . The Young's modulus for the shaft and the hub is  $210000\text{MPa}$ , and  $\nu$  is 0.3. The torque  $T$  to be transmitted is  $8000\text{Nm}$ , and the estimated coefficient of friction is 0.2.

From Eqn. (2) connecting the transmissible torque to the contact pressure, the contact pressure must be  $414.47\text{MPa}$ . (The Mohr equivalent stress for the hub is  $2 \times 414.47 / [1 - (16/40)^2] = 986.83\text{MPa}$ ). From Eqn. (1) connecting the interference to the contact pressure, the diametral interference  $I$  must be  $0.1504\text{mm}$ . If the shaft outer radius is  $16\text{mm}$ , the hub bore radius must be  $r_c - I/2 = 16 - 0.1504/2 = 15.9248\text{mm}$ . This radius describes the perfectly cylindrical central part of the hub bore; to achieve a uniform contact pressure, some material must be radially removed along the bore lateral portions with respect to the above perfectly cylindrical bore shape. This example confirms the fact that Eqn. (1) is the only mathematical passage in which the hub outer radius,  $r_o$ , and the Young's modulus of the hub material,  $E_h$ , intervene.

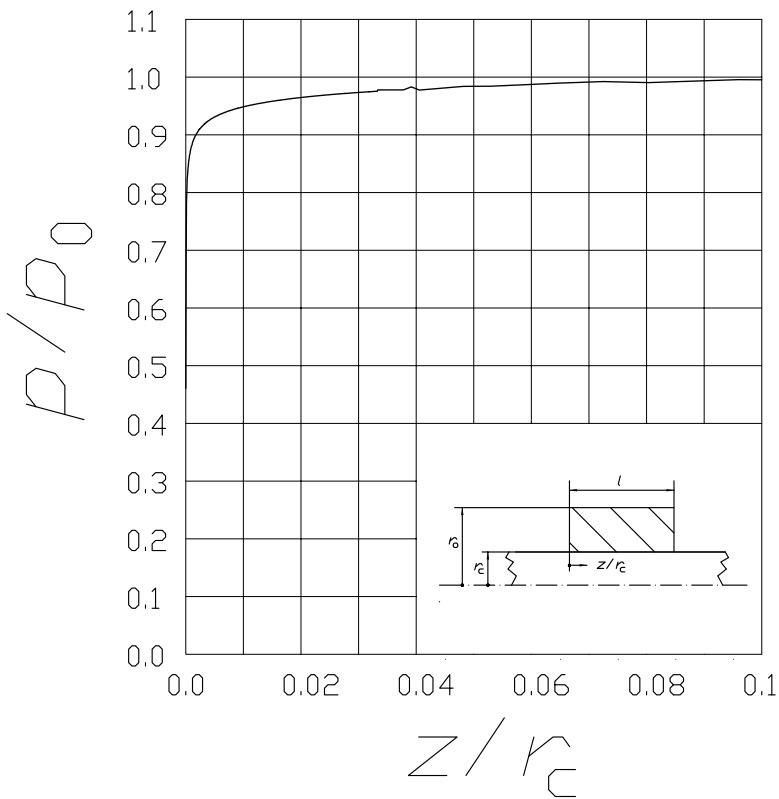
Since the hub axial length is higher than three times the shaft outer radius,  $l > 3r_c$ , the radial depth  $t(z)$  of the material to be removed from the lateral zones of the hub bore is correctly quantified by Eqn. (12), where the origin of the  $z$  coordinate coincides with one of the hub lateral sides, and it points to the hub centre. In particular, the material to be radially removed from the sides (i.e.  $z=0$ ) of the hub bore (whose radius is  $15.9248\text{mm}$ ) is  $0.0111\text{mm}$ ; the radial removal of hub material must be effected along two axial portions starting from the two hub sides and of length about  $1.5 r_c$ ; a profile whose vertical value starts from  $0.0111\text{mm}$  and becomes essentially zero at an axial distance of about  $1.5 r_c = 24\text{mm}$  is not too dissimilar from the profiles employed in precision mechanics examined in the Introduction; they are deemed to be accurately machinable with CNC and multi axis control. The normally achievable tolerance range is in the region of  $\pm 4$  micrometers, which generally implies that the machined profile is very close to that requested, although it is possibly shifted by a few micrometers and/or rotated by a small amount. The effect of simple shape errors is discussed in section 6.

As already observed, at the hub sides,  $z=0$ , the radial depth to be removed from the hub bore is  $0.0111\text{mm}$ ; for  $z=r_c/16=1\text{mm}$ , the radial depth becomes  $0.0077\text{mm}$ ; for  $z=r_c/8=2\text{mm}$ , the radial depth diminishes to  $0.0053\text{mm}$ , and it is about half the value referring to  $z=0$ ; for  $z=r_c/4=4\text{mm}$ , the radial depth becomes  $0.0026\text{mm}$ . (In the interest of clarity, the final bore profile is mathematically obtained by modifying a perfectly cylindrical bore. However, when machining the final bore profile, there is no need to machine first a perfectly cylindrical bore.)

Since expressions (24-33) employed to shape the hub bore are approximate, the hub bore edges might (slightly) indent the shaft, thus producing undesired lateral pressure peaks. It is therefore convenient to adopt a diametral interference  $I$  slightly lower than its analytical value, say  $0.95 I$  (the amount of this diminution might be correlated to the tolerance range achieved, see section 7), and remove the hub material according to Eqn. (6) in which  $u_0$  is computed from the value of the pressure  $p$  promoted by the original interference. As a result of both this adaptation and the approximation illustrated in Fig. (2), the contact pressure is expected to become null at the contact extremities and, possibly, to become moderately camel backed; its central value will be 0.95 times that promoted by the original interference.

A hub with diametral interference  $I=0.95\times0.1504=0.1429\text{mm}$ , (consequently, the shaft outer radius is 16mm, and the hub bore radius is  $16-0.1429/2=15.9286\text{mm}$ ), whose bore axial profile has been shaped according to the previous equation (6) and press-fitted onto a shaft, has been modelled with FE, and the corresponding pressure profile is presented in Fig. (4). The pressure, normalized over the central pressure  $p_0$ , that is, over the pressure value obtained with the plane model of Eqn. (1) and referring to the actual interference, remains substantially uniform along most of the contact zone without exhibiting a camel-backed profile, and it becomes null along a very narrow interval in the vicinity of the contact extremities ( $z/r_c < 0.1$ ). The circumstance that the contact pressure remains virtually uniform implies that the negative effects of the two approximations discussed at the end of section 2 are negligible.

The employment of the FE package requires some degree of ability to achieve the accurate and regular numerical forecasts of Fig. (4). First, a high number of nodes has been employed to define the mating profiles, of the order of 600 nodes, concentrated in the vicinity of the contact extremity. Secondly, the node at the hub edge is generally straddled by two subsequent nodes describing the shaft surface. According to the FE theory, both these shaft nodes are loaded by nodal forces, although one of them falls outside the contact

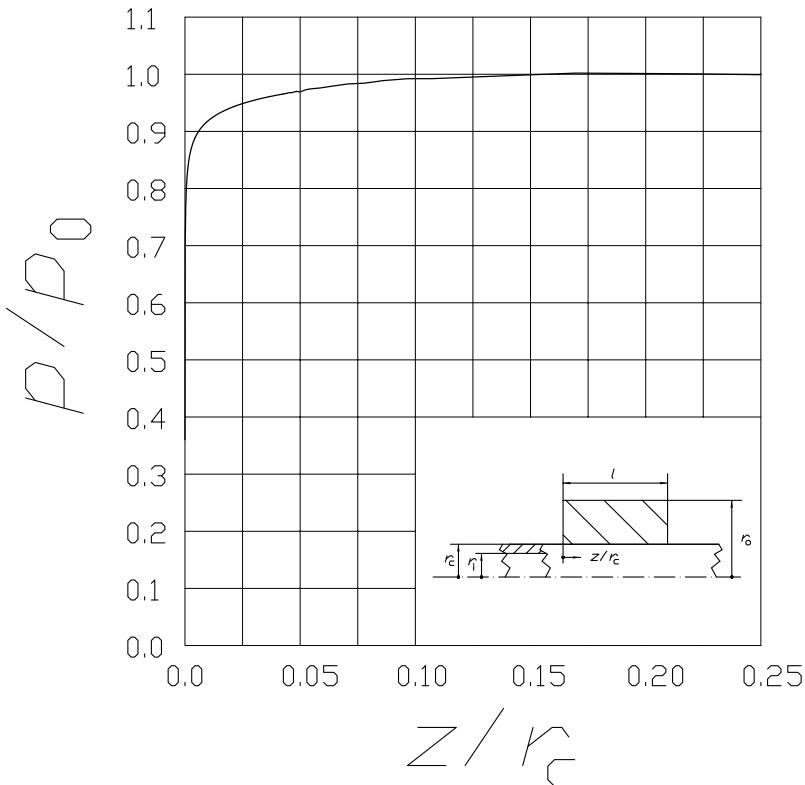


**Figure 4:** the pressure profile for the first example

zone. This unreality produces unphysical pressure undulations, mainly affecting the above nodes. To overcome this problem, in the meshes describing the shaft and hub mating profiles, the position of the nodes modelling the shaft and hub profiles in the vicinity of the contact extremity has been chosen so that they are perfectly faced in the undeformed situation; a fictitious thermal contraction (physically non influential on the contact pressure, since the shaft is cylindrical) has been attributed to the shaft, so that the nodes defining the hub and shaft mating profiles remain essentially faced in the deformed situation.

It was observed in the Introduction that, if the shaft-hub mating profiles produce a uniform contact pressure, the elastically transmissible torque attains its maximum value. It may be additionally noted that, if a uniform pressure is attained, the elastically transmissible torque may become several times higher than that achievable by rounding the hub bore edges according to engineering practice, see reference [6], and this result may justify the employment of the refined shaping of the hub bore presented in this paper.

In the second example, the geometry of the shaft and of the hub is defined by the following values:  $r_i = 6\text{mm}$ ,  $r_c = 12\text{mm}$ ,  $r_o = 22\text{mm}$ ,  $l = 6\text{ mm}$ . (It is noted that  $l \ll 3r_c$ . A considerably short hub has been employed to evidence the difference with respect to an axially long hub.) The Young's modulus for the shaft and the hub is 210000 MPa, and  $\nu$  is



**Figure 5.** the pressure profile for the second example

0.3. The torque  $T$  to be transmitted is 600 Nm, and the estimated coefficient of friction is 0.25.

From Eqn. (2), the contact pressure must be 442.10 MPa. (The Mohr equivalent stress for the hub is  $2 \times 442.10 / [1 - (12/22)^2] = 1258.68 \text{ MPa}$ ). From Eqn. (1), the diametral interference  $I$  must be 0.1775 mm. The material to be radially removed from the sides of the hub bore (i.e.  $z=0$ ) is computed from Eqn. (13), obtaining  $t(z=0)=0.0191 \text{ mm}$ . This value is perceptively higher than that valid for an axially long hub, computed from Eqn. (12),  $t(z=0)=0.0173 \text{ mm}$ . (In fact, a band of fixed pressure  $p$  produces a shaft radial deflection that decreases as the band axial length decreases. Consequently, the radial thickness of the material to be removed is higher in axially short hubs.) The material to be removed from the hub bore centre is  $t(z=l/2)=0.0130 \text{ mm}$ .

A hub with diametral interference  $I=0.95 \times 0.1775=0.1686 \text{ mm}$ , (consequently, the shaft outer radius is 12 mm, and the hub bore radius is  $12-0.1405/2=11.9157 \text{ mm}$ ), whose bore axial profile has been shaped according to equation (13) in which  $u_0$  is computed from the value of the pressure  $p$  promoted by the original interference, has been modelled with FE, and the corresponding pressure profile is presented in Fig. (5). The contact pressure has been normalized over the pressure value  $p_0$  obtained with the plane model of Eqn. (1) and referring to the actual interference.

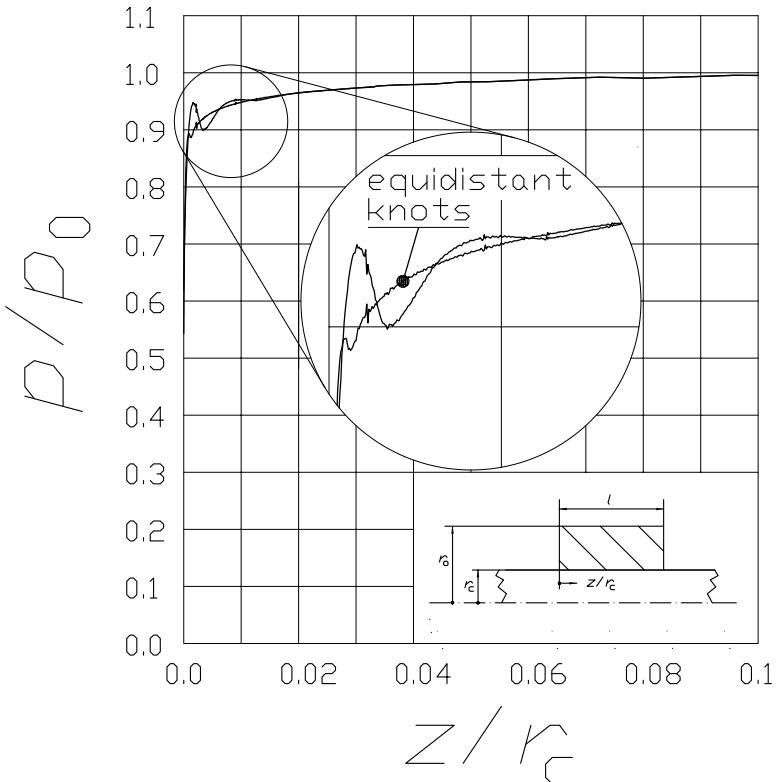
The pressure remains essentially uniform along most of the contact length, and it becomes null at the contact extremities.

## 6. EFFECT OF SOME SHAPE ERRORS

In CNC machining, the profile to be obtained is normally described in terms of a spline. The consequences on the contact pressure of a spline interpolation of the analytical profiles of the approximated formulas, have been numerically explored by referring to the first example of section 5. Two cubic spline interpolations have been considered; in the first interpolation, the knots are equidistant along the  $z$  axis, with a step of 0.01 mm; in the second interpolation, the  $z$  coordinates of the first four knots are 0, 0.01, 0.05, 0.1 mm, whereas the step of the following knots remains constantly 0.1 mm. In both interpolations, no condition is imposed on the spline slope at the first knot, whereas continuity of first and second derivatives is imposed at the second knot. For the remaining knots, continuity of the function and of its first derivative is imposed, as usual.

Figure (6) displays the two contact pressure profiles, referring to uniformly spaced knots, and to knots accumulated in the vicinity of the contact extremity, respectively. Apart from a localized, moderate ripple affecting the curve with variable step and confidently imputable to the abrupt step variation, the two profiles are very similar. This numerical result confirms the observation made at the end of section 3.1, according to which the part of the profile that mainly dictates the shape of the contact pressure is the steep gradient zone.

The following analysis addresses the effects on the pressure distribution of some simple shape errors of the hub bore profile in the axial direction, due to machining errors. It has already been noted that in high tech applications the normally achievable tolerance range of CNC falls in the region of  $\pm 4$  micrometers. This piece of information simply guarantees that the actual profile falls within the above interval; however, the engineering practice additionally suggests that the actual profile be sufficiently regular, and that diffused ripples are rarely encountered. In fact, since a major error source is the increase in temperature due



**Figure 6.** two contact pressure profiles for spline interpolations

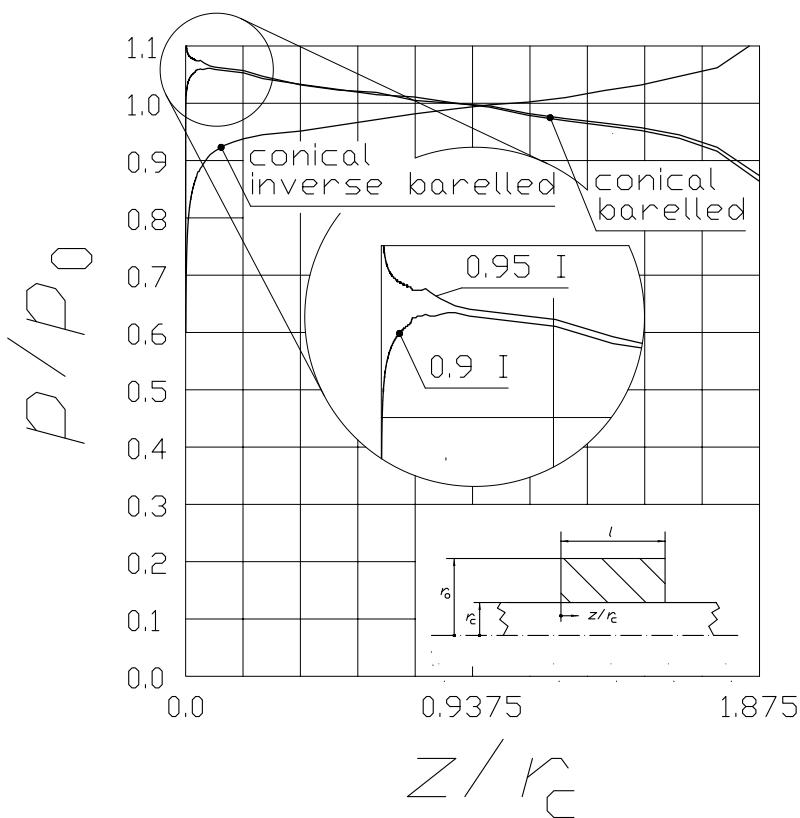
to the progression in machining, the corresponding dilatation will generally act smoothly, thus producing equally smooth errors of the actual profile.

With the above premises in mind, it was decided to explore the effects of two simple shape errors, namely a linear and a quadratic error. (A rigid radial translation has not been investigated, since it is equivalent to a simple variation in the interference value.) The linear error may be interpreted as a rigid rotation of the hub bore profile that returns a uniform pressure, and it has been numerically explored by referring to the first example of section 5, and to an imposed interference of  $0.95 \text{ } I$ . Only one half of the contact profile is considered, and the original profile is rigidly rotated in two distinct ways; in the first way, the midpoint of the profile is moved centripetally by 4 micrometers, whereas the profile extremity is moved centrifugally by 4 micrometers (this profile will be referred to as “conical inverse barrelled”); in the second way, the midpoint of the profile is moved centrifugally by 4 micrometers, whereas the profile extremity is moved centripetally by 4 micrometers (this profile will be referred to as “conical barrelled”). (More exactly, the  $y$ -coordinate is modified linearly, whereas the  $x$ -coordinate is not altered. The profiles are directly derived from the expressions of approximated formulas, and spline interpolations are not used in this investigation.)

The two corresponding pressure profiles activated by the biconical contact profiles are illustrated in Fig. (7). The conical inverse barrelled profile does not produce any extremity indentation between the hub bore edge and the shaft, and the contact pressure becomes smoothly null at the contact end. Conversely, the conical barrelled profile causes an extremity indentation, which promotes an infinite pressure peak at the contact end. The third curve of Fig. (7) addresses a conical barrelled profile whose interference has been lowered from  $0.95 I$  to  $0.9 I$ . In this case, no indentation occurs, and the contact pressure is null at the contact extremity, see Fig. (7), curve labelled  $0.9 I$ .

The part of the pressure profile far from the contact extremity is essentially linear, apart from a cusp at the contact centre, due to the biconical shape of the hub profile. This example evidences that, once the analytical value for the interference is computed from equation (1), the value to be adopted in practical applications must be reduced according to the shape error of the profile. It is however difficult to derive a practical rule suggesting which reduction of the initial interference may preclude any undesired extremity indentation.

The analytical solution of the cylindrical problem in terms of Legendre polynomials, see reference [33], provides an indication regarding the effect of a conical shape error



**Figure 7.** contact pressure profiles for linear errors

describable as a rigid rotation on the almost linear part of the contact profile. This solution shows that, if the radial displacement  $u_r$  at the surface of an infinitely long, possibly hollow, cylinder varies linearly in the axial direction, then the surface radial stress  $\sigma_r$  varies linearly according to a Winkler model (the shear stress  $\tau_{rz}$  is identically null). For instance, for a solid shaft, if  $u_r=Cz$ , where  $z$  is the axial coordinate, then  $\sigma_r=CEz/[r_c(1-\nu)]$ . It may be concluded that Eqn. (1), expressing the press-fit pressure between a shaft and a hub as a function of the interference, is exactly applicable to infinitely long shafts and hubs, in which the interference varies linearly in the shaft axial direction.

By referring to the geometry of the first example of section 5, and by employing the above expressions of  $u_r$  and  $\sigma_r$ , the absolute value of the slope of the linear portion of the normalized pressure curve versus the normalized  $z$  coordinate should analytically be about 0.06. For the two curves referring to an interference of 0.95  $I$ , Fig. (7) suggests a reasonably similar absolute value of the numerical slopes of about 0.074.

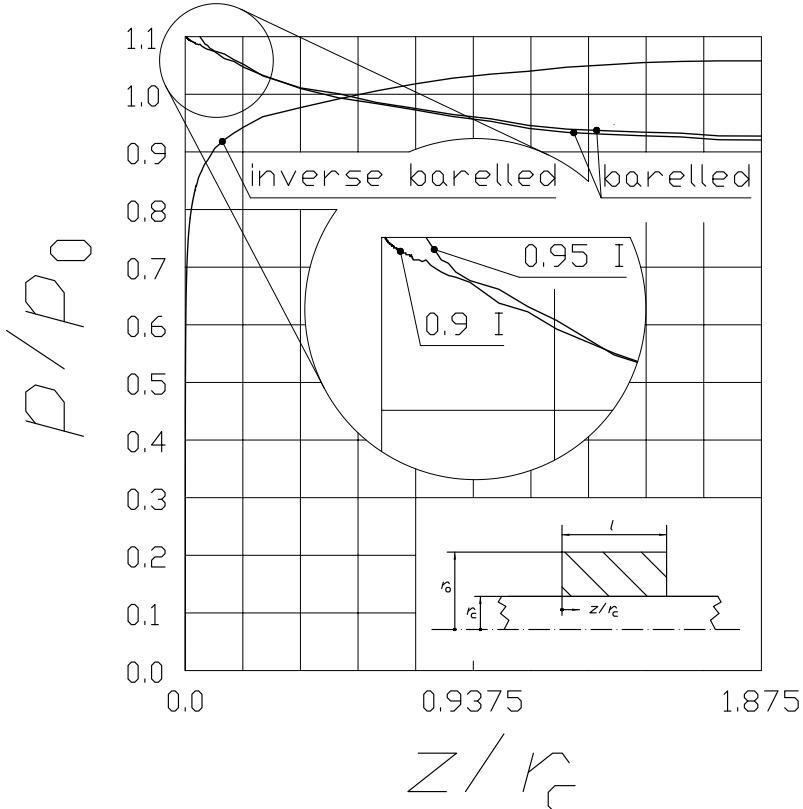
Finally, the effect has been numerically explored of shape errors of the hub bore profile that returns a uniform pressure, describable as quadratic curves with null tangent at the contact axial midpoint. The analytical solution in terms of Legendre polynomials shows that for quadratic shape errors the pressure varies quadratically, although it does no longer fulfil a Winkler model.

Reference has again been made to the first example of section 5, and to an imposed interference of 0.95  $I$ . Two quadratic errors are considered; the first error is described by a quadratic curve whose midpoint is moved centripetally by 4 micrometers, whereas the curve extremities are moved centrifugally by 4 micrometers, referred to as “inverse barreled”; the second error is described by a quadratic curve whose midpoint is moved centrifugally by 4 micrometers, whereas the curve extremities are moved centripetally by 4 micrometers, referred to as “barreled”.

The two corresponding numerical pressure profiles are depicted in Fig. (8). The inverse barreled profile does not produce any extremity indentation between the hub bore edge and the shaft, and the contact pressure becomes smoothly null at the contact extremity. Conversely, the barreled profile produces an infinite pressure peak at the contact end. The third curve of Fig. (8) refers to a barreled profile whose interference has been lowered from 0.95  $I$  to 0.9  $I$ . In this case, the contact pressure does not become infinite at the contact extremity, see Fig. (8), curve labelled 0.9  $I$ .

From Fig. (8) it appears that the portion of the normalized numerical pressure curve sufficiently far from the contact extremity may be approximated by a quadratic curve, in agreement with the analytical solution based upon Legendre polynomials. The above results may be compared with similar findings valid for a thin walled cylinder, discussed in reference [35], p. 310.

The uncertainty, due to tolerances, in the shape of the contacting profiles may produce significant deviations from the optimal profile that cannot be described by simple linear or quadratic curves, examined above. It is difficult to explore the consequence on the pressure profile of an error of general shape. In fact, general shape errors may return an appreciably non uniform contact pressure, and problems in which the contact pressure is deemed not to remain constant may not be examined with the approach favoured in this paper, in which the pressure is assumed to stay essentially constant. A FE investigation would therefore become necessary for every specific problem to forecast the deviations of the pressure profile from the uniform distribution as a result of the approximations in the machining of the mating



**Figure 8.** contact pressure profiles for quadratic errors

profiles. The selection of the tolerance range and a thorough analysis of its influence on the pressure profile are therefore problems that fall outside the scope of the present paper.

As a final remark, the approach favoured in this paper is applicable provided that the hub cross section is rectangular and, consequently, the shaft is cylindrical. In the hip replacement field, with reference to the contact between the stem and the head cavity, the “hub” cross section is no longer rectangular and the stem is conical, e.g. reference [36]. The approach of this paper is therefore strictly not applicable, but it may still suggest a preliminary profile of the mating surfaces, returning a contact pressure profile with no pressure spikes and with reduced lateral pressure bumps.

## 7. CONCLUSIONS

The achievement has been examined of a uniform elastic contact pressure in a frictionless, keyless, shaft-hub interference fit, obtained by properly shaping the mating profiles. The peculiarity of the hub mechanical response according to which, under the effect of a uniform pressure applied to the hub bore, the bore axial profile moves radially without any distortion, has been exploited to simplify the determination of the mating profiles that return

a uniform pressure. In particular, it has been shown that the hub radial deflection may be computed with a simple plane (polar) model, whereas only the shaft radial deflection requires a more complex analysis in cylindrical coordinates. Explicit approximate expressions have been reported for the shapes to be conferred to the mating profiles to achieve a uniform pressure. Selected examples have been presented to clarify the proposed design procedure, and to explore the effect on the pressure profile of linear and quadratic shape errors.

## APPENDIX A

An acceleration of the convergence of the original series of reference [14] expressing the radial displacements of the solid shaft surface, as well as of the extension of the above study to hollow shafts, see section 3.1, is here achieved by resorting to the Kummer method, e.g. reference [27]. In the following, a series is obtained that a) behaves asymptotically as  $\sin(n\pi z/(4r_c))/n^2$ , and b) is analytically summable. The computations carried out to achieve the above series are presented in detail below, since the analytical evaluation of a series involving only odd indices is less commonly encountered than its full integer index counterpart. Starting from the classical geometric series sum

$$\sum_{k=1,2,3}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad (\text{A1})$$

and by performing the change of index

$$n = 2k + 1 \quad ; \quad k = \frac{n-1}{2} \quad (\text{A2})$$

the geometric series becomes

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} z^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{1-z} \quad (\text{A3})$$

By setting

$$q = \sqrt{z} \quad (\text{A4})$$

the above series becomes

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q^2} \quad (\text{A5})$$

which is similar to the original geometric series, but in which only odd indices are involved. A form particularly suitable for integration is obtained by multiplying both members by  $q$

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q^2} \quad (\text{A6})$$

By integrating both members with respect to  $q$ , one obtains

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{2} \log(1-q^2) \quad (\text{A7})$$

A second integration leads to

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{q^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2} \log \frac{(1+q)}{(1-q)} - \frac{z}{2} \log(1-q^2) + q \quad (\text{A8})$$

By setting, as usual

$$q = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{A9})$$

and by extracting the imaginary part from both members, the required analytical expression of the series sum is obtained

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin[(n+2)\theta]}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \left[ \begin{array}{l} -2 \sin \theta \log(2 \sin \theta) + \\ + 4 \sin \theta + \\ + 2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \theta - \pi \end{array} \right], \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{A10})$$

For negative  $\theta$  angles, the above series may be evaluated by exploiting its skew-symmetric behaviour.

The above series is adapted to the displacement formula of reference [14] by putting  $\theta = \pi z / (4r_c)$ . The general term of the above series behaves as  $\sin(n\pi z / (4r_c)) / n^2$  for high values of the series index  $n$ , as needed.

## REFERENCES

- [1] In book, Johnson, K.L., 1985. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 24,134.
- [2] Heydari, and M. Gohar, R., 1979. "The influence of axial profile on pressure distribution in radially loaded rollers". *J. Mech. Engng Science*, **21**, pp. 381–388.
- [3] Pioli, A., Strozzi, A., Baldini, A., Giacopini, M., and Rosi, R., 2009. "Influence of the initial clearance on the peak stress in connecting-rod small ends". *Proc. ImechE, Part D: J. Automobile Engineering*, **223**, pp. 769–782.

- [4] Ward, W., 2010. "Reciprocating ideas". *Race Engine Technology*, Dec/Jan, pp. 40–48.
- [5] Bonori, G., Barbieri, M., and Pellicano, F., 2008. "Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms". *J. Sound and Vibration*, **313**, pp. 603–616.
- [6] Strozzi, A., Baldini, A., Giacopini, M., Bertocchi, E., and Bertocchi, L., 2011. "Normalization of the stress concentrations at the rounded edges of a shaft–hub interference fit". *J. Strain Analysis*, **46**, pp. 478–491.
- [7] Klarbring, A., and Haslinger, J., 1993. "On almost constant contact stress distributions by shape optimization". *Structural Optimization*, **5**, pp. 213–216.
- [8] Parsons, B., and Wilson, E.A., 1970. "A method for determining the surface contact stresses resulting from interference fits". *ASME J. Engng Industry*, **90**, pp. 208–218.
- [9] Oda, J., Sakamoto, J., and San, K., 1991. "A method for producing a uniform contact stress distribution in composite bodies with interference". *Structural Optimization*, **3**, pp. 23–28.
- [10] Pedersen, P., 2006. "On shrink fit analysis and design". *Comput. Mech.*, **37**, pp. 121–130.
- [11] Singh, S., 1994. "On the shrink-fit problem of a thin cylinder". *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, **60**, pp. 167–175.
- [12] Ciavarella, M. and Demelio, G., 2001. "A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints". *Int. J. Solids Structures*, **38**, pp. 1791–1811.
- [13] In Proceedings, Kolonits, F., 2010. "Analytic vs. FEM calculation of a rounded hub-shaft contact with reference to fretting risk". In *Proceeding of the 8th int. Conf. on Railway Bogies and Running Gears*, I. Zobory, ed., pp. 355–362. Paper number 20.
- [14] Barton, M.V., 1941 "The circular cylinder with a band of uniform pressure on a finite length of the surface". *ASME J. Appl. Mech.*, **63**, pp. 97–104.
- [15] Rankin, A.W., 1944. "Shrink fit stresses and deformations". *ASME J. Appl. Mech.*, **66**, pp. 77–85.
- [16] Okubo, H., 1952. "The stress distribution in a shaft press-fitted with a collar". *Z Angew. Math. Mech.*, **32**, pp. 178–186.
- [17] Pan, H.H., 1963. "Stresses in a long hollow cylinder subjected to a band of uniform pressure on the outer surface". *ZAMP*, **14**, pp. 23–37.
- [18] In book, Timoshenko, S., and Goodier, J.N., 1970. *Theory of elasticity*, 1st ed., McGraw-Hill, N.Y., pp. 388–390.
- [19] Cicala, P., 1985. "Analytical solutions of axisymmetric problems in elastic cylinders". *Meccanica*, **20**, pp. 43–48.
- [20] PhD Thesis, Strozzi, A., 1992. "Contact stresses in hip replacements". PhD thesis, School of Engineering and Applied Science, University of Durham, UK.
- [21] Williams, D.K. and Ranson, W.F., 2003. "Pipe-anchor discontinuity analysis utilizing power series solutions, Bessel functions, and Fourier series". *Nuclear Engng and Design*, **229**, pp. 1-10.
- [22] Hou, J. P. and Hills, D. A., 2001. "Contact between a pin and a plate with a hole under clearance-fit conditions". *Proc. Instn Mech. Engrs, Part C: J. Mechanical Engineering Science*, **215**(6), pp. 629–639.

- [23] Kanber, B., 2006. “Boundary element analysis of interference fits”. *Turkish J. Engng Env. Sci.*, **30**, pp. 323–330.
- [24] In book, Strozzi, A., 1998. *Costruzione di macchine*, 1st ed., Pitagora, Bologna.
- [25] In book, Strozzi, A., 2004. *Distruzione di macchine*, 1st ed., Pitagora, Bologna.
- [26] In book, Abramowitz, M., and Stegun, I., 1972. *Handbook of mathematical functions*, Dover, N.Y..
- [27] Strozzi, A., 1989. “Mechanical analysis of an annular plate subject to a transverse concentrated load”. *J. Strain Analysis*, **24**, pp. 139–149.
- [28] In book, Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, London.
- [29] Armstrong, C. G., 1986. “An analysis of the stresses in a thin layer of articular cartilage in a synovial joint”. *Engng Medicine*, **15**, pp. 55–61.
- [30] Jaffar, M. J., 1997. “A general solution to the axisymmetric contact problem of a thin bonded elastic layer”. *Proc Instn Mech. Engrs, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, **211**, pp. 549–557.
- [31] Strozzi, A., 2000. “Analytical modelling of the elastomeric layer in soft layer hip replacements”. *Proc Instn Mech. Engrs, Part H, Journal of Engng in Medicine*, **214**, pp. 69–81.
- [32] Bachelor Thesis, Oliva, E., 2010. “Perturbation solution of the contact pressure in a shaft-hub press-fit”. Thesis submitted for the Degree in Mechanical Engineering, Università di Modena e Reggio Emilia, Modena, IT.
- [33] Strozzi, A., 2012. “A note on the Legendre series solution of the biharmonic equation for cylindrical problems”. *J. Elast.*, **108**, pp. 119–123.
- [34] In proceedings, Calders, T., and Jaroszewicz, S., 2007. “Efficient AUC optimization for classification”. In Proceedings of the 11th European conference on principles and practice of knowledge discovery in databases, J. Kok, J. Koronacki, R. L. de Mántaras, S. Matwin, D. Mladenic, and A. Skowron, eds., Springer, Berlin, pp. 42–53.
- [35] In book, Belluzzi, O., 1990. *Scienza delle Costruzioni*, Vol. 3. Zanichelli, Bologna.
- [36] Fessler, H. and Fricker, D. C., 1989 “A study of stresses in alumina universal heads of femoral prostheses”. *Proc. IMechE, Part H: J. Engineering in Medicine*, **203**, pp. 15–34.

# A COMPLEMENTARITY FORMULATION TO STUDY LUBRICATED CONTACT PROBLEMS IN THE PRESENCE OF CAVITATION

Luca Bertocchi

*DIEF - Department of Engineering “Enzo Ferrari”,*

*University of Modena, Italy*

*E-mail: luca.bertocchi@unimore.it*

Matteo Giacopini

*DIEF - Department of Engineering “Enzo Ferrari”,*

*University of Modena, Italy*

*E-mail: matteo.giacopini@unimore.it*

Antonio Strozzi

*DIEF - Department of Engineering “Enzo Ferrari”,*

*University of Modena, Italy*

*E-mail: antonio.strozzi@unimore.it*

**Abstract.** A mass-conserving formulation of the Reynolds equation has been recently developed using the concept of complementarity [1]. The mathematical derivation of the Linear Complementarity Problem (LCP) implemented in the solver favoured in [1] overcomes the drawbacks previously associated with the use of such complementarity formulations for the solution of cavitation problems in which reformation of the liquid film occurs. In the present paper, the proposed methodology, already successfully applied to solve textured bearing and squeeze problems in the presence of cavitation in a one dimensional domain and for incompressible fluids [1], has been extend to a two dimensional domain and the fluid compressibility has been included in the formulation. The evolution of the cavitated region and the contact pressure distribution are studied for a number of different configurations. Some of the results obtained with the proposed scheme are critically analysed and compared with the predictions obtained using alternative formulations (including full CFD calculations). The stability of the proposed algorithm and its flexibility in terms of the implementation of different compressibility laws is highlighted.

**Keywords:** Hydrodynamic lubrication, complementarity, compressibility, cavitation.

## 1. INTRODUCTION

Lubricated bearings are widely employed in mechanical assemblies. Reynolds equation is commonly used to describe the flow in the gap between two mating surfaces, as an alternative to the more complex full Navier-Stokes equations. The assumptions of this formulation are fully satisfied in the majority of the lubricated bearing commonly found in practical applications. These assumptions are, namely, that both the ratio of film thickness to contact length and the Reynolds number are small.

Cavitation may occur due to the development of low pressures within the fluid film. Various formulations have been proposed in order to correctly simulate this phenomenon. In the cavitated regions the mechanical properties of the fluid vary significantly. Jakobsson and Floberg [2] proposed a mass conserving algorithm capable to analyse lubricant films in the presence of cavitation. The algorithm described in [2] and employed in [3] uses ad-hoc equations to locate the cavitation boundaries and it sets a fixed pressure value in the non-active regions while solving the Reynolds equation within the active counterparts. Elrod and Adams [4, 5] first developed a cavitation algorithm that uses a single equation within the whole domain and does not require to explicitly locate the cavitation boundaries. They introduced a switch function to suppress the Poiseuille flow in the non-active regions. This function  $g(p)$  equals one where the pressure is greater than the cavitation pressure, whereas it is null ( $g(p)=0$ ) otherwise. In this way the Poiseuille term of the Reynolds equation can be artificially suppressed in the cavitation region. Starting from the pioneering works of Elrod [4, 5], further algorithms have been developed by Vijayaraghavan and Keith [6] first and by Sahlin et. al. [7] then that took into account the compressibility of the lubricant.

During years, various authors solved the problem of determining the active and cavitated film regions using the concept of complementarity [8-11]. These classical methods based on a complementarity formulation do not ensure the conservation of mass. These undesired results are due to the fact that such algorithms for hydrodynamic lubrication solve the Reynolds equation within the whole domain assuming a constant fluid density. While this assumption can be reasonably accepted within the active regions, in the non-active regions, density varies in both space and time. Giacopini et. al. [1] explained how assuming constant fluid density within the whole domain leads to an incomplete identification of film rupture and, thus, to an incorrect detection of film reformation. Therefore, ensuring the mass continuity is mandatory to correctly predict both film rupture and reformation especially where the solution shows several cavitation and reformation boundaries, e.g. studies of rough contacts [12] and textured bearings [13]. The algorithm proposed by Giacopini et. al. [1] ensures the conservation of mass within the whole domain employing a Finite Element complementarity formulation of the lubrication problem in the presence of cavitation based on a newly defined set of complementarity variables.

The present paper mainly aims at improving the method proposed in [1] by including the fluid film compressibility effect. This feature allows predicting the bearing behaviour in a broader range of applications, even for very high pressure conditions. The formulation previously developed in [1] is firstly extended to the two-dimensional domain. Then, a novel formulation of the Reynolds equation for compressible fluids in term of complementarity is presented. Finally, results from the solution of a number of examples of practical interest, focusing on the comparison with alternative methods available in literature and CFD simulations are presented.

## 2. FORMULATION

### Complementarity formulation

In the definition of a complementarity algorithm, two aspects must be considered: (i) the identification of the complementary variables and (ii) the definition of the functional connection that relates these variables. The complementarity variables adopted in the formulation favoured in this paper are the same proposed in [1], namely the pressure,  $p$ , and the void fraction,  $r$ , which is defined as:

$$r = 1 - \frac{\rho}{\rho_p} \quad (1)$$

where  $\rho$  is the density of the mixture of oil and gases and  $\rho_p$  the density of the lubricant at a given pressure  $p$ .

The Reynolds equation in one dimension for unsteady and compressible flows is:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - U \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

where  $h$  is the film thickness,  $U$  the sliding speed, and  $\mu$  the fluid viscosity.

This equation is valid both in the full film region (active region) and in the cavitated (non-active) region. In particular, in the active region the lubricant is fully composed of liquid, so  $\rho$  equals  $\rho_p$ , while in the non-active region the fluid cavitates, becoming a mixture of liquid and vapour characterized by a density,  $\rho(x,t,p)$ , which is always lower than or equal to  $\rho_p$ . It follows that  $(\rho_p - \rho) \geq 0$  in the whole domain. On the other hand, the pressure  $p$  is greater than zero in the active region and it is considered equal to the cavitation pressure in the cavitated counterpart. The pressure at which the liquid cavitates,  $p_c$ , may be taken to be zero. By this way, a sign restriction on the value of the pressure  $p$  arises since  $p \geq 0$  in the whole domain (note: if  $p_c \neq 0$  the sign restriction applies to the difference between the fluid pressure  $p$  and the vapour pressure  $p_c$ :  $p - p_c \geq 0$ ).

The new variable  $\phi$  is then defined:

$$\phi = (\rho_p - \rho) \quad (3)$$

which is zero in the active region and  $0 < \phi < \rho_p$  in the non-active zone. Normalising  $\phi$  over  $\rho_p$  the definition of  $r$  (Eqn. (1)) arises. Since  $\rho_p$  is strictly positive, the same considerations made for  $\phi$  are also valid for  $r$ . From the above discussion it is evident that in the active region the pressure  $p$  is greater than zero and  $r$  is null, while in the non-active region  $p$  equals zero and  $r$  is strictly positive. Consequently, the product  $p \cdot r = 0$  in the whole domain.

Therefore, the problem described by Eqn. (2) can be formulated in terms of a linear complementarity problem (LCP), the complementarity variables being  $p$  and  $r$ :

$$\begin{aligned} p &\geq 0 \\ r &\geq 0 \\ p \cdot r &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

For a compressible fluid, density is a function of pressure,  $\rho_p = \rho_p(p)$  and it can be explicitly expressed by the general formula:

$$\rho_p = \rho_c f(p) \quad (5)$$

where  $\rho_c$  is the density at the cavitation pressure and  $f(p)$  is the functional connection between  $\rho_p$  and  $p$ . Substituting Eqn. (5) into Eqn. (3) gives:

$$\phi = \rho_c f(p) - \rho. \quad (6)$$

Solving  $\rho$  from Eqn. (6) and substituting it into Eqn. (2) one obtains:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (\rho_c f(p) - \phi) \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial t} [(\rho_c f(p) - \phi) h] - U \frac{\partial}{\partial x} [(\rho_c f(p) - \phi) h] = 0. \quad (7)$$

Rearranging Eqn. (7) as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_c f(p) \left( 1 - \frac{\phi}{\rho_c f(p)} \right) \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_c f(p) \left( 1 - \frac{\phi}{\rho_c f(p)} \right) h \right] \\ - U \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_c f(p) \left( 1 - \frac{\phi}{\rho_c f(p)} \right) h \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

and noticing that the complementarity variable  $r$  can be rewritten as:

$$r = \frac{\phi}{\rho_c f(p)} \quad (9)$$

Eqn. (8) becomes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(p)(1-r) \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial t} [f(p)(1-r)h] - U \frac{\partial}{\partial x} [f(p)(1-r)h] = 0. \quad (10)$$

Expanding Eqn. (10) one obtains:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(p) \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(p)r \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial t} [f(p)h] \\ + 2 \frac{\partial}{\partial t} [f(p)rh] - U \frac{\partial}{\partial x} [f(p)h] + U \frac{\partial}{\partial x} [f(p)rh] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

With few simple manipulations, Eqn. (11) can be further simplified. In particular, considering the term:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(p)r \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (12)$$

the same assumption already discussed in [1] are valid and therefore  $r \cdot (\partial p / \partial x)$  equals zero everywhere inside the domain.

Moreover, the terms containing the product between  $f(p)$  and  $r$  can be simplified by substituting  $f(p)=1$ . In fact where  $r \geq 0$  (the non-active regions)  $f(p) = 1$  while where  $f(p) \neq 1$ ,  $r=0$ . By this way, the following simplifications hold:

$$2 \frac{\partial}{\partial t} [f(p) rh] = 2 \frac{\partial}{\partial t} [(f(p) - 1 + 1)rh] = 2 \frac{\partial}{\partial t} [0 rh] + 2 \frac{\partial}{\partial t} [rh] = 2 \frac{\partial}{\partial t} [rh], \quad (13)$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} [f(p)rh] = U \frac{\partial}{\partial x} [(f(p) - 1 + 1)rh] = U \frac{\partial}{\partial x} [0 rh] + U \frac{\partial}{\partial x} [rh] = U \frac{\partial}{\partial x} [rh]. \quad (14)$$

Therefore, Eqn. (11) becomes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(p) \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial t} [f(p)h] + 2 \frac{\partial}{\partial t} [rh] - U \frac{\partial}{\partial x} [f(p)h] + U \frac{\partial}{\partial x} [rh] = 0 \quad (15)$$

and, consequently, the complementarity formulation related to the problem of cavitation in lubricant films for compressible fluids can be defined as follows: find  $p$  and  $r$  such that:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(p) \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial t} [f(p)h] + 2 \frac{\partial}{\partial t} [rh] - U \frac{\partial}{\partial x} [f(p)h] + U \frac{\partial}{\partial x} [rh] = 0 \quad (16)$$

$$p \geq 0$$

$$r \geq 0$$

$$p \cdot r = 0.$$

This formulation allows the variation of the density of the lubricant film due to the pressure variation to be considered. It is important to emphasise that, up to this point, no assumption has been made about  $f(p)$ . Hence, the algorithm presented in this paper allows using any of the compressibility models existing in the pertinent literature. The one-dimensional formulation here described has been then easily extended to the two-dimensional case. The two-dimensional formulation is not presented here for brevity.

### Functional connection between the complementarity variables

Consider, for ease of discussion, the one dimensional, steady state Reynolds equation for compressible fluids in pure sliding:

$$\frac{d}{dx} \left[ f(p) \frac{h^3}{6\mu} \frac{dp}{dx} \right] - U \frac{d[f(p)h]}{dx} + U \frac{d[rh]}{dx} = 0. \quad (17)$$

Integrating Eqn. (17) twice with respect to  $x$  gives:

$$p = -6\mu U \int_0^x \frac{r}{f(p)h^2} dy + 6\mu U \int_0^x \frac{1}{h^2} dy + 6\mu A_1 \int_0^x \frac{1}{f(p)h^3} dy + A_2. \quad (18)$$

Consider the following boundary conditions:

$$p(0) = p_0; \quad p(a) = p_a \quad (19)$$

where  $a$  is the lubricated contact length and  $p_0$  and  $p_a$  represent the inlet and the outlet pressure, respectively. The values of the constants of integration,  $A_1$  and  $A_2$  of Eqn. (18), can be determined by substituting Eqn. (19) into Eqn. (18):

$$A_1 = \frac{(p_a - p_0) + 6\mu U \int_0^a \frac{r}{f(p)h^2} dy - 6\mu U \int_0^a \frac{1}{h^2} dy}{6\mu \int_0^a \frac{1}{f(p)h^3} dy}; \quad (20)$$

$$A_2 = p_0.$$

Substituting these constants back into Eqn. (18) gives:

$$p = 6\mu U \int_0^x \frac{1}{h^2} dy - 6\mu U \int_0^x \frac{r}{f(p)h^2} dy - \frac{\int_0^x \frac{1}{f(p)h^3} dy}{\int_0^a \frac{1}{f(p)h^3} dy} \left( p_0 - p_a + 6\mu U \int_0^a \frac{1}{h^2} dy - 6\mu U \int_0^a \frac{r}{f(p_a)h^2} dy \right) + p_0. \quad (21)$$

Eqn. (21) can be rewritten in the following compact functional form:

$$p = Lr + Q \quad (22)$$

where  $L$  represents the operator relating the complementarity variables  $p$  and  $r$ , and  $Q$  is the term that carries the information about the boundary conditions of the problem and the shape of the lubricant film thickness.

The linear complementarity problem of Eqn. (16) can be solved numerically using the Galerkin method in the Finite Element framework. In this paper, a similar approach to the one described in [1] has been used along a specific formulation for the derivation of  $f(p)$ . In particular, a semi-implicit algorithm has been adopted to derive the density as a function of pressure.

### Compressibility models

A brief review of the compressibility models proposed in the pertinent literature is first presented. Various compressibility formulations have been adopted during years to simulate hydrodynamic (HL) lubrication problems. A very simple model is the constant bulk modulus expression that is defined as:

$$\beta = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (23)$$

where  $p$  is the pressure,  $\beta$  is the bulk modulus and  $\rho$  is the density of the lubricant. In this formulation,  $\beta$  is constant. Therefore, integrating once Eqn. (23) one obtains:

$$p = p_c + \beta \ln \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right) \Leftrightarrow \frac{\rho}{\rho_c} = e^{((p-p_c)/\beta)} \quad (24)$$

where  $p_c$  is the cavitation pressure and  $\rho_c$  is the density at cavitation pressure. This expression has been used by Vijayaraghavan and Keith [6] to analyse the behaviour of compressible fluids in finite journal bearing. However, in real lubricants,  $\beta$  is not constant but depends on the density of the fluid and therefore Eqn. (24) is valid only in a limited range of pressures [7].

A more complete formulation is the one proposed by Dowson and Higginson [14]:

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \frac{C_1 + C_2(p-p_c)}{C_1(p-p_c)} \quad (25)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are constant coefficients. This compressibility formulation has been widely employed because of its good agreement with experimental results for pressure

values up to 400 MPa [15]. Typical values for  $C_1$  and  $C_2$  are proposed in [14] where  $C_1=0.59 \cdot 10^9$  and  $C_2=1.34$ .

Sahlin et al. [7] employed different values to best fit experimental data for mineral oil [16], namely  $C_1=2.22 \cdot 10^9$  and  $C_2=1.66$ .

The most accurate expression for compressibility is the one proposed by Jacobson and Vinet [17]:

$$p = 3B_0 \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-\frac{2}{3}} \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) e^{\left[ \eta' \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \right]}. \quad (26)$$

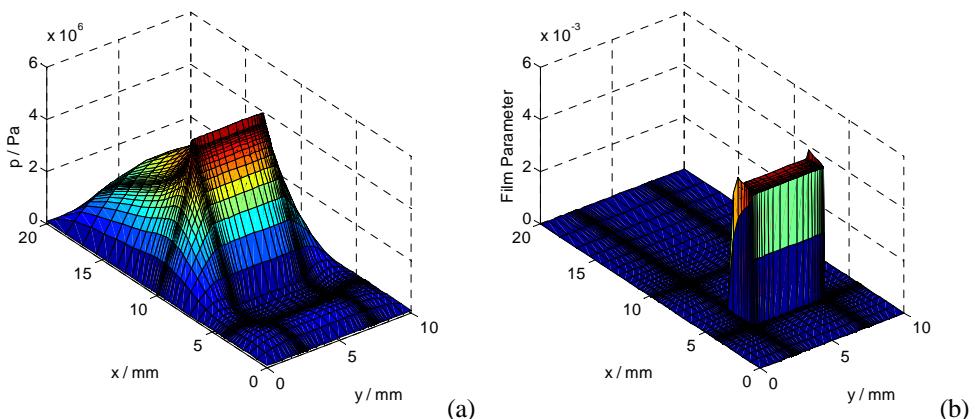
This relationship shows the best results even for very high pressure values.  $B_0$  and  $\eta'$  are constant parameters depending on the particular lubricant under investigation. Common values for mineral oil are  $B_0=1.7 \cdot 10^9$  and  $\eta'=10$ . Eqn. (26) is not analytically invertible and so a simple relation of  $\rho$  as a function of  $p$  does not exist. However, for a given pressure, a value for  $\rho/\rho_c$  can be numerically obtained employing an iterative method, such as the Newton method [18].

This brief introduction to pressure-density relationships has shown that, at least for the considered formulations, it is possible to define a functional connection,  $\rho/\rho_c=f(p)$ . Therefore, introducing this functional connection in Eqn. (15), any of the above formulations can be easily considered to describe the compressible behaviour of the fluid.

### 3. EXAMPLE PROBLEMS: RESULTS

The proposed formulation to study compressible fluid film lubrication problems in the presence of cavitation has been derived in terms of LCP. The solution of the discretized problem is achieved using standard pivoting algorithms, which guarantee the unconditional numerical convergence of the solver [1].

Four example problems are reported here to demonstrate the validity of the proposed approach.



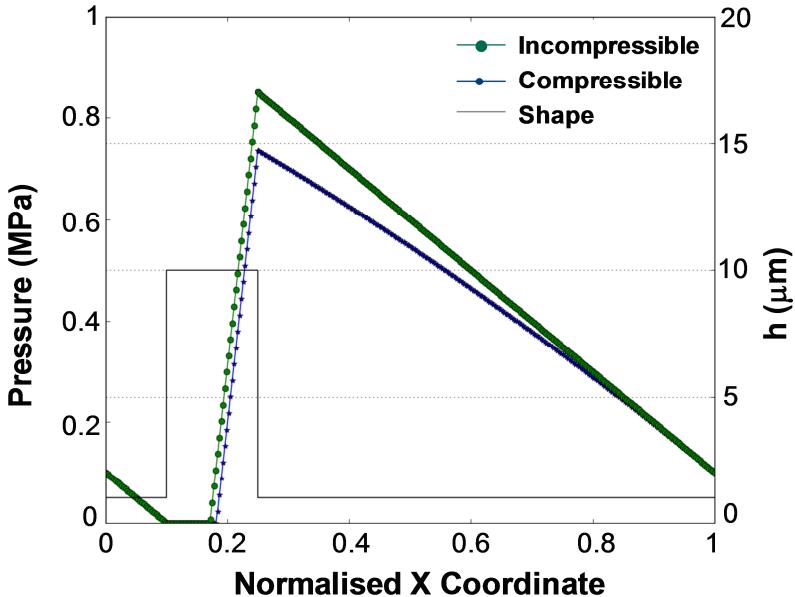
**Figure 1.** Two-dimensional analysis of a cavitating pocketed bearing in hydrodynamic lubrication: (a) pressure distribution; (b) void fraction.

The first example shows the extension of the results reported in [1] for a one-dimensional pocketed bearing to a two-dimensional pocketed bearing. In this first case the fluid has been still considered as incompressible. The test configuration is characterised by the following parameters: pocket depth,  $h_{\max}=5 \mu\text{m}$ ; minimum film height,  $h_{\text{outlet}}=1 \mu\text{m}$ ; bearing size,  $B$  (20 mm) x  $L$  (10 mm); viscosity,  $\mu = 0.01 \text{ Pa s}$ ; cavitation pressure,  $p_c=0 \text{ Pa}$ ;  $U=1 \text{ m/s}$ ; convergence of the bearing profile,  $K = (h_{\text{inlet}} - h_{\text{outlet}})/h_{\text{outlet}} = 0.0873$ .

Figure (1a) and Figure (1b) show the pressure distribution and the void fraction,  $r$ , everywhere within the bearing domain. The cavitated region is adequately captured and the results have been successfully validated against a traditional Finite Difference algorithm similar to the one presented in [13].

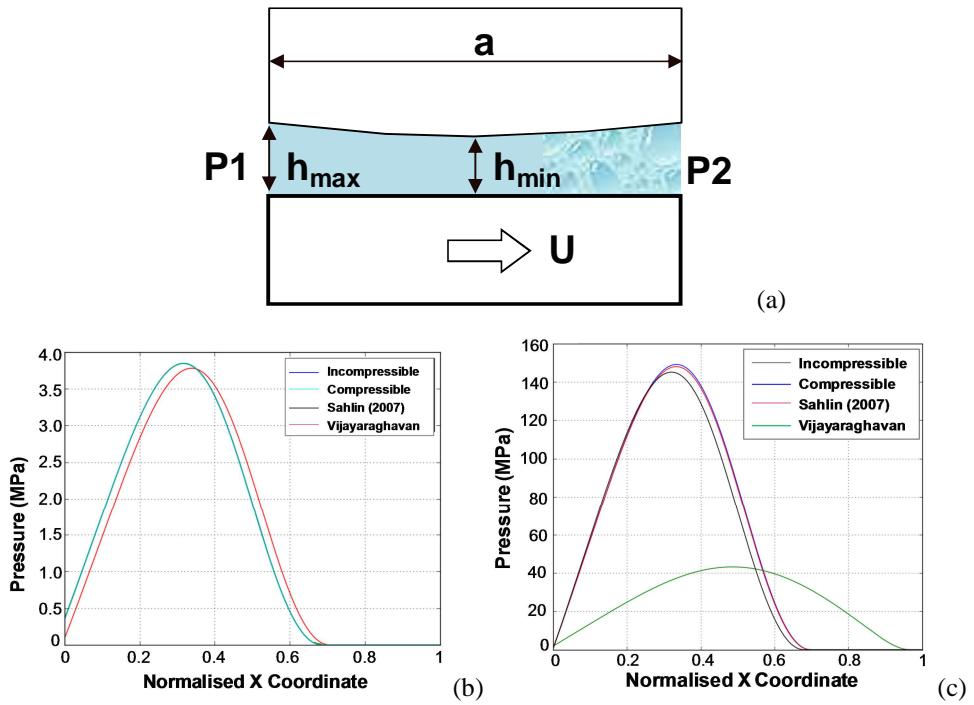
The second test case looks at the effect of compressibility on the solution of a pure sliding motion problem of a textured bearing characterised by a single pocket. The parameters of the problem are the same as those used for Case 1 of Tab. (2) in [1]. Figure (2) shows that compressibility alters both the points where reformation occurs and the pressure peak.

The third example case is chosen to test the capabilities of the proposed algorithm versus other existing formulations [6, 7]. For this purpose, the test case proposed by Sahlin et al. [7], which deals with a parabolic slider, has been reproduced using the algorithm favoured in the present paper. For the sake of completeness, results are also compared with the constant bulk modulus formulation proposed in [6] and with the incompressible case.



**Figure 2.** Profile of the textured bearing studied in Case 1 of Tab. (2) in [1]. The pressure profiles obtained using both the compressible and incompressible fluid flow solvers are reported.

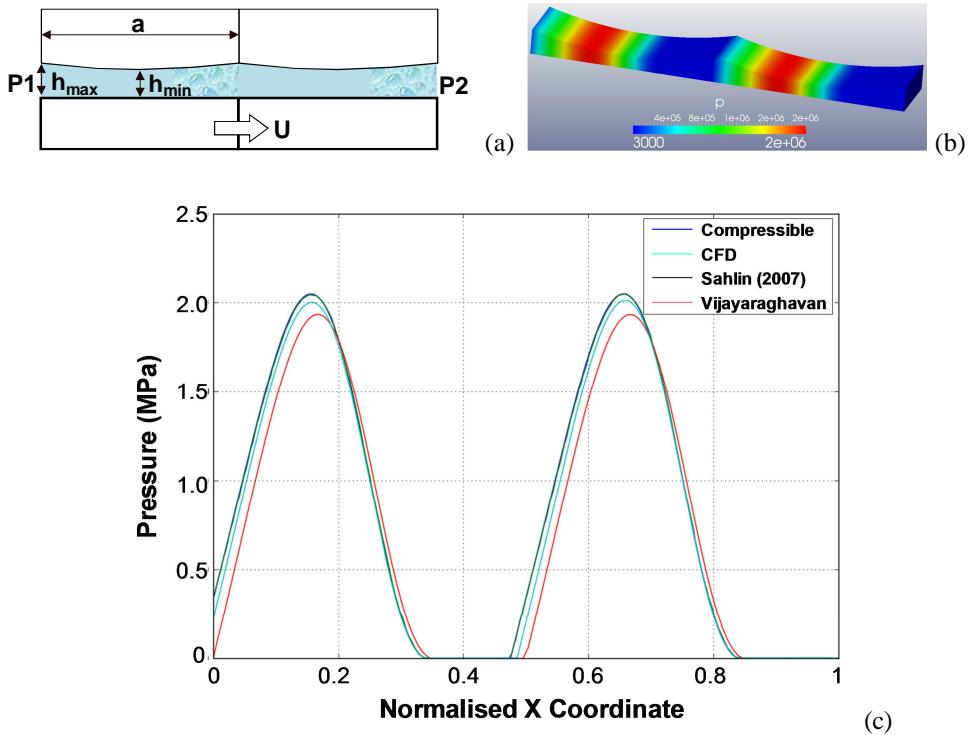
The geometry of the slider is schematically described in Fig. (3a). The parameters governing the problem are: bearing length,  $a=0.0762$  m;  $h_{\min}=25.4$   $\mu\text{m}$ ;  $h_{\max}=50.2$   $\mu\text{m}$ ;  $U=4.57$  m/s;  $P_1=3.36414 \cdot 10^5$  Pa;  $P_2=0$  Pa;  $\beta=6.9 \cdot 10^7$  Pa;  $\mu=0.039$  Pa s.  $\beta$  is the constant bulk modulus assumed by Vijayaraghavan and Keith in [6]. The first comparison reported in Fig. (3b) confirms the results obtained using the proposed algorithm are in good agreement with those obtained by Sahlin et al. in [7], but also it shows that, for this specific test configuration, the effect of compressibility is very limited and the compressible and incompressible solvers provide a similar solution. While this example furnishes a benchmark for validation, the authors deemed the test case not to be sufficient to show the effectiveness of the developed algorithm in capturing the consequences of fluid compressibility on the bearing response. It was therefore decided to test the solver against more challenging conditions; the minimum and maximum film thickness were decreased and set to  $h_{\min} = 4$   $\mu\text{m}$ ;  $h_{\max} = 8$   $\mu\text{m}$  respectively. As expected, the pressure value increases along the whole bearing surface, making the effect of compressibility more prominent (see Fig. (3c)). Again, the algorithm developed by the authors matches the results obtained using the methodology proposed by Sahlin et al. [7]. Furthermore, this example accentuates the drawbacks of compressibility formulation based on constant bulk modulus [6].



**Figure 3.** (a) Schematic of the problem; (b) comparison between the proposed algorithm and the results obtained using the methodologies proposed in [6, 7] at low pressure; (c) comparison between the proposed algorithm and the results obtained using the methodologies proposed in [6, 7] at high pressure.

The final test case is the twin parabolic slider proposed by Sahlin et al. in [7]. A schematic representation of the problem under investigation is reported in Fig. (4a) and the main geometrical and physical parameters are the same as those used for the previous example problem. The results obtained with the proposed algorithm are compared with both a full CFD analysis performed using OpenFOAM [19] and, again, with the methodology developed in [6] and [7]. The cavitation model used in the CFD package is the Isobaric Cavitation Model (ICM) implemented and tested in [20]. Fig. (4b) shows the pressure distribution within the two-dimensional domain analysed using the CFD solver.

Figure (4c) shows the results in terms of pressure distribution obtained using the proposed approach, the formulations in [6] and in [7], and the OpenFoam CFD code. A very good agreement was found among the present formulation and the one proposed by Sahlin et al. [7] (peak pressure difference <0.1%) and with the OpenFOAM CFD simulation (peak pressure difference <0.7%). The curve that corresponds to the formulation proposed by Vijayaraghavan and Keith in [6] differs perceptively from the others, both in terms of peak pressure (difference >3.3%) and distribution along the domain of investigation. This, again, confirms the limitation of constant bulk modulus compressibility formulation.



**Figure 4.** (a) Schematic of a twin parabolic slider (same as in [7]); (b) Pressure distribution obtained using a full CFD solver; and (c) comparison between the results obtained using the proposed model, other existing formulations [6, 7], and the CFD solver in terms of contact pressure distribution along the slider.

## 4. CONCLUSIONS

In this paper, the mass-conserving complementarity formulation derived by Giacopini et al. [1] to deal with lubrication problems in the presence of cavitation has been extended to include fluid compressibility. The Finite Element algorithm developed to solve the resulting LCP has been tested and successfully validated by comparison with existing alternative algorithms [7] and full CFD solutions. Examples showing the effectiveness of the numerical algorithm developed by the authors in solving two-dimensional textured bearings have been presented. Extensions of the proposed formulation to include piezoviscosity, shear-thinning, and elasticity have also been carried out following a similar procedure to the one described here. This will constitute the subject of future contributions.

## REFERENCES

- [1] Giacopini, M., Fowell, M.T., Dini, D., and Strozzi, A., 2010. "A Mass-Conserving Complementarity Formulation to Study Lubricant Films in the Presence of Cavitation". *ASME J. Tribol.*, **132**, Paper N.041702.
- [2] Jakobsson, B., and Floberg, L., 1957. "The Finite Journal Bearing Considering Vaporization". *Transactions of Chalmers University of Technology*, Goteborg, Sweden, p. 190.
- [3] Olsson, K. O., 1965. "Cavitation in Dynamically Loaded Bearings". *Transactions of Chalmers University of Technology*, Goteborg, Sweden, p. 308.
- [4] Elrod, H. G., and Adams, M. L., 1974. "A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems". In Proceeding of the First Leeds–Lyon Symposium on Tribology - Cavitation and Related Phenomena in Lubrication, D. Dowson, M. Godet, and C. M. Taylor, eds., Mechanical Engineering, New York, pp. 37–41.
- [5] Elrod, H. G., 1981. "A Cavitation Algorithm". *ASME J. Lubr. Technol.*, **103**(3), pp. 350–354.
- [6] Vijayaraghavan, D., and Keith, T. G. Jr., 1989. "Development and Evaluation of a Cavitation Algorithm". *STLE Tribol. Trans.*, **32**(2), pp. 225–233.
- [7] Sahlin, F., Almqvist, A., Larsson, R., and Glavatskikh, S., 2007. "A cavitation algorithm for arbitrary lubricant compressibility". *Trib. Int.*, **40**, pp. 1294–1300.
- [8] Rohde, S. M., and McAllister, G. T., 1975. "A Variational Formulation for a Class of Free Boundary Problems Arising in Hydrodynamic Lubrication". *Int. J. Eng. Sci.*, **13**(9–10), pp. 841–850.
- [9] Cimatti, G., 1977. "On a Problem of the Theory of Lubrication Governed by a Variational Inequality". *Appl. Math. Optim.*, **3**(2–3), pp. 227–242.
- [10] Kostreva, M., 1984., "Elasto-Hydrodynamic Lubrication: A Non-Linear Complementarity Problem". *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **4**(4), pp. 377–397.
- [11] Oh, K. P., 1984. "The Numerical Solution of Dynamically Loaded Elastohydrodynamic Contact as a Nonlinear Complementarity Problem". *ASME J. Tribol.*, **106**(1), pp. 88–95.
- [12] Harp, S.R., and Salant, R.F., 2001. "An Average Flow Model of Rough Surface Lubrication With Inter-Asperity Cavitation". *ASME J. Tribol.*, **123**(1), pp. 134-143.
- [13] Ausas, R., Jai, M., and Buscaglia, G. C., 2009. "A Mass-Conserving Algorithm for Dynamical Lubrication Problems With Cavitation". *ASME J. Tribol.*, **131**(3), Paper N.031702.
- [14] Dowson D., Higginson G. R., 1966. Elastohydro-dynamic lubrication.

- [15]Ståhl, J., and Jacobson, B. O., 2003. "Compressibility of Lubricants at High Pressures". *STLE Tribol. Trans.*, **46**(4), pp. 592- 599.
- [16]Tuomas, R., Isaksson, O., 2006. "Compressibility of oil/refrigerant lubricants in elasto-hydrodynamic contacts". *ASME J. Tribol.*, **128**(1), pp. 218-220.
- [17]Jacobson, B. O., and Vinet, P., 1987. "A Model for the Influence of Pressure on the Bulk Modulus and the Influence of Temperature on the Solidification Pressure for Liquid Lubricants". *ASME J. Tribol.*, **109**, pp. 709-714.
- [18]Venner, C.H., and Bos, J., 1994. "Effects of lubricant compressibility on the film thickness in EHL line and circular contacts". *Wear*, **173**, pp. 151-165.
- [19]Hartinger, M., Dumont, M.-L., Ioannides, S., Gosman, D., Spikes, H.A., 2008. "CFD Modeling of a Thermal and Shear-Thinning Elastohydrodynamic Line Contact". *ASME J. Tribol.*, **130**, Paper N.041503.
- [20]Hartinger, M., 2008. "CFD Modelling of Elastohydrodynamic Lubrication", PhD thesis, Imperial College London, London, UK.

# PROGETTO OTTIMALE DI CUSCINETTI RADIALI A RULLI CILINDRICI PER LA MASSIMA CAPACITÀ DI CARICO

Eugenio Dragoni

Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,

Università di Modena e Reggio Emilia

E-mail: eugenio.dragoni@unimore.it

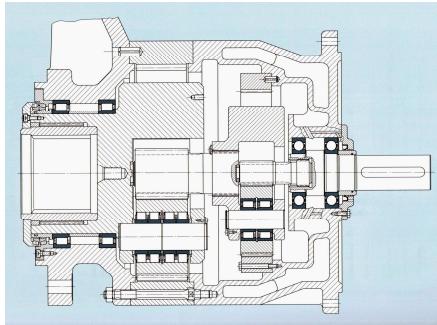
**Sommario.** La costruzione di riduttori e rotismi compatti ed economici può trarre vantaggio dall'adozione di cuscinetti personalizzati con corpi volventi posti direttamente a contatto con gli alberi e gli alloggiamenti. La costruzione personalizzata è conveniente soprattutto per cuscinetti a rulli conici o cilindrici, facili da produrre e dotati di elevata capacità di carico. Partendo dalle formule unificate dei coefficienti di carico statico e dinamico, questo lavoro fornisce semplici regole per proporzionare geometricamente cuscinetti a rulli cilindrici con la massima capacità di carico statica e dinamica compatibile con gli ingombri assegnati. L'algoritmo di ottimizzazione è basato su equazioni algebriche elementari risolvibili con una procedura composta da un numero finito di passi.

**Parole chiave:** cuscinetti volventi, rulli, capacità statica, capacità dinamica, ottimizzazione

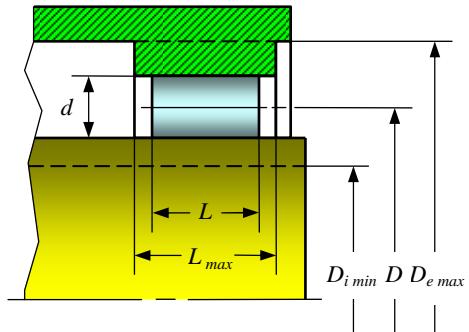
## 1. INTRODUZIONE

I cuscinetti volventi sono componenti meccanici di alto pregio, normalmente prodotti da costruttori specializzati e scelti a catalogo dal progettista. Questa soluzione merceologica ha permesso di ridurre i costi di fabbricazione, favorendo la normalizzazione (intercambiabilità) a fianco di una elevata varietà di prodotto. Situazioni progettuali particolari (cuscinetti di grandi dimensioni, ingombri ristretti) possono richiedere costruzioni speciali, disponibili dai produttori di settore con costi elevati e lunghi tempi di consegna. In questi casi, osservando le dovute cautele, cuscinetti di forma semplice possono essere costruiti autonomamente dall'utilizzatore, con vantaggi sul piano dei tempi e dei costi. Una ricerca industriale condotta recentemente dall'autore per un'azienda di riduttori epicicloidali per macchine movimento terra e da sollevamento ha mostrato la convenienza a progettare e costruire in proprio cuscinetti a rulli cilindrici personalizzati. La Fig. 1 mostra la sezione di un tipico gruppo di riduzione a due stadi epicicloidali con cuscinetti a rulli cilindrici suscettibili di personalizzazione.

A differenza degli organi di macchina convenzionali, per i quali i criteri di ottimizzazione sono da tempo consolidati [1, 2], la categoria dei cuscinetti volventi non ha ricevuto lo stesso grado di attenzione. Forse a causa dell'approccio passivo nella progettazione (scelta a catalogo sopra menzionata), la letteratura presenta pochi lavori sul dimensionamento ottimale dei cuscinetti volventi [3-9]. Tutti i lavori disponibili sono inoltre di tipo metodologico e presentano risultati centrati più sull'algoritmo di soluzione (prime fra tutte le tecniche genetiche) che sugli effetti ingegneristici dell'ottimizzazione.



**Figura 1.** Sezione longitudinale di riduttore epicicloidale (riduzione 1:28) con cuscinetti a rulli cilindrici suscettibili di personalizzazione.



**Figura 2.** Schema del cuscinetto a rulli cilindrici con variabili geometriche di progetto ( $d$ ,  $D$ ,  $L$ ) e vincoli di ingombro ( $D_{i\min}$ ,  $D_{e\max}$ ,  $L_{\max}$ ).

Questo lavoro affronta il progetto ottimale di cuscinetti radiali a rulli cilindrici con l'obiettivo di aumentarne la capacità di carico statica e dinamica (quindi la durata). Variabili di progetto sono le dimensioni macroscopiche del cuscinetto (diametro e lunghezza dei rulli, diametro medio di rotolamento), soggette ai vincoli geometrici imposti dalle condizioni di montaggio (diametro interno, diametro esterno, ingombro assiale). A differenza dei contributi finora apparsi in letteratura, il lavoro fornisce risultati semplici e generali, applicabili ai casi concreti senza bisogno di strumenti di calcolo elaborati. La ricerca rappresenta il primo passo di una serie di studi rivolti all'intera famiglia dei cuscinetti a rulli, cilindrici e conici, per applicazioni radiali, assiali o combinate.

## 2. NORMATIVE ISO

I coefficienti di carico per cuscinetti a rulli cilindrici e conici sono forniti dalle normative ISO 76 [10] (capacità statica) e ISO 281 [11] (capacità dinamica) attraverso formule semiempiriche. Se il cuscinetto è costruito “a regola d’arte” (acciai legati con durezza HRC  $\geq 58$  [12], tolleranze precise) e viene impiegato in condizioni normali (alberi e alloggiamenti rigidi, anello esterno fisso ed interno rotante rispetto al carico, temperatura di lavoro fino a 150°C), i coefficienti di carico statico,  $C_0$  (N), e dinamico,  $C$  (N), del cuscinetto radiale a rulli cilindrici valgono:

$$C_0 = 44(1 - d/D) Z L d \quad (1)$$

$$C = 1.1 f_c L^{7/9} Z^{3/4} d^{29/27} \quad (2)$$

dove  $d$  (mm) è il diametro dei rulli,  $D$  (mm) il diametro interasse dei rulli,  $L$  (mm) la lunghezza assiale dei rulli,  $Z$  il numero dei rulli ed  $f_c$  è un coefficiente funzione del rapporto  $\delta = d/D$  secondo la seguente espressione [12]:

$$f_c = 172.5 \left\{ 1 + \left[ 1.04 \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^{143/108} \right]^{9/2} \right\}^{-2/9} \frac{\delta^{2/9} (1-\delta)^{29/27}}{(1+\delta)^{1/4}} \quad (3)$$

A titolo di esempio, consideriamo il cuscinetto a pieno riempimento INA SL 18 3020 per il quale risulta  $d = 15$  mm,  $D = 124.65$  mm (quindi  $\delta = d/D = 15/124.65 = 0.120$ ),  $L = 22$  mm,  $Z = 25$ . Con questi dati, dalla (3) si ricava  $f_c = 86.30$  e le (1) e (2) forniscono  $C_0 = 319\,440$  N e  $C = 215\,364$  N, in ottimo accordo con i valori del catalogo INA ( $C_0 = 300\,000$  N e  $C = 216\,000$  N). Risultati altrettanto precisi si trovano per i cuscinetti a rulli di tutti i principali costruttori.

In questo lavoro, le equazioni (1)–(3) sono utilizzate per ottimizzare cuscinetti personalizzati in cui  $Z$  rulli di diametro  $d$  e lunghezza  $L$  sono collocati su una circonferenza interasse di diametro  $D$  e rotolano su piste di diametro interno  $D_{i\ min}$  e  $D_{e\ max}$  e con ingombro assiale massimo  $L_{max}$ . Il quadro delle variabili geometriche e dei relativi ingombri è rappresentato graficamente in Fig. 2, dove le piste sono ricavate direttamente su albero e alloggiamento. Quando fossero presenti anello interno ed esterno, riportati su albero e alloggiamento, le condizioni di ingombro radiale e assiale indicate in Fig. 2 si riferirebbero ovviamente agli anelli.

### 3. OTTIMIZZAZIONE PER LA MASSIMA CAPACITÀ DI CARICO STATICÀ ( $C_0$ )

Il numero massimo di rulli che il cuscinetto può contenere,  $Z_{max}$ , è dato dal rapporto tra la circonferenza interasse dei rulli,  $\pi D$ , e il diametro  $d$  del singolo rullo:  $Z_{max} = \pi D/d$ . Il numero effettivo di rulli può essere espresso come frazione del numero massimo introducendo il grado di riempimento  $\zeta < 1$  nella seguente funzione:

$$Z = \zeta Z_{max} = \zeta \pi D/d \quad (4)$$

Analogamente, introducendo il rapporto di allungamento  $\lambda$ , la lunghezza  $L$  dei rulli può essere espressa in funzione del diametro  $d$  dei rulli come segue:

$$L = \lambda d \quad (5)$$

Tenendo conto di (4) e (5), la (1) diventa:

$$C_0 = 44 \pi \zeta \lambda d (D - d) \quad (6)$$

Scelto il grado di riempimento  $\zeta$  del cuscinetto e fissato il rapporto di allungamento dei rulli  $\lambda (= L/d)$ , la massimizzazione della capacità di carico statica del cuscinetto ( $C_0$ ) equivale a risolvere il seguente problema di ottimo:

$$\text{Trovare: } d, D \quad (7)$$

$$\text{tali che: } \hat{C}_0 = \frac{C_0}{\zeta \lambda} = 44 \pi d(D-d) \rightarrow \text{MAX} \quad (8)$$

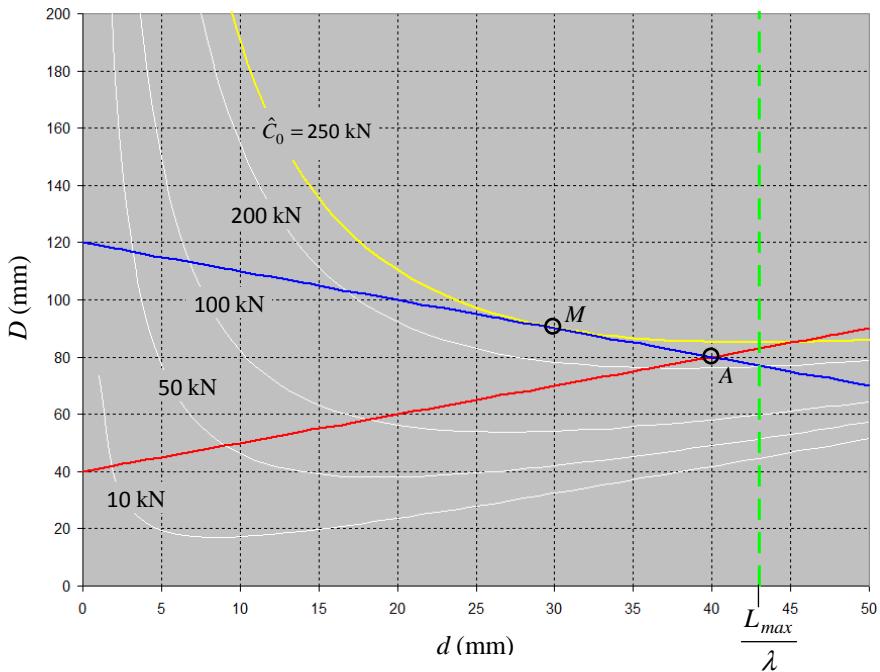
$$\text{con: } D-d \geq D_{i \min} \quad (9)$$

$$D+d \leq D_{e \max} \quad (10)$$

$$\lambda d \leq L_{\max} \quad (11)$$

dove le (9), (10) e (11) esprimono, rispettivamente, il rispetto dell'ingombro radiale interno, dell'ingombro radiale esterno e dell'ingombro assiale (Fig. 2).

Il problema dell'ottimo (7)–(11) è illustrato graficamente in Fig. 3 sul piano di progetto  $d$ – $D$ . Le curve bianche e gialle rappresentano le linee di livello della funzione obiettivo (8). Le rette rossa, blu e verde rappresentano, rispettivamente, le frontiere dei vincoli di ingombro interno (9), esterno (10) e assiale (11) per il caso particolare  $D_{i \min} = 40$  mm e  $D_{e \max} = 120$  mm.



**Figura 3.** Piano di progetto  $d$ ,  $D$  con linee di livello della funzione obiettivo  $\hat{C}_0$  (curve bianche e gialle) e frontiere dei vincoli di ingombro interno (retta rossa), esterno (retta blu) e assiale (retta verde).

Dalla Fig. 3 vediamo che, in assenza di vincolo interno (linea rossa) e di vincolo di larghezza (linea verde), il massimo di  $C_0$  viene a trovarsi sul vincolo esterno (punto  $M$ ). Dalla (10), prendendo il segno di uguaglianza, ricaviamo:

$$D = D_{e \max} - d \quad (12)$$

Sostituendo la (12) nella funzione obiettivo (8), derivando rispetto al diametro  $d$  ed uguagliando a zero, si trova l'ascissa del punto  $M$  (massimo relativo) in Fig. 3:

$$d_M = \frac{D_{e \max}}{4} \quad (13)$$

da cui, vera la (12):

$$d_M = \frac{D}{3} \quad (14)$$

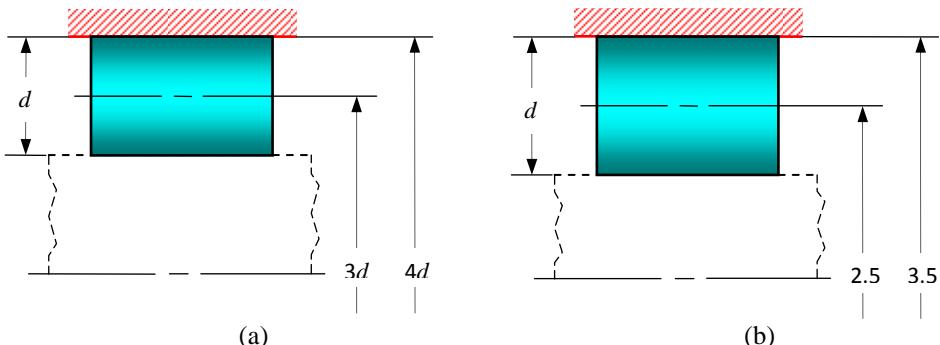
La Fig. 4a mostra il cuscinetto ottimale dal punto di vista statico, con vincolo dimensionale sul solo diametro esterno, corrispondente alle proporzioni (13) e (14).

Mettendo a sistema la (9) e la (10), prese col segno di uguaglianza, otteniamo l'ascissa del punto  $A$  (Fig. 3) all'intersezione dei due vincoli di ingombro radiale:

$$d_A = 0.5(D_{e \max} - D_{i \min}) \quad (15)$$

Infine, dalla (11) ricaviamo il diametro del rullo al limite dell'ingombro assiale:

$$d_L = \frac{L_{\max}}{\lambda} \quad (16)$$



**Figura 4.** Proporzionamenti ottimale per carico statico statico (a) e per carico dinamico (b) di cuscinetto a rulli cilindrici con vincolo dimensionale sul solo diametro esterno.

Il diametro ottimo dei rulli,  $d^*$ , corrisponde al più piccolo dei diametri  $d_M$ ,  $d_A$  e  $d_L$  calcolati con (13), (15) e (16). In termini formali, possiamo scrivere:

$$d^* = \min\{d_M, d_A, d_L\} \quad (17)$$

Il diametro interasse ottimo,  $D^*$ , (sempre corrispondente al vincolo diametrale esterno) e la lunghezza assiale ottima,  $L^*$ , dei rulli si ricavano dalla (12) e dalla (5) ponendo  $d = d^*$ . Infine, la capacità di carico statica del cuscinetto ottimale è data dalla (6) con  $d = d^*$  e  $D = D^*$ .

#### 4. OTTIMIZZAZIONE PER LA MASSIMA CAPACITÀ DI CARICO DINAMICA ( $C$ )

Tenendo conto di (3), (4) e (5), la (2) diventa:

$$C = 447.76 \zeta^{3/4} \lambda^{7/9} \frac{(1-\delta)^{29/27}}{\delta^{19/36} (1+\delta)^{1/4} \left\{ 1 + \left[ 1.04 \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^{143/108} \right]^{9/2} \right\}^{2/9}} d^{50/27} \quad (18)$$

con  $\delta = d/D$ . Scelto il grado di riempimento  $\zeta (< 1)$  del cuscinetto e fissato il rapporto di allungamento dei rulli  $\lambda (= L/d)$ , la massimizzazione della capacità di carico dinamica del cuscinetto ( $C$ ) equivale a risolvere il seguente problema di ottimo:

Trovare:  $d, D, \delta$  (19)

tali che:  $\hat{C} = \frac{C}{\zeta^{3/4} \lambda^{7/9}} =$

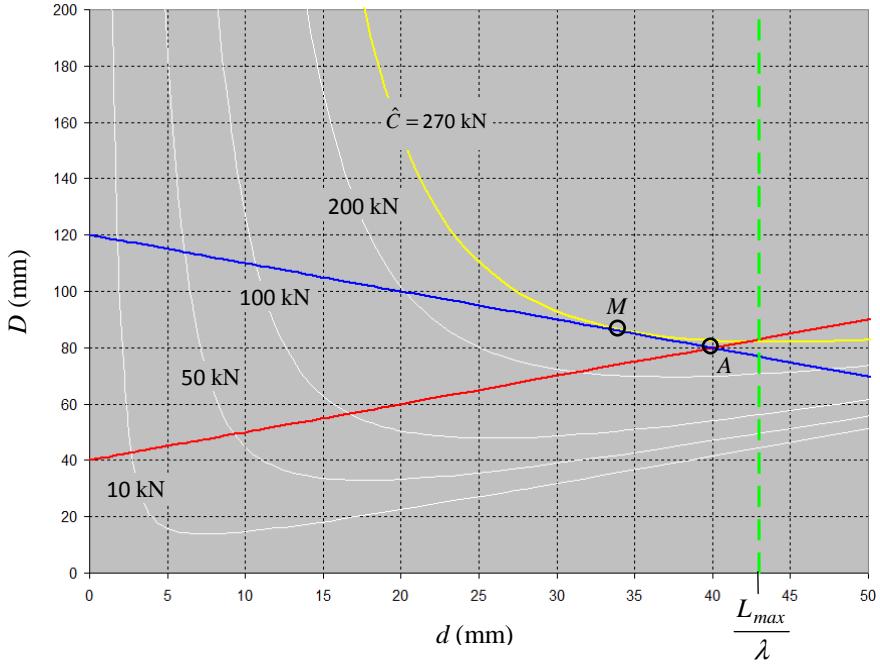
$$= \frac{447.76 (1-\delta)^{29/27}}{\delta^{19/36} (1+\delta)^{1/4} \left\{ 1 + \left[ 1.04 \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^{143/108} \right]^{9/2} \right\}^{2/9}} d^{50/27} \rightarrow \text{MAX} \quad (20)$$

con i vincoli di ingombro radiale e assiale (9), (10) e (11).

Il problema dell'ottimo (19)–(20) con vincoli (9)–(11) è illustrato graficamente in Fig. 5 sul piano di progetto  $d$ – $D$ . Come in precedenza, le curve bianche e gialle rappresentano le linee di livello della funzione obiettivo (19). Le rette rossa, blu e verde rappresentano, rispettivamente, le frontiere dei vincoli di ingombro radiale interno (9), radiale esterno (10) e assiale (11) per il caso particolare  $D_{i\min} = 40$  mm e  $D_{e\max} = 120$  mm.

Dalla Fig. 5 vediamo che, in assenza di vincolo interno (linea rossa) e di vincolo di larghezza (linea verde), il massimo di  $C$  viene a trovarsi sul vincolo esterno (punto  $M$  in Fig. 5). Posto:

$$\varphi = d/D_{e\max} \quad (21)$$



**Figura 5.** Piano di progetto  $d$ ,  $D$  con linee di livello della funzione obiettivo  $\hat{C}$  (curve bianche e gialle) e frontiere dei vincoli di ingombro interno (retta rossa), esterno (retta blu) e assiale (retta verde).

la (12) diventa:

$$D = D_{e \max} (1 - \varphi) \quad (22)$$

In virtù di (21) e (22), il rapporto  $\delta = d/D$  si può scrivere:

$$\delta = \varphi / (1 - \varphi) \quad (23)$$

Con (21) e (23), la funzione obiettivo (20) diventa:

$$\frac{C}{\zeta^{3/4} \lambda^{7/9}} = 447.76 \times D_{e \max}^{50/27} \frac{\varphi^{143/108} (1 - 2\varphi)^{29/27}}{(1 - \varphi)^{8/27} \left\{ 1 + \left[ 1.04 (1 - 2\varphi)^{143/108} \right]^{9/2} \right\}^{2/9}} \quad (24)$$

Fissato  $D_{e \max}$ , si trova numericamente che la (24) presenta un massimo in corrispondenza di  $\varphi_M = 0.287796 \dots$ . Per questo valore di  $\varphi_M$ , dalla (21) ricaviamo  $d_M = \varphi_M D_{e \max} \approx 0.287796 D_{e \max}$ , da cui:

$$d_M = \frac{D_{e\ max}}{3.47468\cdots} \approx \frac{D_{e\ max}}{3.5} \quad (25)$$

In virtù di (12), dalla (25) si ricava:

$$d_M = \frac{D}{2.5} \quad (26)$$

La Fig. 4a mostra il cuscinetto ottimale dal punto di vista dinamico, con vincolo dimensionale sul solo diametro esterno, corrispondente alle proporzioni (25) e (26).

Per il caso di sollecitazione dinamica, le (25) e (26) prendono il posto delle (13) e (14), valide per il caso di sollecitazione statica. Anche in questo caso il diametro ottimo dei rulli,  $d^*$ , corrisponde al minimo (17) tra i diametri  $d_M$ ,  $d_A$  e  $d_L$  calcolati con (25), (15) e (16). Noto  $d^*$ , il diametro interasse ottimo,  $D^*$ , e la lunghezza assiale ottima,  $L^*$ , dei rulli si ricavano dalla (12) e dalla (5) ponendo  $d = d^*$ . La capacità di carico dinamica del cuscinetto ottimale è data dalla (18) con  $d = d^*$ ,  $D = D^*$  e  $\delta = d^*/D^*$ .

## 5. ESEMPIO NUMERICO

Ipotizziamo il caso di cuscinetto formato da rulli cilindrici accolti direttamente da un alloggiamento di diametro  $D_{e\ max} = 220$  mm e da un albero di diametro  $D_{i\ min} = 165$  mm e con ingombro assiale massimo  $L_{max} = 40$  mm. Assumiamo un coefficiente di riempimento  $\zeta = 0.8$  ed un rapporto di allungamento  $\lambda = 1.6$ . Dal punto di vista statico, dalle (13), (15) e (16) ricaviamo, rispettivamente  $d_M = D_{e\ max}/4 = 55$  mm,  $d_A = 0.5(D_{e\ max} - D_{i\ min}) = 27.5$  mm,  $d_L = L_{max}/\lambda = 25$  mm da cui con la (17) calcoliamo  $d^* = \min\{d_M, d_A, d_L\} = \min\{55, 27.5, 25\} = 25$  mm. Da (12) e (5) otteniamo  $D^* = D_{e\ max} - d^* = 195$  mm e  $L^* = \lambda d^* = 40$  mm. La (6) fornisce infine il coefficiente di carico ottimale  $C_0 = 44\pi\zeta\lambda d(D - d) \approx 751\ 972$  N. Procedendo in maniera analoga, il proporzionamento dinamico ottimale porta a questi risultati:  $d_M = 63$  mm,  $d_A = 27.5$  mm,  $d_L = 25$  mm,  $d^* = 25$  mm,  $d^* = 195$  mm,  $L^* = 40$  mm,  $C = 2\ 491\ 116$  N.

## 6. DISCUSSIONE

Dal confronto di Fig. 3 e Fig. 5 vediamo la similitudine qualitativa e quantitativa tra le curve di livello delle funzioni obiettivo  $\hat{C}_0$  (capacità statica) e  $\hat{C}$  (capacità dinamica), nonostante la forte diversità formale tra le corrispondenti espressioni (8) e (20). Entrambi i piani di progetto mostrano che le funzioni obiettivo libere  $\hat{C}_0$  e  $\hat{C}$  non posseggono massimi relativi o assoluti. Questa condizione porta alla naturale conseguenza che, se non ci sono limitazioni alla dimensione del cuscinetto, le capacità di carico statica e dinamica crescono al crescere simultaneo del diametro fisico,  $d$ , dei rulli e del diametro interasse,  $D$ .

Fissato il diametro dei rulli, la capacità di carico aumenta sempre all'aumentare del diametro interasse. Viceversa, fissato il diametro interasse, esiste un valore ottimo del diametro dei rulli che rende massima la capacità di carico. Oltre questo diametro, la diminuita curvatura della pista interna del cuscinetto rende sfavorevole lo stato di tensione al contatto coi rulli.

Quando è presente il vincolo di dimensione esterna (retta blu in Fig. 3 e 5), i diametri ottimali dei rulli sono dati dalle equazioni (13), per la capacità statica, e (25), per la capacità dinamica. Il proporzionamento geometrico cui si perviene nei due casi (Fig. 4) è apprezzabilmente ma non clamorosamente diverso. Usando la (8) e la (20) è facile vedere che, dato il diametro esterno limite, i coefficienti di carico  $\hat{C}_0$  e  $\hat{C}$  cambiano in maniera trascurabile (pochi punti percentuali) se si utilizza per ciascuno di essi il rapporto ottimale valido per l'altro. Partendo dalle geometrie ottimali in Fig. 4 l'aumento del diametro dei rulli porterebbe ad un diminuzione della resistenza del cuscinetto a causa dell'aumento delle tensioni di contatto sull'albero conseguenti alla riduzione del suo raggio di curvatura.

Quando al vincolo diametrale esterno si aggiunge anche il vincolo interno (retta rossa in Fig. 3 e 5) possono verificarsi due situazioni distinte, col punto  $A$  collocato a destra oppure a sinistra del punto  $M$ . Nel primo caso ( $A$  a destra di  $M$ ), il vincolo interno risulta inefficace ed il proporzionamento ottimale corrisponde ancora al punto  $M$  come se il limite diametrale interno non esistesse. Nel secondo caso ( $A$  a sinistra di  $M$ ), i proporzionamenti ideali mostrati in Fig. 4 non sono più possibili e il cuscinetto risulta costituito da rulli col diametro massimo ospitabile tra gli assegnati diametri limite esterno ed interno.

Il vincolo di larghezza diventa critico quando la retta verticale verde in Fig. 3 e 5 passa a sinistra dei punti  $M$  ed  $A$ . In questo caso, il cuscinetto ottimale possiede rulli aderenti al diametro esterno limite e tali da occupare l'intera larghezza disponibile nel rispetto del prescelto rapporto di allungamento  $\lambda$ .

La struttura delle funzioni obiettivo (8) e (20) mostra che, dato un proporzionamento  $d$  e  $D$  del cuscinetto (a cui corrispondono specifici valori di  $\hat{C}_0$  e  $\hat{C}$ ), i coefficienti da carico statico e dinamico effettivi,  $C_0$  e  $C$ , aumentano all'aumentare dei due parametri  $\zeta$  (coefficiente di riempimento) e  $\lambda$  (rapporto di allungamento dei rulli). Nella pratica,  $\zeta$  non può superare l'unità (condizione di pieno riempimento) e  $\lambda$  non può superare il valore 2 a meno di esecuzioni estremamente precise che mantengano distribuzioni uniformi di carico lungo l'asse dei rulli (come riferimento, i cuscinetti commerciali radiali a rulli posseggono valori di  $\lambda$  compresi tra 1 e 1.6 [13]).

## 7. CONCLUSIONI

Cuscinetti personalizzati formati da corpi volventi posti a diretto contatto con gli alberi e gli alloggiamenti sono una soluzione spesso adottata dai produttori di trasmissioni meccaniche per ridurre ingombri, costi e tempi di consegna. Se i corpi volventi e le piste sono ricavati da acciaio legato di buona qualità (durezza HRC  $\geq 58$ ), se sono eseguiti con tolleranze precise e se gli alberi e gli alloggiamenti sono sufficientemente rigidi, le capacità di carico ottenibili sono analoghe a quelle dei cuscinetti commerciali di uguali dimensioni interne. Partendo dai coefficienti di carico statico e dinamico di normativa (ISO 76 e ISO 281), il lavoro sviluppa una semplice procedura di ottimizzazione geometrica di cuscinetti radiali personalizzati a rulli cilindrici. La procedura porta al dimensionamento del cuscinetto con le massime capacità di carico statica e dinamica compatibili con gli spazi a disposizione. In generale si possono trarre le seguenti conclusioni:

- a parità di dimensioni dei rulli e di diametro interasse, la capacità di carico aumenta monotonicamente all'aumentare del grado di riempimento (riconducibile al numero dei rulli) e del rapporto di allungamento dei rulli (rapporto tra lunghezza e diametro);
- fissati grado di riempimento e rapporto di allungamento, in assenza di vincoli

dimensionali la capacità di carico cresce al crescere simultaneo del diametro dei rulli e del diametro interasse. Dato il diametro dei rulli, la capacità di carico aumenta sempre all'aumentare del diametro interasse. Viceversa, dato il diametro interasse, esiste un valore ottimo del diametro dei rulli che rende massima la capacità di carico.

- se il diametro di rotolamento esterno è limitato, la capacità di carico è massima quando i rulli rotolano sul diametro limite esterno ed hanno diametro pari ad un quarto (resistenza statica) oppure a due settimi (resistenza dinamica) di questo.
- se il diametro di rotolamento interno è limitato inferiormente a valori prossimi al diametro limite esterno, il cuscinetto ottimale è costituito da rulli aventi il massimo diametro ospitabile tra gli assegnati diametri limite esterno ed interno.
- quando il vincolo di larghezza diventa critico, il cuscinetto ottimale possiede rulli a contatto col diametro limite esterno e tali da occupare l'intera larghezza disponibile nel rispetto del prescelto rapporto di allungamento.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Seireg, A., 1972. "A survey of optimisation of mechanical design". *T ASME - J Eng Ind*, **94**(2), pp. 495–599.
- [2] Seireg, A.A., and Rodriguez, J., 1997. *Optimizing the shape of mechanical elements and structures*, CRC Press.
- [3] Kalita, K., Tiwari, R., and Kakoty, S.K., 2002. "Multi-objective optimisation in rolling element bearing system design", *Int. Conf. on Optimisation SIGOPT 2002*, February 17–22, Lambrecht, Germany.
- [4] Chakraborty, I., Vinay, K., Nair, S.B., and Tiwari, R., 2003. "Rolling element bearing design through genetic algorithms", *Eng Optimiz*, **35**(6), pp. 649–659.
- [5] Rao, B.R., and Tiwari, R., 2007. "Optimum design of rolling element bearings using genetic algorithms", *Mech Mach Theory*, **42**(2), pp. 233–250.
- [6] Gupta, S., Tiwari, R., and Nair, S.B., 2007. "Multi-objective design optimisation of rolling bearings using genetic algorithms", *Mech Mach Theory*, **42**(10), pp. 1418–1443.
- [7] Kumar, K.S., Tiwari, R., and Reddy, R.S., 2008. "Development of an optimum design methodology of cylindrical roller bearings using genetic algorithms", *Int J Comp Meth Eng Sci Mech*, **9**(6), pp. 321–341.
- [8] Savsani, V., Rao, R.V., and Vakharia, D.P., 2008. "Multi-objective design optimization of ball bearings using a modified particle swarm optimization technique", *Int J Numer Meth Eng*, **1**(4), pp. 412–433.
- [9] Wei, Y., and Chengzu, R., 2010. "Optimal design of high speed angular contact ball bearing using a multiobjective evolution algorithm", *IEEE Int. Conf. on Computing, Control and Industrial Engineering CCIE 2010*, June 5–6, Wuhan, China.
- [10] ISO 76 - 2006. *Rolling bearings – Static load ratings*.
- [11] ISO 281 - 2007. *Rolling bearings – Dynamic load ratings and rating life*.
- [12] Harris, T.A., 2000. *Rolling Bearing Analysis*, 4<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, New York.
- [13] Niemann, G., 1981. *Maschinenelemente*, Vol. I, Springer, p. 277.

# **REGOLARIZZAZIONE DELLE TENSIONI TORSIONALI IN GIUNZIONI TUBOLARI INCOLLATE A SINGOLA SOVRAPPOSIZIONE CON ADESIVI FUNZIONALIZZATI**

Andrea Spaggiari

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria*

*Università di Modena e Reggio Emilia, Reggio Emilia, Italia*

*E-mail: [andrea.spaggiari@unimore.it](mailto:andrea.spaggiari@unimore.it)*

Eugenio Dragoni

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria*

*Università di Modena e Reggio Emilia, Reggio Emilia, Italia*

*E-mail: [eugenio.dragoni@unimore.it](mailto:eugenio.dragoni@unimore.it)*

Nicola Golinelli

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria*

*Università di Modena e Reggio Emilia, Reggio Emilia, Italia*

*E-mail: [nicola.golinelli@gmail.com](mailto:nicola.golinelli@gmail.com)*

**Sommario.** Il presente lavoro ha come obiettivo la regolarizzazione delle tensioni torsionali in giunzioni tubolari incollate a singola sovrapposizione. Le tensioni negli adesivi sono tipicamente caratterizzate da andamenti disuniformi, a volte singolari, che agiscono come inneschi preferenziali per la propagazione di cricche. Nella recente letteratura scientifica sono presenti particolari adesivi "funzionalizzati" che, grazie a nanorinforzi dispersi al loro interno, possono essere dotati di caratteristiche elastiche non costanti. Attraverso uno studio analitico delle tensioni nello strato adesivo è fornita la soluzione analitica in forma chiusa dell'andamento del modulo elastico tangenziale dell'adesivo in direzione assiale che consente di avere una tensione costante nello strato incollato. La distribuzione del modulo elastico adimensionalizzato è mostrata in funzione delle caratteristiche elasto-geometriche del giunto, sia in termini di rigidezza degli aderendi che in termini di rapporto di forma dello strato incollato.

**Abstract.** The goal of the present paper is the stress regularization in tubular single lap joint under torsion. The adhesive technology offers several advantages in structural applications, such as bonding dissimilar materials, but suffers from severe stress concentrations in the bondline which often act as a trigger for fracture phenomena. In recent technical papers several authors proposed functionally graded adhesives with nanoparticles distributed inside the polymer to increase the overall mechanical properties. In particular the elastic modulus can be strongly enhanced. The analytical procedure developed in this paper shows how the shear modulus must be changed along the bondline to obtain a constant shear stress in the adhesive layer. The axial distribution of the dimensionless shear modulus is given as a function of the elasto-geometrical properties of the joints. Moreover it is shown how the stiffness of the adherends and the aspect ratio of the bondline affect the optimal shear modulus distribution.

**Parole Chiave:** giunto tubolare incollato, adesivi funzionalizzati, regolarizzazione tensioni.

## 1. INTRODUZIONE

Il crescente impiego dei giunti incollati per applicazioni strutturali è stato accompagnato dallo sviluppo di modelli analitici e numerici per analizzarne o prevederne la risposta meccanica. In letteratura è noto il problema delle concentrazioni di tensioni nello strato incollato, in particolare agli estremi. A partire dai modelli più semplici di giunto a singola sovrapposizione, sia piano [1] che tubolare [2], è possibile riscontrare che le tensioni tangenziali nell'adesivo hanno dei picchi alle estremità o anche delle vere e proprie singolarità che spesso fungono da innesco per fenomeni di frattura nell'adesivo. Eliminare le concentrazioni di tensioni dalle giunzioni incollate è molto complesso a causa della differenza di modulo elastico tra le parti e della sfavorevole condizione geometrica. In letteratura si trovano approcci alla regolarizzazione [3], utili in campo di caratterizzazione delle proprietà intrinseche del materiale ma di difficile applicazione in campo industriale. Il recente sviluppo delle nanotecnologie applicate alla funzionalizzazione degli adesivi può portare a forti miglioramenti delle prestazioni dei giunti incollati [4].

I nanorinforzi, se uniformemente distribuiti nell'adesivo, riescono a migliorarne le prestazioni in termini di rigidezza e resistenza anche con frazioni volumetriche molto contenute (1-5%) [5-6]. Inoltre è possibile modificare i nanorinforzi al fine di fornire allo strato adesivo proprietà funzionali come l'autoriparazione delle cricche. Esistono rinforzi a nanoparticelle sferiche che rompendosi all'avanzare della cricca rilasciano composti chimici attivi che permettono una parziale ricostituzione dello strato adesivo [7]. E' anche possibile funzionalizzare l'adesivo tramite nanorinforzi tradizionali distribuiti in maniera non uniforme nello strato incollato. Ciò in teoria può portare ad ottenere un modulo elastico variabile con continuità nello strato incollato, il che comporta sicuri benefici dal punto di vista della distribuzione delle tensioni.

L'obiettivo del lavoro è fornire una dimostrazione del vantaggio in termini di regolarizzazione delle tensioni di un modulo elastico variabile con continuità lungo la linea di incollaggio. Tramite una trattazione analitica si intende ricavare la distribuzione ideale del modulo elastico che porterebbe ad una tensione idealmente costante nello strato adesivo. Il lavoro è sviluppato considerando un giunto incollato tubolare a semplice sovrapposizione sottoposto a torsione, dove non sono presenti tensioni di pelatura e effetti Poisson. La distribuzione delle tensioni tangenziali, altrimenti disuniforme a causa delle differenze di rigidezza delle varie parti, è regolarizzata grazie all'introduzione di un modulo tangenziale variabile, considerando lo strato di adesivo di piccolo spessore ed assumendo costanti le tensioni tangenziali al suo interno. La distribuzione del modulo elastico, opportunamente adimensionalizzato, è mostrata in funzione delle caratteristiche elasto-geometriche del giunto, sia intermini di rigidezza relativa degli aderendi, sia in termini di rapporto di forma (rapporto lunghezza su spessore) dello strato incollato. Il modello analitico sviluppato è anche applicabile in caso di puro sforzo normale, sotto l'ipotesi semplificativa di aderendi flessionalmente rigidi e assenza di contrazione trasversali dovute a effetto Poisson.

## 2. METODO

Il presente lavoro analizza una geometria di incollaggio comunemente utilizzata nella pratica, un sistema tubolare sottoposto a torsione pura, mostrato in Fig. 1.

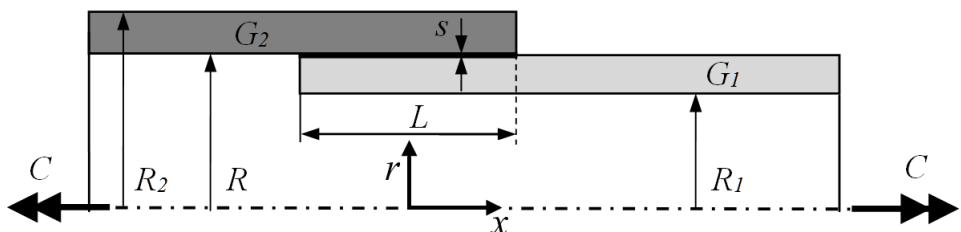
Il sistema è modellato analiticamente al fine di ottenere una tensione tangenziale costante lungo la sovrapposizione, nell'ipotesi che lo spessore di adesivo ( $s$ ) sia trascurabile e che quindi la tensione non vari radialmente. Gli aderendi sono considerati perfettamente elastici con modulo tangenziale  $G_1$  e  $G_2$  e incollati per una lunghezza di sovrapposizione  $L$ .

Analizzando una porzione elementare di giunto incollato (Fig. 2a) è possibile osservare cosa accade quando il concio elementare di giunto incollato è sottoposto a momento torcente (Fig. 2b). Considerando due sezioni adiacenti di giunto incollato, spostandosi lungo l'asse dei tubi si ha una differente scorrimento angolare relativo.

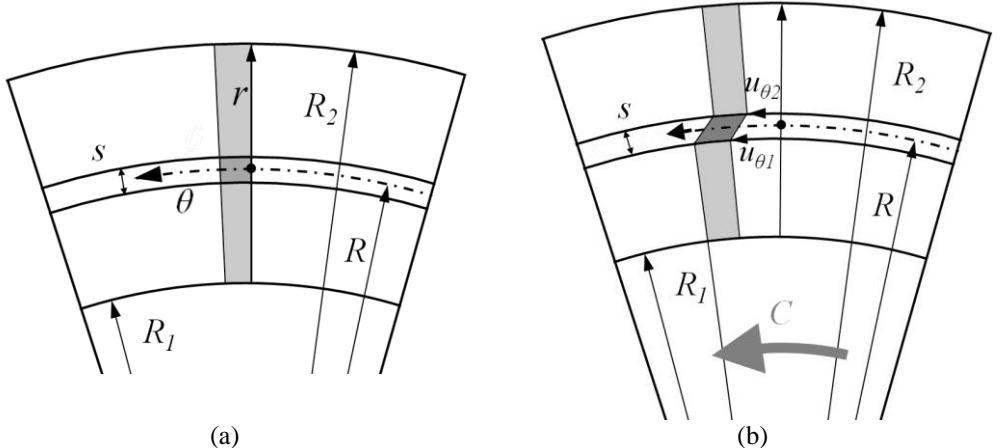
Lo stato di tensione nella zona incollata cresce all'aumentare della differenza di spostamento circonferenziale. Ciò dà luogo ai tipici picchi di tensione tangenziale alle estremità dell'area incollata, ove un aderendo è sostanzialmente indeformato mentre l'altro raggiunge il massimo scorrimento angolare. La tensione che nasce nello strato incollato è quindi funzione degli spostamenti circonferenziali:

$$\tau(x) = G(x) \cdot \frac{u_{\theta 1} - u_{\theta 2}}{s} \quad (1)$$

dove  $u_{\theta 1}$  è lo spostamento circonferenziale dell'aderendo interno di modulo elastico  $G_1$  al raggio massimo;  $u_{\theta 2}$  è lo spostamento circonferenziale dell'aderendo esterno di modulo elastico  $G_2$  al raggio interno. Poichè lo spessore dell'adesivo è molto piccolo, il raggio massimo dell'aderendo interno e il raggio minimo dell'aderendo esterno possono essere approssimati con il raggio medio dello strato incollato,  $R$ . La tensione nello strato incollato varia lungo la coordinata assiale  $x$ , mostrata in Fig. 1, normale al piano del disegno in Fig. 2, secondo la rigidezza delle parti.



**Figura 1.** Sezione del giunto tubolare considerato nell'analisi tensionale



**Figura 2.** Configurazione di riferimento per le gli spostamenti circonferenziali (a) e configurazione deformata (b) in una sezione assiale del giunto tubolare sotto l'azione della coppia torcente  $C$ .

Lo scopo è ottenere una tensione costante nell'adesivo modificando opportunamente il modulo elastico in direzione assiale e trovandone la distribuzione assiale in forma chiusa. Per equilibrio si impone che la tensione tangenziale sia uguale al valore medio  $\tau_m$  che si avrebbe nello strato adesivo in condizioni di aderenti perfettamente rigidi.

$$\tau_m = \frac{C}{2\pi R^2 L} \quad (2)$$

Imponendo che la tensione nell'adesivo sia costante, pari a  $\tau_m$ , e isolando le quantità costanti a primo membro si ottiene:

$$s \cdot \tau_m = G(x) \cdot (u_{\theta 1} - u_{\theta 2}) \quad (3)$$

Derivando la (3) rispetto alla coordinata assiale  $x$  il primo membro si annulla, mentre la derivata lungo  $x$  degli spostamenti in direzione circonferenziale fornisce gli scorrimenti angolari in direzione assiale corrispondenti:

$$0 = \frac{dG(x)}{dx} (u_{\theta 1} - u_{\theta 2}) + G(x) (\gamma_1 - \gamma_2) \quad (4)$$

Dalla (3) si ricava la differenza degli spostamenti e, sostituendola nella (4), si ha, considerando che gli scorrimenti angolari sono per definizione  $\tau/G$ .

$$0 = \frac{dG(x)}{dx} \frac{s \cdot \tau_m}{G(x)} + G(x) \left( \frac{\tau_1}{G_1} - \frac{\tau_2}{G_2} \right) \quad (5)$$

La coppia torcente esterna è l'integrale assiale della coppia distribuita dalla tensione tangenziale nell'adesivo, imposta costante e pari a  $\tau_m$ . Quindi la variazione di coppia  $C$  nell'aderendo varia linearmente in senso assiale. Imponendo che la coppia vari in entrambi gli aderendo tra zero e il carico esterno  $C$  si ottengono le espressioni della tensione tangenziale al raggio massimo dell'aderendo interno,  $\tau_1$  e la tensione tangenziale al raggio minimo dell'aderendo esterno,  $\tau_2$ . La ascissa assiale ha l'origine nel centro dello strato incollato ed è quindi compresa tra  $\pm L/2$ :

$$\tau_1 = \frac{R}{J_{o1}} \left( \frac{C}{L} x + \frac{C}{2} \right) \quad (6)$$

$$\tau_2 = \frac{R}{J_{o2}} \left( -\frac{C}{L} x + \frac{C}{2} \right) \quad (7)$$

dove  $J_{o1}$  e  $J_{o2}$  sono i momenti polari di inerzia dell'aderendo 1 e 2 rispettivamente.

Sostituendo la (6) e (7) nella (5) si ha:

$$0 = \frac{dG(x)}{dx} \frac{s \cdot \tau_m}{G(x)} + G(x) \cdot \left[ \frac{\left( \frac{C}{L} x + \frac{C}{2} \right)}{G_1 \cdot \frac{J_{o1}}{R}} - \frac{\left( -\frac{C}{L} x + \frac{C}{2} \right)}{G_2 \cdot \frac{J_{o2}}{R}} \right] \quad (8)$$

Separando le variabile e sviluppando i calcoli si ha:

$$-\frac{dG(x)}{dx} \frac{1}{G^2(x)} = \frac{C}{s \cdot \tau_m} \left[ \frac{\left( G_1 \cdot J_{o1} + G_2 \cdot J_{o2} \right) \cdot \frac{x}{L} + \left( G_2 \cdot J_{o2} - G_1 \cdot J_{o1} \right) \cdot \frac{1}{2}}{\frac{G_2 \cdot J_{o2} \cdot G_1 \cdot J_{o1}}{R}} \right] dx \quad (9)$$

Al fine di agevolare la manipolazione è possibile evidenziare due gruppi che contengono la rigidezza torsionale del generico aderendo:

$$k_i = \frac{G_i \cdot J_{oi}}{R \cdot L} \quad (10)$$

Inserendo la (10) nella (9) si ottiene il legame differenziale tra la variazione di modulo elastico e i parametri geometrici.

$$-\frac{dG(x)}{G^2(x)} = \frac{C}{2\tau_m s} \left( \frac{(k_1 + k_2)}{k_2 k_1} \frac{2x}{L^2} + \frac{(k_2 - k_1)}{k_2 k_1} \frac{1}{L} \right) dx \quad (11)$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$-\frac{-1}{G(x)} = \frac{C}{2\tau_m s} \left( \frac{(k_1 + k_2)}{k_2 k_1} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{(k_2 - k_1)}{k_2 k_1} \frac{x}{L} \right) + c \quad (12)$$

dove la costante di integrazione è da calcolarsi a seconda delle condizioni al contorno imposte. Al fine di ottenere una normalizzazione del modulo elastico nell'adesivo, è possibile imporre la costante di integrazione in modo che il massimo modulo nell'adesivo sia pari ad un valore arbitrario  $G_{max}$ . Tale valore per esempio potrebbe essere il modulo ottenibile con il massimo tenore di rinforzo nell'adesivo. Sviluppando i calcoli si ottiene l'espressione del modulo tangenziale in funzione della costante di integrazione:

$$G(x) = \frac{1}{\frac{C}{2\tau_m s} \left( \frac{(k_1 + k_2)}{k_2 k_1} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{(k_2 - k_1)}{k_2 k_1} \frac{x}{L} \right) + c} \quad (13)$$

La coordinata assiale ove cade il modulo massimo si ottiene uguagliando a zero la derivata della (13). Al fine di manipolare più agevolmente l'equazione è possibile evidenziare una coordinata adimensionizzata  $y$  e due gruppi elasto-geometrici,  $A$  e  $B$ :

$$-\frac{1}{2} \leq y = \frac{x}{L} \leq +\frac{1}{2} \quad (14)$$

$$A = \frac{C}{2\tau_m s} \frac{(k_1 + k_2)}{k_2 k_1} \quad (15)$$

$$B = \frac{C}{2\tau_m s} \frac{(k_1 - k_2)}{k_2 k_1} \quad (16)$$

Utilizzando le espressioni (14), (15) e (16) nella Eq. (13) e derivando si ha:

$$G'(y) = \frac{-1}{(Ay^2 + By + c)^2} (2Ay + B) = 0 \quad (17)$$

che si annulla per la coordinata adimensionale  $y_0 = -\frac{B}{2A}$ . Imponendo quindi che la (13)

calcolata in  $y_0$  sia uguale a  $G_{max}$  e tenendo conto di (15) e (16) si ottiene il valore corretto della costante di integrazione.

$$c = \frac{1}{G_{max}} + \frac{B^2}{4A} \quad (18)$$

E' quindi possibile scrivere la formula del modulo elastico in coordinata adimensionizzata sostituendo la (14) e la (18) nella Eq. (13).

$$G(y) = \frac{1}{\left( Ay^2 + By + \frac{1}{G_{\max}} + \frac{B^2}{4A} \right)} \quad (19)$$

Dividendo ambo i membri per il  $G_{\max}$  è possibile ottenere una espressione della distribuzione del modulo elastico dell'adesivo normalizzata rispetto al modulo massimo, sempre in coordinata adimensionale.

$$G^* = \frac{G(y)}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + G_{\max} \left( Ay^2 + By + \frac{B^2}{4A} \right)} \quad (20)$$

### **Giunto tubolare incollato in pura trazione**

Il metodo sviluppato per la trattazione del problema in pura torsione può esser applicato per il problema del giunto sottoposto a puro tiro assiale, a patto di non considerare altro che l'effetto del puro taglio sull'adesivo, al pari della prima analisi di Volkersen [8]. La geometria considerata è la medesima riportata in Figura 1 quando al posto delle coppie torcenti si consideri una forza assiale,  $P$ .

Mentre per il giunto in torsione la soluzione è rigorosa, nel caso dello stesso giunto in trazione è necessario fare due assunzioni. La prima è l'assunzione di infinita rigidezza flessionale dei tubi incollati che farebbe nascere tensioni normali a causa del disallineamento tra i profili medi degli aderendi. La seconda assunzione è che il rapporto di Poisson sia nullo, poiché, in caso contrario, la contrazione radiale degli aderendi porta alla nascita di tensioni normali, sia compessive che di pelatura nello strato incollato [2].

La distribuzione del modulo elastico è la medesima espressa dalla Eq. (20), ma è necessario trasformare carichi e rigidezze torsionali nei corrispettivi assiali. Questo si traduce in una modifica delle costanti  $A$ ,  $B$ ,  $k_1$  e  $k_2$  e della tensione tangenziale media  $\tau_m$ .

La generica espressione dei raggruppamenti elasto-geometrici da utilizzare nel caso assiale è indicata dalla lettera  $a$  in apice, come riportato in Tab. 1.

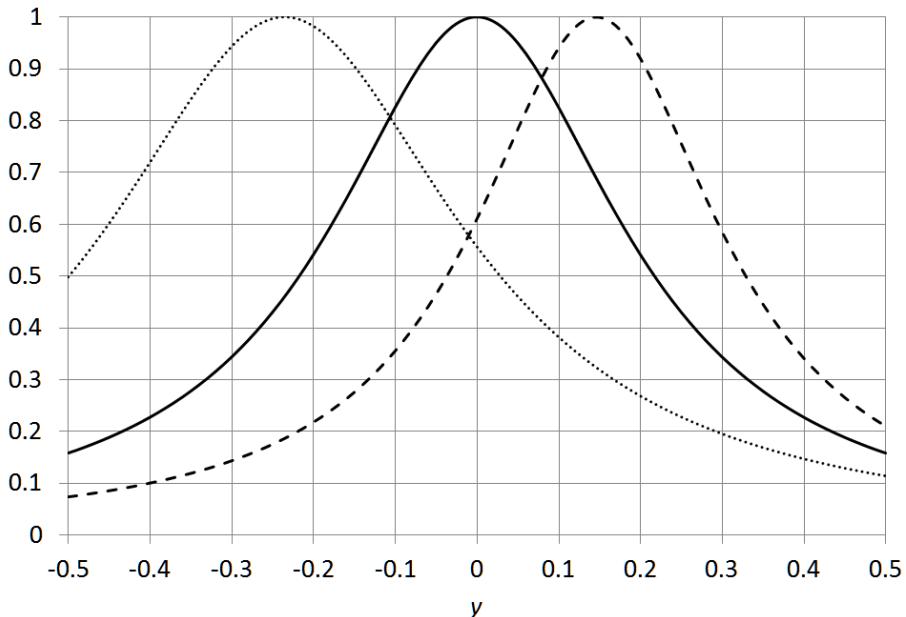
## **3. RISULTATI**

Al fine della presentazione dei risultati non è necessario discriminare tra caso torsionale e caso assiale in quanto è preferibile mostrare le curve in funzione dei coefficienti elasto-geometrici e delle rigidezze, comuni per entrambi i casi.

La Fig. 3 mostra la famiglia di curve di distribuzione del modulo elastico nello strato incollato al variare delle condizioni di rigidezza degli aderendi. Nel caso di rigidezze di aderendi uguali la distribuzione è simmetrica rispetto all'origine dell'ascissa assiale (punto medio della lunghezza di incollaggio). In tutti i casi la normalizzazione fornisce un campo variabile tra 0 e 1 per il modulo elastico.

**Tavella 1.** Corrispondenze formali dei gruppi elasto-geometrici tra caso torsionale ed assiale, sotto l'ipotesi di aderendi flessionalmente rigidi e rapporto di Poisson,  $\nu$ , nullo.

Gruppo elasto-geometrico	Torsione	Trazione
Carico esterno	Coppia torcente, $C$ (N/mm)	Carico assiale, $P$ , (N)
Tensione media applicata	$\tau_m = \frac{C}{2\pi R^2 L}$	$\tau_m^a = \frac{P}{2\pi RL}$
Rigidezza aderendo i-esimo	$k_i = \frac{G_i \cdot J_{oi}}{RL}$	$k_i^a = \frac{E_i \cdot Area}{L}$
<b>A</b>	$A = \frac{C}{2\tau_m s} \frac{(k_1 + k_2)}{k_2 k_1}$	$A^a = \frac{C}{2\tau_m^a s} \frac{(k_1^a + k_2^a)}{k_2^a k_1^a}$
<b>B</b>	$B = \frac{C}{2\tau_m s} \frac{(k_1 - k_2)}{k_2 k_1}$	$B^a = \frac{C}{2\tau_m^a s} \frac{(k_1^a - k_2^a)}{k_2^a k_1^a}$



**Figura 3.** Andamento del modulo normalizzato per diverse rigidezze degli aderendi,  $k_1 < k_2$ , linea punteggiata,  $k_1 = k_2$  linea continua,  $k_1 > k_2$  linea tratteggiata.

Le famiglie di curve mostrate in Fig. 4 rappresentano la distribuzione di modulo elastico nel caso un aderendo sia rigido e dipendono solo dalla rigidezza dell'altro aderendo. L'aderendo interno rigido porta ad avere comunque il modulo massimo all'estremo destro del giunto di Fig. 1, mentre considerando rigido è l'aderendo esterno, il picco è al bordo sinistro della zona incollata. La corrispondente distribuzione analitica è:

$$\left. \frac{G(y)}{G_{\max}} \right|_{k_1 \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + G_{\max} \cdot \frac{C}{2\tau_m s k_2} \left( y^2 + y + \frac{1}{4} \right)} \quad (21)$$

$$\left. \frac{G(y)}{G_{\max}} \right|_{k_2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + G_{\max} \cdot \frac{C}{2\tau_m s k_2} \left( y^2 - y + \frac{1}{4} \right)} \quad (22)$$

Per ottenere informazioni sulla relazione che lega le proprietà geometriche del solo strato incollato, con la distribuzione di modulo ottimale che rende le tensioni uniformi è possibile manipolare l'Eq. (20) combinandola con le espressioni (15), (16).

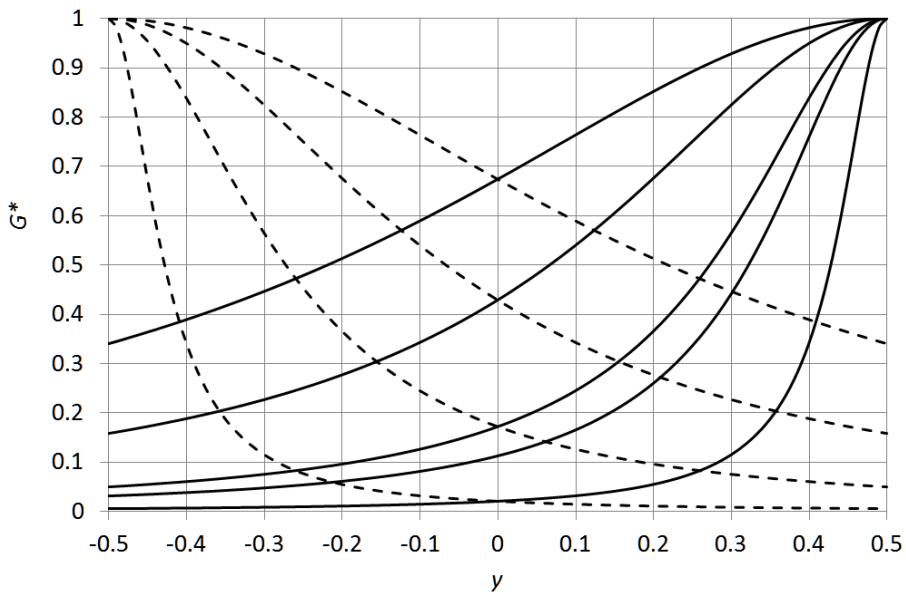
$$G^* = \frac{1}{1 + G_{\max} \cdot \frac{C}{2\tau_m s} \left( \frac{(k_1 - k_2)}{k_2 k_1} y^2 + \frac{(k_1 - k_2)}{k_2 k_1} y + \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_2 k_1 (k_1 + k_2)} \right)} \quad (23)$$

Per avere un legame esplicito tra spessore dello strato adesivo e lunghezza di incollaggio è possibile inserire l'espressione della tensione tangenziale media data dalla (2) nella (23) ottenendo:

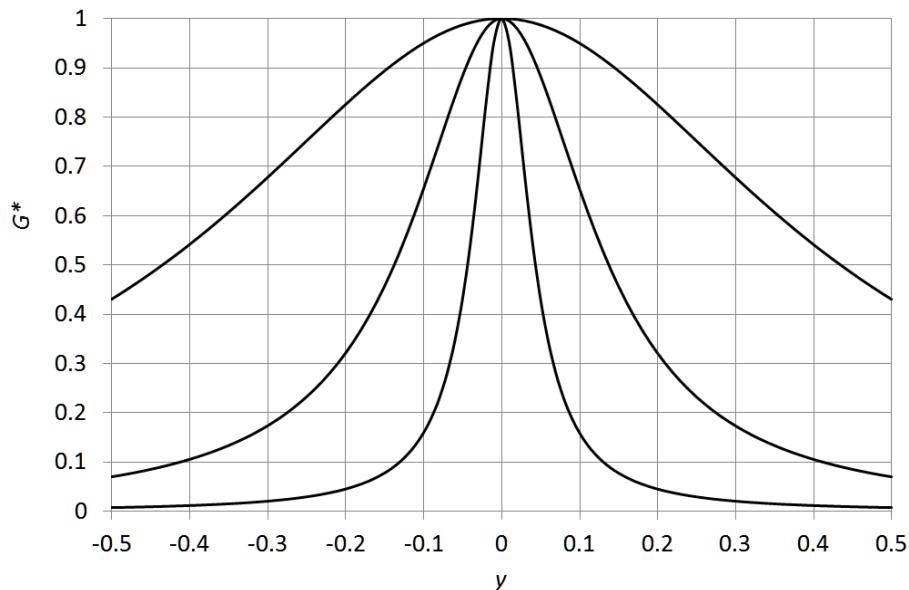
$$G^* = \frac{1}{1 + G_{\max} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{L}{s} \cdot \left( \frac{(k_1 - k_2)}{k_2 k_1} y^2 + \frac{(k_1 - k_2)}{k_2 k_1} y + \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_2 k_1 (k_1 + k_2)} \right)} \quad (24)$$

il cui andamento per alcuni valori tipici del rapporto  $L/s$  è riportato in Fig. 5, per semplicità nel caso di rigidezze degli aderendi uguali.

Dalla Eq. (24) si nota anche che il modello analitico sviluppato, qualora ambedue gli aderendi siano immaginati rigidi, quindi con  $k_1 = k_2 = +\infty$  fornisce come limite  $G_{\max}=1$ , cioè modulo costante lungo lo spessore, in quanto le rotazioni rigide delle sezioni non causano deformazioni assialmente diverse lungo la linea di incollaggio.



**Figura 4.** Andamento del modulo normalizzato per aderendo interno rigido (linea continua) e aderendo esterno rigido (linea tratteggiata), al crescere della rigidezza dell'altro aderendo.



**Figura 5.** Distribuzione del modulo elastico normalizzato in funzione del rapporto  $L/s$  per rigidezze degli aderendi uguali ( $k_1=k_2$ )

## 4. DISCUSSIONE

I risultati di Fig. 3 mostrano come la distribuzione ideale del modulo elastico sia variabile assialmente in funzione della rigidezza dei singoli aderendi. In particolare il picco di modulo normalizzato massimo si sposta verso l'estremo del bordo scarico dell'aderendo più cedevole. Questo comportamento è più evidente quando si analizzano le curve di Fig. 4 nelle quali il picco è esattamente ad un estremo della zona incollata. E' interessante notare come la differenza tra modulo massimo e minimo cresce al crescere della differenza delle rigidezze tra gli aderendi. Questo può fornire una prima indicazione sul dimensionamento di un giunto, cioè che è benefico avere una rigidezza degli aderendi comparabile per diminuire le variazioni di tensione nello strato incollato. Nel caso di aderendi rigidi l'effetto è il medesimo, al crescere della rigidezza dell'aderendo cedevole si ha una minore variazione di modulo elastico normalizzato.

Le curve di distribuzione del modulo elastico normalizzato sono utili anche dal punto di vista progettuale in termini di funzionalizzazione dell'adesivo. Esse forniscono una indicazione sulla frazione di volume di nanorinforzo da aggiungere per ogni sezione assiale del giunto, ammesso che l'effetto di incremento di modulo risulti lineare con la quantità di rinforzo aggiunto.

Le curve di Fig. 5 invece sono focalizzate al dimensionamento dello strato incollato mostrando come il rapporto adimensionale tra lunghezza di incollaggio e spessore sia molto influente sulla distribuzione di modulo elastico. In particolare la condizione più critica si verifica per bassi spessori e incollaggi lunghi ove per smorzare i forti picchi di estremità è necessario avere una variazione di oltre 100 volte il modulo elastico, impossibile da ottenere nella pratica. La situazione già migliora per rapporti più bassi ( $100 < L/s < 10$ ) con variazioni di massime di modulo elastico da 2 a 10 volte circa.

Dal punto di vista applicativo il presente lavoro va nella direzione di indicare al produttore e al progettista quale possa essere una distribuzione ragionevole di modulo elastico per ottimizzare le prestazioni del giunto. Nella realtà non è ancora disponibile una tecnologia sufficientemente avanzata da riuscire a depositare dei nano rinforzi in maniera precisa e continua, ma il costante e veloce sviluppo di questi materiali fa presagire che questi scenari siano non troppo futuribili. In un recente lavoro [9] si trova un'applicazione di giunzione incollata con due diversi adesivi, ad alto modulo all'interno e a basso modulo agli estremi che mostra benefici in termini di resistenza strutturale ad avere cedevolezze delle strati adesivo variabili anche se in maniera discontinua.

## 5. CONCLUSIONI

Il presente lavoro analizza un giunzione tubolare incollata sottoposta a pura torsione e individua una distribuzione assiale di modulo elastico dell'adesivo capace di instaurare uno stato tensionale costante nello strato adesivo. La variazione di modulo è possibile in seguito al recente sviluppo di particolari adesivi "funzionalizzati" che, grazie a nanorinforzi dispersi al loro interno, possono essere dotati di modulo elastico non costante. La distribuzione del modulo elastico è adimensionale rispetto al modulo massimo ottenibile con i nanorinforzi. La distribuzione ottimale del modulo elastico dipende dalla rigidezza degli aderendi. Nel caso di rigidezze uguali il modulo elastico ha il suo massimo al centro dell'incollaggio. Il massimo si sposta verso un'estremità della zona incollata quando uno dei due aderendi è più cedevole. Le distribuzioni di modulo trovate forniscono una stima sulla

distribuzione ottimale dei nanorinforzi all'interno dello strato incollato in senso assiale. Anche il rapporto di forma (lunghezza su spessore) dello strato incollato modifica la distribuzione di modulo elastico. In particolare quando questo rapporto assume valori oltre 50 le differenze di modulo tra punti diversi dello strato incollato sono eccessivi e non ottenibili nella pratica. E' anche possibile sfruttare la trattazione analitica per analizzare giunti tubolari sottoposti a pura trazione, a patto di accettare alcune ipotesi semplificative che escludano effetti flessionali dovuti a contrazioni di Poisson e alla eccentricità del giunto.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Goland M., and Reissner E., 1944. "The stresses in cemented joints", *J. Appl. Mech.* **11**, pp. A17-A27.
- [2] Lubkin J.L., and Reissner, E., 1956. "Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes". *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **78**, pp. 1213-1221.
- [3] Castagnetti, D., Spaggiari, A., and Dragoni, E., 2010. "Robust Shape Optimization of Tubular Butt Joints for Characterizing Thin Adhesive Layers under Uniform Normal and Shear Stresses", *J. Adhes. Sci. Tech.*, **24**, pp. 1959-1976.
- [4] Kumar, S., 2009. "Analysis of tubular adhesive joints with a functionally modulus graded bondline subjected to axial loads", *Int. J. Adhes. Adhes.* **29**, pp. 785-795.
- [5] Hsieh, T.H., Kinloch, A.J., Masania, K., Taylor, A.C., and Sprenger S., 2010. "The mechanisms and mechanics of the toughening of epoxy polymers modified with silica nanoparticle", *Polymers*, **51**, pp. 6284-6294.
- [6] Sancaktar E., and Kuznicki, J., 2011. "Nanocomposite adhesives: Mechanical behavior with nanoclay", *Int. J. Adhes. Adhes.* **31**(5), pp. 286–300.
- [7] Wool, R.P., 2008. "Self-healing materials: a review", *Soft Matter*, **4**, pp. 400–418.
- [8] Volkersen, O., 1938. "Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschritten" *Luftraumforschung* **15**, pp. 41-47.
- [9] Marques, E.A.S., Magalhães, D.N.M., and da Silva, L.F.M. 2011. "Experimental study of silicone-epoxy dual adhesive joints for high temperature aerospace applications", *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.* **42**(5), pp. 471-477.

# **CONFRONTO Sperimentale tra convertitori di energia piezoelettrici multifrequenza: convertitore frattale e convertitore tradizionale**

Davide Castagnetti

*Department of Engineering Sciences and Methods,*

*University of Modena and Reggio Emilia, Italy*

*E-mail: davide.castagnetti@unimore.it*

**Abstract.** Il recupero di energia da vibrazioni ambientali per alimentare sensori è un problema di particolare interesse. Obiettivo del lavoro è confrontare la generazione di potenza di un convertitore piezoelettrico innovativo ispirato ad una geometria frattale rispetto a quella di un convertitore tradizionale a mensole indipendenti. I convertitori, realizzati con materiali commerciali, sono progettati in modo da avere le stesse frequenze di risonanza. Si svolge una campagna sperimentale che esamina l'effetto dell'accelerazione e del carico resistivo applicato ai convertitori, per ciascuna delle tre frequenze proprie tra 0 e 120 Hz. I risultati mostrano un'ottima generazione del convertitore frattale rispetto a quello tradizionale alla prima e terza frequenza di risonanza. Maggiore è invece la potenza generata dal convertitore tradizionale alla seconda frequenza di risonanza.

**Keywords:** energy harvesting, convertitore piezoelettrico, multifrequenza, geometria frattale

## **1. INTRODUZIONE**

Lo studio dei dispositivi che recuperano l'energia dispersa nell'ambiente trasformandola in energia elettrica, si è intensificato negli ultimi anni parallelamente allo sviluppo di reti di sensori wireless. L'energia cinetica ambientale è la fonte più comune poiché è presente in modo diffuso, è facilmente accessibile e si ritrova in forma di vibrazioni con frequenze che prevalentemente variano tra 0 e 100 Hz [1]. E' quindi importante individuare delle semplici strutture capaci, in questo intervallo di frequenze, di convertire efficacemente l'energia cinetica ambientale. Tra le differenti tecnologie di conversione, quella basata sui materiali piezoelettrici è la più promettente per semplicità (la carica elettrica nasce a seguito di una deformazione meccanica) e alta efficienza di conversione [2].

Molti convertitori piezoelettrici proposti in letteratura hanno la struttura di una mensola, che raccoglie energia alla propria frequenza fondamentale [3]-[6]. Questi convertitori subiscono grandi deformazioni ed è semplice sintonizzarli alla frequenza di risonanza desiderata [7]-[9]. Per contro, la loro efficienza è bassa potendo generare solo alla frequenza fondamentale. Dall'assieme di più mensole con differente frequenza fondamentale si ottengono dispositivi multifrequenza [10]-[12]. L'efficienza globale rimane, però, bassa, poiché lavora una sola mensola a ogni specifica frequenza.

Al fine di superare queste limitazioni, in precedenti lavori [13]-[14], l'autore ha proposto e studiato, sia computazionalmente sia sperimentalmente, alcune strutture ispirate a una geometria frattale. Queste strutture presentano molte frequenze proprie sotto i 100 Hz, e un'elevata efficienza di conversione [13].

Obiettivo di questo lavoro è confrontare la potenza elettrica generata dal convertitore piezoelettrico frattale (Figura 1a) con quella di un convertitore piezoelettrico tradizionale (Figura 1b). Il convertitore tradizionale è costituito da più mensole, che realizzano le stesse frequenze proprie del convertitore frattale.

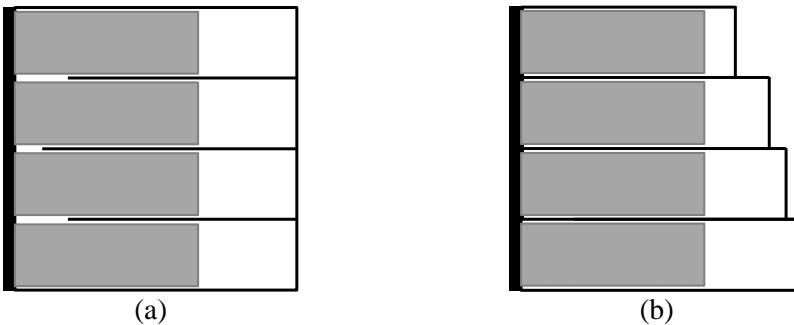
Il lavoro si articola in tre passi. Primo, si progetta il convertitore piezoelettrico frattale secondo la geometria di Figura 1a e si esaminano computazionalmente le sue frequenze di risonanza nell'intervallo tra 0 e 120 Hz. Per rendere più semplice la verifica sperimentale, si sceglie di realizzare un convertitore di dimensioni macroscopiche (forma quadrata, lato 100 mm). L'analisi delle frequenze proprie è svolta mediante il software agli elementi finiti ABAQUS 6.11-2 [15]. Secondo, si progetta un convertitore piezoelettrico tradizionale, ispirato alla geometria di Figura 1b, avente (per l'intervallo tra 0 e 120 Hz) le stesse frequenze di risonanza del convertitore frattale. Terzo, si realizza un prototipo di entrambi i convertitori e si esaminano sperimentalmente le loro frequenze proprie e la potenza generata tra 0 e 120 Hz. Entrambi i convertitori piezoelettrici sono costituiti da una lamina di supporto di acciaio (spessore 0.2 mm) e da lamine di ceramica piezoelettrica (PSI-5H4E [16]). Le prove sperimentali sono svolte mediante uno shaker elettrodinamico e le frequenze proprie dei convertitori rilevate mediante un vibrometro laser. La potenza generata è misurata acquisendo la tensione ai capi di ogni lamina piezoelettrica che è studiata sia in circuito aperto sia soggetta a differenti livelli di carico resistivo. I risultati mostrano un buon accordo tra le frequenze previste numericamente e quelle misurate sperimentalmente. Il convertitore frattale genera una potenza specifica significativamente maggiore di quello tradizionale per due delle tre frequenze esaminate.

## 2. METODO

### Progetto del convertitore piezoelettrico frattale

Figura 2 mostra lo schema dettagliato del convertitore piezoelettrico frattale, ispirato alla geometria di Figura 1a, che è stato precedentemente proposto ed esaminato computazionalmente [13] e sperimentalmente [14]. Il convertitore piezoelettrico è stato ottenuto applicando alla lamina di supporto quattro lamine rettangolari di materiale piezoelettrico (area grigia in Figura 2). La lamina di supporto è stata realizzata con lamiera di acciaio (S235JR) avente spessore 0.2 mm. Le quattro lamine piezoelettriche sono di PSI-5H4E, un materiale commerciale [16] con spessore 0.267 mm. La lamina piezoelettrica è ricoperta sulla faccia superiore e inferiore da uno strato di nichel avente funzione di elettrodo ed a questo sono saldati fili per la connessione elettrica. Le lamine piezoelettriche sono state fissate alla lamina di supporto mediante nastro biadesivo 3M, disponendole vicino alla zona vincolata, ove le deformazioni flessionali della struttura sono maggiori.

Tabella 1 raccoglie le proprietà elettriche e meccaniche delle lamine piezoelettriche impiegate per costruire il prototipo. La lamina di supporto è stata realizzata mediante taglio ad acqua.



**Figura 1.** Schema concettuale di convertitore frattale (a), e di uno tradizionale equivalente (b).

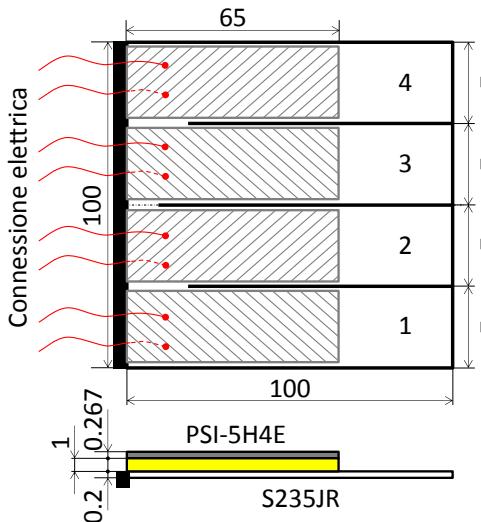
Per determinare le frequenze di risonanza del convertitore frattale si è implementato un modello agli elementi finiti che descrive in modo dettagliato la struttura del prototipo di Figura 2. Le analisi sono state sviluppate con il software commerciale agli elementi finiti ABAQUS [15]. Il modello impiega elementi shell lineari per descrivere la lamina di supporto ed elementi esaedrici per descrivere lo strato di biadesivo e la lamina piezoelettrica. La lunghezza media del lato degli elementi è stata fissata a 0.5 mm. Tutta la struttura è descritta con un legame elastico lineare, impiegando per la lamina di supporto un modulo di Young di 210 GPa ed un coefficiente di Poisson di 0.3. Lo strato di biadesivo è stato descritto con modulo elastico di 10 MPa e coefficiente di Poisson pari a 0.3. Per le lame piezoelettriche si sono impiegate le proprietà elastiche di Tabella 1. Il convertitore è stato vincolato completamente lungo il bordo della lamina di supporto, corrispondentemente a quanto descritto in Figura 2. L'analisi modale è stata svolta tra 0 e 120 Hz su un PC con processore I7 e 12 GB di RAM.

### Progetto del convertitore piezoelettrico tradizionale

Il convertitore tradizionale che è stato confrontato con quello ispirato alla geometria frattale è stato dimensionato in modo da avere lo stesso numero di frequenze proprie e lo stesso ingombro longitudinale. Poiché il convertitore frattale presenta tre frequenze proprie nell'intervallo tra 0 e 120 Hz (vedi Sezione 3), è stato sufficiente realizzare un convertitore costituito di tre lame, vincolate come mensole, ciascuna sintonizzata su una delle 3 frequenze proprie del convertitore frattale. Ai fini di poter svolgere un confronto diretto tra le due versioni, il convertitore tradizionale è stato realizzato in modo identico a quello frattale dal punto di vista della lamina di supporto, del tipo di lame piezoelettriche e del nastro biadesivo di fissaggio.

Affinché ciascuna mensola del convertitore tradizionale abbia frequenza fondamentale coincidente con una delle frequenze proprie del convertitore frattale, è sufficiente calibrarne la lunghezza. In particolare, la frequenza fondamentale del convertitore frattale si ottiene con una mensola avente la stessa lunghezza del convertitore frattale (100 mm). Per determinare, invece, la lunghezza delle mensole che realizza rispettivamente la seconda e la terza frequenza propria si è svolta un'analisi della risposta in frequenza al variare della lunghezza della mensola mediante un modello agli elementi finiti. Il modello agli elementi finiti è stato sviluppato in modo del tutto identico a quello descritto per il convertitore

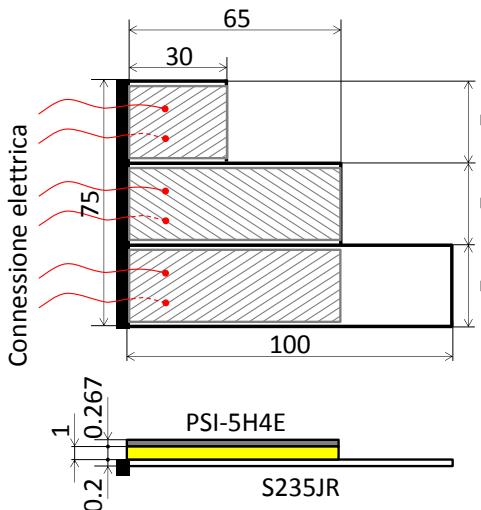
frattale (Sezione precedente). Figura 3 mostra lo schema di dettaglio del convertitore piezoelettrico tradizionale che realizza le specifiche sopra descritte.



**Figura 2.** Schema di dettaglio del prototipo di convertitore piezoelettrico frattale.

**Tabella 1.** Proprietà elettriche e meccaniche della lamina piezoelettrica PSI-5H4E.

Coefficiente di deformazione piezoelettrica, $d_{31}$ (m/V)	$-320 \times 10^{-12}$
Costante dielettrica relativa, $k_3$	3800
Densità di massa, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7800
Modulo di Young, $E$ (GPa)	62
Coefficiente di Poisson, $\nu$	0.3



**Figura 3.** Schema di dettaglio del prototipo di convertitore piezoelettrico tradizionale.

## Campagna sperimentale

Figura 4 mostra un’immagine del prototipo di convertitore frattale. Analogamente Figura 5 mostra un’immagine del prototipo di convertitore tradizionale. Il convertitore tradizionale è costituito di tre lamine, in accordo con quanto ottenuto al passo precedente (Figura 3).

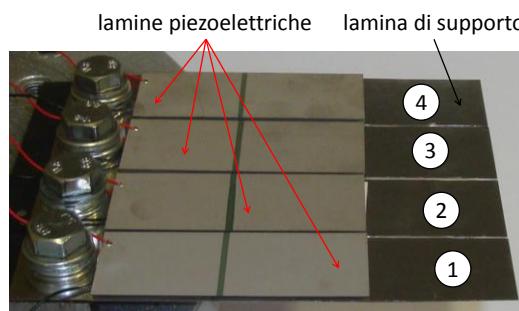
Per entrambi i convertitori si sono misurate sperimentalmente le frequenze proprie nell’intervallo tra 0 e 120 Hz. L’analisi delle frequenze proprie è stata svolta mediante uno shaker elettrodinamico (Data Physics BV400) imponendo al convertitore un’eccitazione sinusoidale la cui frequenza è stata variata nell’intervallo d’interesse. Al fine di realizzare un controllo ad anello chiuso dell’eccitazione imposta dallo shaker elettrodinamico, si è applicato un accelerometro miniaturizzato (MMF KS94B100 [17]) sulla tavola vibrante dello shaker. Lo shaker è stato controllato mediante un controllore Abacus ad 8 canali e l’intero apparato sperimentale gestito dal software Signal Star, installato su un PC che acquisisce i dati.

La risposta in frequenza della struttura è stata esaminata misurando, con un vibrometro laser Doppler a singolo punto, la velocità dell’estremità libera delle lamine. Il vibrometro laser Doppler impiegato è un vibrometro Polytec, dotato di un sensore OFV-505 e gestito da un controllore Polytec OFV-5000. Il sensore laser del vibrometro è stato posizionato in direzione verticale a circa 1 m di distanza dal piano del convertitore e ad una distanza di circa 5 mm dall’estremità libera delle mensole del convertitore. Nella misura della velocità si è impostata la sensitività del controllore del laser a 500 mm/s/V. Anche i dati del vibrometro laser sono stati acquisiti mediante il software Signal Star che controlla lo shaker.

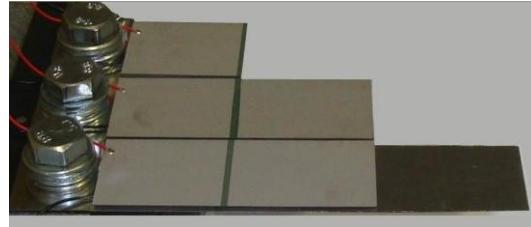
Tabella 2 riepiloga le variabili del piano sperimentale fattoriale svolto sui convertitori per confrontarli dal punto di vista della generazione elettrica. Per ciascuna frequenza propria dei convertitori il piano sperimentale considera due livelli di accelerazione (0.5 g, e 1 g), e quattro livelli di resistenza da un valore molto basso ( $10\text{ k}\Omega$ ), fino ad un valore particolarmente alto (quest’ultimo per simulare una condizione di circuito aperto).

Due sono state le risposte misurate corrispondentemente a ciascuna configurazione sperimentale: la deflessione dell’estremità libera del convertitore e la tensione elettrica generata tra le facce di ciascuna lamina piezoelettrica.

La deflessione dell’estremità libera del convertitore è stata misurata mediante il vibrometro laser Doppler. Il vibrometro è stato impiegato nella stessa configurazione sperimentale adottata nella misura delle frequenze proprie, con l’eccezione del parametro di sensitività, che è stato impostato a 5 mm/V per la misura della deflessione alla prima frequenza propria, ed a 100  $\mu\text{m}/\text{V}$  per la misura della deflessione alle successive frequenze proprie della struttura.



**Figura 4.** Immagine del prototipo di convertitore frattale.



**Figura 5.** Immagine del prototipo di convertitore tradizionale.

**Tabella 2.** Variabili del piano sperimentale fattoriale.

Variabile	Livelli	
	-	+
Accelerazione ( $\text{m/s}^2$ )	4.9	9.81
Resistenza elettrica ( $\text{k}\Omega$ )	10	50
	100	6800

Al fine di misurare la tensione elettrica del convertitore, ciascuna delle lamine piezoelettriche del convertitore oggetto di prova è stata connessa ad un modulo di acquisizione a 16 canali (USB 6251 from National Instruments [18]). Il modulo di acquisizione è stato gestito da un notebook, munito del software Labview SignalExpress [19].

Per studiare con maggior dettaglio l'effetto del carico resistivo applicato sulla potenza elettrica generata da entrambi i convertitori, il piano sperimentale di Tabella 2 è stato integrato di cinque livelli di carico resistivo (4.7  $\text{k}\Omega$ , 27  $\text{k}\Omega$ , 220  $\text{k}\Omega$ , 560  $\text{k}\Omega$ , 1000  $\text{k}\Omega$ ). Questi carichi resistivi sono stati investigati solamente per il livello di accelerazione massima di 0.5g.

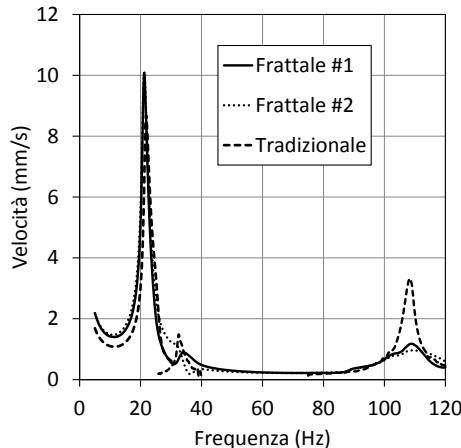
### 3. RISULTATI

Figura 6 mostra la velocità dell'estremità libera dei convertitori in funzione della frequenza di eccitazione, misurata sperimentalmente con il vibrometro laser ad un accelerazione massima dell'eccitazione pari ad 1g. La linea continua e la linea a punti rappresentano rispettivamente le velocità della lamina 1 e 2 (Figura 2) del convertitore frattale. La linea tratteggiata si riferisce, invece, alle singole lamine del convertitore tradizionale.

Figura 7 mostra la previsione computazionale delle prime tre forme modali del convertitore frattale, corrispondenti alle frequenze proprie di Tabella 3 secondo la previsione del modello computazionale.

Tabella 3 riepiloga le tre frequenze proprie del convertitore frattale calcolate computazionalmente e misurate sperimentalmente sul prototipo fisico di Figura 4. nell'intervallo tra 0 Hz e 120 Hz. Inoltre, riporta le frequenze proprie del convertitore tradizionale, misurate sperimentalmente sul prototipo fisico di Figura 5.

Tabella 4 raccoglie i valori della deflessione (in millimetri) dell'estremità libera della prima lamina del convertitore frattale (F) e delle singole lamine del convertitore tradizionale (T) per ciascuna frequenza propria, in funzione sia del livello di accelerazione, sia del carico resistivo applicato.



**Figura 6.** Velocità dell'estremità del convertitore frattale e tradizionale, in funzione della frequenza, per eccitazione pari ad 1g.

Gli istogrammi di Figura 8 confrontano la tensione di picco misurata sperimentalmente sulla lamina 1 (Figura 2) del convertitore frattale (F, colonne grigie) e dalla singola lamina del convertitore tradizionale (T, colonne bianche) per ciascuna frequenza propria. Le Figure 8a-d si riferiscono al livello di accelerazione dell'eccitazione pari a 0.5g, Figure 8e-h sono relative, invece, ad accelerazione pari a 1g.

Figura 9 mostra un confronto tra il convertitore frattale (F, colonne grigie) e quello tradizionale (T, colonne bianche) relativamente alla potenza specifica totale da essi generata al variare della frequenza propria e della resistenza applicata. La prima riga di diagrammi si riferisce ad un'accelerazione pari a 0.5g, la seconda ad un'accelerazione pari a 1g. Per il convertitore frattale la potenza totale è calcolata sommando la potenza elettrica generata dalla lamina 1 a quella generata dalla lamina 2 e, in virtù della simmetria dei modi propri (vedi Figura 7), moltiplicando per due tale valore. Il valore di potenza così ottenuto è stato diviso per un coefficiente pari al rapporto tra l'area totale delle lamine piezoelettriche del convertitore frattale e l'area totale delle lamine piezoelettriche del convertitore tradizionale, per ottenere la potenza specifica totale. La formula impiegata per il calcolo della potenza elettrica sulla singola lamina è la seguente:

$$P = \frac{V_{RMS}^2}{R} \quad (1)$$

dove  $R$  rappresenta la resistenza elettrica applicata e  $V_{RMS}$  rappresenta la tensione elettrica efficacie generata dalla lamina piezoelettrica, ossia:

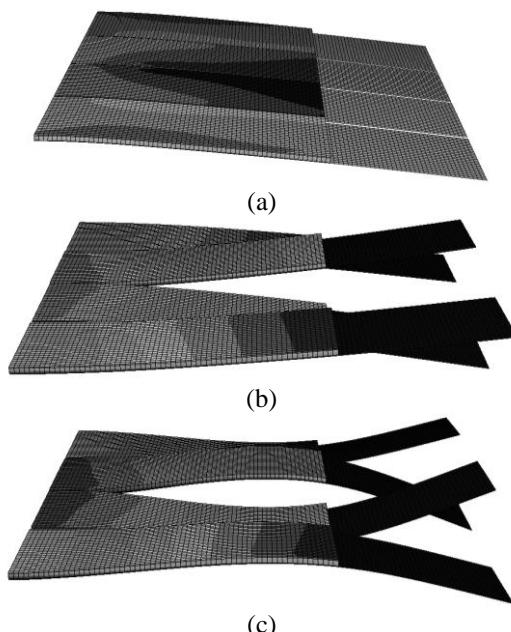
$$V_{RMS} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

dove  $V$  è la tensione di picco. Si precisa che la potenza elettrica generata nel caso di resistenza applicata pari a  $6800 \text{ k}\Omega$  non è stata considerata in quanto, trattandosi di una condizione circa equivalente ad un circuito aperto, è risultata trascurabile.

Figura 10 mostra un confronto tra la potenza specifica totale generata dal convertitore frattale (pallini bianchi) e quella generata dal convertitore tradizionale (triangoli neri) al variare della resistenza applicata alla lamina piezoelettrica. Il confronto è svolto per ciascuna frequenza propria sotto un'eccitazione con accelerazione massima di  $0.5\text{g}$ .

#### 4. DISCUSSIONE

Figura 6 evidenzia che entrambi i convertitori presentano le stesse tre frequenze proprie, corrispondenti ai picchi di velocità misurati sperimentalmente. In particolare, per il convertitore frattale, la prima frequenza propria produce un'identica velocità sulle lame 1 e 2. Questo conferma la forma modale prevista computazionalmente in Figura 7a, un modo che coinvolge l'intero convertitore, come se si trattasse di un'unica mensola. Una minima differenza tra le lame 1 e 2 si osserva, invece, alla seconda e terza frequenza propria, a conferma delle forme modali di Figura 7a, b. L'ottimo accordo tra le frequenze proprie del convertitore frattale e quello tradizionale, testimoniato dalla coincidenza della posizione dei picchi di velocità (Figura 6), conferma la corretta sintonizzazione di quest'ultimo (Figura 3). Un altro aspetto che emerge da Figura 6 è la maggiore velocità delle lame del convertitore tradizionale, rispetto a quelle del convertitore frattale, in corrispondenza della seconda e terza frequenza di risonanza. Questo deriva dal fatto che, per il convertitore tradizionale, ciascuna di queste risonanze corrisponde ad una frequenza fondamentale per la specifica lamina. I valori di dettaglio delle frequenze proprie dei due convertitori, riportati in Tabella 3, sottolineano l'ottimo accordo tra i risultati ottenuti.



**Figura 7.** Previsione computazionale dei primi tre modi propri (a), (b) e (c) del convertitore frattale.

**Tabella 3.** Frequenze proprie del convertitore frattale (Figura 2) e tradizionale (Figura 3) ottenute computazionalmente e sperimentalmente.

Variabile	Frequenze proprie			
	Convertitore frattale		Convertitore tradizionale	
	Computazionale	Sperimentale	Sperimentale	
$f_1$ (Hz)	21.2	21.1	21.1	
$f_2$ (Hz)	30.0	33.8	33.6	
$f_3$ (Hz)	108.5	108.6	108.5	

**Tabella 4.** Deflessione dell'estremità libera della lamina per convertitore frattale ( $F$ ) e tradizionale ( $T$ ) in funzione della frequenza propria e dell'accelerazione.

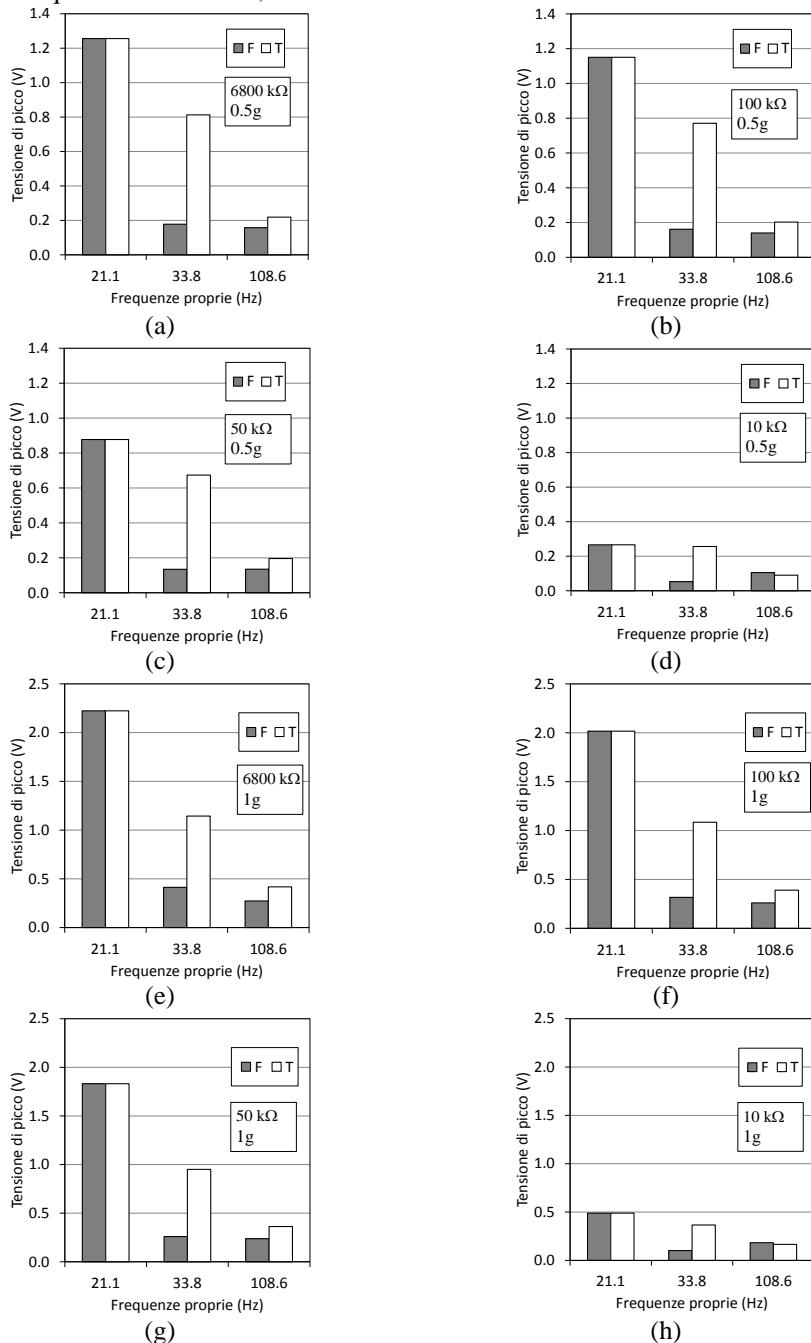
Deflessione (mm)	Frequenza propria											
	21.1 (Hz)				33.8 (Hz)				108.6 (Hz)			
	Accelerazione (m/s <sup>2</sup> )		4.9	9.81	4.9	9.81	4.9	9.81	4.9	9.81	4.9	9.81
Carico resistivo	Convertitore	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
	6800 (kΩ)	5.7	5.7	10.0	10.0	0.3	2.7	0.7	3.7	0.1	0.5	0.2
	100 (kΩ)	5.7	5.7	9.8	9.8	0.3	2.7	0.7	3.7	0.1	0.5	0.2
	50 (kΩ)	5.7	5.7	9.6	9.6	0.3	2.7	0.7	3.7	0.1	0.5	0.3
	10 (kΩ)	5.6	5.6	9.6	9.6	0.3	2.7	0.7	3.7	0.1	0.5	0.2

Le forme modali del convertitore frattale mostrate in Figura 7 evidenziano una simmetria di risposta della struttura. Ciò ha permesso di semplificare la procedura sperimentale, perché è stato sufficiente misurare la risposta di due sole lame (1 e 2).

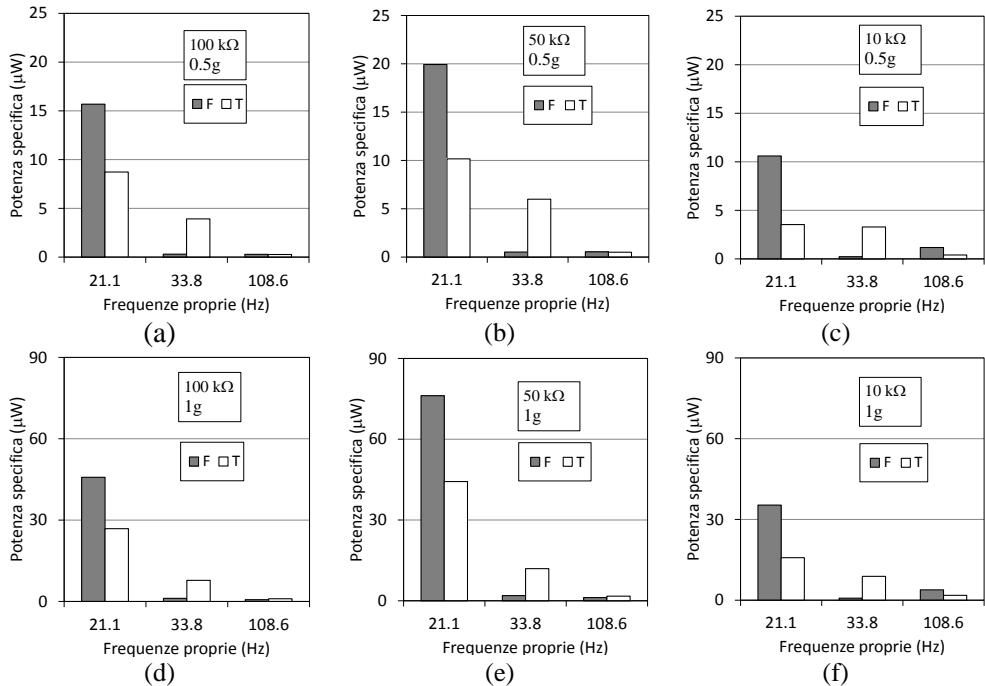
Le deflessioni dell'estremità libera del convertitore (Tabella 4) evidenziano tre aspetti. Primo, alla prima frequenza propria, a parità di accelerazione applicata, entrambi i convertitori hanno la stessa deformazione. Alla seconda e terza frequenza propria, il convertitore frattale raggiunge, invece, valori di deflessione molto più contenuti rispetto a quello tradizionale. Questo dipende dal fatto che il convertitore frattale, a differenza di quello tradizionale, si trova in una forma modale superiore a quella fondamentale, quindi caratterizzata da deformazioni minori. Secondo, la deflessione della lamina ha un andamento leggermente sub-lineare in relazione all'accelerazione massima applicata al sistema. Questo è imputabile ad una modesta non-linearità della rigidezza flessionale del convertitore. Terzo, il carico resistivo applicato al convertitore ha un'influenza trascurabile sulla deformazione raggiunta dalla struttura. La deflessione è, infatti, quasi costante in un intervallo di resistenze molto ampio.

Le tensioni di picco generate dai due convertitori (Figura 8) evidenziano che la tensione di picco dipende in modo quasi lineare dall'accelerazione esercitata sul convertitore. In particolare, al raddoppiare dell'accelerazione la tensione di picco raggiunge valori quasi doppi, dimostrando una corrispondenza diretta con la deflessione della struttura. Al diminuire del carico resistivo applicato si verifica una significativa diminuzione della tensione di picco. Inoltre, la tensione di picco che si origina sul convertitore frattale nel caso della seconda frequenza di risonanza è significativamente inferiore a quella originata dal convertitore tradizionale. Anche alla terza frequenza di risonanza, il convertitore frattale produce una tensione di picco leggermente inferiore a quella del convertitore tradizionale, con l'eccezione della resistenza di 10 kΩ, ove si ha un'inversione di tale andamento. Questo comportamento è imputabile a due effetti concorrenti: da un lato la differente deformazione

delle strutture evidenziata in Tabella 4; dall'altro il fatto che per ciascun convertitore, ad una data frequenza di risonanza, esiste un carico resistivo ottimale.



**Figura 8.** Tensione di picco della lamina #1 del convertitore frattale (in grigio) e della lamina corrispondente del convertitore tradizionale (in bianco).

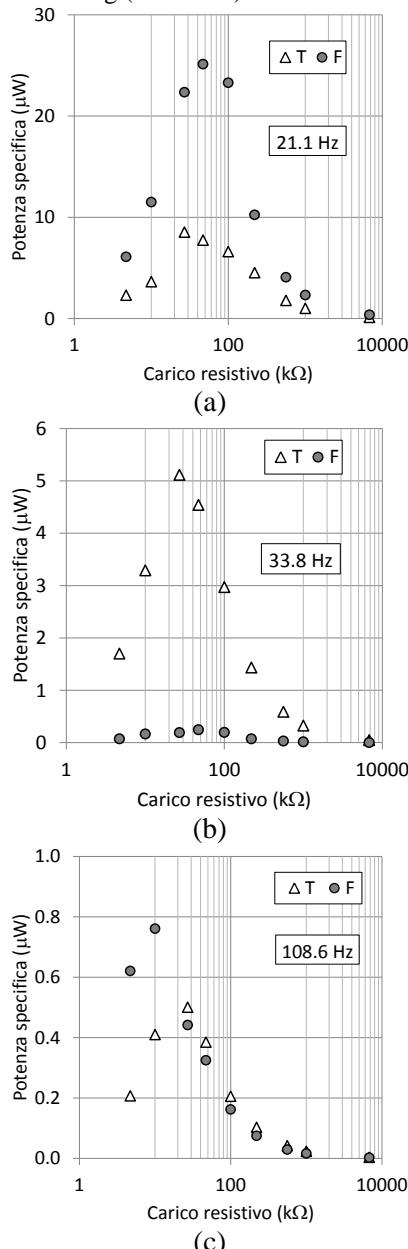


**Figura 9.** Potenza specifica totale generata dal convertitore frattale (in grigio) e dal convertitore tradizionale (in bianco) per accelerazione pari a 0.5g (a, b, c) e per accelerazione pari a 1g (d, e, f)

Il confronto tra la potenza specifica totale generata dai convertitori (Figura 9) mostra che il convertitore frattale genera circa il doppio del convertitore tradizionale nel caso di eccitazione alla frequenza fondamentale. Un risultato simile si ottiene quando i convertitori sono sollecitati alla terza frequenza di risonanza (108.6 Hz), con un carico resistivo applicato di 10 kΩ. Per la tale frequenza di eccitazione, ma differenti livelli di carico resistivo, invece, i due convertitori generano circa la stessa potenza specifica. Il convertitore tradizionale eroga una potenza specifica nettamente superiore a quello frattale quando eccitato dinamicamente alla seconda frequenza di risonanza, indipendentemente dal carico resistivo applicato. Questo risultato è in linea con quanto osservato nei diagrammi di Figura 8 relativamente alla tensione di picco generata.

Dall'andamento della potenza specifica totale in funzione del carico resistivo (Figura 10), emerge chiaramente che, per ciascuna frequenza di risonanza, esiste un carico resistivo ottimale che massimizza la potenza erogata dal generatore piezoelettrico. Questo carico resistivo ottimale diminuisce all'aumentare della frequenza di risonanza, passando da circa 50 kΩ per frequenza di 21.1 Hz, a circa 10 kΩ per frequenza di 108.6 Hz. Questo risultato è in linea con quanto ritrovato da altri autori [20], ed è spiegabile in base al classico modello circuitale equivalente di un generatore piezoelettrico, costituito da un parallelo tra il generatore e la sua capacità interna [6]. I diagrammi di Figura 10 evidenziano chiaramente la maggiore generazione di potenza del convertitore frattale rispetto a quello tradizionale per la prima e la terza frequenza di risonanza. Ciò è imputabile al fatto che nel convertitore

frattale la deformata prodotta dalla forma modale investe l'intera struttura. La minore generazione del convertitore frattale rispetto a quello tradizionale alla seconda frequenza di risonanza è, invece, attribuibile al fatto che la deflessione delle lame del convertitore frattale, in quel caso, è circa nove volte inferiore a quella della lamina del convertitore tradizionale per accelerazione di 0.5g (Tabella 4).



**Figura 10.** Potenza specifica totale generata dal convertitore frattale (pallini) e tradizionale (triangoli) in funzione del carico resistivo, per accelerazione pari a 0.5g.

Nel complesso, quindi, il convertitore frattale appare una soluzione vantaggiosa rispetto a quello tradizionale, in particolare quando si applica un carico resistivo ottimale per il sistema. Questa soluzione merita un approfondimento sia dal punto di vista della realizzazione sia della caratterizzazione a frequenze più elevate.

## 5. CONCLUSIONI

Il lavoro confronta due prototipi di convertitori piezoelettrici per recupero di energia da vibrazioni. Il primo è un innovativo convertitore ispirato ad una geometria frattale. Il secondo è un convertitore tradizionale costituito da un assieme di mensole indipendenti aventi le stesse frequenze proprie del convertitore frattale. La campagna sperimentale esamina ciascun convertitore per ognuna delle tre frequenze proprie tra 0 e 120 Hz, al variare del livello di accelerazione e del carico resistivo applicato. I risultati mostrano una notevole influenza di entrambe le variabili sulla tensione di picco ai capi di ciascuna lamina piezoelettrica. La potenza totale generata dal convertitore frattale, rapportata all'area di piezoelettrico, è circa doppia di quella del convertitore tradizionale nel caso della prima frequenza propria e della terza frequenza propria. Maggiore è, invece, la potenza specifica generata dal convertitore tradizionale nel caso della seconda frequenza propria.

## REFERENCES

- [1] Despesse, G., Jager, T., Chaillout, J.J., Léger, J.M., and Basrour, S., 2010, “Design and fabrication of a new system for vibration energy harvesting”, *Proc. Ph.D. Res. Microelectron. Electron.*, **1**, pp. 225–228.
- [2] Beeby, S.P., Tudor, M.J., and White, N.M., 2006, “Energy harvesting vibration sources for microsystems applications”, *Meas. Sci. Technol.*, **17**, R175–R195.
- [3] Glynne-Jones, F., Beeby, S.P., White, N.M., 2001, “Towards a piezoelectric vibration-powered microgenerator”, *IEE Proc. Sci. Mem. Technol.*, **148**(2), pp. 68–72.
- [4] Zurn, S., Hsieh, M. et al., 2001, “Fabrication and structural characterization of a resonant frequency PZT microcantilever”, *Smart Mater. Struct.*, **10**, pp. 252–263.
- [5] Roundy, S., Wright, P.K., Rabaey, J., 2003, “A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes”, *Computer Communications*, **26**, pp. 1131–1144.
- [6] Erturk, A., et al., 2009, “An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations”, *Smart Mat. Struct.*, **18**, pp. 1–18.
- [7] Shen, D., et al., 2007, “Analysis of piezoelectric materials for energy harvesting devices under high-g vibrations”, *Jap. J. Appl. Phys.*, **46**(10), pp. 6755–6760.
- [8] Benasciutti, D., Moro, L., Zelenika, S., Brusa, E., 2010, “Vibration energy scavenging via piezoelectric bimorphs of optimized shapes”, *Microsyst. Technol.*, **16**, pp. 657–668.
- [9] Song, H.J. et al., 2009, “Energy harvesting utilizing single-crystal pmn-pt material and application to a self-powered accelerometer”, *J. Mech. Des.*, **131**, pp. 091008-1–8.
- [10] Ferrari, M. et al., 2008, “Piezoelectric multifrequency energy converter for power harvesting in autonomous microsystems”, *Sens. Actuators*, **142**, pp. 329–335.
- [11] Qi, S., Shuttleworth, R., Oyadji, S.O., 2009, “Multiple resonances piezoelectric energy harvesting generator”, *Proceedings of SMASIS*, CA, pp. 299–307.

- [12] Shahruz, S.M., 2006, “Design of mechanical band-pass filters for energy scavenging: multi-degree-of-freedom models”, *Mechatronics*, **16**, pp. 523–531.
- [13] Castagnetti, D. 2011, “Fractal-Inspired Multi-Frequency Structures for Piezoelectric Harvesting of Ambient Kinetic Energy”, *J. Mech. Design*, **133**(11), pp. 111005-1-8.
- [14] Castagnetti, D., 2012, “Experimental modal analysis of fractal-inspired multi-frequency piezoelectric energy converters”, *Smart Mater. Struct.*, **21**(9), 094009.
- [15] 2011 Simulia ABAQUS 6.11-2 *Users' Manual* (Providence, RI: HKS Inc.).
- [16] Piezo System, Inc., USA, [www.piezo.com](http://www.piezo.com).
- [17] TDS “Miniature Accelerometers” on [www.mmf.de](http://www.mmf.de).
- [18] <http://www.ni.com/products/>.
- [19] <http://www.ni.com/labview/>.
- [20] De Pasquale, G., Somà, A., Fraccarollo, F., 2012, “Piezoelectric energy harvesting for autonomous sensors network on safety-improved railway vehicles”, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **226**, pp. 1107-1117.

# **PROGETTO DI SOSPENSIONI A BASSA RIGIDEZZA COMPOSTE DA ASTE IN INSTABILITÀ ELASTICA**

Giovanni Scire' Mammano

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,*

*Università di Modena e Reggio Emilia, Italy*

*E-mail: giovanni.sciremammano@unimore.it*

Eugenio Dragoni

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,*

*Università di Modena e Reggio Emilia, Italy*

*E-mail: eugenio.dragoni@unimore.it*

***Abstract.*** Il lavoro propone l'utilizzo di aste caricate assialmente oltre il loro carico critico (instabilità elastica) per la realizzazione di molle o sospensioni a bassa rigidezza.

Partendo dalla soluzione di letteratura "Elastica" dell'asta compressa in instabilità elastica, si elabora un modello analitico semplificato utile per studiarne in forma chiusa le prestazioni elastiche.

Il modello è stato validato per via comparativa oltre che da alcune prove sperimentali svolte su lamina in acciaio al carbonio.

Dall'analisi del comportamento elastico, emerge che la lamina è in grado di realizzare sospensione a bassa rigidezza e al contempo alto precarico. Sia la rigidezza sia il valore di precarico possono essere imposti senza particolari vincoli agendo sulla lunghezza e sul carico critico dell'asta, mentre la deflessione massima erogabile della lamina è proporzionale al rapporto fra precarico e rigidezza.

Nel lavoro si presenta una metodologia per il dimensionamento dell'elemento elastico e si propone un esempio applicativo di dimensionamento, completo di validazione numerica mediante un modello agli elementi finiti.

***Keywords:*** bassa rigidezza, asta inflessa, instabilità elastica, sospensioni

## **1. INTRODUZIONE**

La realizzazione di elementi elastici a basso valori di rigidezza, è un problema tecnico non ancora univocamente risolto. Elementi elastici molto cedevoli possono essere richiesti in differenti applicazioni tra cui sospensioni, organi di macchine, organi di presa robotica etc.

Una soluzione spesso utilizzata è quella di utilizzare molle ad aria [1] che però hanno lo svantaggio di essere complesse e costose. Una seconda possibilità è invece quella di realizzare dei meccanismi o dei sistemi che realizzano un parallelo fra elementi elastici a rigidezza negativa e positiva [1-3]. In questo modo è possibile ottenere per sottrazione bassi valori di rigidezza. Lo svantaggio è che questi sistemi sono complessi da realizzare e la loro caratteristica elastica è fortemente non lineare.

In questo lavoro gli autori propongono di utilizzare semplici aste inflesse in instabilità elastica per la realizzazione di elementi elastici o sospensioni a basso valore di rigidezza. L'idea è nata avendo utilizzato le stesse aste per la realizzazione di un sistema di compensazione elastica di tipo cedevole per attuatori a memoria di forma [4].

In condizioni di instabilità elastica le aste presentano intrinsecamente un basso valore di rigidezza e permettono di realizzare elevati valori di precarico grazie all'elevata rigidezza pre-instabilità.

Nel lavoro si illustra il comportamento dell'asta in instabilità elastica e si propone un modello approssimato utile per la trattazione. Il modello approssimato è validato sia per confronto con il modello analitico rigoroso, sia tramite verifica sperimentale. Sulla base del modello approssimato viene messa a punto una procedura per il corretto dimensionamento dell'elemento asta. Infine si propone un esempio applicativo per la convalida della metodologia di dimensionamento mediante confronto con un modello agli elementi finiti.

## 2. ASTA INFLESSA IN INSTABILITÀ ELASTICA

### Soluzione “Elastica”

La Fig. 1a mostra una semplice asta di momento di inerzia  $I$ , lunghezza libera  $l$ , realizzata in materiale avente modulo elastico  $E$ . Si ipotizzi di vincolare le due estremità rispettivamente con una cerniera in A e un carrello in B come mostrato in Fig. 1b.

Applicando un carico assiale  $P$  maggiore del carico critico:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1)$$

l'asta subisce spostamenti trasversali considerevoli e la sua deformata è in letteratura chiamata “Elastica”.

La soluzione di questo problema di equilibrio elastico è nota. Ad esempio in [5] è riportata la soluzione per un'asta con un'estremità incastrata e l'altra libera, caso riconducibile a quello in esame in quanto rappresenta metà della struttura di Fig. 1. La soluzione, opportunamente elaborata per tener conto del diverso vincolamento (cerniera-carrello), permette di calcolare la distanza  $a$  tra le cerniere, la freccia trasversale massima  $x_a$  e la lunghezza  $l$  dell'asta mediante le seguenti relazioni:



**Figura 1.** a) Asta indeformata. b) Asta compressa in instabilità elastica.

$$a = \frac{4E(p)}{k} - l \quad (2)$$

$$l = \frac{2K(p)}{k} \quad (3)$$

$$x_a = \frac{2p}{k} \quad (4)$$

dove  $K(p)$  è l'integrale ellittico completo di primo tipo,  $E(p)$  è l'integrale ellittico completo di secondo tipo, mentre  $k$  e  $p$  sono le seguenti espressioni funzione rispettivamente del carico applicato  $P$  e dell'angolo di inflessione nei vincoli  $\alpha$ :

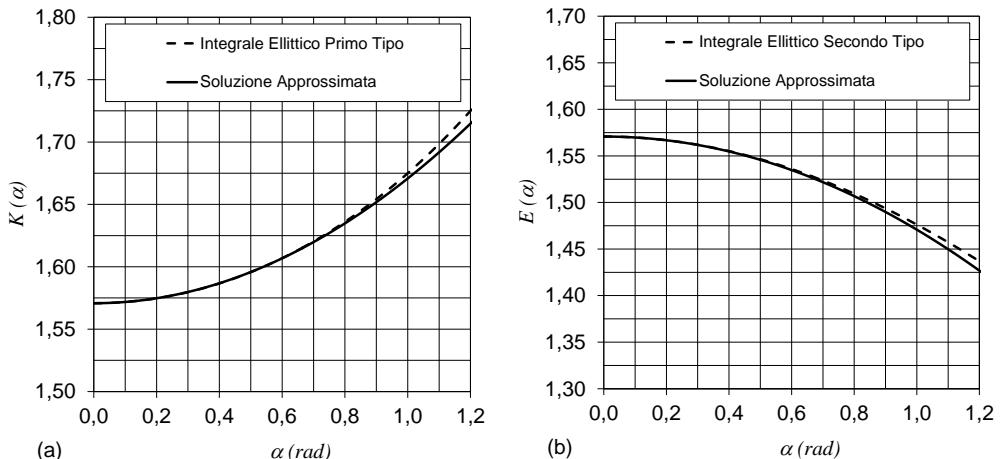
$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (5)$$

$$p = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (6)$$

In Fig. 2a e 2b è mostrato in linea tratteggiata l'andamento delle due funzioni integrali ellittici in funzione dell'angolo  $\alpha$ .

Per comodità di trattazione definiamo  $f$  lo spostamento assiale della cerniera B, differenza fra la lunghezza libera  $l$  e la distanza fra le cerniere  $a$ .

Mettendo a sistema le equazioni (2) – (5) e normalizzando tutte le lunghezze rispetto alla lunghezza libera dell'asta  $l$  e il carico rispetto al carico critico  $P_{cr}$  (1) si ottengono le seguenti relazioni adimensionali:



**Figura 2.** a) Funzione “Integrale ellittico del primo tipo”  $K(\alpha)$  (linea tratteggiata) a confronto con la soluzione approssimata proposta. b) Funzione “Integrale ellittico del secondo tipo”  $E(\alpha)$  (linea tratteggiata) a confronto con la soluzione approssimata proposta.

$$\frac{f}{l} = 2 \left[ 1 - \frac{E(p)}{K(p)} \right] \quad (7)$$

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{4K(p)^2}{\pi^2} \quad (8)$$

$$\frac{x_a}{l} = \frac{p}{K(p)} \quad (9)$$

Il momento flettente massimo si ha in corrispondenza della mezzeria dell'asta e vale:

$$M_{f\max} = Px_a \quad (10)$$

Normalizzando  $M_{f\max}$  rispetto alla lunghezza libera dell'asta  $l$  e rispetto al carico critico  $P_{cr}$  e introducendo le equazioni (8) e (9) si perviene alla seguente espressione adimensionale:

$$\frac{M_{f\max}}{P_{cr}l} = \frac{4pK(p)}{\pi^2} \quad (11)$$

Di seguito chiameremo l'insieme delle equazioni (7), (8), (9), (11) soluzione “Elastica”.

### Soluzione “Approssimata”

Gli integrali ellittici che compaiono nelle espressioni (7), (8), (9), (11) sono funzioni trascendenti di  $\alpha$  scomode da utilizzare. Per questo motivo introduciamo due espressioni,  $K'(\alpha)$  ed  $E'(\alpha)$ , funzioni approssimate rispettivamente di  $K(p)$  e  $E(p)$  e definite come:

$$K'(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 0.1\alpha^2 \quad (12)$$

$$E'(\alpha) = \frac{\pi}{2} - 0.1\alpha^2 \quad (13)$$

in cui  $\alpha$  è espresso in radianti.

In Fig. 2a e 2b si riportano il linea continua le due funzioni approssimate  $K'(\alpha)$  ed  $E'(\alpha)$  in confronto con le due funzioni originali  $K(\alpha)$  e  $E(\alpha)$  in linea tratteggiata. Come si può osservare da Fig. 2a, la funzione approssimata dell'integrale ellittico del primo tipo ha un andamento pressoché identico alla funzione originale fino a valori dell'angolo  $\alpha$  di 0.8rad ( $\approx 45^\circ$ ). La funzione approssimata dell'integrale ellittico del secondo tipo (Fig. 2b) ha anch'essa un andamento sovrapposto a quello della funzione originale fino a valori dell'angolo  $\alpha$  di 0.6rad ( $\approx 34^\circ$ ).

Grazie a queste due funzioni approssimate ed introducendo inoltre l'approssimazione  $p=\sin(\alpha/2)\approx\alpha/2$  è possibile ricavare dalle espressioni (7), (8), (9), (11), le seguenti espressioni in forma chiusa per la determinazione dell'angolo di inflessione nei vincoli, del carico adimensionale, della freccia trasversale adimensionale e del momento flettente massimo adimensionale in funzione della freccia assiale normalizzata:

$$\alpha = \sqrt{\frac{5\pi f/l}{(4-f/l)}} \quad (14)$$

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{16}{(4-f/l)^2} \quad (15)$$

$$\frac{x_a}{l} = \sqrt{\frac{f/l(4-f/l)}{3.2\pi}} \quad (16)$$

$$\frac{M_{f\max}}{P_{cr}l} = \sqrt{\frac{80f/l}{\pi(4-f/l)^3}} \quad (17)$$

In Fig. 3 si riporta il confronto tra la soluzione denominata “Elastica” che utilizza gli integrali ellittici (pallini) e la soluzione approssimata (linea continua) che al loro posto utilizza le espressioni approssimate introdotte nelle equazioni (12) e (13) e l’approssimazione  $p=\text{sen}(\alpha/2)\approx\alpha/2$ . Il confronto è condotto rispetto alla principali grandezze del problema: l’angolo di inflessione (3a), il carico normalizzato (3b), la freccia trasversale massima normalizzata (3c) e il momento flettente massimo normalizzato (3d).

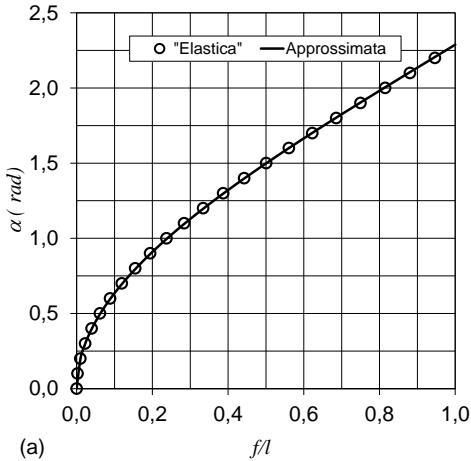
Si può osservare che la soluzione approssimata fornisce in modo accurato l’angolo di inflessione per qualsiasi valore di freccia. Anche la previsione del carico normalizzato è accurata, almeno fino a valori di freccia di 0.5. Relativamente alla freccia trasversale l’errore introdotto dal modello approssimato risulta significativo già da valori di freccia normalizzata di 0.3, ma tale grandezza non è di particolare importanza nella realizzazione di elementi elastici. L’errore è imputabile non tanto all’approssimazione introdotta per gli integrali ellittici quanto piuttosto a quella introdotta per  $p$ . Infine la previsione del momento flettente massimo sperimentato dall’asta è sufficientemente precisa almeno per frecce adimensionali inferiori a 0.4. Inoltre la stima risulta sempre per eccesso e quindi l’approssimazione che si introduce è conservativa, visto che sarà utilizzata per il dimensionamento strutturale dell’elemento.

E’ quindi legittimo ritenere che nell’intervallo di freccia adimensionale 0-0.4 il modello approssimato fornisca una sufficiente precisione di modellazione del comportamento dell’asta inflessa in instabilità elastica.

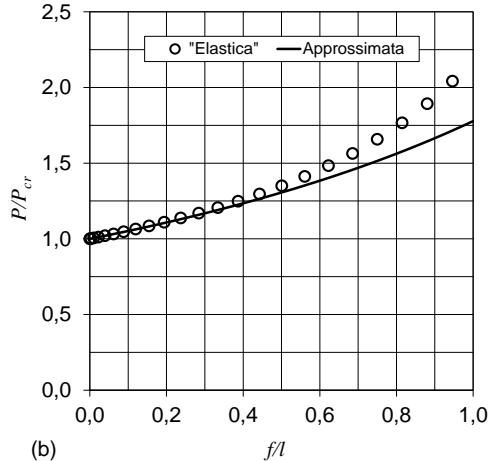
Osservando il solo intervallo di validità della soluzione individuata (Fig. 4) si osserva come il carico adimensionizzato abbia un andamento abbastanza lineare al variare della freccia normalizzata.

Derivando la (15) in funzione della freccia adimensionale è possibile ricavare l’espressione della rigidezza assiale, sempre adimensionale, dell’asta inflessa:

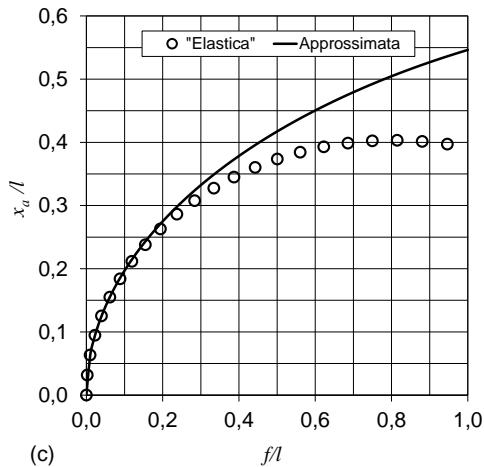
$$k_{adim} = \frac{\partial(P/P_{cr})}{\partial(f/l)} = \frac{32}{(4-f/l)^3} \quad (18)$$



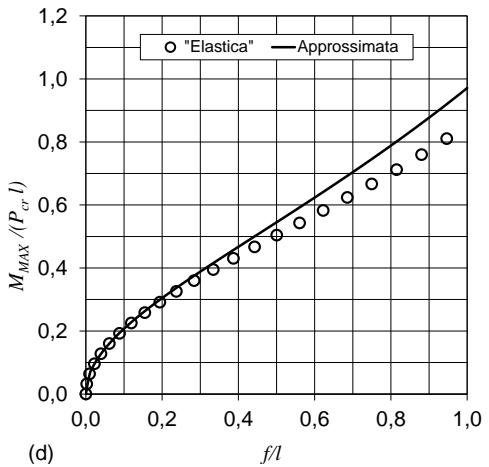
(a)



(b)



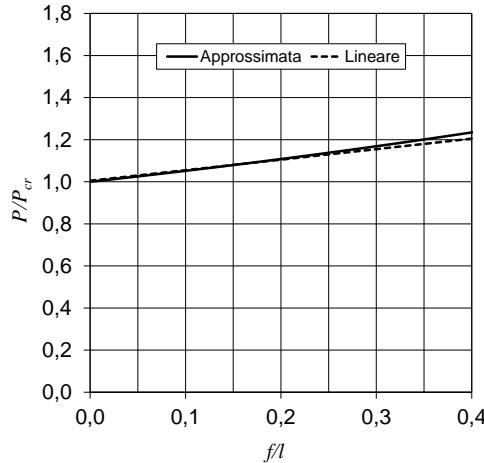
(c)



(d)

**Figura 3.** Confronto soluzione stabilità elastica e la soluzione approssimata: a) angolo inflessione rispetto freccia normalizzata; b) carico normalizzato rispetto freccia normalizzata, c) la freccia trasversale massima normalizzata rispetto freccia normalizzata d) momento flettente massimo sperimentato dall'asta rispetto alla freccia normalizzata.

In Fig. 5a si riporta l'andamento della rigidezza adimensionale ricavata dal modello approssimato dell'asta (18) e dal modello "Elastica" (ottenuta per differenziazione numerica), in funzione della freccia assiale normalizzata. Si osserva che in condizione di incipiente instabilità ( $f/l \rightarrow 0^+$ ) l'asta presenta una rigidezza adimensionale pari a 0.5. All'aumentare della deflessione la rigidezza aumenta più che linearmente e la rigidezza incrementa di circa il 60% al valore di freccia assiale pari a 0.4 (Fig. 5b).



**Figura 4.** Carico critico adimensionale al variare della freccia adimensionale nell’intervallo di validità della soluzione approssimata e confronto con una legge lineare (rigidezza costante).

Inoltre da Fig. 5b si può osservare come il modello approssimato tende a sottostimare significativamente la rigidezza dell’asta quanto più la deflessione aumenta. È pertanto opportuno inserire nell’equazione (18) un coefficiente moltiplicativo  $c$  funzione della freccia adimensionale e definito come:

$$c(f/l) = k_{\text{elastica}} / k_{\text{adim}} \quad (19)$$

che riallinei la previsione del modello approssimato al modello analitico “Elastica”.

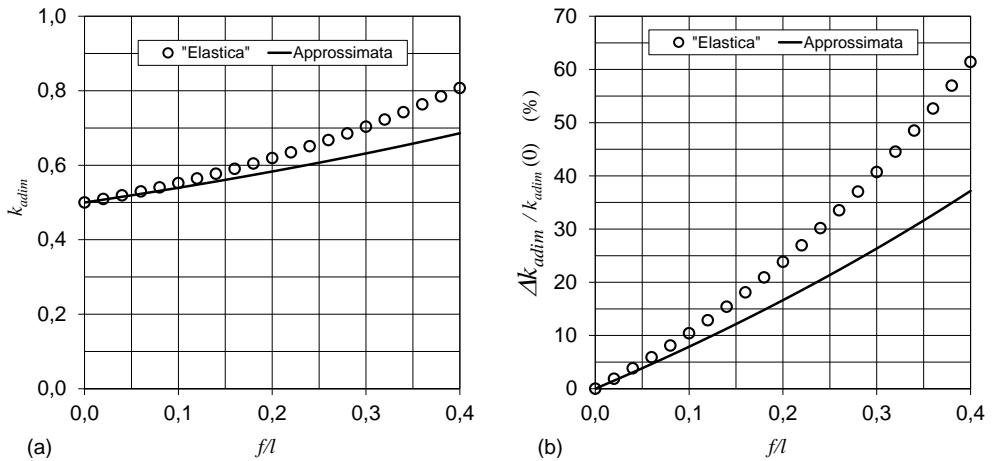
In Fig. 6 è mostrato l’andamento del coefficiente correttivo  $c$ , in funzione della freccia nominale adimensionale. Da una semplice regressione quadratica si ricava che il coefficiente  $c$  vale:

$$c = 1 + 0.17(f/l)[4(f/l) + 1] \quad (20)$$

Introducendo il coefficiente  $c$  nella (18) la rigidezza adimensionale dell’asta, risulta:

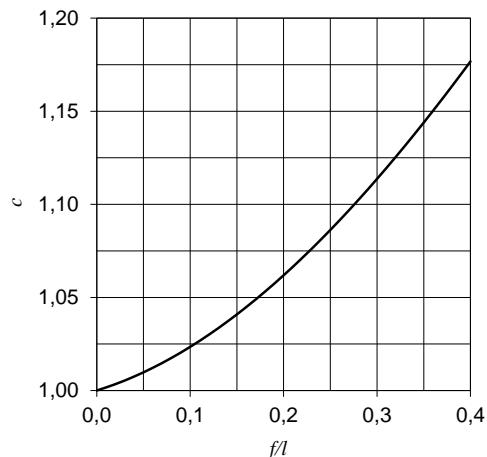
$$k'_{\text{adim}} = c \cdot k_{\text{adim}} \quad (21)$$

Nonostante l’asta non presenti una rigidezza perfettamente costante, il suo comportamento è molto interessante. Per inflettersi l’asta necessita infatti dell’applicazione di un carico consistente (pari al carico critico  $P_{cr}$ ) superato il quale, la rigidezza che fornisce è molto bassa (moderata pendenza della tracciato di Fig. 4).



**Figura 5.** a) Rigidezza adimensionale al variare della freccia assiale adimensionale b) Variazione percentuale della rigidezza adimensionale rispetto la rigidezza a incipiente instabilità al variare della freccia assiale adimensionale

Questa caratteristica può efficacemente essere sfruttata per la realizzazione di elementi elastici o sospensioni elastiche a bassa rigidezza ed elevato precarico, che rappresentano un problema tecnologico ancora non completamente risolto.



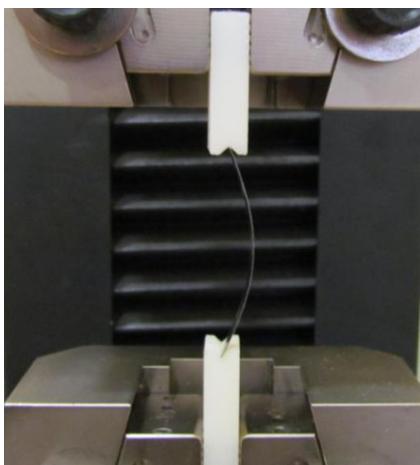
**Figura 6.** Coefficiente di correttivo della rigidezza  $c$ , in funzione della freccia adimensionale.

### 3. CONVALIDA Sperimentale del Modello Approssimato

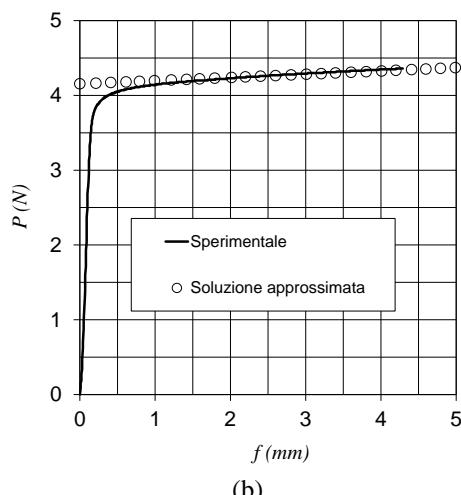
Per validare il modello analitico approssimato si è realizzata una semplice asta in acciaio al carbonio, a sezione rettangolare di dimensioni  $2.45 \times 0.3\text{mm}$  (momento inerzia  $I=5.51 \cdot 10^{-2}\text{mm}^2$ ), con lunghezza libera  $l = 50\text{mm}$ . Il materiale dell'asta è stato caratterizzato con una prova di flessione a 3 punti da cui è risultato un modulo elastico di  $190.7\text{MPa}$ . Conseguentemente il carico critico nominale  $P_{cr}$  (1) è pari a  $4.15\text{N}$ .

Per la caratterizzazione del comportamento è stata eseguita una prova di compressione dell'asta su una macchina di prova elettromeccanica Galdabini SUN500. Poiché nel modello sviluppato l'asta è vincolata all'estremità da due cerniere, si sono realizzati di prototipazione rapida (materiale ABS) due parallelepipedici aventi una scanalatura a "V" di  $90^\circ$ . Questi blocchetti sono stati fissati agli afferraggi della macchina di prova e le estremità dell'asta sono state inserite nelle due scanalature a "V" (Fig. 7a), in modo da realizzare di fatto un vincolo che permettesse la sola rotazione dell'estremo. La velocità di schiacciamento dell'asta è stata di  $5\text{mm/min}$ . Dalla prova si è ricavato il tracciato forza-deflessione dell'asta mostrato in Fig. 7b (linea continua), insieme alla previsione del modello analitico approssimato (pallini vuoti), rappresentato dall'eq. (15) riscritta in forma dimensionale.

Come si può osservare dalla Fig. 7b (linea continua), il comportamento dell'asta è fortemente non lineare. Appena inizia il caricamento, la forza cresce linearmente e rapidamente (elevata rigidezza), fino a raggiungere un carico prossimo al carico critico  $P_{cr}$ , in cui si ha il fenomeno dell'instabilità elastica. Passata questa fase, che si verifica in un intervallo di deflessioni fra  $0.25$  e  $0.5\text{mm}$ , (corrispondenti all'intervallo  $0.5\text{-}1\%$  di deformazione), il carico sull'asta cresce ancora con l'aumentare della deflessione, ma la rigidezza è molto bassa (circa  $0.0415\text{ N/mm}$ ), ossia l'asta si lascia deflettere a forza quasi costante.



(a)



(b)

**Figura 7.** a) Apparato per la prova di compressione dell'asta b) Risposta forza-deflessione dell'asta compressa (linea continua), in confronto con la previsione del modello analitico approssimato (pallini vuoti).

Questa fase post instabilità elastica risulta molto ben interpolata dal modello analitico approssimato (pallini vuoi), che è in grado di predire adeguatamente sia la forza che la rigidezza dell'elemento. Il comportamento pre-instabilità elastica, invece non essendo stato modellato matematicamente non viene colto dal modello.

#### 4. DIMENSIONAMENTO ASTA

Per utilizzare una o più lame come elementi elastici a bassa rigidezza è necessario imporre loro un carico superiore al carico critico, in modo da far lavorare le aste in regime di instabilità elastica. Questa condizione deve sempre essere garantita e anche alle deflessioni minime di lavoro, la lamina non deve mai scaricarsi sotto tale carico. Per questo motivo nel dimensionamento del sistema è necessario imporre che la deflessione minima dell'asta non scenda sotto la quota cautelativa dell'1% di deformazione assiale. Nel caso vi sia il pericolo che la lamina possa scaricarsi sotto questo livello, è opportuno prevedere dei vincoli di fine corsa.

Per il dimensionamento di un elemento elastico tradizionale, sono generalmente noti come dati di progetto:

- Il carico massimo  $P_1$
- La freccia massima  $f_1$
- La rigidezza desiderata  $k$
- L'ampiezza di deflessione  $\Delta f$

Poiché la rigidezza della lamina non è costante nell'intervallo di deflessione di utilizzo (Fig. 5,) in via generale è utile definire per il suo dimensionamento il valore di rigidezza richiesto  $k$  a metà dell'intervallo di deflessione di utilizzo. In questo modo è possibile minimizzare l'errore sulla rigidezza desiderata. Di seguito chiameremo la posizione di metà intervallo  $f_0$  "freccia nominale" e il valore di rigidezza in questa posizione  $k_0$  "rigidezza nominale".

Per il dimensionamento della lamina è quindi opportuno dai dati di progetto precedentemente elencati, calcolare la freccia nominale come:

$$f_0 = \left( \frac{\Delta f}{2} \right) + 0.01 \cdot l \quad (22)$$

dove la parentesi tonda rappresenta metà dell'ampiezza di deflessione della molla e il secondo termine rappresenta la deflessione di precarico utile a garantire che la lamina non si scarichi mai sotto il carico critico. Ovviamente non essendo ancora definita la lunghezza dell'asta è necessario fissare un valore di tentativo  $l'$ , che andrà poi successivamente verificato (come primo tentativo si fissi  $l' = \Delta f / 0.38$ ). La procedura di progetto è pertanto di tipo iterativo.

A questo valore di freccia  $f_0$  la lamina dovrà avere una rigidezza  $k_0$  uguale a quella di progetto  $k$  e un valore di forza  $P_0$  pari a:

$$P_0 = P_1 - \frac{k_0 \Delta f}{2} \quad (23)$$

Infine, la deflessione massima dell'asta sarà:

$$f_{\max} = \Delta f + 0.01 \cdot l \quad (24)$$

Per ricavare le equazioni di progetto dell'asta si mettono a sistema le equazioni (15) e (21) e si sostituisce al posto di  $P$ ,  $k$  ed  $f$  rispettivamente  $P_0$ ,  $k_0$  ed  $f_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = \frac{16P_{cr}}{(f_0/l - 4)^2} \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = c \frac{32P_{cr}}{l(4 - f_0/l)^3} \end{array} \right. \quad (26)$$

Poiché il procedimento di calcolo è iterativo, è inutile sostituire al coefficiente  $c$  presente nella (26) la sua espressione (20), ma è più agevole inserirne un valore di tentativo, ricavabile introducendo nella (20) la freccia nominale  $f_0$  e la lunghezza  $l'$ .

Eseguito queste sostituzione è quindi possibile risolvere il sistema in funzione del carico critico  $P_{cr}$  e della lunghezza libera dell'asta  $l$ , ottenendo:

$$P_{cr} = \frac{4P_0^3}{\left(2P_0 + \frac{f_0 k_0}{c}\right)^2} \quad (27)$$

$$l = \frac{2cP_0 + f_0 k_0}{4k_0} \quad (28)$$

Nota la lunghezza dell'asta è necessario effettuare due verifiche. In primo luogo verificare che la lunghezza trovata sia prossima a quella ipotizzata  $l'$ . Qualora vi sia differenza è opportuno ripetere il calcolo iterativamente, inserendo come lunghezza di tentativo  $l'$  il valore appena trovato. In secondo luogo occorre verificare che la freccia massima di progetto (24) sia inferiore al limite di linearità dell'asta e di validità del modello approssimato che abbiamo fissato pari a  $0.4 \cdot l$ . Deve quindi essere verificata la seguente disequazione:

$$f_{\max} \leq 0.4l \quad (29)$$

che, introducendo l'espressione trovata per la lunghezza dell'asta (28) diviene:

$$f_{\max} \leq \frac{cP_0}{5k_0} + \frac{f_0}{10} \quad (30)$$

La disequazione (30) mostra che la freccia massima applicabile all'asta è tanto più grande quanto più grande è il rapporto fra la forza nominale  $P_0$  e la rigidezza  $k_0$  e quanto più è elevato il valore della freccia nominale  $f_0$ .

Dal carico critico e dalla lunghezza dell'asta è possibile risalire, noto il modulo elastico del materiale costituente l'asta, al momento di inerzia della sezione tramite inversione della (1):

$$I = \frac{P_{cr}l^2}{\pi^2 E} \quad (31)$$

Ricavato il momento di inerzia  $I$ , è necessario fissare la geometria della sezione dell'asta e determinare le sue dimensioni affinché la tensione massima nella sezione più sollecitata sia inferiore alla tensione ammissibile  $\sigma_{adm}$  del materiale costituente.

Dalla (17) il momento flettente sperimentato dall'asta alla massima deflessione  $f_{max}$  vale:

$$M_{f_{max}} = P_{cr}l \sqrt{\frac{80f_{max}/l}{\pi(4-f_{max}/l)^3}} \quad (32)$$

Ipotizzando di realizzare l'asta con sezione rettangolare di larghezza  $b$  e spessore  $t$ , e introducendo il momento di inerzia della sezione ( $I = b \cdot t^3 / 12$ ) e il modulo di resistenza a flessione ( $W = b \cdot t^2 / 6$ ) è possibile determinarne le dimensioni imponendo che la tensione massima nella sezione sia inferiore alla tensione ammissibile del materiale  $\sigma_{adm}$ :

$$t \leq t_{max} = \frac{2I\sigma_{adm}}{M_{f_{max}}} \quad (33)$$

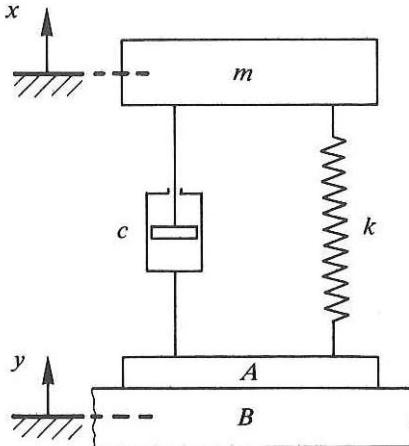
$$b = \frac{12I}{t^3} \quad (34)$$

## 5. ESEMPIO APPLICATIVO

Di seguito si propone la risoluzione di un caso applicativo di sospensione a bassa rigidezza. Tale problema viene affrontato mediante l'utilizzo sia di un elemento elastico a lamina sia di un elemento elastico tradizionale (molla cilindrica elicoidale), con l'obiettivo di realizzare una comparazione fra le due soluzioni e validare la procedura di dimensionamento suggerita per la lamina.

L'applicazione oggetto di studio è un isolatore sismico ad un grado di libertà (Fig. 8), che ha lo scopo di isolare la massa sospesa  $m$  dalle vibrazioni della base B.

Come noto [6], l'isolatore sismico è in grado di isolare efficacemente dalla vibrazioni la massa sospesa se la pulsazione della sorgente eccitatrice (o l'armonica a frequenza minore nel caso di eccitazione multi-armonica) è maggiore della pulsazione naturale della sospensione. Se questa condizione è verificata, è inoltre conveniente avere valori di smorzamento minimi.



**Figura 8.** Isolatore sismico ad un grado di libertà.

In letteratura, si consiglia di solito di dimensionare la sospensione affinché la sua pulsazione naturale  $\omega_n$  sia:

$$\omega_n \leq \frac{\omega_{\min}}{4} \quad (35)$$

dove  $\omega_{\min}$  rappresenta la pulsazione più bassa dello spettro di eccitazione.

Ora ipotizziamo che la massa da isolare  $m$  sia di 10.2kg e che la più bassa pulsazione eccitatrice sia  $\omega_{\min} = 18 \text{ rad/s}^2$  ( $f=2.86\text{Hz}$ ). Si supponga inoltre che l'ampiezza picco-picco di oscillazione della base sia di 100mm.

Applicando la (35) la pulsazione naturale richiesta alla sospensione deve essere minore o uguale a  $4.5 \text{ rad/s}^2$ . Poiché la pulsazione naturale di un sistema elastico vale:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (36)$$

dall'inversione della (36) è possibile ricavare la massima rigidezza dell'elemento elastico al fine di garantire una pulsazione naturale inferiore a quella di progetto calcolata ( $4.5 \text{ rad/s}^2$ ):

$$k = m \cdot \omega_n^2 = 10 \cdot 4.5^2 = 202.5 \text{ N/m} = 0.202 \text{ N/mm} \quad (37)$$

Il valore di rigidezza di progetto individuato dalla (37) è molto piccolo, e la realizzazione di un simile elemento elastico non è agevole. In tabella 1 si riportano i dati di progetto per l'elemento elastico.

**Tabella 1.** Specifiche di progetto per l'elemento elastico dell'isolatore sismico

Specifiche	Simbolo	Valore	Unità misura
Rigidezza	$k$	0.202	N/mm
Precarico	$P_0=mg$	100	N
Aampiezza deflessione	$\Delta f/2$	$\pm 50$	mm
Carico Massimo	$P_{max}$	110.1	N

Procediamo quindi al dimensionamento di un elemento elastico tradizionale (molla cilindrica elicoidale), sia di una molla a lamina, che garantiscono queste caratteristiche.

Per quel che concerne la molla tradizionale, calcoliamo dapprima la freccia massima di lavoro che, essendo l'elemento lineare, vale  $f_{max}=P_{max}/k=110.1/0.202=545\text{mm}$ . Ipotizzando di utilizzare come materiale un acciaio al carbonio ( $G=80.7\text{GPa}$ ,  $\tau_{adm}=650\text{MPa}$ ), e fissando un rapporto di avvolgimento  $C=D/d=10$  (con  $D$  il diametro medio di avvolgimento della molla e  $d$  è il diametro del filo), si ottiene con le consuete formule per il dimensionamento delle molle elicoidale cilindriche [7] una molla avente le caratteristiche riportate in Tab. 2. Si può immediatamente osservare che la molla risultante è smisurata (per lunghezza e numero di spire) e certamente instabile, avendo un rapporto tra lunghezza e diametro di avvolgimento di oltre 38.

Per quel che concerne il dimensionamento della lamina caricata di punta, ipotizziamo dapprima una lunghezza di tentativo  $l'=\Delta f/0.38=263.2\text{mm}$ .

Tramite la (22), (23), (24) calcoliamo la freccia nominale  $f_0$ , il carico alla freccia nominale  $P_0$  e la freccia massima  $f_{max}$  ottenendo rispettivamente  $f_0=52.63\text{mm}$ ,  $P_0=100\text{N}$  e  $f_{max}=102.63\text{mm}$ .

Nota la freccia nominale  $f_0$  e la lunghezza di tentativo  $l'$  ricaviamo tramite la (20) il coefficiente correttivo della rigidezza ( $c=1.0612$ ).

Noti tutti i valori di progetto, applichiamo la disequazione (30) per capire preliminarmente se la molla a lamina è applicabile al caso in esame:

$$f_{max} = 102.63 \leq \frac{cP_0}{5k_0} + \frac{f_0}{10} = 110.33\text{mm} \quad (38)$$

Essendo verificata con ampio margine la disequazione (38) è possibile utilizzare per il problema in esame un elemento elastico a lamina.

**Tabella 2.** Caratteristiche molla elicoidale cilindrica

Specifiche	Simbolo	Valore	Unità misura
Materiale		Acciaio Carbonio	
Lunghezza libera	$l$	808.34	mm
Diametro del filo	$d$	2.1	mm
Diametro di avvolgimento	$D$	21	mm
Numero di spire	$N$	104.9	

Applichiamo quindi la (27) e la (28) per calcolare rispettivamente il carico critico dell'asta, pari a  $P_{cr}=91.05\text{N}$  e la lunghezza libera dell'asta  $l=274.27\text{mm}$ . Poiché la lunghezza calcolata  $l$  risulta molto distante dalla lunghezza ipotizzata  $l'$  (263.2mm) è necessario iterare il calcolo inserendo il valore ricavato come valore di tentativo e ripetere il processo fino a convergenza. Nel caso in esame, dopo 3 iterazioni si raggiunge la convergenza ottenendo un carico critico dell'asta  $P_{cr}=90.64\text{N}$  e la lunghezza libera dell'asta  $l=275\text{mm}$ .

Ipotizzando di realizzare la lamina in acciaio ( $E=210\text{GPa}$ ,  $\sigma_{adm}=950\text{MPa}$ ) dalla (31) ricaviamo il momento di inerzia della sezione  $I=3.307\text{mm}^4$  e tramite la (32) il momento flettente massimo che l'asta sperimenta pari a  $M_{fmax}=11.13\text{kNm}$ . Successivamente tramite la (33) calcoliamo lo spessore massimo dell'asta  $t_{max}=0.56\text{mm}$ . Scegliendo uno spessore dell'asta  $t=0.55\text{mm}$ , tramite la (34) risaliamo alla larghezza dell'asta  $b=237\text{mm}$ . In Tab. 3 si riportano le caratteristiche della molla a lamina.

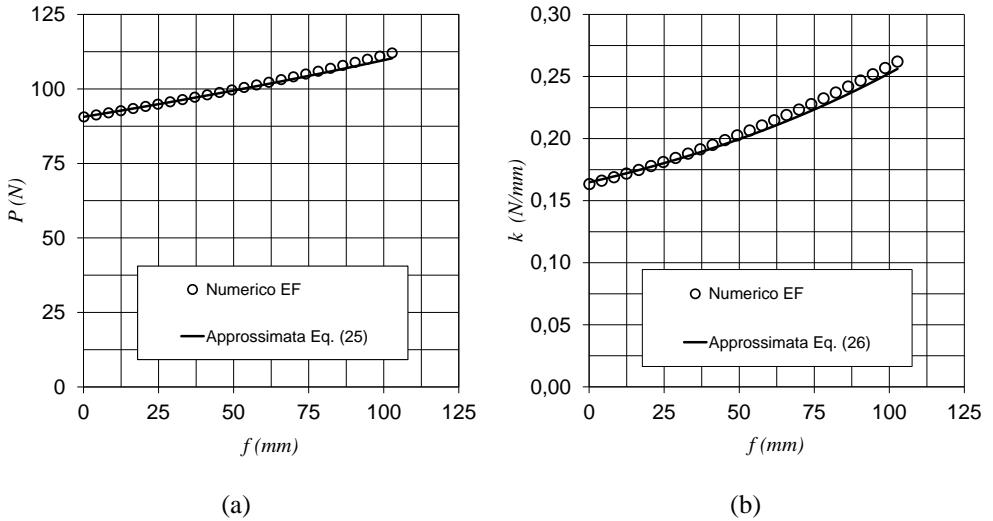
La molla a lamina così dimensionata è stata quindi modellata agli elementi finiti in ambiente ABAQUS 6.11 per simularne le prestazioni.

Si è realizzato un modello piano dell'asta con elementi di tipo trave "ShearFlexible" di dimensione di circa 0.1mm. Il modello considera le non linearità geometriche e i grandi spostamenti. Il materiale costituente la lamina è un materiale lineare elastico di modulo pari a 210GPa. L'asta è stata vincolata ad un estremo con una cerniera e all'altro estremo con un carrello che consente il solo movimento in direzione dell'asse dell'asta. Partendo dalla configurazione indeformata, all'asta viene dapprima applicato nel suo punto di mezzeria uno spostamento trasversale di 3mm, in modo da indurne l'instabilità elastica. Quindi si impone un abbassamento del carrello di 0.1mm e al termine di questa fase si rimuove lo spostamento trasversale applicato in mezzeria. A questo punto l'asta è in condizioni di instabilità elastica e si applica uno spostamento assiale del carrello fino a raggiungere il valore di freccia massima.

In Fig. 9a si riporta il confronto fra la previsione del modello analitico approssimato (25) e quella del modello agli elementi finiti della reazione elastica  $P$  della lamina dimensionata. Come si può osservare vi è un ottima corrispondenza fra i due modelli su tutto l'intervallo di lavoro della molla. Inoltre si può osservare anche il rispetto dei dati di progetto ( $P_0=100\text{N}$  per  $f_0=52.63\text{mm}$ ). L'errore rispetto al modello agli elementi finiti è di -0.4%.

**Tabella 3.** Caratteristiche della molla a lamina

Specifiche	Simbolo	Valore	Unità misura
Materiale		Acciaio Carbonio	
Lunghezza libera	$l$	275	mm
Larghezza	$b$	238.52	mm
Spessore	$t$	0.55	mm
Carico critico	$P_{cr}$	90.64	N



**Figura 9.** Comparazione della previsione del modello analitico approssimato (linea continua) rispetto al modello numerico agli elementi finiti (pallini vuoti): a) Risposta elastica della lamina in funzione della freccia assiale. b) Rigidezza in funzione della freccia assiale.

In Fig. 9b è illustrata la rigidezza dell'asta prevista dal modello analitico approssimato (26) a confronto di quella calcolata dal modello agli elementi finiti. Si può notare un'ottima congruenza fra i due modelli, oltre al rispetto del valore di rigidezza di progetto ( $k_0=0.202\text{N/mm}$  per  $f_0=52.63\text{mm}$ ). L'errore rispetto al modello agli elementi finiti è di -1.46%.

## 6. DISCUSSIONE

L'asta compressa assialmente oltre il suo carico critico presenta una variazione della reazione elastica rapportata al carico critico di solo il 20%, a fronte di una variazione di freccia adimensionale del 40% (Fig. 3b). Nonostante l'elevato valore di carico, l'asta fornisce quindi una rigidezza molto limitata e tale caratteristica può essere sfruttata per la realizzazione di elementi elastici ad elevato precarico e bassa rigidezza.

Gli integrali ellittici su cui si basa il modello analitico “Elastica” dell'asta, essendo funzioni trascendenti non elementari, rendono impossibile lo sviluppo di un metodo di dimensionamento. A questo proposito si è quindi sviluppato un modello approssimato del comportamento elastico dell'asta che sostituisce agli integrali ellittici di primo e secondo tipo due semplici funzioni polinomiali di secondo grado. Il modello così ottenuto risulta matematicamente più semplice e soprattutto consente l'inversione dell'equazioni condizione indispensabile per il dimensionamento dell'asta.

Come si osserva da Fig. 3 il modello approssimato permette una buona previsione del comportamento elastico dell'asta fino a freccia assiali adimensionali minori di 0.4. L'errore relativo rispetto al modello “Elastica” è in questo intervallo molto limitato sia per la

previsione dell'angolo di inflessione che per il carico, che rappresenta la grandezza di maggior interesse. Più marcato ma sempre accettabile è invece l'errore sulla previsione della freccia trasversale e del momento flettente massimo sperimentato dall'asta, errori imputabili all'approssimazione dell'eq. (6) ( $p=\sin(\alpha/2)\approx\alpha/2$ ) più che all'approssimazione degli integrali ellittici.

Un'ulteriore conferma della precisione del modello approssimato proposto è inoltre la scaturita dalla prova sperimentale di compressione di una lamina metallica oltre il proprio carico critico. Come si osserva in Fig. 7b, il modello analitico è in grado di prevedere in modo accurato la reale curva di carico-deflessione della lamina rilevata al dinamometro. Ovviamente il modello non è in grado di cogliere il tratto iniziale della curva, in quanto il modello "Elastica" da cui deriva modella esclusivamente la fase di instabilità elastica.

Benché l'asta presenti una rigidezza relativamente limitata, questa non è costante al variare della freccia adimensionale (Fig. 5a), ma aumenta più che proporzionalmente. In particolare, ad un valore di freccia adimensionale di 0.4, la rigidezza aumenta di oltre il 60% rispetto alla rigidezza ad incipiente instabilità ( $f/l \approx 0$ ).

La funzione rigidezza, ottenuta per derivazione rispetto alla freccia adimensionale dell'espressione del carico adimensionale approssimato (18), diverge in modo abbastanza significativo, rispetto alla rigidezza calcolabile per derivazione numerica dell'espressione del carico adimensionale del modello "Elastica" (Fig. 5a). Per ovviare a questa imprecisione si è proposto di lasciare invariata l'espressione del carico adimensionale e d'inserire un coefficiente correttivo  $c$  nella sola espressione della rigidezza (18) per riallineare la previsione dell'espressione approssimata con quella "Elastica". Tale coefficiente è una funzione di secondo grado della freccia adimensionale e ha l'andamento mostrato in Fig. 6.

Come si evince da Fig. 4, un'asta in instabilità elastica reagisce ad una deflessione  $f/l$  del 40% con una variazione della reazione elastica adimensionale  $P/P_{cr}$  del 20%, a prescindere dalla sua sezione e dalla sua lunghezza. Poiché la variazione della reazione elastica altro non è che il prodotto della rigidezza  $k$  per la deflessione massima  $f_{max}$ , questa condizione si traduce in una proporzionalità inversa tra rigidezza e deflessione e quindi tra rigidezza e lunghezza dell'asta ( $f_{max} = 0.4 \cdot l$ ). In altre parole, fissato un certo livello di precarico e quindi di carico critico, la rigidezza e la deflessione massima non sono indipendenti ma inversamente proporzionali. Dal punto di vista progettuale non è quindi possibile realizzare qualsiasi elemento elastico, ma solo quelli per cui è verificata la disequazione (30). A tal proposito, per una valutazione di massima dell'applicabilità di questo tipo di elemento elastico al problema in esame è sufficiente verificare che la freccia massima di progetto sia inferiore a  $0.2P_0/k_0$ .

Ovviamente è sempre possibile ottenere elementi elastici per cui il prodotto freccia rigidezza sia inferiore al 20% del carico critico, ma ciò è possibile solamente facendo lavorare l'asta a deflessioni minori di quella massima teorica ( $0.4 \cdot l$ ), e quindi con un aumento dell'ingombro assiale.

La metodologia di dimensionamento proposta consente di determinare la lunghezza e la sezione dell'asta noti che siano il precarico e la rigidezza di progetto oltre che il materiale con cui si realizzerà l'elemento. Anche se iterativo, il procedimento di dimensionamento è estremamente semplice e la convergenza della soluzione è molto rapida (2-3 iterazioni).

L'esempio proposto ha messo in luce le potenzialità di questa tipologia di elemento elastico nel caso di sospensione o elementi elastici ad alto precarico e bassa rigidezza. In particolare con l'utilizzo di molle a lamina in instabilità elastica è stato possibile realizzare un elemento elastico altrimenti non realizzabile con le classiche molle elicoidali, avente un

precarico di circa 90N e una rigidezza di soli 0.2N/mm, con una capacità di deflessione di oltre 100mm.

Come per i normali elementi elastici, è sempre possibile disporre al posto di un'unica asta più aste in parallelo di dimensioni contenute. Nel dimensionamento proposto, ad esempio, sarebbe possibile utilizzare in sostituzione di un'unica lamina da 238.5mm di larghezza 4 lamine da 59.6mm, con l'indubbio vantaggio di ridurre gli ingombri e guidare più efficacemente il moto verticale della massa impendendone la rotazione.

## 7. CONCLUSIONI

Il lavoro ha proposto l'utilizzo di aste compresse in instabilità elastica per la realizzazione di elementi elastici o sospensioni a bassa rigidezza.

Il modello analitico approssimato presentato è in grado di prevedere il comportamento elastico dell'asta fino a valori di freccia adimensionale di 0.4. Anche la validazione sperimentale del modello condotta su una lamina di acciaio ha dato esito positivo.

Dall'analisi del comportamento elastico emerge che l'utilizzo di semplici aste compresse oltre il proprio carico critico consente di realizzare elementi elastici a bassa rigidezza a costo molto contenuto. Sia il carico che la rigidezza possono essere variati a discrezione agendo sul carico critico e sulla lunghezza dell'asta. Il limite della soluzione risiede nel fatto che, indipendentemente dalla geometria dell'asta, la massima variazione di forza che si può ottenere è pari al 20% del valore del carico critico. Questa condizione si traduce in una limitazione della freccia massima che non è indipendente ma è funzione del rapporto fra il precarico e la rigidezza. In particolare è tanto minore quanto più tale rapporto è basso:  $P/k$  (10÷2500)  $\rightarrow f(2÷500)$ .

L'esempio proposto chiarifica la metodologia di dimensionamento iterativa dell'asta e, grazie all'applicazione della soluzione individuata in un modello agli elementi finiti, ne attesta la validità.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J.Z. Zhang, D. Li, M. J. Chen, S. Dong, 2004. "An Ultra-Low Frequency Parallel Connection Nonlinear Isolator for Precision Instruments". *Key engineering materials*, **257/258**, pp. 231–238.
- [2] D.L. Platus, 1991. "Negative-stiffness-mechanism vibration isolation systems". *SPIE—Vibration Control in Microelectronics, Optics and Metrology*, **1619**, pp. 44–54.
- [3] A. Carrella, M.J. Brennan, T.P. Waters, 2007. "Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic". *Journal of Sound and Vibration*, **301**, pp. 678–689.
- [4] G. Scirè Mammano, E. Dragoni, 2013. "Elastic compensation of linear shape memory alloy actuators using compliant mechanisms". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, doi: 10.1177/1045389X13488253, In press .
- [5] S.P. Timoshenko, J. M. Gere, 2009. *Theory of elastic stability*, second edition, Dover publication.
- [6] E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti, 1998. *Lezioni di meccanica applicata alle macchine Vol. II*, Seconda edizione, Patron editore.
- [7] R. L. Norton, 2006. *Machine Design – An Integrated Approach*, Third edition, Prentice Hall.

# A MULTIBODY MODEL FOR THE ANALYSIS OF SELF EXCITED VIBRATIONS OF RACING MOTORCYCLES

Luca Leonelli

CIRI-MAM,

University of Bologna, Italy

E-mail: luca.leonelli4@unibo.it

**Abstract.** Over the last ten years a great improvement in racing motorcycles performance has been achieved. This has been due to both an increase in engine power output and an increase in tire adherence characteristics. As a consequence, a new vibratory phenomenon may appear during certain maneuvers. This phenomenon, which is commonly referred to as "chattering", consists of a vertical oscillation of both the front and rear unsprung masses in the range of frequency 18 – 22 Hz. The suspension are not able to dampen those vibration which start from the rear wheel and suddenly propagate to the front wheel making the vehicle's handling unpredictable and, ultimately, weakening the overall performance that is the lap time. It is still not clear which is the determining factor causing this phenomenon. Therefore several empirical remedies are adopted in practice, basing on the technicians experience and on riders feedback. In this paper a specific, three dimensional, multibody motorcycle model for the analysis and prediction of this phenomenon has been proposed. The effects of all the parameters involved are taken into account. Innovative models for tire carcass deformability, chain transmission, full drivetrain inertia and clutch effect have been implemented. A real maneuver experimentally measured on race track is thus simulated with the model. The results are compared and critically discussed.

**Keywords:** self-excited vibration, motorcycle dynamics, chattering

## 1. INTRODUCTION

The chattering is a recurrent problem since the introduction of modern four stroke racing motorcycles, which features high levels of power output as well as high levels of engine brake torque. The chattering is perceived by the rider as a severe vertical vibration coming from the handlebars in particular sections of the track. Namely, riders experience chattering during the latter phase of corner entry, while exerting high front brake torque and engine brake torque at high lean angle. The vibration continues during the rolling phase throughout the corner apex up to the corner exit. The vibration disappears quickly while accelerating out of the corner. During chattering the confidence of the rider drops down because it becomes more difficult to estimate the tire adherence available, preventing him from obtaining the maximum possible longitudinal and lateral accelerations. Therefore performance during braking and turning in is seriously affected by this phenomenon, and the risk of crashing is increased.

It can be seen from experimental measurements that a vertical vibration starts from the rear unsprung mass at a frequency of 18 – 22 Hz and propagates via the chain to the front wheel. Due to the geometry and stiffness balance of the motorcycle the front unsprung mass

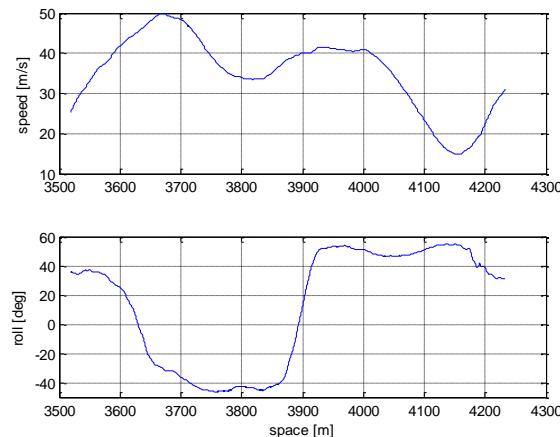
starts oscillating with the same frequency of the rear one but in counter phase. The vertical acceleration measured in correspondence of the wheels spindles is in the order of magnitude of tens of m/s<sup>2</sup>. The vibration can be observed on the engine rpm as well, which are driven by the oscillation of the chain. The presence of chatter is also evident from the analysis of suspensions travel. This leads to a great fluctuation of the vertical load acting on the tires. It is very well known that a strongly non-linear function correlates vertical tire load to longitudinal and lateral forces, therefore an even greater fluctuation can be expected on the tires driving forces, explaining the unpredictable feeling of the motorcycle which riders complain about.

Many assumptions have been made about the origin of this phenomenon but it still remains unclear. Conversely, several empirical countermeasures are applied during racing weekends. The more effective modifications that experience suggests involve the clutch and tire pressure. The clutch of four-stroke racing motorbikes are equipped with a so called “anti-hop” system, which limits the engine brake torque transmissible to the rear wheel. The level of engine brake torque exertable can be set changing the stiffnesses of apposite springs, making it possible to avoid the rear wheel from hopping and detaching from the ground during severe braking maneuvers. On the other hand, a change in tire pressure inflation produces a variation of the radial stiffness of the tire carcass in the order of magnitude of several percents every bar. While set-up operations on these parameters can limit the effects of the phenomenon, it is still impossible to make an accurate prediction of the vibration’s onset.

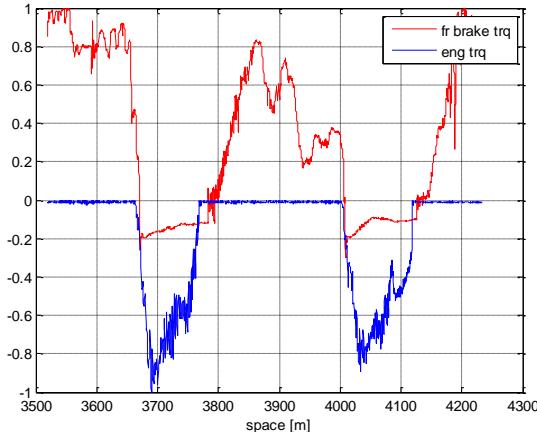
In the following a more detailed description of the phenomenon will be given, basing on experimental data.

## 2. MANEUVER DESCRIPTION

In the following figures some experimental evidences of chattering are shown. The data have been recorder via a telemetric system installed on the motorcycle. The critical maneuver is composed of a lean angle braking phase followed by high roll angle cornering and acceleration. The braking is performed with front brake and engine brake up to a roll angle of 55 degrees as it can be seen in Fig. 1.



**Figure 1.** Speed and roll profiles for the considered maneuver.

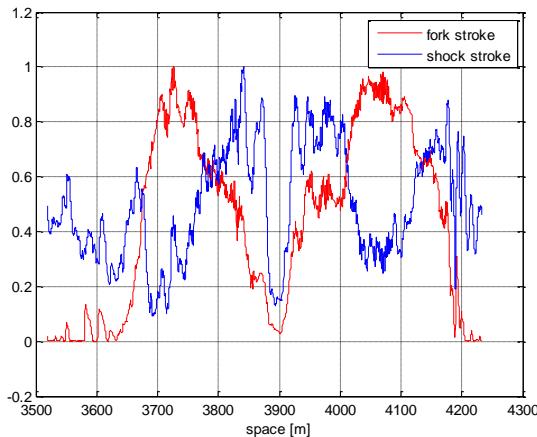


**Figure 2.** Engine torque and front brake torque for the considered maneuver.

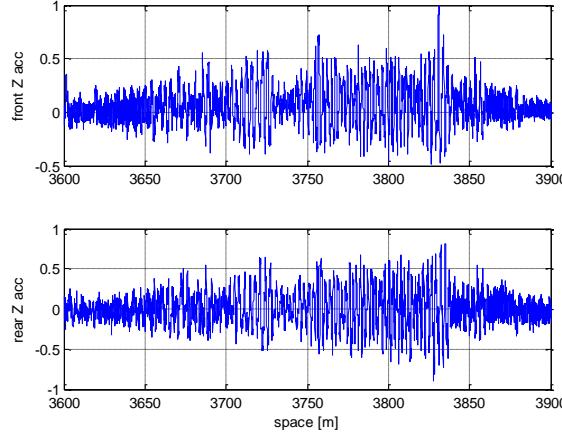
The engine torque and front brake torque in Fig. 2 are calculated from the input exerted by the rider: throttle angle and brake circuit pressure. During the subsequent very short cornering phase only a little engine brake is applied. Then engine torque is gradually given by the rider up to the maximum available. All the values shown are made dimension less for privacy purpose.

In Fig. 3 the compressions of both suspensions are shown. It can be pointed out how the phenomenon starts at m 3700 from the rear wheel and suddenly propagates to the front in counter phase. The suspensions oscillations from a tire perspective result in a fluctuation of vertical load of thousands of Newton.

In Fig. 4 the Z signals of two accelerometers rigidly connected with the wheels spindles are reported. The phenomenon is far more evident, and the vertical acceleration of both wheels exceeds 5 g.



**Figure 3.** Suspension strokes for the considered maneuver



**Figure 4.** Vertical acceleration at the wheel spindles for the considered maneuver.

### 3. MOTORCYCLE DESCRIPTION

The motorcycle considered has a front suspension of telescopic type, rear suspension of swingarm type with leverages activating the rear shock absorber, and chain transmission.

The motorcycle model consists of thirteen bodies: the front and rear tires belt, attached respectively to the front and rear rims (including brake discs), the rear chainwheel, the swingarm (including rear brake calliper and rear suspension strut), the main frame (including the rider, engine, rear shock absorber and fuel mass), the front assembly (including the fork stanchions, handlebars and steering assembly), the front sprung mass (including lower fork and front brake callipers) and three bodies modelling the rotating inertias of the crankshaft, first gearbox shaft (including clutch) and second gearbox shaft (including drive sprocket). The model does not take into account road roughness, i.e. it makes use of a perfectly even road surface.

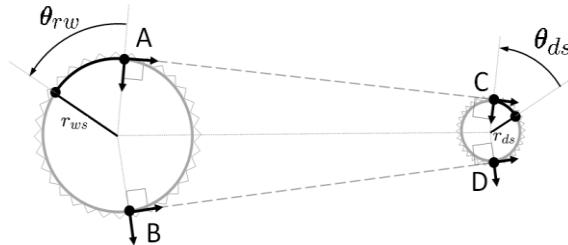
Nineteen degrees of freedom are thus necessary to describe the vehicle motion and trim: three coordinates of the rear wheel contact point with respect to a reference frame ( $x(t), y(t), zr(t)$ ), yaw and roll angles ( $\psi_r(t), \varphi_r(t)$ ), pitch angles of the swingarm and the main frame ( $\mu_2(t), \mu_3(t)$ ) with respect to the horizontal direction, steering angle ( $\delta(t)$ ), front suspension deflection (fk(t)), radial ( $\varepsilon_{rr}(t), \varepsilon_{rf}(t)$ ), lateral ( $\varepsilon_{lr}(t), \varepsilon_{lf}(t)$ ), and torsional ( $\zeta_r(t), \zeta_f(t)$ ) deformation of the tires with respect to the rims, crankshaft rotation angle ( $\theta_{cs}(t)$ ), drive sprocket rotation angle ( $\theta_{ds}(t)$ ) and front and rear wheels rotation angles ( $\theta_{wf}(t), \theta_{wr}(t)$ ).

The rider is modelled as a mass rigidly attached to the main frame, so that the controlling effect due to rider's body movement is neglected. Vehicle control is hence due to the steering torque applied on the front assembly and reacting on the main frame, the front and rear braking torques, and the engine torque. The chain model makes it possible to take into account braking engine torque as well, since it plays a major role in defining the vehicle's trim during braking maneuvers. A detailed description of the chain model will be given in the next section.

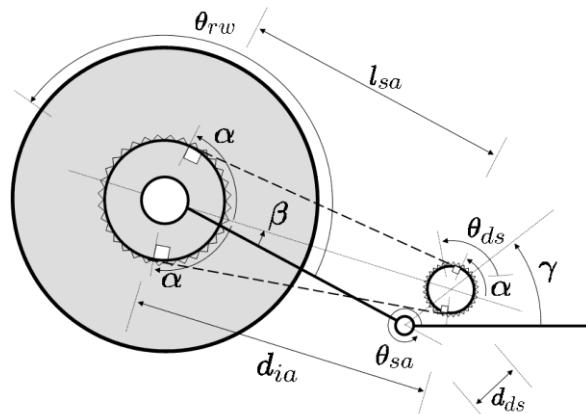
#### 4. TRANSMISSION MODEL

The chain is modeled as a massless visco-elastic thread wrapped around the pinion and chainwheel. When the upper (lower) segment of the chain is stretched it becomes tangent to both the pinion and the chainwheel, defining the tangent points A, B (C, D) in Fig.5 and the kinematic quantities shown in Fig.6.

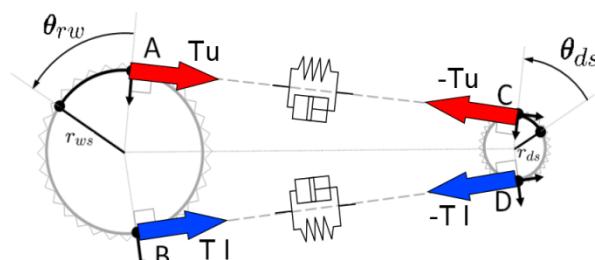
In those points a force is applied, acting on both pinion and chainwheel along the chain line and in opposite direction. This force is proportional to chain extension and to the speed difference of the tangent points, as shown in Fig.7:



**Figure 5.** Chain tangency points of pinion and chainwheel.



**Figure 6.** Chain transmission kinematics.



**Figure 7.** Chain transmission forces.

$$T_u = \begin{cases} k \cdot e_u + c \cdot \frac{de_u}{dt} & \text{if } e_u \geq 0 \\ 0 & \text{if } e_u < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$T_l = \begin{cases} k \cdot e_l + c \cdot \frac{de_l}{dt} & \text{if } e_l \geq 0 \\ 0 & \text{if } e_l < 0 \end{cases}$$

Chain extension is defined as the difference between the upper (lower) rest length (which is a parameter of the model) and the upper (lower) length. The upper (lower) length depends on the chain straight length with zero tension AC (BD) and pinion and chainwheel position:

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{d_{ia}^2 + (rws - rds)^2} \quad (2)$$

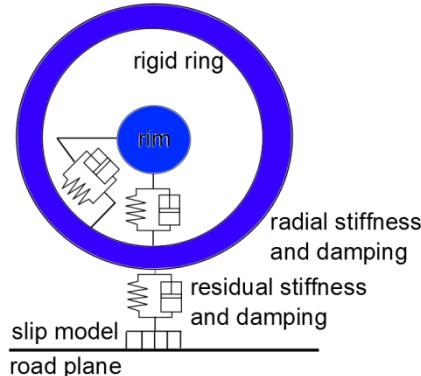
$$e_u = r_{ws} \cdot \theta_{wr}(t) + \overline{AC} - r_{ds} \cdot \theta_{ds}(t) - l_u^0$$

$$e_l = -r_{ws} \cdot \theta_{wr}(t) + \overline{BD} + r_{ds} \cdot \theta_{ds}(t) - l_l^0$$

If the sum of the upper and lower rest length is sufficiently big the two segment are never both tense at the same time. The clutch between crank shaft and first gearbox shaft has been modeled with a nonlinear viscous coupling, whose characteristic has been experimentally measured. A saturation is imposed to the maximum engine braking torque transmittable through the clutch, in order to simulate the anti-hop clutch effect featured in modern four-stroke racing motorbikes.

## 5. TIRE MODEL

The tire model adopted for this application takes into account tire's real shape and carcass deformability. The tire model is of the rigid-ring type [1] thus consisting of two bodies, one considering the rim inertial properties and the other considering the tire belt inertial properties. The first one is rigidly attached to the frame and can rotate of an angle  $\theta_{wf,r}(t)$ , while the second is elastically connected to the first, and two relative motions in the wheel's plane are allowed: radial displacement  $\varepsilon_{rf,r}(t)$ , and angular displacement  $\zeta_{fr,r}(t)$  (Fig.8).



**Figure 8.** Rigid ring tire model.

While Magic formula models are widely used and accepted for modeling tire forces and moments under steady-state conditions, in the frequency range of interest (10-20 Hz) relaxation effects and belt dynamics may become of importance: the rigid ring tire model adopted has been validated up to frequencies of 60-100 Hz and features Magic formula motorcycle [2] slip force calculation and a relaxation length model for the transient slip behaviour. The contact is assumed to be dot-shaped and the contact point actual position depends on both tire deformation and tire shape: any parametric definition of the lateral profile of the unloaded tire as a function of the roll angle may be used, satisfying the

$$\text{tangency condition: } \tan(\varphi) = -\frac{dz_t}{d\varphi} / \frac{dy_t}{d\varphi}.$$

A toroidal profile has been adopted since it does not significantly differ from the measured tire profile (less than 1% at maximum roll angle). Hence the coordinates of the contact point are, being  $r$  the unloaded tire radius and  $\rho$  the toroid radius:

$$\begin{cases} y_t = \rho \cdot \sin(\varphi(t)) \\ z_t = r - \rho \cdot (1 - \cos(\varphi(t))) - \varepsilon_r(t) \end{cases} \quad (3)$$

It can be seen that the contact point velocity components, that will define lateral and longitudinal slip, take into account all of the tire deformations as well as rim rotation speed, as follows (e.g. for the rear wheel):

$$\begin{aligned} VX_r &= \cos(\psi) \cdot \dot{x} + \sin(\psi) \cdot \dot{y} \\ VSY_r &= -\sin(\psi) \cdot \dot{x} + \cos(\psi) \cdot \dot{y} - \dot{\varphi} \cdot (\rho_r - \cos(\varphi) \cdot \varepsilon_{rr}) \\ VSX_r &= VX_r + (\dot{\theta}_{wr} + \dot{\zeta}_r) \cdot (r_r - \rho_r \cdot (1 - \cos(\varphi)) - \varepsilon_{rr}) \end{aligned} \quad (4)$$

Practical slip quantities are defined using the well-known relaxation equations, where  $\sigma_k, \sigma_\alpha$ , are the constant longitudinal and lateral relaxation lengths, and  $u, v$  are the contact point longitudinal and lateral displacements, according to:

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot \frac{du}{dt} + VX_r \cdot u &= -\sigma_k \cdot VSX_r \\ \sigma_\alpha \cdot \frac{dv}{dt} + VSX_r \cdot v &= \sigma_\alpha \cdot VSY_r \end{aligned} \quad (5)$$

Longitudinal and lateral slip values can be easily calculated from:

$$\begin{aligned} \kappa &= u/\sigma_k \\ \tan(\alpha) &= v/\sigma_\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Those quantities, along with wheel camber and vertical load, are passed to the Magic Formula that provides an assessment of lateral and longitudinal driving forces and yaw torque. A rolling resistant torque is also considered, depending on forward speed, vertical and longitudinal forces.

The constraint due to the ground contact is modelled with an unilateral residual stiffness and damping, which exerts a repulsive force when the tire is in contact and no force when the tire is detached from the ground, according to:

$$F_z = \begin{cases} k_{res} \cdot z + c_{res} \cdot \dot{z} & \text{if } z \geq 0 \\ 0 & \text{if } z < 0 \end{cases} \quad (7)$$

where  $F_z$  is the ground vertical force,  $k_{res}, c_{res}$  are the residual stiffness and damping and  $z$  the tire contact point height over the ground. (negative when the tire is detached).

## 6. MOTORCYCLE MODEL KINEMATICS

The description of the position of a reference frame attached to each body is carried out in mixed relative coordinates and reference point methods, using the symbolic procedures developed in Maple by Lot [3]. Only two dependent variables were used, limiting the dimension of the model and thus the computational effort. The constraint equation resulting from the use of dependent coordinates have been handled through the mass-orthogonal projections of position and velocity vectors, as presented by Bayo and Ledesma [4].

The kinematics of the model are derived in the SAE inertial frame (X and Y axes lying on the road plane, Z axis pointing downwards). The origin of the rear contact point reference frame  $T_{cp_r}$  has coordinates  $\{x(t), y(t), z(t), 0\}$  and is rotated around the Z axis by the yaw angle  $\psi(t)$  and around the X axis by the roll angle  $\varphi(t)$  :  $\{\varphi(t), 0, \psi(t)\}$ . The rear tire reference frame  $T_{wr}$ , located in the centre of the un-deformed rear tire, is reached from the previous frame trough a translation  $\{0, -\rho_r \cdot \sin(\varphi(t)), -r_r + \rho_r \cdot (1 - \sin(\varphi(t))), 0\}$  followed by a rotation of the spin angle  $\{0, \vartheta_{wr}(t), 0\}$ . The rear rim reference frame  $T_{r_r}$  is obtained from the previous moving by the rear tire deformation components: the translations  $\{0, 0, \varepsilon_{rr}(t), 0\}$  and the rotation  $\{0, \zeta_r(t), 0\}$ . As it can be easily seen all the frames until now are defined in relative coordinates, using only the system's Lagrangian parameters. In order to obtain a simpler kinematical chain, the chassis and swingarm reference frames are defined using the reference point method: the roll, yaw and pitch angles identifying the frame's direction are measured with respect to the inertial frame. The swingarm reference frame  $T_{sa}$  has its origin in the swingarm pivot  $P_{sa}$ , located at a distance  $\{l_{sa}, 0, 0, 0\}$  from the rear rim reference frame, along a direction tilted by the swingarm pitch angle  $\mu_2(t)$ :  $\{\varphi(t), \mu_2(t), \psi(t)\}$ . The chassis reference frame  $T_f$  has its origin in the intersection point between steering axis and its perpendicular plane passing through  $P_{sa}$ , located at a distance  $\{l_r, 0, 0, 0\}$  from  $P_{sa}$ , along a direction tilted by the chassis pitch angle  $\mu_3(t)$ :  $\{\varphi(t), \mu_3(t), \psi(t)\}$ . Hence the rear suspension angular displacement is  $\eta_{sa}(t) = \mu_3(t) - \mu_2(t)$ . Relative coordinates are again used to define the upper and lower steering reference frames  $T_{Us}$  and  $T_{Ls}$ . The first one has the same origin of  $T_f$  and a subsequent rotation of the steering angle  $\{0, 0, \delta(t)\}$ . The second is obtained from the first by a translation of the actual suspension stroke  $fk(t)$  and the fork offset  $lf$ :  $\{lf, 0, fk(t), 0\}$ . The definition of the front wheel assembly does not make use of the full kinematic chain from  $T_{cp_r}$  to  $T_{Ls}$ , since the expressions would reach intolerable complexity. Thus two dependent coordinates are introduced: front roll angle  $\varphi_f(t)$  and front yaw angle  $\psi_f(t)$ . The dependency between dependent and independent coordinates can be expressed as follows:

$$\begin{aligned}\varphi_f &= \pi/2 - \arcc(c(\varphi(t)) \cdot s(\mu_3(t)) \cdot s(\delta(t)) + s(\varphi(t)) \cdot s(\delta(t))) \\ \psi_f &= -\arctan\left(\frac{c(\mu_3(t)) \cdot s(\delta(t))}{s(\varphi(t)) \cdot s(\mu_3(t)) \cdot s(\delta(t)) - c(\varphi(t)) \cdot c(\delta(t))}\right)\end{aligned}\quad (8)$$

The front rim reference frame has the same origin of  $T_{L_s}$  but its orientation is defined by the three rotations (including front wheel spin):  $\{\varphi_f(t), \theta_{wf}(t), \psi_f(t)\}$ . Consequently the front rim reference frame is obtained from the previous moving by the front tire deformation components: the translations  $\{0, 0, -\varepsilon_{rf}(t), 0\}$  and the rotation  $\{0, \zeta_f(t), 0\}$ . Two more Lagrangian parameters are necessary for describing the motion of the system: the crankshaft rotation angle  $\theta_{cs}(t)$  and the drive sprocket rotation angle  $\theta_{ds}(t)$ , the latter being related by the presence of the clutch model as explained previously.

## 7. CONSTRAINT EQUATIONS

Among all the possible strategies of managing constraint equations in multibody system dynamics, it has been demonstrated [5] that, unless the system is very loosely constrained, the best way to solve constrained equations of motions is by computing a basis of the null space of the constraint's Jacobian matrix, that is introducing a velocity transformation that maps the dependent velocities onto the independent ones. Constraint equations for positions, velocities and accelerations can be written in general form as:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0} \\ \Phi_q \cdot \dot{\mathbf{q}} &= -\dot{\Phi} \equiv \mathbf{b} \\ \Phi_q \cdot \ddot{\mathbf{q}} &= -\ddot{\Phi} - \dot{\Phi}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{c}\end{aligned}\tag{9}$$

leading to the following system of constrained motion equations, where  $\mathbf{q}$  is the vector containing the chosen coordinates,  $\lambda$  is the vector of Lagrange multipliers,  $\mathbf{M}$  is the mass matrix of the system,  $\mathbf{Q}$  is a vector including external forces along with velocity and position dependent terms and  $\Phi_q$  is the Jacobian matrix of constraint equations.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}\tag{10}$$

The desired relation between dependent and independent velocities can be written as  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$  where the columns of matrix  $\mathbf{R}$  are the basis of the aforesaid nullspace of the Jacobian matrix. To do so, the first time derivative of constraint equations can be rewritten by partitioning the dependent velocities from the independent ones:

$$\begin{bmatrix} \Phi_q^d & \Phi_q^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^d \\ \dot{\mathbf{q}}^i \equiv \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}\tag{11}$$

Necessary condition is that  $\Phi_q^d$  is invertible so that  $\dot{\mathbf{q}}^d = -(\Phi_q^d)^{-1} \cdot \Phi_q^i \dot{\mathbf{z}}$ . This allows finding the transformation matrix  $\mathbf{R}$  as:

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} -(\Phi_q^d)^{-1} \cdot \Phi_q^i \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\tag{12}$$

The above transformation can be differentiated with respect to time, obtaining  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ , that is

$$\begin{bmatrix} \Phi_q^d & \Phi_q^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^d \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Phi_q^d & \Phi_q^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^d \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} = -\dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}}\tag{13}$$

This means that the term  $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$  represents the dependent accelerations vector  $\ddot{\mathbf{q}}$  computed with null independent accelerations  $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ , giving the expression:

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{q}}^d \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{array} \right\}_{\ddot{\mathbf{z}}=0} = \left\{ \begin{array}{l} -(\Phi_q^d)^{-1} \dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (14)$$

Substituting  $\ddot{\mathbf{q}}$  in the first row of dynamic equations and pre-multiplying by  $\mathbf{R}^T$  it is possible to obtain the equations of motion in independent coordinates as:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{z}) \cdot \ddot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{R}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) - \mathbf{R}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{z}}(t) \quad (15)$$

The state vector  $\mathbf{y}$  used in numerical integration is composed of the independent velocities and positions, plus the four state variables necessary to describe the tire contact points deflections as follows.

$$\mathbf{y}^T = \{ \dot{\mathbf{z}}^T \quad \mathbf{z}^T \quad u_f \quad v_f \quad u_r \quad v_r \} \quad (16)$$

Thus the state vector has 38 element (17+17+4). The choice of integrating only the independent coordinates requires to solve the position problem at every function evaluation. This does not affect computational efficiency since uncoupled constraint equations have been adopted and no further matrix inversion is hence required.

The constraint equation involving the front yaw angle comes from the previous definition, slightly rearranged to obtain a simpler expression and a simpler time derivative. The equation reads:

$$s(\psi_f)(s(\phi) \cdot s(\mu_3) \cdot s(\delta(t)) - c(\phi) \cdot c(\delta)) = c(\psi_f) \cdot c(\mu_3) \cdot s(\delta) \quad (17)$$

It can be noticed that this equation does not involve the other dependent variable. The constraint equation for the front roll angle cannot be derived from its definition since it would lead to singularities in the first derivative in case of null rear roll angle. Then another constraint equation has been adopted, considering two equivalent definition of the Z component of the front spin axis (one obtained starting from the rear wheel, the other starting from the front contact point), leading to the following expression that, again, does not involve the other dependent variable.

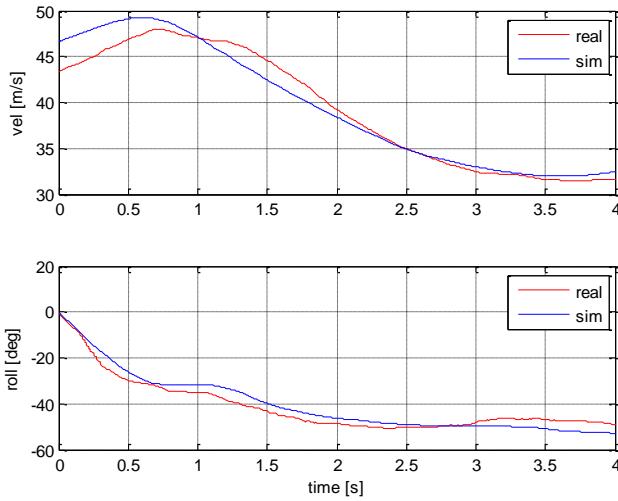
$$s(\phi_f) - c(\phi) \cdot s(\mu_3) \cdot s(\delta) - s(\phi) \cdot c(\delta) = 0 \quad (18)$$

## 8. MANEUVER SIMULATION

The first corner of the reference maneuver (from 3650 m to 3900 m) is simulated, in order to validate the model and to analyse the critical behaviour of the system.

A PID steering controller is used to follow the measured roll profile, while the other controls, engine torque, and front brake torque, are imposed in open loop. A low pass filter is applied to the measured input signals as first, in order to eliminate high frequency components. The integration is carried out with a multistep solver [6].

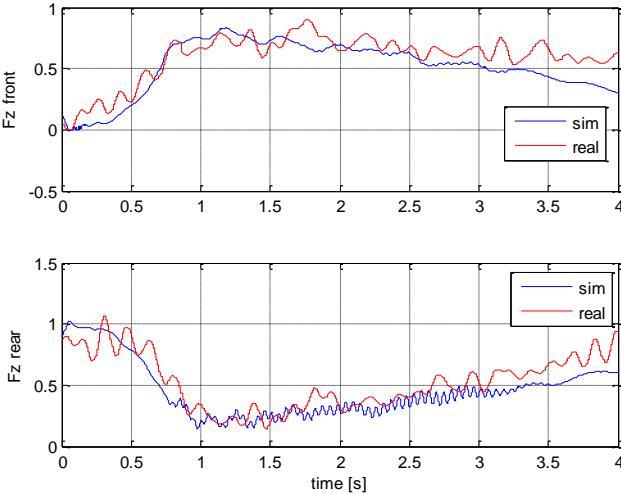
The velocity and roll profiles are presented in Fig.9 with respect to experimental data, showing the consistency of the simulated maneuver. A difference in the initial condition is introduced in order to compensate for the actual initial vehicle acceleration.



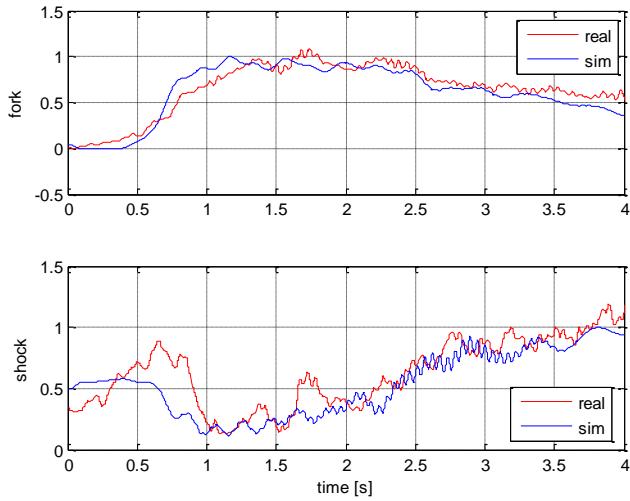
**Figure 9.** Measured and simulated speed and roll profiles

The vertical load acting over the contact points (Fig.9), shows a vibration at 18 Hz, starting at 2 s from the rear, and then propagating at 2.5 s to the front. The amplitude is bigger for the rear, according to experimental evidence. The vibration quickly vanishes as a positive engine torque is applied from 3.5 s. The actual ground forces are reconstructed basing on the inertia measuring unit installed on the motorbike.

The vibration is also present in the suspension strokes (Fig.11). It can be noticed that the vibration takes place around a mean value which is far from zero for both the suspensions, due to the in-plane component of inertial forces generated by roll.

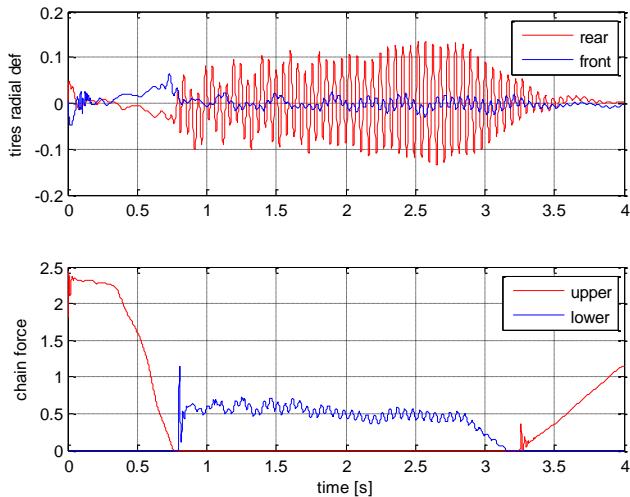


**Figure 10.** Measured and simulated vertical and longitudinal ground forces



**Figure 11.** Measured and simulated suspension strokes

In order to assess the effectiveness of the motorcycle subsystems modelling, in Fig.12 the tires radial deformations and chain forces for the upper and lower chain segment are shown. It can be seen how the rear tire starts vibrating radially at 18 Hz, followed by the front one, when the lower chain segment becomes taut due to the engine brake applied.



**Figure 12.** Simulated tires radial deformations and chain forces

## **9. CONCLUSIONS**

A three dimensional multibody motorcycle model for the analysis of chatter vibration is developed. The main motorcycle subsystems supposed to be involved in the phenomenon are considered and modelled in detail. A complete chain transmission and drivetrain model is implemented, as well as a deformable tire model with Magic formula motorcycle (MF-MTC) slip force calculation and a relaxation length model for the transient slip behaviour. The motorcycle model is thus validated with respect to an experimentally measured manoeuvre. The simulated manoeuvre is consistent with the real one, and a vibration with chattering characteristics indeed shows up. Future developments will include the analysis of the chatter vibration self-excitation mechanism, and the effects of motorcycle frame and swingarm structural compliance on the chattering phenomenon.

## **Acknowledgements**

The present study was supported by the Regione Emilia Romagna, Progetto Tecnopolis POR FESR 2007-2013, Asse 1 Attività I.1.1. The support from Ducati Motor, Ducati Corse Department is also kindly acknowledged

## **REFERENCES**

- [1] Pacejka, H. B., *Tire and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- [2] de Vries, E. J. H., Pacejka, H. B., *Motorcycle tyre measurements and models*, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 29, Supplement 1, Jan. 1998, 280-298.
- [3] Lot, R., Da Lio, M., *A Symbolic Approach for Automatic Generation of the Equations of Motion of Multibody Systems*, *Multibody System Dynamics* 12: 147-172, 2004.
- [4] Bayo, E., Ledesma, R., *Augmented Lagrangian and Mass-Orthogonal Projection Method for Constrained Multibody Dynamics*, *Journal of Nonlinear Dynamics*, 9, 113-130, 1996.
- [5] Von Schwerin, R., *Multibody System Simulation: Numerical Methods, Algorithms, and Software*, Springer-Verlag, 1999.
- [6] Shampine, L. F., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall, New York, 1994.



# **EXTRUSION OF MAGNESIUM HOLLOW PROFILES FOR AUTOMOTIVE APPLICATIONS**

Antonio Segatori

*Department of Industrial Engineering,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: antonio.segatori2@unibo.it*

Barbara Reggiani

*Department of Industrial Engineering,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: barbara.reggiani4@unibo.it.*

Lorenzo Donati

*Department of Industrial Engineering,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: l.donati@unibo.it*

Luca Tomesani

*Department of Industrial Engineering,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: luca.tomesani@unibo.it*

**Abstract.** The use and adoption of magnesium extruded profiles in structural application is limited because magnesium extrusion technology is at its first. Once extruded hollow sections will be available at a reasonable cost, a tremendous increase of market demand is going to be expected due to the lowest weight of the magnesium alloys in comparison with aluminum based ones. The press productivity represent a key factor in this scope and the die, due to the strong incidence of strain and temperature in the extrudability, will play a basic role to achieve the required stem speed. This paper present a new approach for designing extrusion dies specifically for magnesium alloy ZM21 by means of FEM simulation. The goodness of the new design has been validated extruding an hollow profile using an industrial press with data logging.

**Keywords:** extrusion, magnesium, seam weld

## **1. INTRODUCTION**

The market for lightweight extruded profiles is in continuous expansion, especially in the transportation industry where a continuous research for weight cutting is requested by the push to increasing efficiency and pollution restrictions [1]. As competences on extrusion of aluminum alloys reached high levels of shape complexity, the market of ultra-light alloys like magnesium ones is still inaccessible especially in the production of complex or hollow

profiles. Magnesium extrudates is a real alternative to aluminum profiles for its lower weight and comparable mechanical properties respect to 6XXX series. Difficulties arise in a cost sustainable, competitive and reliable production of such alloys for two main reasons: production rates and hollow profiles deformability in further processing (e.g. bending, expansion, hydro-forming). If the latter is mainly related to the direct-extrusion with porthole die method that is not completely solved also for aluminum alloys [2][3][4], production rates is the real main critical point for an effective use of magnesium profiles as aluminum substitute. Indeed the processing of ultra-light alloys requires very low production rates in relation to final profile temperature: too high profile temperatures can induce poor mechanical proprieties, surface defects up to metal firing. For this reason new alloys have been recently developed in order to increase the process productivity and a step ahead has to be realized also in the die design for allowing production rates comparable with 6XXX series alloys.

The extrudate selected for the industrial press trials was a round hollow profile to be used in bike frames actually processed at 0,25 mm/sec RAM speed in relation to the previously explained limits.

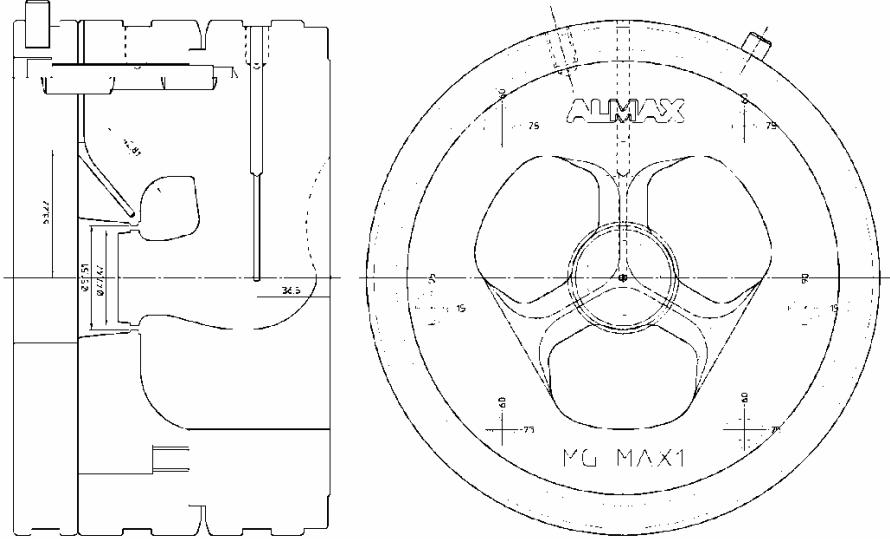
A new concept die purposely designed for magnesium extrusion has been investigated. Despite it is often common practice to adopt die design similar to aluminum production for magnesium, a tailored design has been developed with the aim to increase process efficiency and die resistance. The design has been enhanced using the well known FEM code HyperXtrude® by Altair Engineering. Prior to the die manufacturing, a tool stress analysis has been performed in order to verify the tool resistance under the desired working conditions.

The ZM21 magnesium alloy has been tested at Alubin premises at various speeds in order to evaluate the process rate limit. Finally, expansion tests have been performed on extrudates in order to evaluate the seam weld quality and the possible influence of extrusion rate over it.

## 2. DIE ENGINEERING AND FEM SIMULATIONS

The new die concept was created by Almax Mori taking into consideration the necessity to realize uniform strain ( $\epsilon$ ) increase from die inlet down to die bearings. Once upon chosen the geometry of bridges, welding chambers and bearing areas, steady-state FE simulations where used to establish the optimal number of bridges in order to reduce as much as possible the required RAM force without compromises the mandrel stability.

The final die design is shown in Figure 1. The mandrel present 120° bridges, thus creating equal number of seam welds, which support a lowered mandrel core. Bridges were shaped in order to reduce the amount of heat generation during the material flow as well as the central bridges connection roundly shape for reducing impact loads and ease material flowing by reducing local concentration of strain. Moreover the area where dead metal zone are usually generated were rounded off thus allowing an uniform increase of material strain from feeding ports up to die bearings. Last but not least, a new bearing concept was adopted. In order to allow monitoring of die temperature during extrusion trials, 2 K-type thermocouple were placed through channels in critical points as reported in Figure 1. The first measured the mandrel temperature at a distance of about 25 mm from the deforming alloy. The second thermocouple was placed in the die plate at approximately 3 mm from die bearing zone.



**Figure 1.** FEM engineered die design for the extrusion of a round tube (OD 51.5 mm - ID 47.5 mm) in magnesium alloy ZM21.

A transient simulation were performed using HyperXtrude® using the geometry shown in Figure 1. HyperXtrude® is a FE code based on the fluid-dynamic formulation that adopts an ALE approach. The process parameters fixed by Alubin for the experimental extrusion were used as boundary conditions for the numerical simulations.

In order to perform reliable and accurate FEM simulations, a correct definition of the flow stress dependence on thermo-mechanical parameters is an essential prerequisite. The Garofalo relationship [4] is widely used for modeling the flow stress behavior of aluminum alloys [5]. The flow simulations were run using the material constants shown in Table 1 [1].

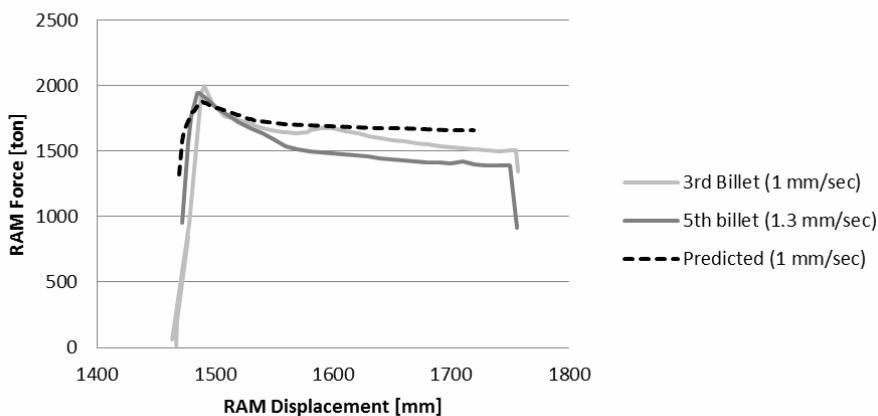
A HTC (Heat Transfer Coefficient) value of 500 W/m<sup>2</sup>°C was imposed at the die-workpiece interface and a HTC of 3000 W/m<sup>2</sup>°C was considered at the container-billet interface. Sixty-five (65 variable time steps were fixed for a total transient simulation time of 485 seconds and 460 mm of billet extruded. The total CPU time was 51hours.

Having no recorded data to use for model validation, the die was produced in 2 copies in order to guarantee a production. After the trials we compared the experimental results for ZM21 extrusion with the predicted RAM force. Figure 2 shows the model validation.

**Table 1.** Constitutive parameters used for the FE simulations.

Alloy	n	Q <sub>HW</sub> [J/mol]	A [sec <sup>-1</sup> ]	a [MPa <sup>-1</sup> ]
ZA21	3.95	164000	1.06E+12	0.024

## RAM Force Comparison - ZM21



**Figure 2.** A posteriori model validation by means of RAM force.

Tool stress analysis were performed in HyperXtrude® for ZA21 in order to reduce the bridge length as much as possible. During the experiments, the die did not show any incipient crack.

### 3. EXPERIMENTAL ACTIVITIES

The round tube with 50.5 mm OD has been extruded by Alubin using a 2100 ton extrusion press with 8" billets container. Two die locations were thermally monitored, while a manual contact K-type thermocouple was used to measure the profile exit temperatures.

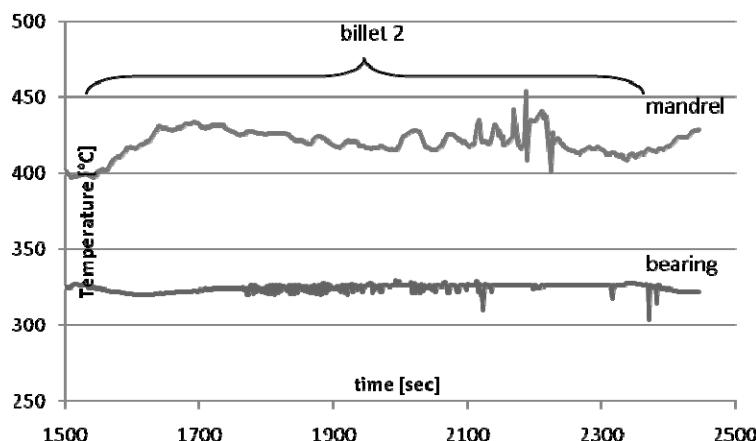
Extrusion load and profile speeds were also monitored during trials by means of press control system along with ram displacement and speed and the acquired pressure converted in press load. Profile surface quality was finally analyzed for each tested condition. Two different alloys were investigated, ZM21 and AZ31, for a total of twelve billet extruded at different ram speeds. Speed has been increased from billet to billet in order to identify a limiting value for profile surface quality and tools endurance.

Trials have been performed using two different billet lengths depending on the alloy: 500 mm length for ZM21 and 360 mm for AZ31. Billets were heated homogeneously at 460°C in a single cell oven, therefore no taper was induced and were loaded on the press at a temperature of 416°C. The only exception is for the last billet, which has been extruded at a lower loading temperature of 350°C in order to verify die strength and influence on surface quality. Container temperature has been measured by manual thermocouple after extrusion and the measure of 414°C was in good agreement with press monitoring system. For the last billet, extruded at the lower temperature, the container was at 404°C. Die preheating temperature was 460°C. Extrusions were stopped at different ram strokes in order to leave a billet butt of about 25 mm which was then completely removed by shearing. Processing conditions and acquired data are reported in Table 1.

#### 4. RESULTS

During die loading and during first billet processing die temperature deeply reduced in relation to the very low ram speed used (0,2 mm/sec): from a 460°C die heating a steady state value of 400°C was reached in the mandrel location while values around 325°C was found in the bearings. Indeed, reversely to conventional aluminum extrusion the process temperature here is controlled by the billet temperature and not by the process speed as consequence of the very low profile speed used (1,4 m/min). As consequence mean die temperature is very low (below 300°C) due to thermal exchange with the press. Thermal evolution for the second billet cycle (0,5 mm/sec ram speed) is reported in Fig. 3. Mandrel temperature is higher respect to bearing temperature: the billet temperature strongly influences the values of the mandrel while the die heat exchange together with low speed keeps the values of the bearings at around 325°C. Increasing ram speed (1,5mm/sec) bearing's temperature and mandrel's temperature increased to 340°C and 465°C respectively; when 2mm/ram speed was used maximum values of 350°C and 470°C were found for bearing and mandrel (Table 1).

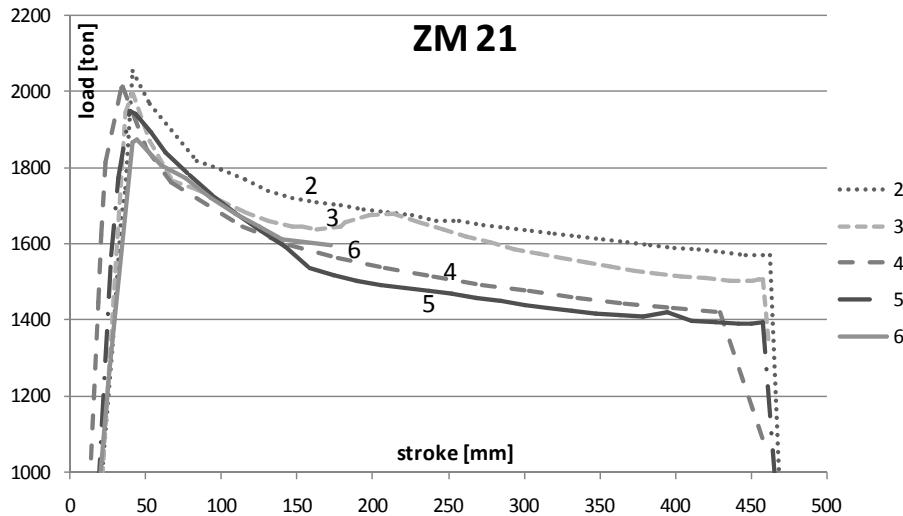
For ZM21 alloy, ram speed was continuously increased from 0,2 mm/sec (1,4 m/min profile speed) of trial 1 up to 2mm/sec (14 m/min) of trial 5 when a deep change of color of the profile occurred, in trial 6 speed was reduced back to 1,3 mm/sec. Similarly for AZ31



**Figure 3.** Temperature measured by thermocouples over time for the second billet.

**Table 2.** Acquired data

	ZM21					
Billet	1	2	3	4	5	6
Ram speed [mm/s]	0,2	0,5	0,6-1	1,5	2	1,3
Profile speed [m/min]	1,4	3,5	4-7	10,4	14	9
Billet temp. [°C]	416	416	416	416	416	416
Max temp (mandrel/bearings) [°C]	400/340	450/330	450/335	465/340	470/350	-/-
Profile temp [°C]	-	350	-	-	-	400



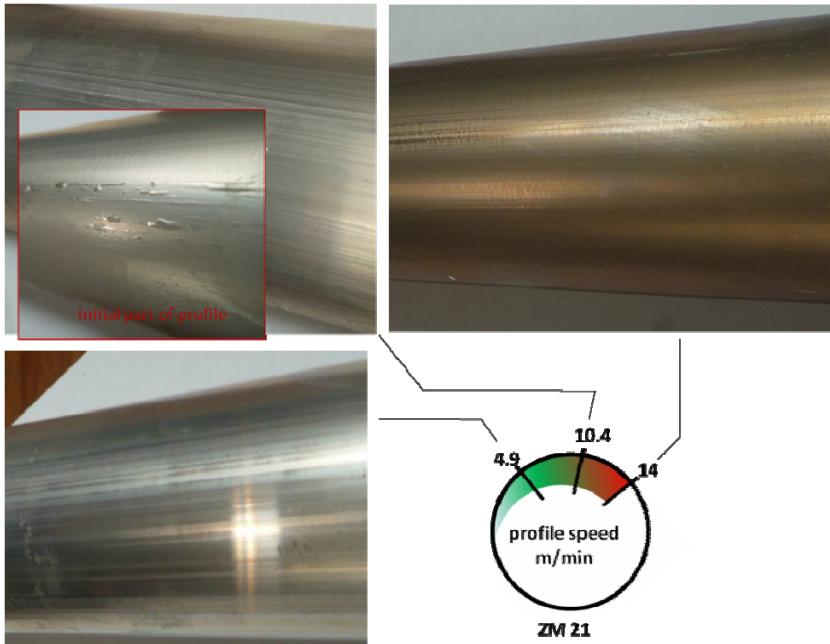
**Figure 4.** Load-stroke curves for the alloy ZM21 extrusions.

alloy the speed was increased from 0,4mm/sec (1,8 m/min) up to 1 mm/sec (7 m/min) where small pick up appeared and up to 1,5 mm/sec (10,4 m/min) when a deep change in profile color appeared; in trials 11 and 12 speeds were reduced to 1 and 0,5 mm/sec respectively.

Figure 4 reports the load-stroke curves for the ZM21alloy. The first billet was used to homogenize the tools temperature and it is not reported in the graphs also due to the stops within the process that would present a curve of no significant peak. All extrusion reached the target speed at the beginning of the extrusion as revealed by a tipped peak in load curve. Billet 3 shows a second lower peak halfway in the extrusion due to a velocity increase from 0,6 mm/s to 1 mm/s (4 m/min to 7 m/min profile speed) that was performed during the process. All load peaks are stable within a range of 1950 and 2050 ton with the exception of billet 6; for such billet the lower peak is due to the effect of a back flow phenomena appeared only in that condition. It can therefore be stated that no particular influence on the load is given by the speed for the alloy and a velocity of 14 m/min of profile speed can thus be achieved without any problems in terms of loads.

Particular attention was given to exiting profile surface in terms of surface quality and defect; it is to be noted that no defect were detected for weld. Defects can appear in terms of different surface coloring or of surface defects as pick up and blisters. These types of defects are immediately visible by means of optical inspection at the press exit.

Figure 5 shows ZM21 profile surface for three different speeds. At about 5 m/min profile did not show any type of defect. At 10.4 m/min some blister defect arose but only in the initial part of the profile within charge welds transition. Such exiting speed can therefore be considered as a good condition for surface quality. At higher speeds as 14 m/min other defective phenomena arose as visible in figure 5: the profile appears of a darker color, as "burned" and further polishing would be needed to remove the burned layer with consequent sensible reduction of thickness. This can be associated to high exit temperature (490°C in this case) developed by the deforming material at high strain rates.

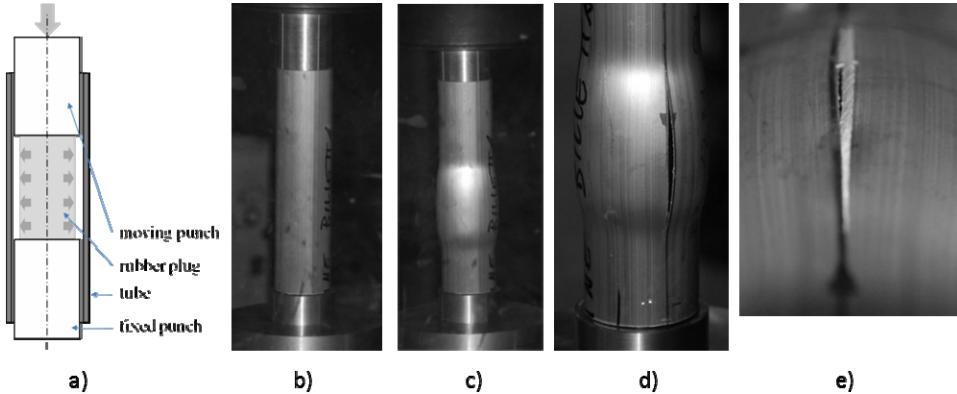


**Figure 5.** Surface quality at different exit speed for ZM21. At 4.9 m/min no defect, at 10.4 m/min some initial blisters, at 14 m/min change in color on surface.

## 5. SEAM WELD

An experimental investigation of seam weld quality was performed in order to evaluate die performance and possible influence of extrusion speed on the seam process. Expansion tests trials were performed by means of compression of a rubber plug in the tube so to induce an hydrostatic pressure inside a section of tube till fracture. Figure 6 shows a schematic of the experimental equipment: a 45 mm diameter and 100 mm length rubber plug was compressed between two punches in a 200 mm long tube section. Dimensions were chosen in order to guarantee both no influence of the rims (by means of tube ends of length greater than the diameter) and uniformity of bulge (through a length of tube subject to loading of about two times the diameter). Five repetition were tested for each condition to guarantee good repeatability; specimens were extracted at the center of the extrudate for each condition in order to avoid influence of butt contamination or other influences of a transient state. Compressions were performed at a constant ram speed of 0.4 mm/s.

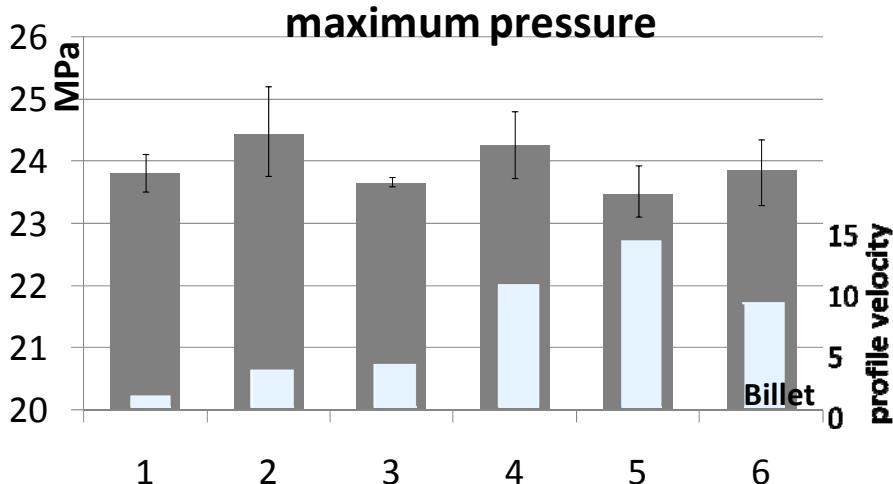
Results showed a good repeatability within each batch, both in terms of fracture type and location as in terms of loads. For each condition the five specimens broke along the same line (a reference line was drown on each tube before cutting specimens so to retrieve the orientation within the repetitions). All fractures showed a 45° orientation in respect to profile surface thus suggesting a ductile fracture as visible in Figure 4d.



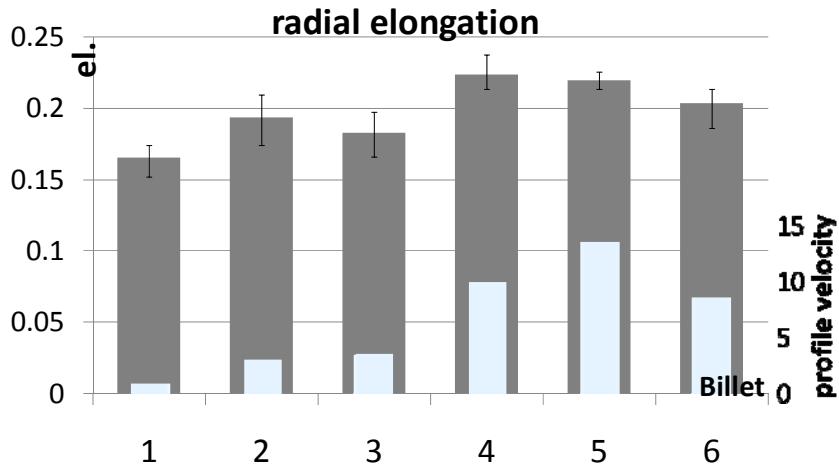
**Figure 6.** a) Draft of experimental equipment; b) a tube at beginning and end of experiment; c) fracture on the bulge; d)  $45^\circ$  fracture orientation.

Figure 7 reports load results in terms of maximum reached pressure over billet; profile extrusion velocity is also shown to evaluate the possible correlation. The difference in load are minimal and the resistances vary in a range of only 2 MPa with no correlation within the increase and variation of extrusion speed.

Figure 8 reports the elongation that was measured on the deformed radius at fracture. Also for elongation a good repeatability of test is present for each experimental batch. All results are within 15 and 24 % elongation. If compared with extrusion speed it is noticeable that at higher velocities a slightly higher ductility is shown by the material. The elongation increase is not directly proportional to speed but there appear to be a step between velocities under 5 m/min of profile speed and over.



**Figure 7.** Maximum pressure for ZM21 specimens (outer bars - left axis scale) and profile extrusion speed (inner bars - right axis scale).



**Figure 8.** Radial elongation at fracture for ZM21 specimens (outer bars - left axis scale) and profile extrusion speed (inner bars - right axis scale).

## 6. CONCLUSIONS

A new die has been designed and tested in order to strongly increase the actual production rates of a magnesium alloy hollow profile. Starting from usual extrusion parameters, die and process were tested on a state-of-the-art aluminium extrusion press for the ZM21 magnesium alloy. Surface quality was analyzed in relation to speed in order to define critical levels. Such levels were determined in terms of surface quality (appearance or visible defects), while no trials produced structural defects in the profile as bad welding or out of tolerance dimensions. Effects of increasing extrusion speed were evaluated also in terms of required load and profile quality. Expansion tests showed that the ram speed increase is not influencing significantly the seam-weld quality for the investigated alloy.

Further jobs will be focused on more complex hollow profiles in order to evaluate the possibility to produce structural magnesium profiles that today are only extruded in aluminium.

## Acknowledgements

The authors would like to underline that this job could not have been done without the Italy-Israel R&D Cooperation Program. Special thanks are due the Ministero degli Affari Esteri - Direzione Generale per i Paesi del Mediterraneo e del Medio Oriente for the support we received in submitting the project MG-MAX under the label EUREKA.

## REFERENCES

- [1] M. El Mehtedi, L. Balloni, S. Spigarelli, E. Evangelista, G. Rosen, B.H. Lee, C.S. Lee, 2007. "Comparative study of high temperature workability of ZM21 and AZ31 magnesium alloys", *Metallurgical Science and Technology*, 23-30.

- [2] G. Liu, J. Zhou, J. Duszczyk, 2008. “FE analysis of metal flow and weld seam formation in a porthole die during the extrusion of a magnesium alloy into a square tube and the effect of ram speed on weld strength”. *Journal of Materials Processing Technology*.
- [3] M. Easton, A. Beer, M. Barnett, C. Davies, G. Dunlop, Y. Durandet, S. Blacket, T. Hilditch, and P. Beggs, 2008. “Magnesium Alloy Applications in Automotive Structures”, *JOM*.
- [4] L. Li, H. Zhang, J. Zhou, J. Duszczyk, G.Y. Li, Z.H. Zhong, 2008. “Numerical and experimental study on the extrusion through a porthole die to produce a hollow magnesium profile with longitudinal weld seams”. *Materials and Design* 29, 1190–1198.
- [5] J.Bohlen, J.Swoistek, W.H.Sillekens, P.-J. Vet, D.Letzig, K.U.Kainer, 2005. In *Magnesium Technology 2005*, TMS, p.241.
- [6] C. Bruni, L. Donati, M. El Mehtedi, M. Simoncini, 2008. “Constitutive models for AZ31 Magnesium alloys” *Key Engineering Materials* Vol. 367, pp. 87-94.

# NUMERICAL VIBRO-ACOUSTIC ANALYSIS OF GEAR PUMPS FOR AUTOMOTIVE APPLICATIONS

Emiliano Mucchi

*Engineering Department in Ferrara(EnDIF),*

*University of Ferrara, Italy*

*E-mail: emiliano.mucchi@unife.it*

Giorgio Dalpiaz

*Engineering Department in Ferrara(EnDIF),*

*University of Ferrara, Italy*

*E-mail: giorgio.dalpiaz@unife.it*

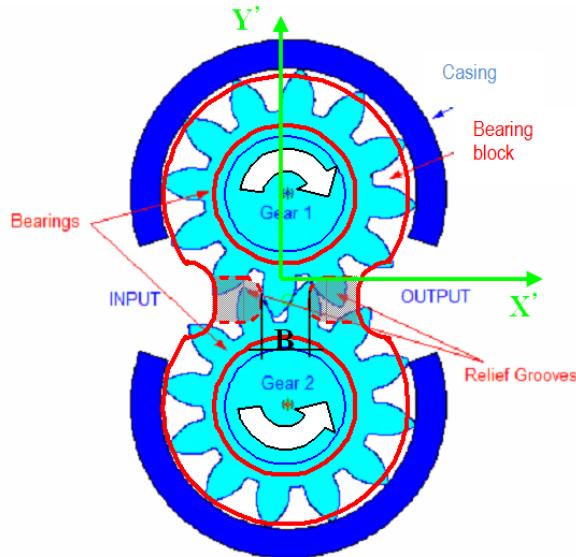
**Abstract.** In this work a combined model for the vibro-acoustic analysis of an external gear pump for automotive applications is presented and experimentally assessed. The model includes a lumped-parameter model, a finite-element model and a boundary-element model. The lumped-parameter (LP) model regards the interior parts of the pump (bearing blocks and gears), the finite element (FE) model regards the external parts of the pump (casing and end plates), while the boundary element (BE) model estimates the noise generation in operational conditions. Attention has been devoted to the inclusion of the oil effect inside the pump casing: the fluid-structure interaction between oil and pump casing was taken into account. The model has been assessed using experiments: the experimental accelerations and acoustic pressure measured in operational conditions have been compared with the simulated data coming from the combined LP/FE/BE model. Eventually, model results and limitations are presented.

**Keywords:** vane pumps, vibro-acoustic analysis, elasto-dynamic analysis.

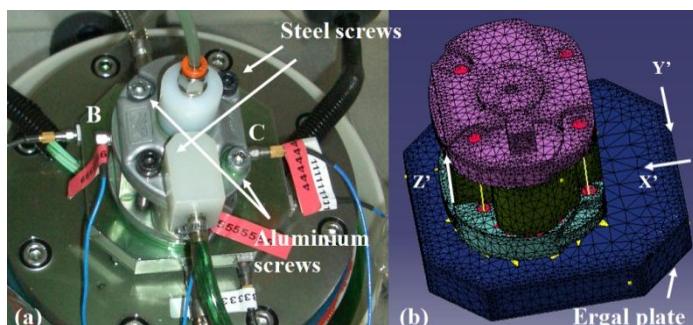
## 1. INTRODUCTION

It is well known that in the automotive field there is an increasing demand for components producing low levels of noise and vibrations, for comfort reasons. Noise and vibration control is not an easy task, as the final comfort result depends on a number of factors. This task requires a good knowledge of the system dynamic behavior: to this end, mathematical models can be very useful tools for the identification of noise and vibration sources. Moreover, the use of mathematical models allows to predict the effects of design modifications and to reduce the number of tests required for design improvements. The mechanical system under study is an external gear pump for vehicle steering. The most usual configuration has two twin gears (see Figure 1), which are assembled by a couple of lateral floating bearing blocks that act as seals for the lateral ends. Gears and floating bearing blocks are jointly packed inside a casing that encloses all the components and defines the isolated spaces that carry the fluid from the low to the high pressure chamber. The bearing blocks act as supports for the gear shafts by means of two hydrodynamic bearings, which are hydraulically balanced in order to avoid misalignments between gear shaft and journal bearing. Power is applied to the shaft of one gear (gear 1) and transmitted

to the driven gear (gear 2) through their meshing. The driving shaft is connected by an Oldham coupling with an electrical drive. This pump works with a pressure ranging from 3.5 to 100 bar and angular speed ranging from 1500 to 3400 rpm. The authors have already developed some research activities about the vibration modeling of the moving components of gear pumps by means of a lumped-parameter (LP) models, as well as the experimental assessment [1][2][3]. In this work a combined lumped-parameter finite-element boundary-element model of an external gear pump for automotive applications is presented and experimentally assessed.



**Figure 1.** Schematic of the gear pump and reference frame



**Figure 2.** (a) Pump in the test bench with transducers and (b) relative FE model with reference frame X'Y'Z'.

## 2. METHOD

The combined model developed in this research integrates a lumped-parameter model, a finite-element model and a boundary-element model of a gear pump. The model aims at evaluating the acceleration on the exterior parts of the gear pump (external surface of the casing, flange, cover) as well as the acoustic pressure during operational conditions. The used methodology is as follows. The lumped-parameter (LP) model of the moving components gives as output the dynamic forces and torques acting on the gears; in particular, the forces exchanged between the gears and the casing are the pressure forces and bearing reactions. These are the forces exciting the casing vibrations. Then, a finite-element (FE) model of the pump casing (also including the experimental apparatus) was developed and used in order to estimate the casing vibrations caused by the exciting forces applied by the gears and obtained by the LP model. Finally, the casing vibrations are used as input data in an indirect boundary element (BE) model for the estimation of the acoustic pressure in different operational conditions. In this sense the model is globally a combined LP/FE/BE model. For the development of the combined model it is assumed that the casing vibration produces negligible influences on the moving part dynamic behaviour. The presented model has been experimentally assessed by a number of experiments: modal analysis, frequency response function measurements, acceleration, force and acoustic pressure measurements. Hereafter, an overview of the three models and the relative validation procedures are shown.

### 2.1 Lumped parameter model of the rotating components

A non-linear lumped-parameter kineto-elastodynamic model was built in order to evaluate the dynamic behaviour of the internal components of the gear pump. The model takes into account only transversal plane dynamics; this assumption is acceptable because model regards spur gears. The model has six degrees of freedom. For each gear, degrees of freedom are the displacements along directions X' and Y' shown in Figure 1 and the angular displacement. The model includes the main important phenomena involved in the pump operation as time-varying oil pressure distribution on gears [4][5], time-varying meshing stiffness and hydrodynamic journal bearing reactions [6]. The meshing phenomena have been widely developed; in fact, this type of gears works at low loads and consequently the effects of tooth profile errors and tooth separation could not be ignored. The model takes into account the parametric excitations due to the time-varying meshing stiffness and the tooth profile errors (obtained by a metrological analysis); the effects of the backlash between meshing teeth, the lubricant squeeze and the possibility of tooth contact on both lines of action were also included in the model. The oil pressure distribution on gears is also time-varying: it is instantaneously computed and the resultant force and torque are obtained taking into account the case wear as well as the displacement of the lateral floating bearing block. The non-linear behaviour of the hydrodynamic journal bearings is also included, as well as the torsional stiffness and damping of the driving shaft. As a consequence, the model is highly non-linear. The equations of motion give the dynamic equilibrium among the pressure forces and torques on the gears, the meshing forces, the driving external torque, the bearing reactions and the gear inertia forces and torques. The complete formulation can be found in [1][2][3]. Experimental tests were carried out on a test bench (Figure 2a) available at the company site. The pump under testing is fastened on an ergal plate that also provides proper connections to low and high pressure oil pipes; moreover the plate is equipped with four high impedance quartz-based triaxial force sensors. The pump is driven by an electrical motor equipped with inverter; the plate has an hole for the driving

shaft. The assessment of the LP model was presented in [7] where the comparison between simulations and experimental results concerning forces and moments has been presented. In particular a specific validation procedure has been developed “ad hoc” for the pump under study in order to assess the dynamic model because it has not been possible to directly obtain vibration data concerning rotating components.

## 2.2 Finite element model of the casing

The structural FE model not only regards the gear pump, but also the plate to which the pump is fastened during the experimental tests. In fact the model must be validated using experiments and therefore it has been modelled the same apparatus used for the experimental measurements, i.e. the pump, the ergal plate and the four force sensors supporting the plate as shown in Figure 2b. Obviously, once the model has been assessed, it should be possible to model the real boundary conditions as in the actual location in a vehicle. It can be noted that the test bench used in the validation of the LP/FE model is the same test bench used for the validation of the LP model (Figure 2a). In more details, the structural FE model includes the casing, the two end-plates (the lower one is indicated as flange and the upper one as cover), as well as the ergal plate to which the pump is fastened on the test bench and the four force sensors supporting the plate. The casing and the two end-plates are meshed using tetrahedral elements. In the actual pump, the three components are fastened together by means of two steel screws as shown in Figure 2a. The two screws, with proper tightening torque, guarantee the connection between the casing and the end-plates. The two screws are modelled as beam elements having the same inertia properties of the actual screws joined to the surrounding mesh of the end-plates by means of interpolation spiders (Figure 3a). The screw tightening torque is not applied to the screws in the model because it represents a static torque and therefore it gives no contribution in a dynamic analysis. Moreover, the tightening torque produces the effect of joining the casing surface to the end-plate surfaces. Therefore, in order to model this effect, rigid spider connections are used to connect the casing surface with the end-plate surfaces as shown in Figure 3a. Furthermore, the presence of bearing blocks, oil, gears and relief valve is taken into account. Each of these components is modelled by means of a concentrated mass and an inertia momentum located in its centre of mass and connected to the surrounding mesh by means of interpolation spiders. The ergal plate of the test bench is modelled using tetrahedral elements. The ergal plate is connected to the pump by means of two aluminium screws (Figure 2a). These screws are modelled using beam elements - in the same way as for the steel screws - and are connected to the ergal plate and to the pump by means of interpolation spiders (Figure 3a). Moreover, rigid spiders are used between the end-plate lower surface and the ergal plate surface for modelling the connection between the two surfaces and in order to avoid penetration between the surfaces themselves. The ergal plate is connected to ground by four triaxial force sensors located under the ergal plate. These sensors are modelled by means of spring elements having the nominal stiffness of each sensor.

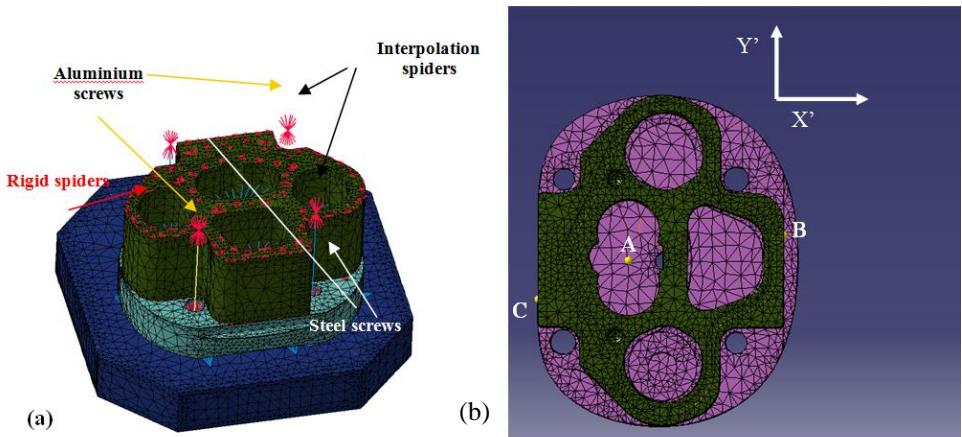
Experimental tests have been carried out in order to validate the structural FE model. In particular, frequency response function (FRF) measurements have been acquired in the pump fastened to the test bench exciting point C in direction X' (Figure 3b) by an hammer and measuring the acceleration response along the same direction by an accelerometer located in point B (Figure 3b). The FRF test has been performed in two different conditions: without oil inside the pump and with the presence of oil at 23 bar. In this second test, the 23 bar pressure has been obtained by an external equipment. Figure 4 shows the

comparison of the experimental FRFs at the two mentioned operational conditions, in the frequency range between 2000 and 4000Hz, where the main pump modes occur. The figure clearly shows two peaks at about 2300Hz and 2700Hz corresponding to the first two natural frequencies of the pump. It is interesting to note that the peaks referring to the condition “without oil” occur at major frequencies than the peaks referring to the condition “with oil at 23 bar”. This is due to the mass effect that the oil introduces in the system under study. This phenomenon is captured by the developed structural FE model, which includes the effect of the oil as concentrated mass (see also Section 3). The figure also highlights that the amplitude of the FRF is higher in the case “with oil at 23 bar”, due to the contribution of the oil in pressure. This phenomenon is not considered by the structural FE model presented above. However, it is very important since the FRF amplitude is increased of about 4 times in correspondence of the peak at 2700Hz (from 6 to 24 kg<sup>-1</sup>), see Figure 4. For this reason, the structural FE model was improved and a coupled vibro-acoustic problem (acoustic and a structural problem) has been solved simultaneously to include the mutual coupling interaction between the fluid pressure and the structural deformation. Figure 5 depicts the cavity mesh developed for the pump being studied, which has been coupled to the structural one for the solution of the vibro-acoustic problem. The cavity mesh has the fluid properties of the pumping oil. In order to verify the effectiveness of the coupled vibro-acoustic FE model with respect to the genuine structural FE model described above, an FRF analysis (SOL 111 in MSC.Nastran driven from LMS Virtual.Lab [8][9]) is carried out with excitation point in C and response point in B, along X' direction. It is worth noting that the damping introduced in this numerical FRF analysis is evaluated by means of the experimental modal analysis performed on the pump at the condition “with oil at 23 bar”, see Table 1.

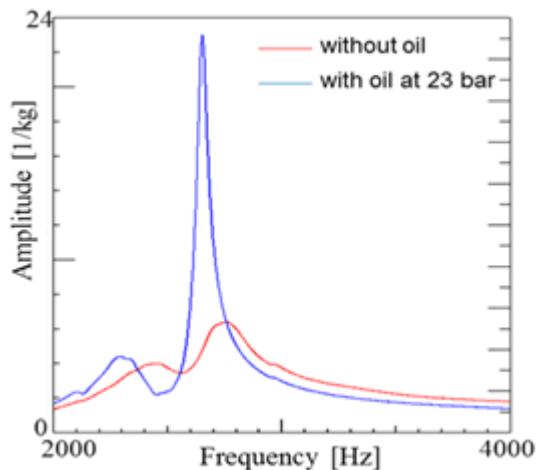
On the vibro-acoustic FE model, a forced analysis has been carried out (SOL 111 in MSC.Nastran) with the aim at obtaining the vibration level on the entire pump in operational conditions. The excitations are the pressure forces and moments and the bearing reactions exchanged between the gears and the casing as well as the variable output pressure of the oil exerted to the pump casing, flange and cover. The LP model gives as outputs the dynamic forces acting on gears that obviously have the same modulus and direction but opposite sense of the forces acting on the casing as shown in Figure 6. These are actually two pressure forces and two bearing forces, concerning the two gears. As an example of these forces, Figure 7 shows the pressure force and bearing reaction of gear 1 along the X' direction at the operational condition of 3000 rpm and 90 bar as a function of frequency. Such forces have peaks in correspondence of the meshing frequency, as expected. In the vibro-acoustic FE model, such forces have been located in the centre of the cavity where the gears are housed, as shown in Figure 6. The LP model can also estimates the variable output pressure. This pressure has been applied to the areas depicted in Figure 8 where actually this pressure acts in operational conditions. The forced analysis has been carried out using excitations estimated by the LP model at the operational condition of 3000 rpm and 90 bar.

**Table 1.** Experimental modal damping obtained by modal analysis in different scenarios

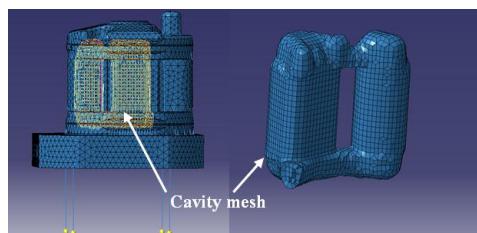
Scenario	Modal damping [%] for the 1 <sup>st</sup> mode	Modal damping [%] for the 2 <sup>nd</sup> mode
Without oil	6	4
With oil at 23 bar	5	0.87



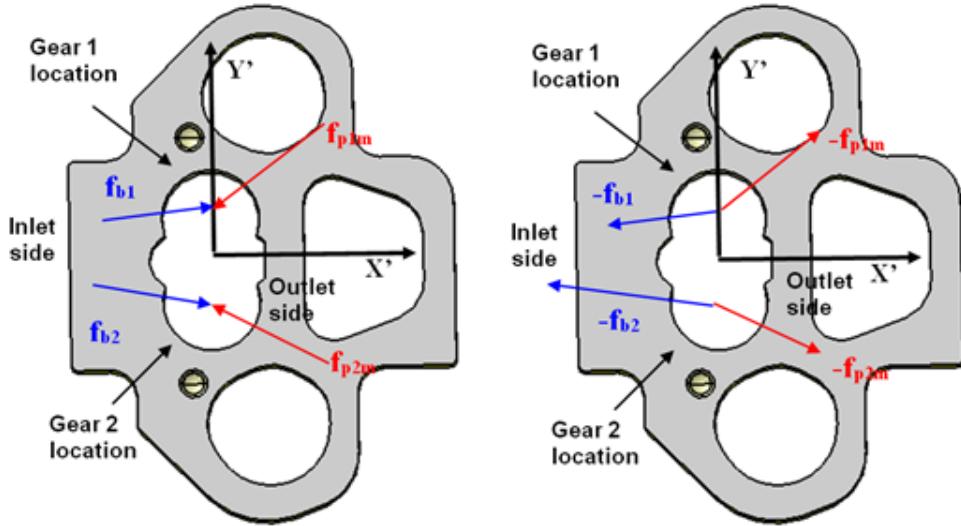
**Figure 3.** (a) Beam elements modelling the screws (in blue and yellow) and rigid spiders (in red) between case and cover and (b) input and output points set in the FRF analysis.



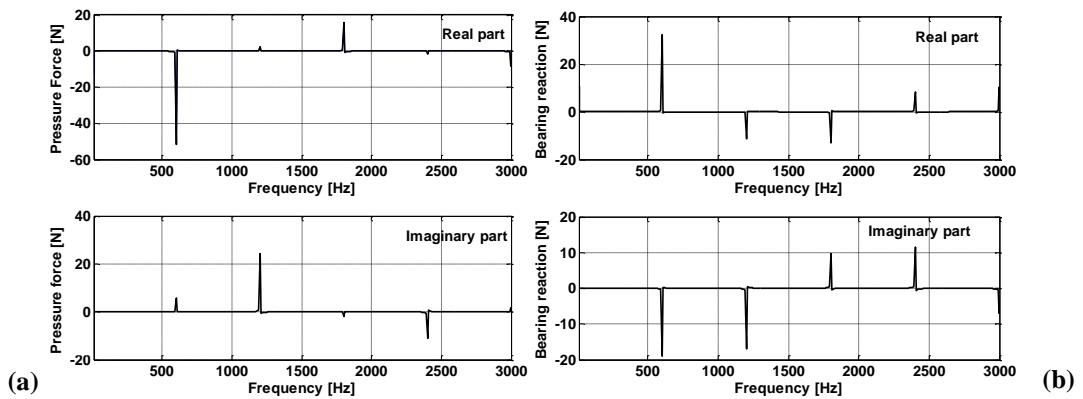
**Figure 4.** Experimental FRF amplitude for tests without oil and with oil at 23 bar with excitation in C and response in B, along the X' direction.



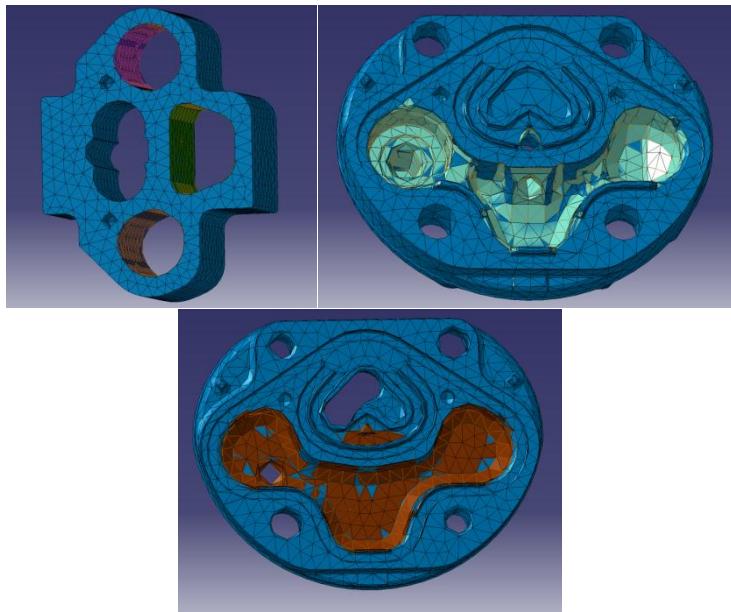
**Figure 5.** Cavity mesh.



**Figure 6.** Pressure forces and bearing reactions acting on gears (left) and on the casing (right).



**Figure 7.** Pressure forces (a) and bearing reactions (b) acting on gear 1 at the operational condition of 3000 rpm and 90 bar.



**Figure 8.** Areas of application of the variable output pressure.

### 2.3 Boundary element model simulating noise generation

The vibration level on the pump surface obtained by the forced vibro-acoustic FE analysis has been used as input data for the acoustic simulation in order to determine the noise emitted by the pump in operational conditions. The developed acoustic model should reproduce the acoustic behaviour of test bench in which the pump has been experimentally tested, in order to enable the comparison between experimental and numerical data. The same test bench used for the validation of the LP and FE model has been used hereafter for the acoustic characterization (Figure 2a). Two microphones have been used in order to measure the acoustic pressure in operational conditions, located at a distance of 20 cm from the pump. From an acoustic point of view, the test bench represents a chamber with walls of unknown acoustic impedance. The chamber's walls are sandwich panels of steel and mineral wool. The indirect BE method has been used in order to model such a system, since we are interested in the acoustic pressure field in the exterior of the pump and in the interior of the test bench. By means of the indirect BE method the interior and exterior problem are solved simultaneously. Two output points,  $B^*$  and  $C^*$  (on the same side as points B and C used during the vibration analysis, respectively) have been located in the same position as the microphones in order to estimate the acoustic pressure to be compared with experiments (see Figure 9a). The test bench walls have been modelled as a box of the same dimension as the real one (see Figure 9b) and characterized by the complex acoustic impedance of the mineral wood (variable in the frequency domain). The acceleration level on the pump casing surface obtained by the previous vibro-acoustic FE analysis (Section 2.2) has been used as input data for the determination of the acoustic pressure inside the box.

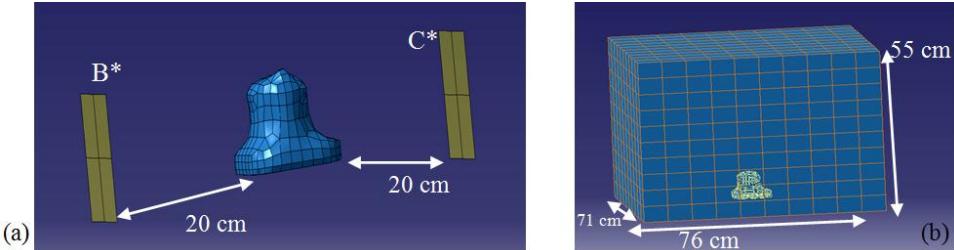
### 3. VALIDATION RESULTS AND DISCUSSION

Hereafter the results concerning the vibro-acoustic FE model and BE model are compared with experiments. Model results have been obtained by using pump parameters of Table 2.

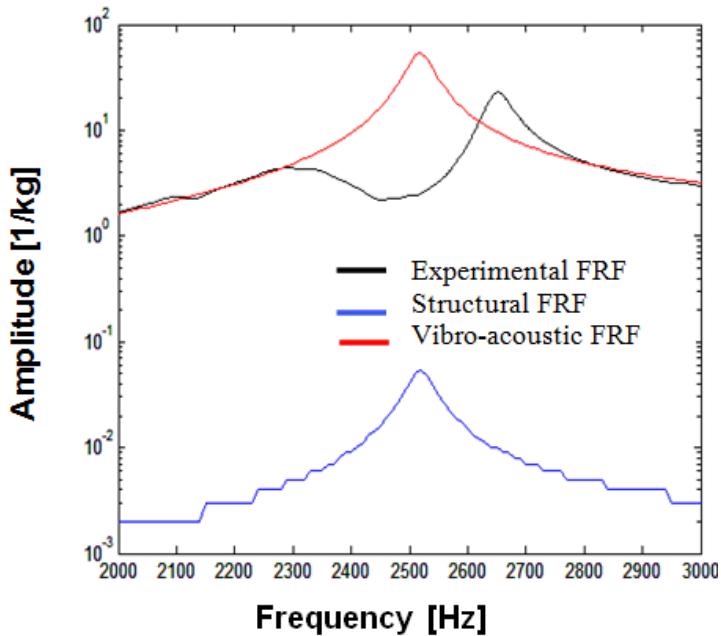
The numerical FRFs obtained by the vibro-acoustic FE model and the structural FE model are compared with the experimental FRF obtained by hammer and accelerometers (see Section 2.2). Figure 10 depicts such a comparison in the frequency range of interest (2000-3000Hz), where normal modes occur. The amplitude of the vibro-acoustic FRF is similar to the amplitude of the experimental FRF. On the other hand, the structural FRF presents amplitude extremely smaller than the experimental one, as already described in Figure 4. Concerning the frequency contents, Table 3 resumes the first two natural frequencies for the same three scenarios of Figure 10. The numerical natural frequencies are obtained by a modal analysis, SOL 103 in MSC.Nastran driven from LMS Virtual.Lab. The results concerning the structural simulation and the vibro-acoustic simulation are the same in terms of natural frequencies (Table 3). This is due to the fact that both the structural FE model and the vibro-acoustic FE model take into account the oil mass, the first as concentrated mass, while in the second by the mesh. The difference in percentage between the experimental frequencies and the numerical ones is 13% and 5% for the first and second natural frequency, respectively. This difference is also confirmed by the peak location along the horizontal axis in the FRFs of Figure 10.

**Table 2.** Dimensions and properties of gears

Value for gear 1	Value for gear 2	Description
	$a = 14.65 \text{ mm}$	Centre distance of gear pair
$b_1 = 12.1 \text{ mm}$	$b_2 = b_1$	Gear face width
	$E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	Young's modulus
	$\nu = 0.3$	Poisson's ratio
$J_1 = 4.0714 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_2 = 3.9564 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Moment of inertia
$K_T = 8.053 \cdot 10^2 \text{ Nm/rad}$	-	Torsional stiffness of the driving shaft
$m_1 = 0.0333 \text{ kg}$	$m_2 = 0.0216 \text{ kg}$	Mass
	$\hat{m} = 1.150 \text{ mm}$	Gear module
$r_{b1} = 6.484 \text{ mm}$	$r_{b2} = r_{b1}$	Base radius
$\hat{x}_1 = ***$	$\hat{x}_2 = \hat{x}_1$ (*** confidential)	Addendum modification coefficient (*** confidential)
$z_1 = 12$	$z_2 = z_1$	Number of teeth
	$\alpha = 20 \text{ deg}$	Pressure angle
	$B_{oil} = 1400 \text{ MPa}$	Oil bulk modulus
	$\mu = 14 \text{ mPa s}$	Lubricant dynamic viscosity



**Figure 9.** (a) BE model and relative output points ( $B^*$  and  $C^*$ ) and (b) dimension of the box representing the test bench.

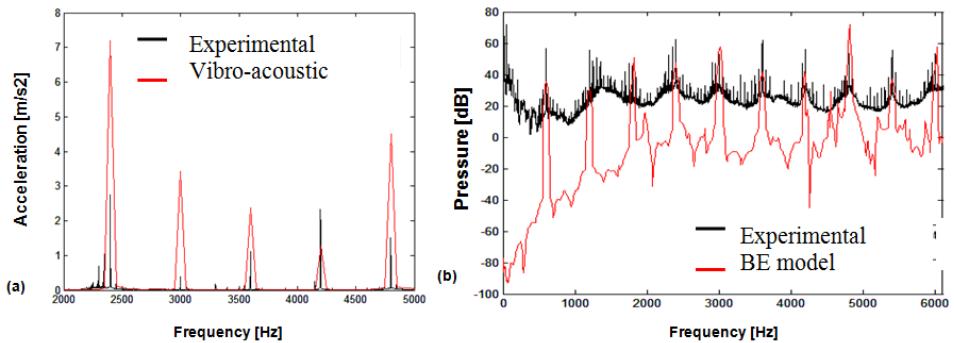


**Figure 10.** Amplitude of FRFs with excitation in C and response in B, along the  $X'$  direction.

Figure 11a shows the comparison between the experimental and numerical acceleration spectra of the casing surface in correspondence of point B (Figure 3b). The experimental acceleration has been measured by means of piezoelectric accelerometer mounted on point B at the operational condition of 3000 rpm and 90 bar, while the numerical one has been obtained by the forced analysis performed on the vibro-acoustic FE model. The curves show peaks in correspondence of the meshing frequency and relative harmonics as expected. The peaks are amplified by the resonances of the casing, in particular at the frequency around 2400Hz. The comparison between the numerical and experimental curves highlights that the developed model is able to capture the trend of the experimental curves, even if differences occur, in particular at the meshing frequencies of 2400Hz (3rd harmonic) and 3000Hz (4th harmonic).

**Table 3.** First two natural frequencies obtained from experimental modal analysis, structural FE simulation and vibro-acoustic FE simulation.

Mode	Experimental $f_n$ [Hz]	Structural $f_n$ [Hz]	Vibro-acoustic $f_n$ [Hz]
1	2325	2013	2013
2	2651	2518	2518



**Figure 11.** (a) Acceleration spectra in point B at 300rpm and 90 bar and (b) acoustic pressure spectra at location B\*: experimental and simulation results

Figure 11b shows the comparison between the experimental and numerical spectra of the acoustic pressure in correspondence of field point B\*. The figure shows the first ten harmonics of the meshing frequency, between 600Hz (1st harmonic) and 6000Hz (10th harmonic). Differences between numerical and experimental occur in the amplitude of several harmonics (1st, 2nd, 4th, 6th, 7th) while for others (3rd, 5th, 10th) the correspondence is good. In between the harmonics, the spectra are largely different: this is due to the excitation forces estimated by the LP model, which exist only in correspondence of the meshing frequency and relative harmonics, while they are zero elsewhere. However, this difference does not influence the global acoustic behaviour that is dominated by the highest harmonics peaks. Globally, the pressure level estimated by test is 73.8 dB and it is 74.4 dB when estimated by the model. This means that the model is able to capture the global vibro-acoustic behaviour of the real pump.

#### 4. CONCLUDING REMARKS

This work addresses the development of a combined LP/FE/BE model for the vibro-acoustic analysis of gear pumps for automotive applications. The lumped-parameter part of the model aims at obtaining the gear accelerations and the forces between the moving parts and the casing, the FE model estimates the external casing accelerations using the excitation forces coming from the LP model; the BE model estimates the noise emitted by the pump in operational conditions. Particular attention has been paid in the inclusion of the oil effect inside the pump casing: the fluid-structure interaction between oil and pump casing has been taken into account. The model has been experimentally assessed. The

validation results show that the model is able to foresee system resonances and to estimate the amplitude of the vibrations on the external surfaces of the pump as a function of working conditions as well as the emitted noise. This model could be a very useful tool in prototype development and in design optimisation in order to identify the origin of unwanted dynamic effects. However differences between numerical and experimental data still exist.

In order to improve the accuracy of the simulation results and therefore in order to achieve a behaviour closer to the real measurements, the model should be further developed. In particular, in the forced analysis of the vibro-acoustic FE model, damping has been introduced as modal damping estimated by an experimental modal analysis (EMA). This EMA was performed on the pump at the condition “with oil at 23 bar”, in which the 23 bar pressure has been obtained by an external equipment. On the contrary the vibro-acoustic FE forced analysis has been carried out at the output pressure of 90 bar. It has been demonstrated that the modal damping is very sensitive to the output pressure. Table 1 collects the modal damping values obtained by an experimental modal analysis at two different conditions: “without oil” and “with oil at 23 bar”. The difference is large in particular for the 2nd mode, as also depicted in Figure 4. Therefore, it is expected that the modal damping is different for a pressure of 90 bar. Further investigations have to be carried out about this aspect, in order to estimate the modal damping corresponding to 90 bar of output pressure and include its in the numerical forced analysis. Furthermore, the effective acoustical impedance of the test bench walls has to be experimentally determined.

## Acknowledgements

This work has been developed within the Advanced Mechanics Laboratory (MechLav) of Ferrara Technopole, realized through the contribution of Regione Emilia-Romagna - Assessorato Attività Produttive, Sviluppo Economico, Piano telematico – POR-FESR 2007-2013, Activity I.1.1.

## REFERENCES

- [1] E. Mucchi, G. Dalpiaz, A. Fernàndez del Rincòn, *Elasto-dynamic analysis of a gear pump. Part I: pressure distribution and gear eccentricity*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24 (2010), pp. 2160-2179.
- [2] E. Mucchi, G. Dalpiaz, A. Rivola, *Elasto-dynamic analysis of a gear pump. Part II: meshing phenomena and simulation results*, Mechanical Systems and Signal Processing Vol. 24 (2010), pp. 2180-2197.
- [3] E. Mucchi, G. Dalpiaz, A. Rivola, *Dynamic behaviour of gear pumps: effect of variations in operational and design parameters*, Meccanica Vol. 46, No. 6 (2011), Page 1191-1212.
- [4] B. Zardin, F. Paltrinieri, M. Borghi, M. Milani, *About the prediction of pressure variation in the inter-teeth volumes of external gear pumps*, in: Proceedings of the 3rd FPNI-PhD Symposium on Fluid Power, Spain, 2004.
- [5] C. Bonacini, M. Borghi, *Calcolo delle pressioni nei vani fra i denti di una macchina oleodinamica ad ingranaggi esterni*, Oleodinamica-pneumatica, 1991 (in Italian).
- [6] D. Childs, H. Moes, H. Van Leeuwen, *Journal bearing impedance descriptions for rotordynamic application*, Journal of lubrication technology, 99 (1977) 198-214.

- [7] G. Dalpiaz, A. Fernández del Rincón, E. Mucchi, A. Rivola, *Experimental validation of a model for the dynamic analysis of gear pumps*, Proceedings of Novem 2005, Saint Raphael, France, 2005.
- [8] MSC, MSC.NASTRAN, Version 2011, 2011.
- [9] LMS International, LMS Virtual.Lab, 2011.



# NONLINEAR VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELLS: EFFECT OF THE COMPANION MODE PARTICIPATION

Angelo Oreste Andrisano

*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: angeloreste.andrisano@unimore.it*

Francesco Pellicano

*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: francesco.pellicano@unimore.it*

Matteo Strozzi

*Department of Engineering “Enzo Ferrari”,  
University of Modena and Reggio Emilia, Italy  
E-mail: matteo.strozzi@unimore.it*

**Abstract.** In this paper, the effect of the companion mode participation on the nonlinear vibrations of functionally graded (FGM) cylindrical shells is analysed. The Sanders-Koiter theory is applied to model the nonlinear dynamics of the system in the case of finite amplitude of vibration. The shell deformation is described in terms of longitudinal, circumferential and radial displacement fields. Simply supported boundary conditions are considered. The displacement fields are expanded by means of a double mixed series based on Chebyshev polynomials for the longitudinal variable and harmonic functions for the circumferential variable. Both driven and companion modes are considered. Numerical analyses are carried out in order to characterize the nonlinear response when the shell is subjected to a harmonic external load. A convergence analysis is carried out considering a different number of axisymmetric and asymmetric modes. The present study is focused on modelling the nonlinear travelling-wave response of the FGM shell in the circumferential direction with the companion mode participation.

**Keywords:** functionally graded, cylindrical shells, nonlinear vibrations

## 1. INTRODUCTION

Functionally graded materials (FGMs) are composite materials obtained by combining and mixing two or more different constituent materials, which are distributed along the thickness in accordance with a volume fraction law. Most of the FGMs are employed in the high-temperature environments because of their heat shielding capacity.

The idea of FGMs was first introduced in 1984/87 by a group of Japanese material scientists [1]. They studied many different physical aspects such as temperature and thermal stress distributions, static and dynamic responses.

Loy et al. [2] analysed the vibrations of the circular cylindrical shells made of FGM, considering simply supported boundary conditions. They found that the natural frequencies are affected by the constituent volume fractions and configurations of the materials.

Pradhan et al. [3] studied the vibration characteristics of FGM cylindrical shells made of stainless steel and zirconia, under different boundary conditions. They found that the natural frequencies depend on the material distributions and boundary conditions.

Leissa [4] analysed the linear dynamics of shells having different topologies, materials and boundary conditions, considering the most important shell theories, such as Donnell, Flugge and Sanders-Koiter.

Yamaki [5] studied buckling and post-buckling of the shells in the linear and nonlinear field, reporting the solution methods, numerical and experimental results.

A modern treatise on the shells dynamics and stability can be found in Ref. [6], where also FGMs are considered.

Pellicano et al. [7] considered the nonlinear vibrations of homogeneous isotropic shells, leading to similar conclusions of the present work.

The method of solution used in the present work was presented in Ref. [8].

In the present paper, the effect of the companion mode participation on the nonlinear vibrations of FGM circular cylindrical shells is analysed.

The Sanders-Koiter theory is applied to model the nonlinear dynamics of the system in the case of finite amplitude of vibration.

The shell deformation is described in terms of longitudinal, circumferential and radial displacement fields.

Simply supported boundary conditions are considered.

The FGM is made of a uniform distribution of stainless steel and nickel, and the material properties are graded in the thickness direction, according to a volume fraction power-law distribution.

The solution method consists of two steps:

- 1) linear analysis and eigenfunctions evaluation;
- 2) nonlinear analysis, using an eigenfunction based expansion.

In the linear analysis, the displacement fields are expanded by means of a double series based on harmonic functions for the circumferential variable and Chebyshev polynomials for the longitudinal variable.

A Ritz based method allows to obtain the approximate natural frequencies and mode shapes (eigenvalues and eigenvectors).

In the nonlinear analysis, the three displacement fields are re-expanded by using the approximate eigenfunctions. Both driven and companion modes are considered.

An energy approach based on the Lagrange equations is then considered, in order to reduce the nonlinear partial differential equations to a set of nonlinear ordinary differential equations.

Numerical analyses are carried out in order to characterize the nonlinear response when the shell is subjected to a harmonic external load.

A convergence analysis is carried out on a simply supported cylindrical shell to obtain the correct number of axisymmetric and asymmetric modes able to describe the actual nonlinear behaviour of the shell. Comparisons of nonlinear amplitude-frequency curves of the cylindrical shell with different nonlinear expansions are carried out.

The influence of the companion mode participation on the nonlinear response of the shell is analysed. The nonlinear travelling-wave response of the shell in the circumferential direction with the companion mode participation is modelled.

## 2. FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS

A generic material property  $P_{fgm}$  of an FGM depends on the material properties and the volume fractions of the constituent materials, and it is expressed in the form [2]

$$P_{fgm}(T, z) = \sum_{i=1}^k \tilde{P}_i(T) V_{fi}(z) \quad (1)$$

where  $\tilde{P}_i$  and  $V_{fi}$  are the material property and volume fraction of the constituent material  $i$ , respectively.

The material property  $\tilde{P}_i$  of a constituent material can be described as a function of the environmental temperature  $T(K)$  by Touloukian's relation [2] (the index  $i$  is dropped for the sake of simplicity)

$$\tilde{P}(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (2)$$

where  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  and  $P_3$  are the coefficients of temperature of the constituent material.

In the case of an FGM thin cylindrical shell with a uniform thickness  $h$  and a reference surface at its middle surface, the volume fraction  $V_f$  of a constituent material can be written as [2]

$$V_f(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (3)$$

where the power-law exponent  $p$  is a positive real number, ( $0 \leq p \leq \infty$ ), and  $z$  describes the radial distance measured from the middle surface of the shell, ( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ), as shown in Fig. 1.

For an FGM thin cylindrical shell made of two different constituent materials 1 and 2, the volume fractions  $V_{f1}$  and  $V_{f2}$  can be written in the following form [3]

$$V_{f1}(z) = 1 - \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad V_{f2}(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad V_{f1}(z) + V_{f2}(z) = 1 \quad (4)$$

where the sum of the volume fractions of the constituent materials is equal to unity.

Young's modulus  $E$ , Poisson's ratio  $\nu$  and mass density  $\rho$  are expressed as [3]

$$E_{fgm}(T, z) = (E_2(T) - E_1(T)) \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p + E_1(T) \quad (5)$$

$$\nu_{fgm}(T, z) = (\nu_2(T) - \nu_1(T)) \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p + \nu_1(T) \quad (6)$$

$$\rho_{fgm}(T, z) = (\rho_2(T) - \rho_1(T)) \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p + \rho_1(T) \quad (7)$$

### 3. SANDERS-KOITER THEORY

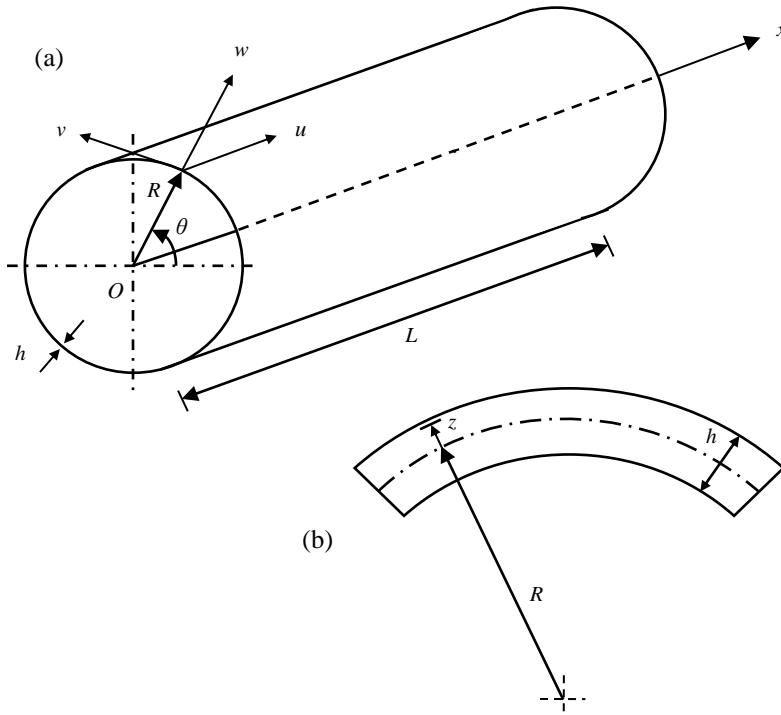
In Figure 1, an FGM circular cylindrical shell having radius  $R$ , length  $L$  and thickness  $h$  is represented; a cylindrical coordinate system  $(O; x, \theta, z)$  is considered in order to take advantage from the axial symmetry of the structure, the origin  $O$  of the reference system is located at the centre of one end of the shell. Three displacement fields are represented in Fig. 1: longitudinal  $u(x, \theta, t)$ , circumferential  $v(x, \theta, t)$  and radial  $w(x, \theta, t)$ .

#### Elastic Strain Energy, Kinetic Energy, Virtual Work, Damping Forces

The Sanders-Koiter nonlinear theory of circular cylindrical shells, which is an eight-order shell theory, is based on the Love's "first approximation" [4]. The strain components  $(\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta})$  at an arbitrary point of the shell are related to the middle surface strains  $(\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\theta,0}, \gamma_{x\theta,0})$  and to the changes in the curvature and torsion  $(k_x, k_\theta, k_{x\theta})$  of the middle surface of the shell by the following relationships [5]

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + zk_x \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta,0} + zk_\theta \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta,0} + zk_{x\theta} \quad (8)$$

where  $z$  is the distance of the arbitrary point of the cylindrical shell from the middle surface and  $(x, \theta)$  are the longitudinal and angular coordinates of the shell, see Fig. 1.



**Figure 1.** Geometry of the functionally graded cylindrical shell.  
 (a) Complete shell; (b) cross-section of the shell surface.

The middle surface strains and changes in curvature and torsion are given by [5]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x,0} &= \frac{\partial u}{L\partial\eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{L\partial\eta}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial v}{L\partial\eta} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)^2 + \frac{\partial w}{L\partial\eta}\frac{\partial w_0}{L\partial\eta} \\ \varepsilon_{\theta,0} &= \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} - \frac{\partial v}{L\partial\eta}\right)^2 + \frac{\partial w_0}{R\partial\theta}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right) \\ \gamma_{x\theta,0} &= \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{L\partial\eta} + \frac{\partial w}{L\partial\eta}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right) + \frac{\partial w_0}{L\partial\eta}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R}\right) + \frac{\partial w}{L\partial\eta}\frac{\partial w_0}{R\partial\theta} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{L^2\partial\eta^2} \quad k_\theta = \frac{\partial v}{R^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2} \quad k_{x\theta} = -2\frac{\partial^2 w}{LR\partial\eta\partial\theta} + \frac{1}{2R}\left(3\frac{\partial v}{L\partial\eta} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right) \quad (9)\end{aligned}$$

where ( $\eta = x/L$ ) is the nondimensional longitudinal coordinate.

In the case of FGMs, the stresses are related to the strains as follows [6]

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}(\varepsilon_x + \nu(z)\varepsilon_\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}(\varepsilon_\theta + \nu(z)\varepsilon_x) \quad \tau_{x\theta} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}\gamma_{x\theta} \quad (10)$$

where  $E(z)$  is the Young's modulus and  $\nu(z)$  is the Poisson's ratio ( $\sigma_z = 0$ , plane stress).

The elastic strain energy  $U_s$  of a cylindrical shell is given by [6]

$$U_s = \frac{1}{2}LR \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}) d\eta d\theta dz \quad (11)$$

The kinetic energy  $T_s$  of a cylindrical shell (rotary inertia effect is neglected) is given by [6]

$$T_s = \frac{1}{2}LR \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\eta d\theta dz \quad (12)$$

where  $\rho(z)$  is the mass density of the shell.

The virtual work  $W$  done by the external forces is written as [6]

$$W = LR \int_0^1 \int_0^{2\pi} (q_x u + q_\theta v + q_z w) d\eta d\theta \quad (13)$$

with  $(q_x, q_\theta, q_z)$  as distributed forces in longitudinal, circumferential and radial direction.

The nonconservative damping forces are assumed to be of viscous type and are taken into account by using Rayleigh's dissipation function (viscous damping coefficient  $c$ ) [6]

$$F = \frac{1}{2}cLR \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\eta d\theta \quad (14)$$

## 4. VIBRATION ANALYSIS

In order to carry out the dynamic analysis of the shell a two-steps procedure is considered [8]: *i*) the Rayleigh-Ritz method is applied to the linearized formulation of the problem, in order to obtain an approximation of the eigenfunctions; *ii*) the displacement fields are re-expanded using the approximate eigenfunctions, the Lagrange equations are considered in conjunction with the fully nonlinear expression of the potential energy, in order to obtain a set of nonlinear ordinary differential equations in modal coordinates.

### Linear Vibration Analysis: Discretization Approach

In order to carry out a linear vibration analysis only the quadratic terms are retained in Eqn. (11). A modal vibration, i.e. a synchronous motion, is obtained in the form [8]

$$u(\eta, \theta, t) = U(\eta, \theta)f(t) \quad v(\eta, \theta, t) = V(\eta, \theta)f(t) \quad w(\eta, \theta, t) = W(\eta, \theta)f(t) \quad (15)$$

where  $u(\eta, \theta, t), v(\eta, \theta, t), w(\eta, \theta, t)$  are the displacement fields,  $U(\eta, \theta), V(\eta, \theta), W(\eta, \theta)$  represent the modal shape and  $f(t)$  describes the time law, which is supposed to be the same for each displacement field (synchronous motion hypothesis).

The components of the modal shape are expanded by means of a double mixed series: the periodicity of deformation in the circumferential direction suggests the use of harmonic functions  $(\cos n\theta, \sin n\theta)$ , while Chebyshev orthogonal polynomials are considered in the longitudinal direction  $T_m^*(\eta)$  [8]

$$\begin{aligned} U(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^{M_u} \sum_{n=0}^N \tilde{U}_{m,n} T_m^*(\eta) \cos n\theta & V(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^{M_v} \sum_{n=0}^N \tilde{V}_{m,n} T_m^*(\eta) \sin n\theta \\ W(\eta, \theta) &= \sum_{m=0}^{M_w} \sum_{n=0}^N \tilde{W}_{m,n} T_m^*(\eta) \cos n\theta \end{aligned} \quad (16)$$

where  $T_m^*(\eta) = T_m(2\eta - 1)$ ,  $m$  denotes the degree of the Chebyshev polynomials,  $n$  is the number of nodal diameters and  $(\tilde{U}_{m,n}, \tilde{V}_{m,n}, \tilde{W}_{m,n})$  are the generalized coordinates.

### Boundary Conditions

Simply supported – simply supported (S – S) boundary conditions are given by [4]

$$w = 0 \quad v = 0 \quad M_x = 0 \quad N_x = 0 \quad \text{for } \eta = 0, 1 \quad (17)$$

The previous conditions imply the following equations [8]

$$\sum_{m=0}^{M_w} \tilde{W}_{m,n} T_m^*(\eta) = 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad n \in [0, N] \quad \text{for } \eta = 0, 1 \quad (18)$$

$$\sum_{m=0}^{M_v} \tilde{V}_{m,n} T_m^*(\eta) = 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad n \in [0, N] \quad \text{for } \eta = 0, 1 \quad (19)$$

$$\sum_{m=0}^{M_w} \tilde{W}_{m,n} T_{m,\eta\eta}^*(\eta) = 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad n \in [0, N] \quad \text{for } \eta = 0, 1 \quad (20)$$

$$\sum_{m=0}^{M_u} \tilde{U}_{m,n} T_{m,\eta}^*(\eta) = 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad n \in [0, N] \quad \text{for } \eta = 0, 1 \quad (21)$$

The linear algebraic system given by Eqns. (17) can be solved analytically in terms of the coefficients  $(\tilde{U}_{1,n}, \tilde{U}_{2,n}, \tilde{V}_{0,n}, \tilde{V}_{1,n}, \tilde{W}_{0,n}, \tilde{W}_{1,n}, \tilde{W}_{2,n}, \tilde{W}_{3,n})$ , for  $n \in [0, N]$ .

### Rayleigh-Ritz Procedure

The maximum number of variables needed for describing a generic vibration mode can be calculated by the relation  $(N_p = M_u + M_v + M_w + 3 - r)$ , with  $(M_u = M_v = M_w)$  as the maximum degree of the Chebyshev polynomials and  $r$  as the number of equations for the boundary conditions considered.

For a multi-mode analysis including different nodal diameters, the number of degrees of freedom of the system is computed by the relation  $(N_{max} = N_p \times (N + 1))$ , where  $N$  describes the maximum number of nodal diameters considered.

Equations (15) are inserted in the expressions of  $U_s$  and  $T_s$  (Eqns. (11 – 12)).

Consider now the Rayleigh quotient  $R(\tilde{\mathbf{q}}) = V_{max}/T^*$ , where  $V_{max}$  is the maximum of the potential energy,  $T^* = T_{max}/\omega^2$ ,  $T_{max}$  denotes the maximum of the kinetic energy,  $\omega$  is the circular frequency of the harmonic motion and  $\tilde{\mathbf{q}} = [\dots, \tilde{U}_{m,n}, \tilde{V}_{m,n}, \tilde{W}_{m,n}, \dots]^T$  denotes a vector containing all the unknowns.

After imposing the stationarity to the Rayleigh quotient, one obtains the eigenvalue problem [8]

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (22)$$

which furnishes natural frequencies and modes of vibration (eigenvalues and eigenvectors) of the system.

The modal shape is given by the Eqns. (16), where coefficients  $(\tilde{U}_{m,n}, \tilde{V}_{m,n}, \tilde{W}_{m,n})$  are substituted with  $(\tilde{U}_{m,n}^{(j)}, \tilde{V}_{m,n}^{(j)}, \tilde{W}_{m,n}^{(j)})$ , which are the components of the  $j$ -th eigenvector  $\tilde{\mathbf{q}}_j$  of the Eqn. (22).

The vector function  $\mathbf{U}^{(j)}(\eta, \theta) = [U^{(j)}(\eta, \theta), V^{(j)}(\eta, \theta), W^{(j)}(\eta, \theta)]^T$  represents an approximation of the  $j$ -th mode of the original problem.

The eigenfunctions obtained are eventually normalized by imposing the following relation [8]

$$\max \left[ \max[U^{(j)}(\eta, \theta)], \max[V^{(j)}(\eta, \theta)], \max[W^{(j)}(\eta, \theta)] \right] = 1 \quad (23)$$

### Nonlinear Vibration Analysis: Lagrange Equations

In the nonlinear vibration analysis, the full expression of the elastic strain energy (11), containing terms up to the fourth order (cubic nonlinearity), is considered.

The displacement fields  $u(\eta, \theta, t)$ ,  $v(\eta, \theta, t)$ ,  $w(\eta, \theta, t)$  are expanded by using both the linear mode shapes  $U(\eta, \theta)$ ,  $V(\eta, \theta)$ ,  $W(\eta, \theta)$ , obtained in the previous linear analysis, and the conjugate mode shapes  $U_c(\eta, \theta)$ ,  $V_c(\eta, \theta)$ ,  $W_c(\eta, \theta)$ , in the following form [8]

$$\begin{aligned} u(\eta, \theta, t) &= \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{n=1}^N [U^{(j,n)}(\eta, \theta) f_{u,j,n}(t) + U_c^{(j,n)}(\eta, \theta) f_{u,j,n,c}(t)] \\ v(\eta, \theta, t) &= \sum_{j=1}^{N_v} \sum_{n=1}^N [V^{(j,n)}(\eta, \theta) f_{v,j,n}(t) + V_c^{(j,n)}(\eta, \theta) f_{v,j,n,c}(t)] \\ w(\eta, \theta, t) &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{n=1}^N [W^{(j,n)}(\eta, \theta) f_{w,j,n}(t) + W_c^{(j,n)}(\eta, \theta) f_{w,j,n,c}(t)] \end{aligned} \quad (24)$$

These expansions respect exactly the simply supported boundary conditions.

The synchronicity is relaxed as for each mode  $j$  and each component ( $u, v, w$ ) different time laws are allowed.

Mode shapes  $U^{(j)}(\eta, \theta)$ ,  $V^{(j)}(\eta, \theta)$ ,  $W^{(j)}(\eta, \theta)$  are known functions expressed in terms of polynomials and harmonic functions, see Eqns. (16); the index  $n$  indicates the number of nodal diameters, the index  $j$  is used for ordering the modes (for each  $n$ ) with increasing associated natural frequency. It is very interesting to note that, in the case of simply-simply supports,  $j$  is also the number of longitudinal half waves (number of nodal circumferences minus one), see Ref. [8].

The Lagrange equations for forced vibrations are expressed in the following form [8]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{for } i \in [1, N_{max}] \quad (L = T_s - U_s) \quad (25)$$

The modal coordinates are now ordered in a vector  $\mathbf{q}(t) = [\dots f_{u,j}, f_{v,j}, f_{w,j}, \dots]$ ,  $N_{max}$  depends on the number of modes considered in the expansions (24).

The generalized forces  $Q_i$  are obtained by differentiation of the Rayleigh's dissipation function  $F$  (14) and the virtual work done by external forces  $W$  (13), in the form [8]

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (26)$$

Expansions (24) are inserted into strain energy (11), kinetic energy (12), virtual work of the external forces (13) and damping forces (14).

Using Lagrange Eqns. (25), a set of nonlinear ordinary differential equations (ODE) is then obtained.

**Table 1.** Properties of stainless steel and nickel against coefficients of temperature.

	stainless steel			nickel		
	E	v	$\rho$	E	v	$\rho$
$P_0$	$2.0 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	0.326	$8166 \text{ kgm}^{-3}$	$2.2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	0.310	$8900 \text{ kgm}^{-3}$
$P_{-1}$	0 K	0 K	0 K	0 K	0 K	0 K
$P_1$	$3.1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	$-2.0 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	0 K $^{-1}$	$-2.8 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	0 K $^{-1}$	0 K $^{-1}$
$P_2$	$-6.5 \times 10^{-7} \text{ K}^{-2}$	$3.8 \times 10^{-7} \text{ K}^{-2}$	0 K $^{-2}$	$-4.0 \times 10^{-9} \text{ K}^{-2}$	0 K $^{-2}$	0 K $^{-2}$
$P_3$	0 K $^{-3}$	0 K $^{-3}$	0 K $^{-3}$	0 K $^{-3}$	0 K $^{-3}$	0 K $^{-3}$
P	$2.1 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	0.318	$8166 \text{ kgm}^{-3}$	$2.0 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	0.310	$8900 \text{ kgm}^{-3}$

## 5. NUMERICAL RESULTS

In this section, the nonlinear vibrations of functionally graded circular cylindrical shells with different mode shape expansions and geometries are considered.

Analyses are carried out on an FGM made of stainless steel and nickel.

FGM properties are graded in the thickness direction according to a volume fraction distribution, where  $p$  is the power-law exponent.

The material properties, reported in Table 1, have been extracted from Ref. [2].

### Convergence Analysis

The convergence analysis is carried out on a simply supported cylindrical shell excited with a harmonic external force; the excitation frequency is close to the mode  $(j,n)$ , where  $j$  is the number of longitudinal half waves and  $n$  is the number of nodal diameters.

The convergence is checked by adding suitable modes to the resonant one: asymmetric modes  $(k \times j, s \times n)$   $k = 1,3$   $s = 1,2,3$  due to the presence of the quadratic and the cubic nonlinearities; axisymmetric modes  $(k, 0)$   $k = 1,3,5,7$  due to the quadratic nonlinearities.

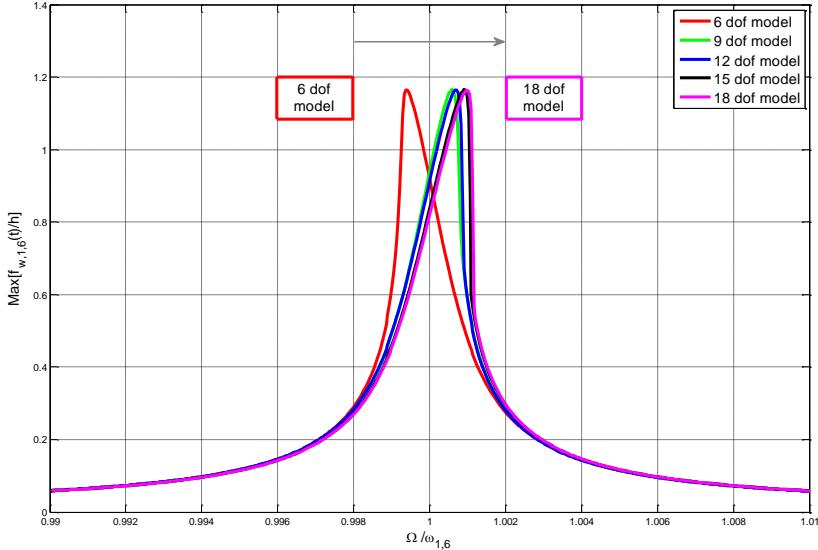
The analysis is then developed by introducing a different number of asymmetric and axisymmetric modes in the expansions (24), see also Tab. 2.

The FGM cylindrical shell is excited by means of an external modally distributed radial force  $q_z = f_{1,6} \sin \eta \cos 6\theta \cos \Omega t$ ; the amplitude of excitation is  $f_{1,6} = 0.0012h^2 \varrho \omega_{1,6}^2$  and the frequency of excitation  $\Omega$  is close to the mode  $(1,6)$ ,  $\Omega \cong \omega_{1,6}$ .

The external forcing  $f_{1,6}$  is normalized with respect to mass, acceleration and thickness; the damping ratio is equal to  $\xi_{1,6} = 0.0005$ .

**Table 2.** Asymmetric and axisymmetric modes inserted in the different nonlinear models.

6 dof model	9 dof model	12 dof model	15 dof model	18 dof model
mode $(1,6) u, v, w$				
mode $(1,12) v$	mode $(1,12) v$	mode $(3,6) u, v, w$	mode $(3,6) u, v, w$	mode $(3,6) u, v, w$
mode $(1,0) u, w$	mode $(3,12) v$	mode $(1,12) v$	mode $(1,12) v$	mode $(1,12) v$
	mode $(1,0) u, w$	mode $(3,12) v$	mode $(3,12) v$	mode $(3,12) v$
	mode $(3,0) u, w$	mode $(1,0) u, w$	mode $(1,18) v$	mode $(1,18) v$
		mode $(3,0) u, w$	mode $(1,0) u, w$	mode $(3,18) v$
			mode $(3,0) u, w$	mode $(1,0) u, w$
			mode $(5,0) u, w$	mode $(3,0) u, w$
				mode $(5,0) u, w$
				mode $(7,0) u, w$



**Figure 2.** Convergence analysis. Nonlinear amplitude-frequency curves. Simply supported FGM circular cylindrical shell ( $h/R = 0.002$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ). “—”, 6 dof model; “—”, 9 dof model; “—”, 12 dof model; “—”, 15 dof model; “—”, 18 dof model.

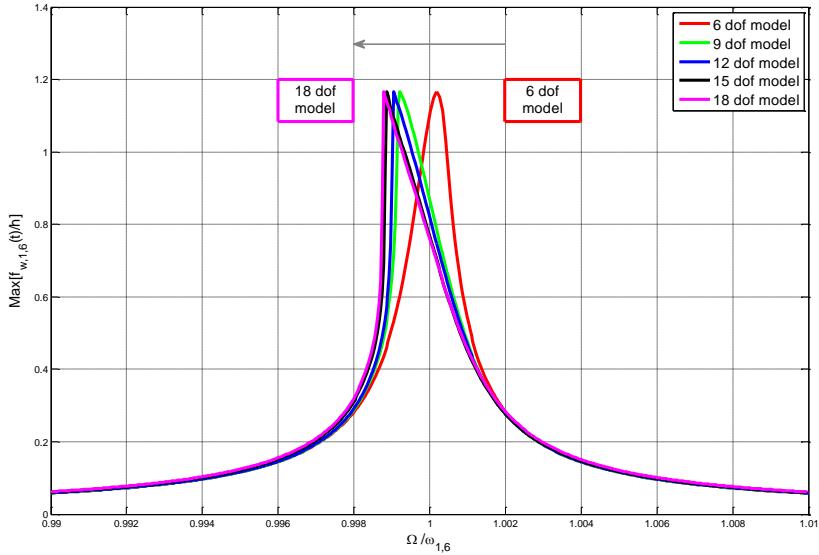
In the following, amplitude-frequency curves of the modal coordinates of the shell will be presented; the modal amplitudes are normalized with respect to the thickness  $h$  of the shell and represented vs. the normalized frequency; for example, in representing the radial amplitude of mode (1,6), the maximum amplitude of  $f_{w,1,6}(t)/h$  is represented vs.  $\Omega/\omega_{1,6}$ .

In Figure 2, amplitude-frequency curves of a simply supported FGM shell are shown ( $h/R = 0.002$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ , the shell is very thin and long), different expansions are compared. The 6 dof model (Table 2) gives a softening nonlinear behaviour, conversely, the higher-order expansions converge to a hardening nonlinear behaviour; higher order models (dof from 9 to 18) behave quite similarly; this means that the smallest expansion able to predict the dynamics with acceptable accuracy is 9 dof model (Table 2). The main weakness of the 6 dof expansion is the insufficient number of axisymmetric modes, which are very important for properly modelling the circumferential stretching during the vibration. It is to note that the shell is very thin, so the hardening behaviour is expected to occur (see e.g. Ref. [7]).

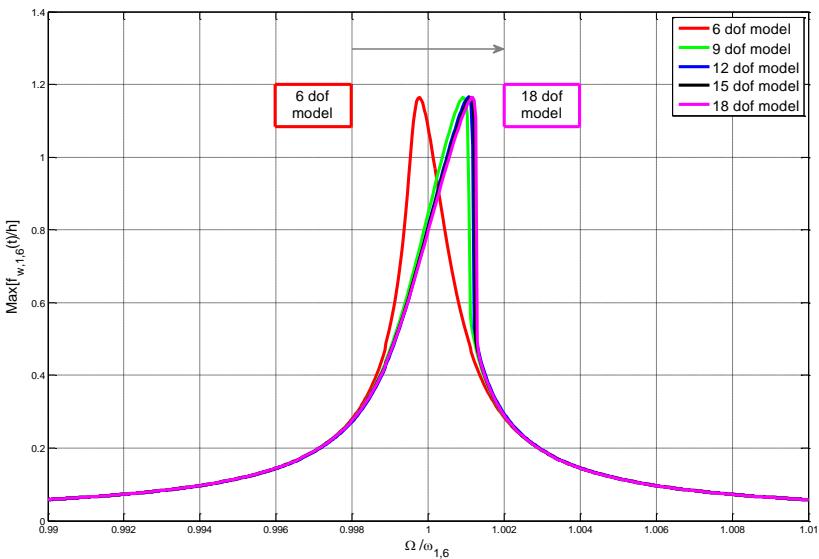
In Figure 3, a moderately thick and long FGM shell is analysed ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ), the amplitude-frequency curves are obtained with the expansions of Table 2. Similar to the case of very thin FGM shell of Figure 2, the 6 dof model, with an insufficient number of axisymmetric modes, is clearly inaccurate; indeed, for this kind of FGM shell the correct behaviour is softening.

In Figure 4, a thick FGM shell is studied ( $h/R = 0.050$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ), the expected behaviour is hardening: the 6 dof model (Table 2) is inaccurate, similar to previous cases.

From the convergence analysis, one can claim that the 9 dof model gives satisfactory results with the minimal computational effort; therefore, in the following the 9 dof model of Table 2 will be used.



**Figure 3.** Convergence analysis. Nonlinear amplitude-frequency curves. Simply supported FGM circular cylindrical shell ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ). “—”, 6 dof model; “—”, 9 dof model; “—”, 12 dof model; “—”, 15 dof model; “—”, 18 dof model.



**Figure 4.** Convergence analysis. Nonlinear amplitude-frequency curves. Simply supported FGM circular cylindrical shell ( $h/R = 0.050$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ). “—”, 6 dof model; “—”, 9 dof model; “—”, 12 dof model; “—”, 15 dof model; “—”, 18 dof model.

The previous considerations suggest the following 9 dof model be used for studying a generic resonant mode  $(j, n)$ :

- modes  $(j, n), (1,0), (3,0)$  for the longitudinal displacement field  $u$
- modes  $(j, n), (j, 2n), (3j, 2n)$  for the circumferential displacement field  $v$
- modes  $(j, n), (1,0), (3,0)$  for the radial displacement field  $w$ .

After selecting such modes, each expansion present in Eqns. (24) is then reduced to a three-terms modal expansion; the resulting nonlinear system has 9 dof.

### Companion mode participation

In this section, the effect of the companion mode participation (Eqns. 24) on the nonlinear response is analysed.

The participation of both driven and companion modes gives a pure travelling wave response, moving circumferentially around the shell, when the time phase shift between two conjugate modal coordinates (e.g.,  $f_{w,1,6}(t)$  and  $f_{w,1,6,c}(t)$ ) is  $\pi/2$ .

In Figure 5(a), the amplitude-frequency curve with the companion mode participation is presented ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ , mode  $(1,6)$ ) using a 14 dof model (this expansion corresponds to the 9 dof model without the companion modes, where the same number of axisymmetric modes is considered).

The response  $f_{w,1,6}(t)$  with the companion mode participation, solid blue line of Figure 5(a), is very similar to the response without the companion mode participation, dashed black line, see Figure 3.

Taking into account the companion mode, Figure 5(b), does not produce any variation except for a small region close to the resonance ( $0.9996 < \Omega/\omega_{1,6} < 0.9999$ ), where the companion mode is excited by means of a 1:1 internal resonance.

It is worthwhile to stress that the modal excitation does not excite directly the companion mode; therefore, the internal resonance mechanism induces an energy transfer between the two conjugate (and linearly uncoupled) modes.

In Figure 6, the time histories of the driven mode  $(1,6)$ , blue line, and companion mode, red line, for  $\Omega/\omega_{1,6} = 0.9998$  are presented; the companion mode is initially not active, then an energy transfer takes place, the amplitude of the driven mode decreases and eventually the companion mode is excited.

In Figure 7, enlarged view of Figure 6, a time phase shift between the two modal coordinates (conjugate modes) close to  $\pi/2$  is present; therefore, a travelling wave takes place.

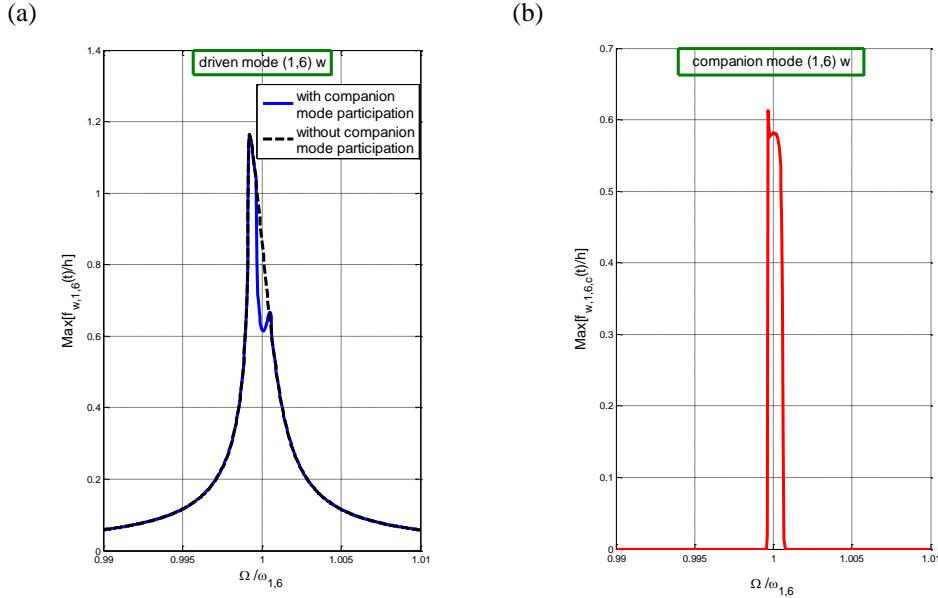
It is worthwhile to stress that, even though the nonlinearity of the system is not strong, the onset of a travelling wave implies that the response of the shell is completely different with respect to a linear model.

In Figure 8, the spectrum of the time histories of Figure 6 is shown: the last part of the time history is considered, i.e., the transient dynamics are cut out.

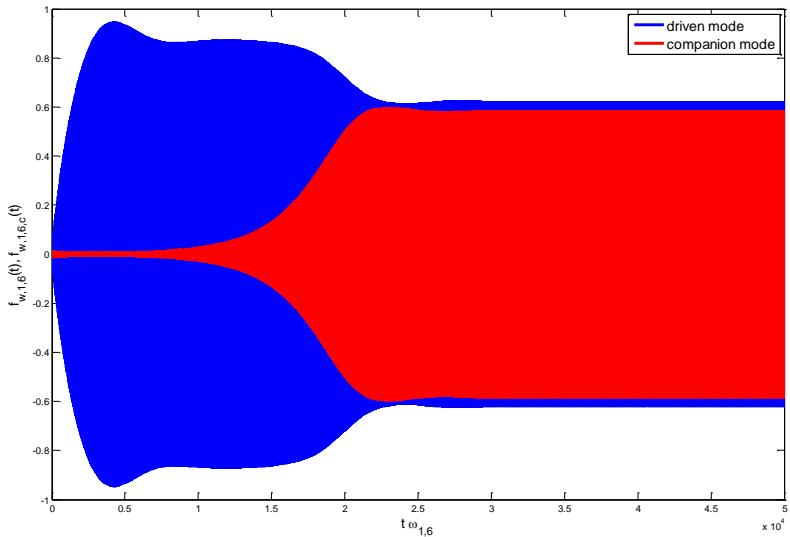
The spectrum presents four spikes, one driven harmonic and three super harmonics of order two, three and four, respectively: this confirms the presence and the importance of quadratic and cubic nonlinearities.

## 6. CONCLUSIONS

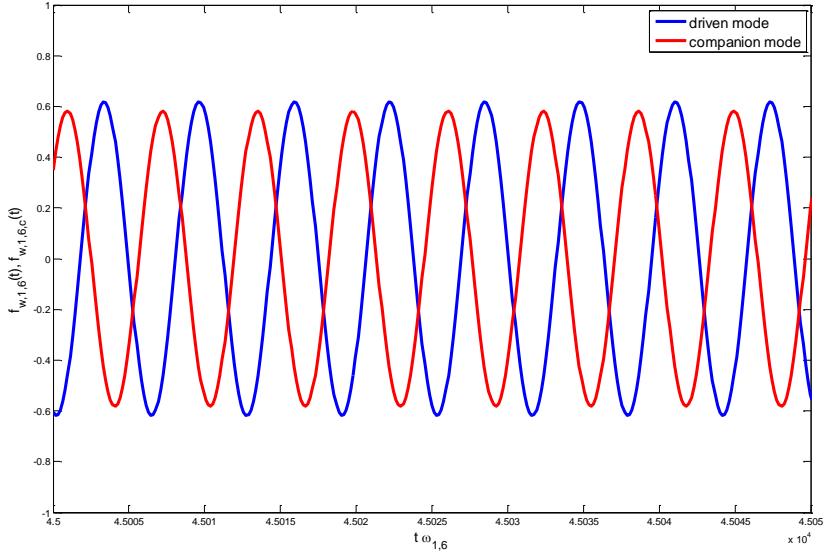
In this paper, the nonlinear vibrations of FGM circular cylindrical shells are analysed; the Sanders-Koiter theory is applied to model the nonlinear dynamics of the system in the case of finite amplitude of vibration.



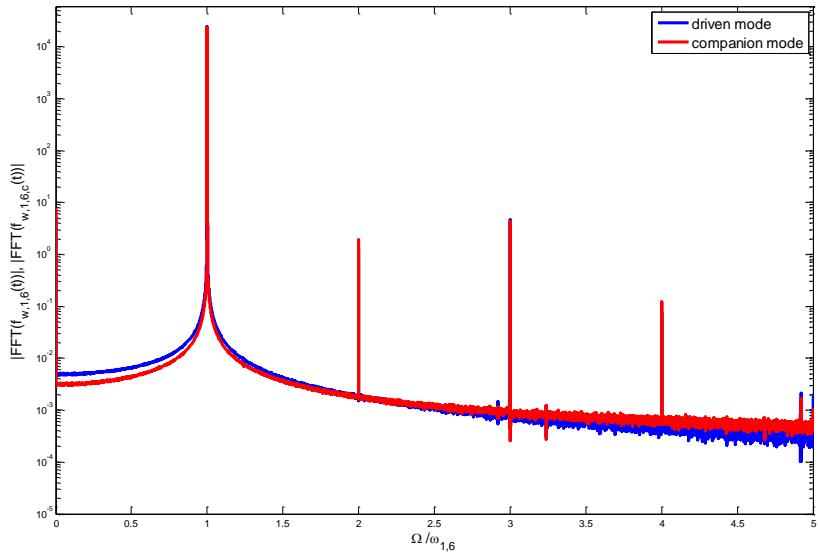
**Figure 5.** Amplitude-frequency curves of the FGM shell ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ). 14 dof model. (a) “—”, driven mode (1,6)  $w$  without companion mode participation; “—”, driven mode (1,6)  $w$  with companion mode participation. (b) Companion mode (1,6)  $w$ .



**Figure 6.** Time histories of the shell ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ), transient included. “—”, driven mode (1,6)  $w$  with companion mode participation; “—”, companion mode (1,6)  $w$ .



**Figure 7.** Time histories of the FGM shell ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ), steady state. “—”, driven mode (1,6)  $w$  with companion mode participation; “—”, companion mode (1,6)  $w$ .



**Figure 8.** Spectrum of the time histories of the FGM shell ( $h/R = 0.025$ ,  $L/R = 20$ ,  $p = 1$ ), transient removed. “—”, driven mode (1, 6)  $w$  with companion mode participation; “—”, companion mode (1, 6)  $w$ .

The functionally graded material is made of a uniform distribution of stainless steel and nickel, and the material properties are graded in the thickness direction, according to a volume fraction power-law distribution.

Numerical analyses are carried out in order to characterize the nonlinear response when the shell is subjected to a harmonic external load.

A convergence analysis is carried out by introducing in longitudinal, circumferential and radial displacement fields a different number of asymmetric and axisymmetric modes.

The fundamental role of the axisymmetric modes is confirmed, and the role of the higher-order asymmetric modes is clarified in order to obtain the actual character of nonlinearity.

An interesting result of the present study regards the predictions obtained with low-order expansions.

It is well known in literature that small expansions could lead to hardening behaviours when the actual shell response is softening.

Here we have found that when shells having actual hardening response are simulated with an insufficient expansion, their behaviour could appear spuriously softening.

The effect of the companion mode participation on the nonlinear response of the shells is analysed.

Both driven and companion modes are considered allowing for the travelling-wave response of the shell; amplitude-frequency curves with companion mode participation are obtained.

It is worthwhile to stress that, even though the nonlinearity of the system is weak, close to the resonance of asymmetric modes the onset of a travelling wave in the circumferential direction is possible.

This is a macroscopic effect of the weak nonlinearity that cannot be predicted with the linear models.

## REFERENCES

- [1] Technical Report, Japanese Government, 1987. Research on the Basic Technology for the Development of Functionally Gradient Materials for Relaxation of Thermal-stress. Science and Technology Agency of Japanese Government.
- [2] Loy CT, Lam KY, and Reddy JN, 1999. "Vibration of functionally graded cylindrical shells". *International Journal of Mechanical Sciences*, **41**, pp. 309–324.
- [3] Pradhan SC, Loy CT, Lam KY, and Reddy JN, 2000. "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions". *Applied Acoustics*, **61**, pp. 111–129.
- [4] Leissa AW, 1973. *Vibrations of Shells*. Government Printing Office, Washington DC.
- [5] Yamaki N, 1984. *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*. North-Holland, Amsterdam.
- [6] Amabili M, 2008. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, New York.
- [7] Pellicano F, 2007. "Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments". *Journal of Sound and Vibration*, **303**, pp. 154–170.
- [8] Strozzi M, Pellicano F, 2013. "Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells". *Thin-Walled Structures*, **67**, pp. 63–77.



# **FEASIBILITY INVESTIGATION ON DETECTION OF WATER LEAKS IN PIPELINES BY MEANS OF VIBRATION MONITORING**

Alberto Martini

*CIRI – Interdepartmental Centre for Industrial Research: Advanced Applications in Mechanical Engineering and Materials Technology,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: alberto.martini6@unibo.it*

Marco Troncossi

*DIN – Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: marco.troncossi@unibo.it*

Alessandro Rivola

*DIN – Department of Engineering for Industry,*

*University of Bologna, Italy*

*E-mail: alessandro.rivola@unibo.it*

***Abstract.*** The efficiency of water supply networks is an important issue. In order to reduce water losses, policies of leak reduction are essential. The paper deals with a preliminary study on the use of vibration monitoring tools for the detection of leaks in water service pipelines. The long-term project is the development of a system for automatically detecting burst leaks occurring in service pipes. Preliminary experimental tests were performed on both a test rig and an actual service pipe of the water distribution system. Three main objectives were achieved: firstly, the effectiveness of vibration monitoring for leak detection purposes was assessed providing a positive response. Then, a prototypal detection procedure was studied, implemented and tested on the preliminary experimental data. Finally, the specifications for a prototypal acquisition equipment were also determined. This paper illustrates the experimental campaign and its main results.

***Keywords:*** water supply network, service pipes, leak detection, vibration monitoring, experimental tests

## **1. INTRODUCTION**

All the utilities concerned with drinking water supply are making efforts to increase the efficiency of their distribution systems. Indeed in most countries the amount of unaccounted-for water exceeds one third of the input volume. Official statistics about the North America show that water losses typically reach 30% of the production [1]. In some Italian areas water losses exceed 60%, the national average being about 40% [2].

While apparent losses may affect water supply networks (generally due to metering inaccuracies, errors in data handling and unauthorized consumption) the 60-75% [3] of water losses are ascribable to real (physical) losses.

Physical water losses include both background leaks (very small leaks at pipe joints and fittings, generally undetectable) and burst leaks (resulting from pipe holes and damages). While the former are mostly assumed as irremovable (i.e. associated with the normal system functioning), the latter should be detected and repaired. Indeed non revenue water represents a very high cost. Moreover water losses represent a danger for the public health since the leaking flow may damage the foundations of buildings and roads, and contamination by pollutants may occur. Last, but not least, water is a limited resource that should not be wasted at all.

In order to reduce and prevent water losses, a policy of leak detection and reduction is essential.

Conducting periodic water audits helps monitoring water losses of the whole distributing system. District Metered Areas (DMA) management [4] generally offers better leak detection performance and allows focusing the efforts to locate leaks on restricted portions of the network. Optimized distribution of noise loggers over the water supply network may be also adopted [5], although their economic viability and leak detection effectiveness are not guaranteed [6].

Several techniques and equipments for pinpointing leaks are available [7–9]. The most common equipments are listening devices (such as listening rods and geophones, whose efficiency largely depends on the operator skills) and noise correlators (which automatically pinpoint leaks by means of signal correlation techniques), both generally relying on vibration or pressure transducers.

This study deals with the detection of burst leaks occurring in service pipes, by using vibration measures. The long-term project, planned by the R&D department of the multi-utility Hera S.p.A. (Bologna, Italy), aims at developing a device for the automatic early detection of bursts located in the customer connection branches running from the mains to the user's water meter [10].

The research (still at an early stage) was started by performing the preliminary activities that are described in this paper: evaluation of the effectiveness of vibration monitoring for leak detection purpose; study and development of a prototypal algorithm for leak detection; definition of the hardware specifications for the development of a prototypal monitoring device to be adopted in a massive experimental campaign in the actual water distribution network. In order to accomplish these tasks, experimental tests were carried out on both a test rig and an actual service pipe, and are presented here.

The paper is structured as follows. Section 2 provides a detailed presentation of the detecting system expected features and describes the performed tests. In Section 3 the results are reported and discussed. Section 4 draws the conclusions and presents future developments of the research.

## 2. MATERIALS AND METHODS

The desired system for leak detection should measure vibrations, analyze the recorded signals and automatically send a warning to the control centre in case of leak detection. This implies the detection algorithm to be executed on board. The system is not intended for pinpointing bursts, since it is conceived for operating on relatively short pipes (up to 10 m). Low cost represents an essential requirement of the hardware components, due to the

planned widespread installation. In order to meet cost requirements the system should operate with the simplest hardware as possible, thus requiring a very careful definition of all the technical specifications to optimize costs and to guarantee adequate performance. Moreover the algorithm should involve only rather elementary analysis techniques in order to require limited computational resources, thus further limiting costs of hardware components.

A preliminary experimental campaign was performed for pursuing the following goals:

- verifying the leak detection capabilities of different approaches based on the analysis of vibration signals, and assessing how the variation of boundary and functioning conditions affect the detection performance;
- identifying the most suitable metrics for revealing the presence of water leaks and implementing a trial detection procedure based on it;
- defining the specifications of a prototypal acquisition device for further executing extensive measurements on real burst leaks occurring in the water supply network managed by the utility.

The preliminary experiments took into account the following variable factors:

- distance of the burst from the transducer (from 0 to 10 m);
- water pressure of the network (from 3 to 7 bar);
- presence of a water flow in the service pipe due to consumer water usage;
- value of the flow rate related to consumer water usage (from 0 to 54 l/min);
- non-zero flow rate in the main pipe induced from water consumption in service connections different from the monitored one (from 0 to 100 l/min);
- material of mains and service pipes (PE and PVC);
- type of soil where the pipes are buried (wet soil, dry soil, sand);
- transducer sensitivity (100, 1000 mV/g);
- A/D bit resolution (from 8 to 24 bit).

Two different kinds of tests were carried out: experiments on a test rig, specifically developed and arranged for this study; measurements on an actual service connection of the public water supply network.

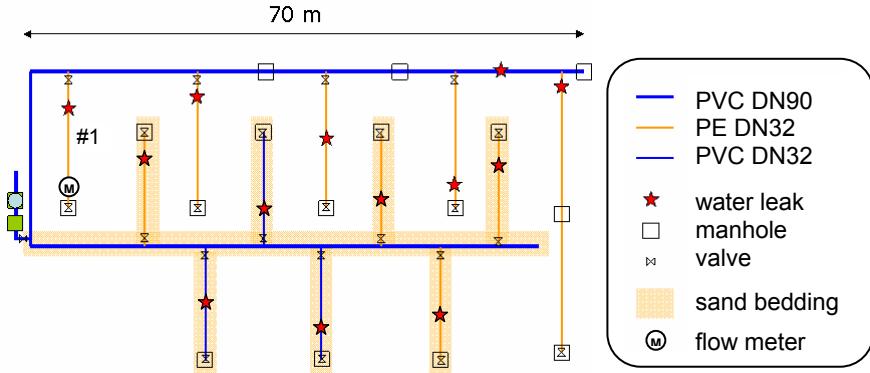
## 2.1 Test rig experiments

The experiments carried out on the test rig were designed for investigating all the above mentioned factors under controlled conditions.

An experimental facility was arranged in a buried testing site of the Hera R&D department (Fig. (1)). Two PVC pipes with diameter of 90 mm (DN 90) were used as water mains. Several small diameter pipes (DN 32) were connected to the distribution pipes for simulating typical customer connections running from the mains to the metering points. Each connection was about 10 m long (this value being derived from the statistics concerning the entire company water distribution network) and laid 0.5 m under the ground. Two valves located at the proximal and terminal extremities of each branch allowed flow regulation. One of the examined service pipes (referred to as #1) also featured a standard turbine water meter for residential customer at its end (Fig. (1)).

A pressure tank fed the system, thus permitting modifications of the input pressure parameter. The transducers were mounted on the pipe inside the terminal valve chamber.

First tests were carried out with no leaks, considering different combinations of functioning parameters and boundary conditions. Damages were then artificially caused, one per service pipe, at different distances from the junctions to the main pipe. The crack, a



**Figure 1.** Schematic of the experimental rig.

longitudinal cut 20 mm long, reproduced the most common pipe damage which typically characterizes burst leaks. All tests were repeated in leaking condition.

## 2.2 Actual service pipe experiments

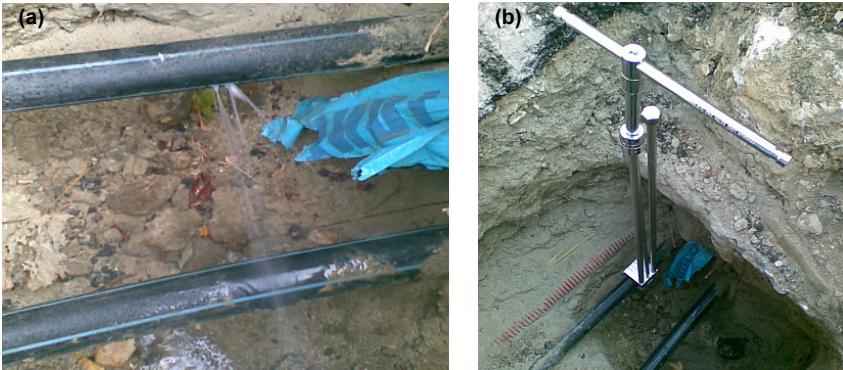
Experimental tests on a real customer service pipe were meant to monitor vibration signals in real working conditions. In order to have a good control of the experiment parameters, a leak was artificially introduced in the connection pipe. The buried service pipe of a residential customer was intentionally damaged by making a 20 mm long longitudinal cut (Fig. (2a)). A special device for controlling the water flow through the crack was built and installed (Fig. (2b)). The device, made of an adjustable sleeve and a operating lever, was arranged in a manhole thus permitting to regulate the water loss (till completely stop the leak) even after that soil and asphalt had been restored, thus keeping unchanged boundary conditions when a transition from a non-leaking to a leaking state was induced.

Due to the nature of the system under investigation, all the other parameters of interest were fixed for the experiments, with the exception of the water flow inside the monitored pipe. Indeed the consumer water consumption could induce a non-zero flow rate. This factor, although not controlled directly by the investigators, provided valuable information for handling unpredicted transient events.

The transducers and the acquisition system were located close to the customer meter. Measurements were performed during 8 consecutive nights, recording 90 acquisitions per night. For the first 7 nights the water leak was kept closed. On the last night the leaking condition was set by operating the regulation device.

## 2.3 Data acquisition and analysis

Two PCB piezoelectric accelerometers with sensitivity of 100 and 1000 mV/g were used. A National Instruments 24 bit A/D card (NI USB-9233) was adopted for acquiring and conditioning the signals. As for the acquisition parameters, a sampling frequency of 5 kHz was adopted. The single acquisition duration was set to 2s and 10s for the test rig campaign and the real service pipe tests respectively. Tens of acquisitions were performed for each test condition.



**Figure 2.** Pictures of the tests performed on the real customer service pipe: (a) leak close up, (b) control device.

Signal analyses were performed with Matlab. The experimental data were investigated – within the Matlab software – by using different approaches in order to possibly identify the most suitable analysis for an effective detection of leaks. Complex analysis techniques were not taken into account. Indeed the final leak detection algorithm will require a relatively simple analysis procedure to be implemented on board.

The raw signals were processed in the time domain where the most common statistics, such as mean value, standard deviation, RMS value, crest factor, skewness, and kurtosis were computed. A second analysis was performed in the frequency domain, where the signal power spectra (PSD) were calculated.

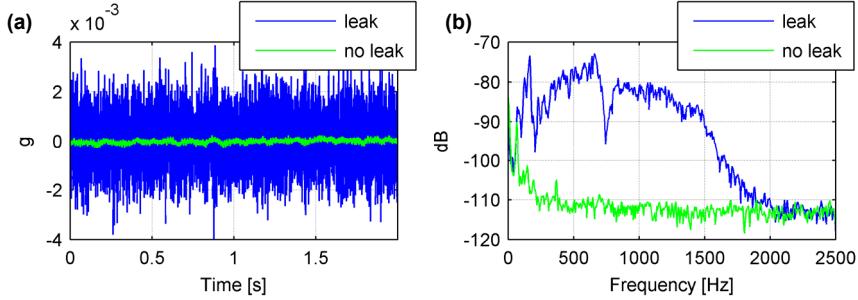
### 3. RESULTS AND DISCUSSION

A huge database was collected from the experiments. Only the most relevant results are presented and discussed hereinafter.

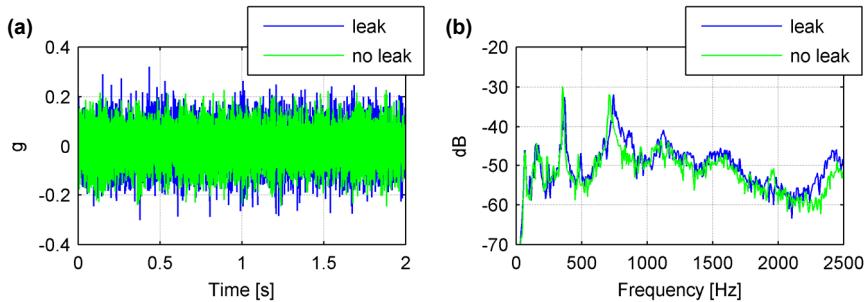
Figure (3a) reports the time histories of two signals recorded from the test rig connection #1 with and without water leak, respectively, and with all terminal valves being closed. The corresponding PSD in the frequency range 0–2.5 kHz are shown in Fig. (3b). Time domain analysis permits to clearly detect the presence of the burst due to a significant increase of the vibration level induced by the leaking water. Apart from the amplitude, the PSD comparison shows that the signal in leaking condition exhibits characteristic frequency content clearly distinguishable from the background noise, thus allowing leak detection in the frequency domain as well. These results are also supported by the analysis of experimental data obtained from tests on the actual service connection (Fig. (5)), and are therefore promising with respect to the overall research goals.

Two factors appeared to mainly affect the recorded signals, i.e. the presence of a non-zero flow rate inside the service pipe, due to water usage, and the distance of the leak from the vibration transducers.

The effects on test rig signals of a non-zero water flow inside the monitored pipe (obtained by opening its terminal valve) are reported in Fig. (4). Figure (4a) displays the comparison in the time domain between vibration measures carried out with and without water leak on connection #1, for a constant flow rate. The signals exhibit comparable amplitudes and trends. Vibration levels appear to be two orders of magnitude higher than



**Figure 3.** Leaking and non-leaking conditions in case of zero flow rate: (a) time history, (b) PSD.



**Figure 4.** Leaking and non-leaking conditions, with maximum flow rate: (a) time history, (b) PSD.

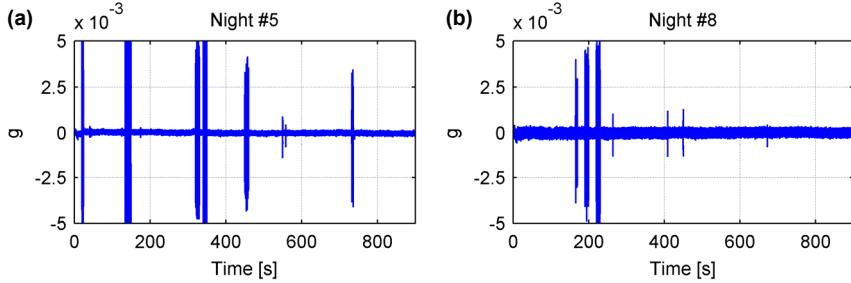
those measured in case of burst leak and closed terminal valve (Fig. (3a)). Such increment completely hides the leak.

Figure (4b) reports the corresponding PSD. Frequency domain analysis shows that the presence of water flow causes higher vibration levels which cover the effects of the leak. In particular the frequency content characterizing the leak can be no more identified (see also Fig. (3b)).

Hence the water leak is no longer detected. It is worth noticing that even very small values of the flow rate prevent the burst to be revealed.

Experimental data from the tests performed on the actual service connection revealed equivalent behaviour. The complete time histories relative to the fifth and the eighth days (obtained by aggregating all the daily 90 records) are shown in Figs. (5a) and (5b) respectively, as examples.

The condition of non-zero flow rate induced by customer water usage causes the abrupt and temporary increment of the measured vibrations, which, as already seen for the previous tests, make the detection of leak impossible. The effects generated by water consumption may be then considered – at a higher level – as the result of a generic perturbation of the system, that is superimposed to the “normal” steady-state signal. Consequently such effects will be referred to (and treated) as generic “external perturbations” hereinafter.



**Figure 5.** Real service pipe measurements, time histories: (a) non-leaking and (b) leaking conditions.

Distance between leak and transducers considerably influences the measures as well, being the perceived vibration level significantly smaller for increasing distance.

The PSD of the signals obtained by varying the distance between the transducers and the water leak are reported in Fig. (6). As the distance increases a consistent reduction of the vibration levels is observed. In particular the damping of higher frequency spectral components appears to rapidly increase. Hence small leaks (characterized by a low leaking flow) located at a relatively high distance from the sensor could result hardly detectable.

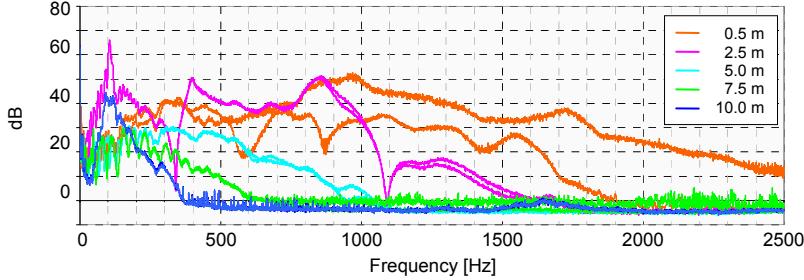
All the other investigated factors (mentioned in Section 2) did not exhibit appreciable influence on vibration measurements, and for the sake of synthesis the corresponding results are not reported. In particular neither the system water pressure nor the flow rate inside the mains did appear to significantly affect vibration signals.

The use of vibration monitoring thus appeared to be a viable approach for detecting burst leaks.

### 3.1 Prototypal algorithm

The results obtained from the experimental tests, in particular those from the measurements on the actual service pipe, led to the definition of the prototypal detection procedure.

Provided that no perturbations affect the measured vibration, the signal level resulted as the simplest characteristics that could be used to satisfactorily detect the presence of leak. The signal standard deviation (STD) was defined as the metrics used to this purpose: in fact, as the RMS value, high values of STD are associated with high vibration levels. A strategy based on the signal STD computation appeared to be potentially profitable due to some essential advantages. Firstly, only basic signal processing is required, since STD can be easily computed from the raw signal. In addition STD allows detecting (and consequently discarding) all acquisitions affected by perturbations. Indeed a non-null flow rate in the pipe, which may prevent the leak from being revealed, entails a STD value increment up to 2 orders of magnitude, thus making it straightforward distinguishing the acquisitions affected by perturbations among all those recorded during a single day (or night, see below). Finally, differently from the RMS value, STD is not affected by the presence of DC offsets that may characterize the recorded signals (it is worth recalling that RMS and STD values coincide for zero-mean signals). Based on these considerations, the following procedure was therefore defined.



**Figure 6.** PSD of signals recorded (by two sensors) for different leak-transducers distances, in case of zero flow rate.

First of all, the measurements are performed by night, when the occurrence of external perturbations (above all due to water usage by the customer) is expected to be less frequent.

An amount of 60 acquisitions per night is executed. Such quantity was considered as adequate for ensuring a high probability of obtaining records not affected by perturbations. After the acquisition of the records, the detection algorithm is run.

The core algorithm computes the signal STDs of each record. A proper index (referred to as Monitoring Index, *MI*, hereinafter) is determined from a proper subset of the computed STD values. In particular *MI* is defined as the average of the 10 lowest STD values among the 60 acquisition per night (implicitly assuming that at least 10 over 60 acquisitions are free from perturbations). The *MI* is then compared with the *MI* relative to the previous nights. If a proper threshold is crossed, a warning is communicated.

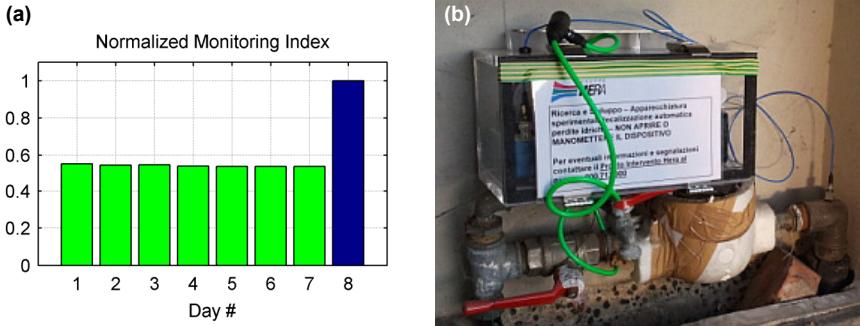
The implemented procedure showed satisfactory leak detection capabilities considering the available experimental data. Figure (7a) reports the *MI* (normalized with respect to the highest value) computed by running the algorithm on the records from the real service pipe experiment: the burst leak can be easily identified, being *MI* almost twice the values assumed in no-leak conditions. Also the data from the test rig experiments led to the same conclusions. Further tests in other real facilities will be performed in order to test and improve the algorithm effectiveness.

### 3.2 Prototypal measuring device

The results obtained from both the test rig and the real service pipe contributed to the definition of the hardware specifications of the prototypal measuring device devised for the next experimental campaign.

The sample frequency was defined at 4 kHz by considering that no relevant frequency content was observed over 1.5 kHz.

The analysis of experimental data showed that vibrations may exhibit very low levels, in particular when the leak is distant from the measuring point. On this point, the experimental data were further post-processed for simulating bit resolutions smaller (till a minimum of 8 bit) than the 24 bit of the NI board. The conclusion of that investigation was that a minimum resolution of 16 bit is required to the A/D card in order to limit the quantization distortion. Moreover accelerometers with high sensitivity are required in order to increase the signal to noise ratio. A signal amplifier was considered advisable as well: its actual adoption will depend on the corresponding incidence on the final system cost.



**Figure 7.** (a) detection algorithm results, (b) prototypal measuring device.

Some prototypal devices were then manufactured by a third party. One unit is represented in Fig. (7b). Equipment functionality is currently under verification. It is worth noting that at this stage such prototypes were not conceived for executing on board the detection algorithm but only for measuring and recording purpose (i.e. the analysis of data is remotely performed). They will be adopted in future extensive tests for performing acquisitions in case of real bursts occurring in the water distribution network. The collected data will be used both for further testing the detection algorithm and for refining the specifications of the definitive leak detection system.

#### 4. CONCLUSIONS

The preliminary investigations concerning a project for leak detection in water distribution pipes by using vibrations were presented. An experimental campaign was carried out on both a test rig and an actual service pipe by artificially inducing burst leaks. The performed tests showed that if the system is free from external perturbation (being the flow rate inside the service pipe the most important), the detection of burst leaks may be achieved by using proper statistics computed on raw acceleration signals. The first results were adopted for the design of some acquisition devices and for the implementation of a prototypal detection algorithm. The devices will be adopted in a larger experimental campaign for collecting data from real burst leaks located and repaired in the water supply network.

Limited to the available experimental data, the prototypal algorithm proved effective for leak detection, further improvement still being required. Further investigations will be thus performed on data obtained from the planned future tests in order to achieve the following goals:

- to assess the algorithm effectiveness on a statistically representative database;
- to increase the algorithm robustness in case of signals affected by noise or numerous perturbations, thus maximizing its detection effectiveness.

In particular the possibility of enhancing the algorithm performance by filtering the signal (with a hardware or software band-pass filter) will be investigated. Different analysis techniques will be also tested in order to examine alternative approaches that may enable an effective detection of water leaks.

The leak detection device should be integrated, in the future, with the system for automatic meter reading (AMR), i.e. they should share the same power supply and data transmission network. The leak detection system is expected to provide early warnings in

case of occurrence of bursts. Hence the burst runtime should be significantly reduced by decreasing awareness time. In addition the device is also expected to enable the detection of several unreported bursts, due to the foreseen widespread installation. Hence a global reduction of costs related to water leaks is expected thanks to the relevant reduction of water losses, integration with the AMR, and the possibility of remote data handling.

## Acknowledgements

This activity is performed in collaboration with the R&D department of Hera S.p.A. (Bologna, Italy), that is gratefully acknowledged for operative cooperation, use of facilities, and financial support.

## REFERENCES

- [1] United States Environmental Protection Agency, 2010. "Control and Mitigation of Drinking Water Losses in Distribution Systems". US EPA 816-R-10-019, November.
- [2] Portolano, D., 2008. "Il controllo delle perdite nei sistemi acquedottistici: criteri innovativi di gestione". PhD thesis, University of Napoli, Italy.
- [3] Vickers, A. L., 1999. "The future of water conservation: challenges ahead". *Journal of Contemporary Water Research and Education*, **114**(1), pp. 49–51.
- [4] International Water Association, 2007. "District Metered Areas Guidance Notes". IWA, February.
- [5] Li, W., Ling, W., Liu, S., Zhao, J., Liu, R., Chen, Q., Qiang, Z., and Qu J., 2011. "Development of systems for detection, early warning, and control of pipeline leakage in drinking water distribution: a case study". *Journal of Environmental Sciences*, **23**(11), November, pp. 1816–1822.
- [6] Hunaidi, O., and Wang, A., 2006. "A new system for locating leaks in urban water distribution pipes". *Management of Environmental Quality: An International Journal*, **17**(4), pp. 450–466.
- [7] Hunaidi, O., Chu, W., Wang, A., and Guan, W., 2000. "Detecting leaks in plastic pipes". *Journal of the American Water Works Association - 21st Century Treatment and Distribution*, **92**(2), pp. 82–94.
- [8] Gao, Y., Brennan, M. J., Joseph, P. F., Muggleton, J. M., and Hunaidi, O., 2005. "On the selection of acoustic/vibration sensors for leak detection in plastic water pipes". *Journal of Sound and Vibration*, **283**(3–5), May, pp. 927–941.
- [9] Khulief, Y., Khalifa, A., Mansour, R., and Habib, M., 2012. "Acoustic Detection of Leaks in Water Pipelines Using Measurements inside Pipe". *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, **3**(2), May, pp. 47–54.
- [10] Leoni, G., Anzalone, C., Giunchi, D., and Nascetti, D., 2009. "Method for detecting the presence of leaks in a water distribution net-work and kit for applying the method". European Patent 2107357.

# DIAGNOSTICS BY MEANS OF ARTIFICIAL IMMUNE SYSTEMS: A DIFFERENT APPROACH FOR THE FAULT DETECTION OF BEARINGS IN NON-STATIONARY CONDITIONS

Luca Montechiesi

*Faculty of Mechatronic Engineering*

*University of Modena and Reggio Emilia, Italy*

*E-mail: 71277@studenti.unimore.it*

Marco Cocconcelli

*Department of Science and Engineering Methods*

*University of Modena and Reggio Emilia, Italy*

*E-mail: marco.cocconcelli@unimore.it*

Riccardo Rubini

*Department of Science and Engineering Methods*

*University of Modena and Reggio Emilia, Italy*

*E-mail: riccardo.rubini@unimore.it*

**Abstract.** Nowadays in industries we can assist to a technological evolutionary phase in design of machineries, from asynchronous motor-based (AMB) actuation to servomotor-based (SMB) actuation. This new type merges together the functions of a motor, a gearbox and a cam into a unique element which is the servomotor. The main advantages are the removal of complex mechanical components like gearboxes and cams which are subjected to wear, need maintenance, etc..., an improved easiness in the setup changing and an increased acceptable complexity of the motion profile. The main drawback regards the diagnostics activity, e.g. on bearings, where classical methods based on the research of the fault frequencies in the signal spectrum cannot be applied anymore, due to the consistent variability in the speed of the shaft. This paper tackles the bearing diagnostic in servomotors by means of an unsupervised learning approach: the artificial immune system, which has been developed and applied with success in the field of computer security, and – as the name suggests – its aim is to mimic the behavior of the human immune system which is able to recognize health hazards, like virus, even if never seen before.

**Keywords:** Condition monitoring, Artificial Immune Systems, ball-bearing, Euclidean distance minimization, Variable Detectors algorithm.

## 1. INTRODUCTION

One of the main problem in the industrial production field is avoiding machines to be stopped by component faults. Statistical evidences prove that the majority of unexpected

stops (about 50-60%) are due to faulted bearings. This makes bearing diagnostics a prime research field to improve efficiency and durability of the industrial mechanical systems.

Ideal diagnostics should also provide a real-time condition of the components in order to monitor them until the appearance of the first signals of malfunctioning. This could ensure a longer lifetime of the parts than e.g. that provided by a preventive maintenance, where components are substituted at given time intervals independently of their actual conditions, with a relevant economic advantage [1]. Up to now the problem has been solved analytically studying the bearing as a planetary gear in order to define the dependence of selected damage parameters from the working condition of the bearings. In particular the presence of a damage introduces a specific frequency in the vibration spectrum called *fault frequency* [2]. The proportionality between this frequency and the rotating frequency of the motor shaft is proved [3,4]. Although this model revealed to be the best one for the monitoring of bearings subjected to stationary conditions, it becomes useless in case of machines that operate at variable speed, with turns of rotation of the shaft. This problem is sensible in presence of the recent servomotors, which have the characteristics to be very flexible, performing complex motion laws of the shaft. These recent developments have shown the necessity of totally different kinds of approaches than the classic model-based methods. For example the so-called supervised learning systems are awakening the interest of many researchers [5]. In particular artificial neural network (ANN) produced good results in fault detection and a great number of other application. These techniques have been applied successfully in the diagnostics of mechanical components such as bearings [6,7] and gears [8-10]. One of the most recent field of research among cognitive systems are the *artificial immune systems* (AIS) [11,12] which can be referred to as the totality of the algorithms and computational methods derived by the study of human immune system (HIS). The human immune system is probably the most powerful diagnostic tool that can be found in daily experience. In fact the main scope of HIS is to recognize in real-time possible menaces like viruses and bacteria by means of specific elements (antigens and antibodies), and to initiate the process of defense. This paper focuses in particular on two specific algorithms called Euclidean Distance Minimization and V-detectors method which will be applied in the fault detection of bearings working in non stationary conditions. The characteristics and limits of both the algorithms will be discussed and compared in order to perform a proper evaluation.

## 2. BACKGROUNDS ON THE HUMAN IMMUNE SYSTEM (HIS)

As previously said AIS cover a multitude of different algorithms and methods and their description is out of the scope of this paper. For further details refer to [11, 13]. Only the main concepts will be provided, initially explained from human body perspective, will be then converted into data and algorithm functions.

### Basic entities of the HIS

First of all, it is important to distinguish between two fundamental entities which we will refer to:

- *Antigens*: proteins produced by external pathogen agents which are able to cause damage to human body tissue if unstopped.
- *Antibodies*: proteins produced by immune cells of the human body which are able to neutralize dangerous foreign cells by recognizing their antigens.

The elimination of such cells is performed so that only the antibodies that couple a specific antigen will stimulate the immune response against it. This coupling process takes place only when the complementarity between the antigen and the antibody exceeds a fixed threshold.

### The shape-space formalism

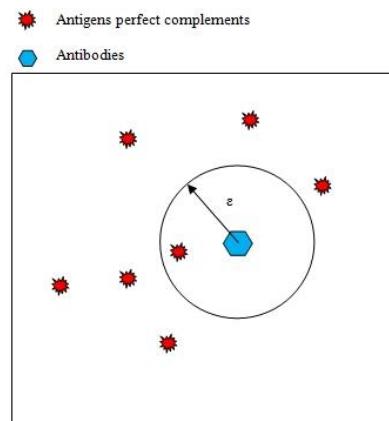
For better explaining and evaluating this phenomenon scientists [14] introduced the idea of *shape space* i.e. a space identified by L-dimensions where L is the number of different features that influence the coupling process of antibody-antigen (e.g. chemical, geometrical...features). The L-dimensional space is also known as *generalized shape*.

Using the shape space formalism is possible to represent antigens and antibodies as punctual entities in the L-dimensional space, and their affinity can be evaluated as the distance between them. Although in reality the ability of antibodies to couple a given antigen is a sigmoid function of such a distance, it is an acceptable approximation taking a certain threshold value that is able to determine whether the antibody-antigen coupling is verified or not (see Figure 1). This value defines the active radius of a certain antibody, which will be able to recognize all the antigens whose perfect complements are located within that limit. It is important to notice that the shape space is applicable to any kind of space, not only the Euclidean one.

### Immunological principles

Once defined the modality used by antibodies to recognize and attack antigens produced by foreign cells, is good to explain the global aspects that regulate the production and the differentiation of immune cells from a systemic perspective.

There are two important immune principles that must be considered: the *clonal selection principle* and the *negative selection principle*. Human systems always generate new antibodies to contrast the enormous number of antigens that strike us every day. A singular antibody is not a cognitive entity and it is not able to distinguish between antigens (*non self*) and other antibodies (*self*), so the immune system could attack and destroy itself (the so-called autoimmune disease).

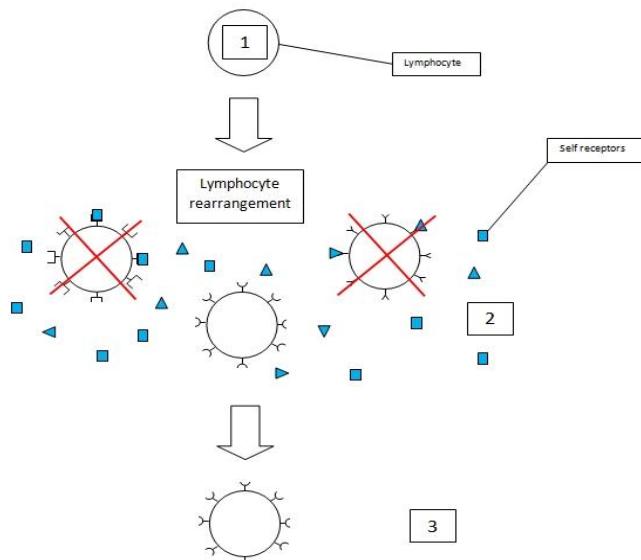


**Figure 1.** Representation of a bi-dimensional Euclidean shape space [13], [14]. Red entities represent the perfect complements of the antigens considered.

Moreover antibodies generation – through a pure randomization process – could provide a weak and inefficient immune response. Therefore the human body uses the two principles previously cited to avoid these two problems: clonal selection principle ensures that only the most suited antibodies will be cloned, that is the antibody which couples with more antigens is the one more to reinforce immune response against that precise antigen. Negative selection principle, on the other hand, avoids antibodies to attack what is *self*, eliminating those which attack each other.

**The negative selection principle.** Known also as central tolerance, this theory explains how the immune system prevents lymphocytes from attacking each other, showing then a mutual recognition of the self-elements. Its formulation is actually included in the larger *clonal selection principle* presented by Brunet in 1959, and provides a real selection of the lymphocytes in base of their harmfulness for the human body. It can be substantially structured into the following points:

1. New lymphocytes are generated into the bone marrow with a semi-randomized process.
2. These cells travel through the lymphatic system until reaching the lymphatic glands and in particular a specific one called thymus. This one in particular results full of receptors typical of the other immune cells and of the human body.
3. While coming across this enormous quantity of receptors, some of the new lymphocytes will be activated by coupling with them.
4. These ones will be immediately eliminated with a systematic process as they can result dangerous for the body because of their *autoimmunity*.
5. All the remaining lymphocytes will only be able to couple external antigens presenting a tolerance toward the other immune cells.



**Figure 2.** Representation of the negative selection principle where new lymphocytes are generated in 2 from a randomized rearrangement of the cell 1, and then selected according to their inability of coupling the receptors in 3.

If this theory was totally observed by the immune system there would not be any kind of autoimmunity whereas it is proven that every individual presents a certain grade of harmful lymphocytes physiologically. This contradiction is sufficient to understand that this theory does not result exhaustive yet from a medical perspective. Despite of this, the negative selection principle provides a fairly accurate model of the behavior of the immune system and can be used as inspiration to create computational routines which are able to emulate it. In particular the resulting algorithms seem to be perfectly suited for the fault detection task as this activity is also practiced by the human immune system.

### 3. ARTIFICIAL IMMUNE SYSTEMS

As previously anticipated we are considering that class of methods which study and emulate the behavior of the main cognitive processes present in nature, namely *artificial intelligence approaches* [15]. Unlike the others these are characterized by an high grade of generality which makes them applicable to a wider class of cases. Of course the precision of these approaches constitutes a sensible drawback. The practical implementation and application of these methods goes under the name of *machine learning field* and constitutes an highly topical branch for a multitude of applicative sectors. Well known algorithms such as artificial neural networks (ANN), support vector machines (SVM), decision trees and genetic algorithms (GA) own to this sub-class of artificial intelligence approaches. Even if there are substantial differences within them, they can be grouped in two main classes according to the modalities they use to compute the data and their practical tasks. So we generally speak of *supervised* and *unsupervised learning*. In the first case, a set of data (training data), which has to be properly selected to ensure a certain grade of generality, is given as input to the algorithms so they can construct a collection of rules which can subsequently be used for the testing phase. At this point trained algorithms can perform a classification and evaluation of unknown data (testing data). Such method is shared by support vector machines, genetic algorithms, decision trees and almost all the artificial neural networks. All these techniques have been applied with success for the condition monitoring tasks [16], and in particular on the gears and bearings [6], [7]. The most interesting aspect using the AI approach is that, unlike other well-known methods such as spectral kurtosis or cyclostationarity, they can easily be implemented in automatic fault detection routines so that even the most inexperienced users are able to perform diagnostics efficiently, though there are serious limits in their applicability. In fact, to perform a proper condition monitoring, it is generally required a collection of data which industries usually don't have, and in particular information concerning the faulted components which are very difficult to acquire in the industrial context. Moreover the exact working condition of the production process is not possible to simulate on a dedicated test bench because of the random components of noise that are not replicable, so the only efficient way for collecting training data still results the acquisition during the processing phase. These problems can be avoided considering the second class of algorithms, i.e. the unsupervised approach. Unlike the previous ones, these methods do not require a training phase, but directly classify the testing data through a process of information extraction. Some typical examples are the so called self-organizing maps (SOM) [17], and the adaptive resonance theory (ART). In this paper a very young branch of the artificial intelligence is taken in consideration, called artificial immune systems (AIS), which has already found an important role in many applicative sectors. This class of algorithms is inspired and derived from the mechanisms that regulate the human immune system, and comprehends very different methods. Initially

developed for computer security, only recently these algorithms have been applied in the condition monitoring sector, becoming a decent competitor for the artificial neural networks, with whom they share several properties [18], and result then classifiable as supervised or unsupervised according to their characteristics and their tasks. In this paper we will introduce and apply two algorithms owning to the Artificial Immune Systems class:

- The Euclidean Distance Minimization
- The V-detectors algorithm

Both the methods present some advantages and drawbacks that will be evident in their application and own respectively to the supervised (Euclidean Distance Minimization) and unsupervised (V-detectors) class.

### **Euclidean Distance Minimization (EDM)**

This first algorithm has been designed and derived from another specific one called AbNet, in order to improve and optimize its application for the fault detection of bearings. To properly understand the Euclidean Distance Minimization and its properties a small introduction to AbNet is necessary, in this way the derivation of the presented method will easily become clear.

**Introduction to AbNet.** The immunological aspects explained in the previous chapter have been used by De Castro to create an immune algorithm , AbNet , which has already been used with success in machinery diagnostics [19]. The idea at the base of AbNet is to transform antigens and antibodies into data and to use the previously explained principles to operate in the field of pattern recognition. The algorithm of De Castro requires the data to be necessary in binary form so it has to be defined a new distance for evaluating antigen-antibody binding. This type of distance is computed between two binary arrays calculating the number of complementary bits between them and is called *Hamming distance*. So the higher the complementarity between the two array, the higher will be this distance. In this way it is possible to apply the shape-space formalism to a binary space identified by L dimensional binary strings. Again, the binding occurs when the distance (H) between them overcomes a certain threshold value (E). Working on these concepts AbNet is able to generate – once an arbitrary number of L dimensional binary arrays which represent the antigens and a threshold binding value E are defined – the minimum number of antibodies which can bind every inserted antigen. If E is set to 0 the number of antibodies generated will be exactly the same of the antigens, and every antibody will be the perfect complement of an antigen. On the other hand if E is set to a different value, e.g. 3, will be generated less antibodies than antigens because some antibodies will be able to bind more than one antigen, and the complementarity won't be perfect anymore. Applying this algorithm it is possible to create from a bearings dataset (which represent our antigens), passing through a binary conversion of the data, a set of antibodies which are able to recognize not only antigens belonging to the dataset, but also new unknown antigens. Following this method [19] and [20] used AbNet as an expert system obtaining very good results. Like any other supervised learning system this implementation of AbNet is composed of two different phases: the training phase and the testing phase, as shown in Fig. 3. As previously said this kind of AbNet application was able to recognize well malfunctioning bearings, and could also determine what kind of break they were subject to. The method proved to work very well in case of multiple accelerometers used to survey vibration signals and more generally with a very large quantity of information in the training phase, while its detection efficiency

decreases unacceptably using only one accelerometer. This is a sensible drawback in industrial maintenance where only a limited number of accelerometers are used.

In this paper an alternative method called Euclidean distance minimization (EDM) is proposed, based on the shape space formalism. The EDM method is derived from the AbNet concept and it allows to solve and simplify the diagnosis process.

**Definition of the EDM algorithm.** The definition of the Euclidean distance between a set of two n-dimensional vectors  $\bar{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  and  $\bar{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  is reported in Eq. 1.

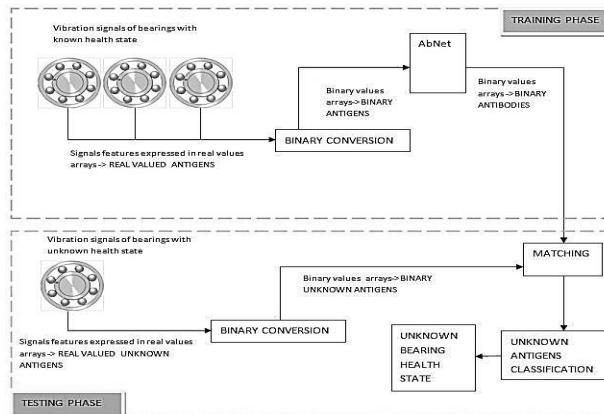
$$dist\{\bar{P}, \bar{Q}\} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2} \quad (1)$$

Unlike AbNet which works on arrays of binary numbers, the proposed method works directly on arrays of real numbers and it is reduced to a least squares problem. The shape space is now a normal Euclidean space with L dimensions. Moreover the antibodies can be neglected since they are not really needed at computational level. In fact the antibodies are considered as a biological mechanism used by the human body to compare new antigens with those previously eliminated, so it should be possible classify the new ones as non self and remove them too. These simplifications lead to only two types of basic entities:

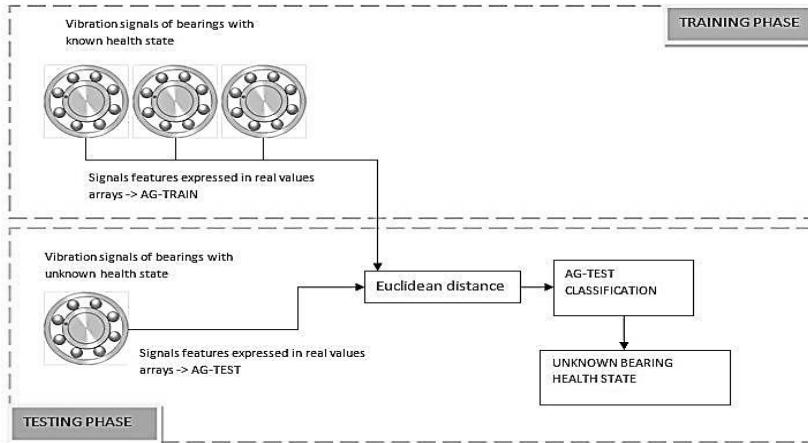
- *Training antigens*: antigens relative to bearings of which the health state is known a priori. Let's refer to these as Ag-train.
- *Testing antigens*: antigens relative to bearings of which the health state is to be determined. Let's refer to these as Ag-test.

The algorithm performs Euclidean distance between a set of Ag-train and Ag-test in order to classify the Ag-test according to the proximity to a certain group of Ag-train which represents a specific health condition of the observed bearing.

Figures 3 and 4 show the flowchart of the training and test phases for the AbNet and EDM immune systems respectively. In the next section the algorithm will be implemented to a real case of bearing diagnostics to evaluate its efficiency.



**Figure 3.** Block diagram representing AbNet application in bearings diagnosis.



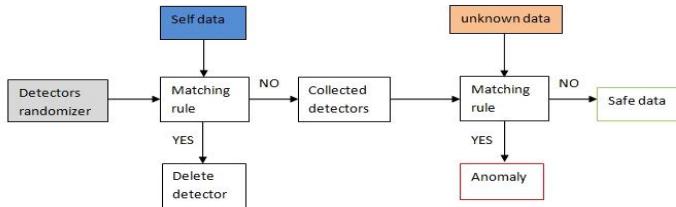
**Figure 4.** EDM block diagram

### V-detectors algorithm

As will be further presented, the EDM method results of simple implementation for the specific case and very precise in the classification even when very small quantities of data are provided as input in the training phase. The main drawback of the method is due to the fact that it belongs to the category of the supervised approach. This implies that the EDM needs training data for all the classes that we want to recognize. In a practical case of bearings diagnostics this means that we have to collect data even for the broken components and it's not always possible for the companies. Then although this algorithm is able to classify different the types of faults in the bearings with good sensibility, it results inapplicable in the majority of the industrial cases. To overcome this serious limit we will adopt the unsupervised approach in way to avoid the necessity of the data from the broken bearings. The specific algorithm considered is known as V-detectors and is inspired and derived directly from the negative selection principle introduced in the immunological section.

**Negative Selection Based Algorithms.** Initially introduced by Forrest [21] these algorithms were created for the sector of computer security, in particular they aimed to indicate when a certain file was corrupted or manipulated through a specific analysis of its bit string. In the first version the method only worked with binary data and at last was extended to the real valued field. However the main routine applied by all the negative selection algorithms seems always to be the same, such as the data entities used. This occurs because these different data types are only an informatics representation of the cellular entities present in the real negative selection process, and are then always elaborated the same way. It is then possible to summarize this routine into the following steps:

1. An initial set of data to protect is given as input to the algorithm and represents the *self-receptors* in the immunological perspective.
2. An arbitrary set of *detectors* is generated through randomization as a representation of the new lymphocytes
3. A matching rule has to be defined to verify which detectors couple the self-data

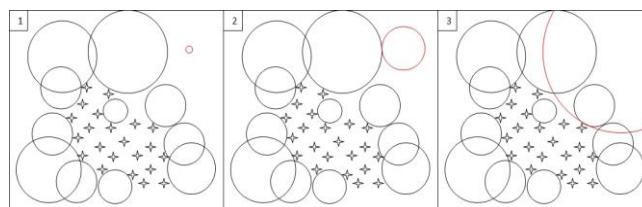


**Figure 5.** Flowchart of the abstract procedure applied in the negative selection algorithms [21].

4. After comparing all the detectors with the input data, the activated ones are eliminated
5. The remaining detectors are used to perform the anomaly detection on other data.

Applying this method is always possible to automate the anomaly detection procedure when a data acquisition system is available.

**The variable detectors method (V-detectors).** Unlike the main structure of these methods, which has remained unvaried, many different versions have been produced for better adapt them to the activity they were applied in. One of the most recent and interesting is certainly the so called variable detectors method which has already proven to be an interesting and simple tool for the anomaly detection on many different mechanical systems [22]. Its ability to perform diagnostics on bearings in stationary working conditions has been confirmed [23], with interesting results about the simplicity of implementation of the method to create automatic fault detection systems, but its true utility is shown in the case of consistent variations in the speed of the shaft, so in this paper the attention will be pointed out on this specific kind of applications. The main difference with older algorithms is its ability to work in a real valued space instead of a binary one, which is traduced in increased applicability for real systems which are better representable and describable in the real domain. Then all the entities previously described (self-receptors and detectors) are represented by L-components real valued arrays, which correspond to points in a L-dimensional space of solutions, while the matching rule will be a simple distance threshold. Moreover the algorithm provides that every detector possesses an active radius that, when generated through randomization, is expanded from zero value until it touches the nearest self-array. Once a sufficient number of detectors has been generated, they will represent a sort of template of the original self-receptors so that new arrays can be easily classified.



**Figure 6.** Generation and expansion of a new detector from 1 (spatial randomization) to 3 (maximum limit of expansion) in a bi-dimensional space.

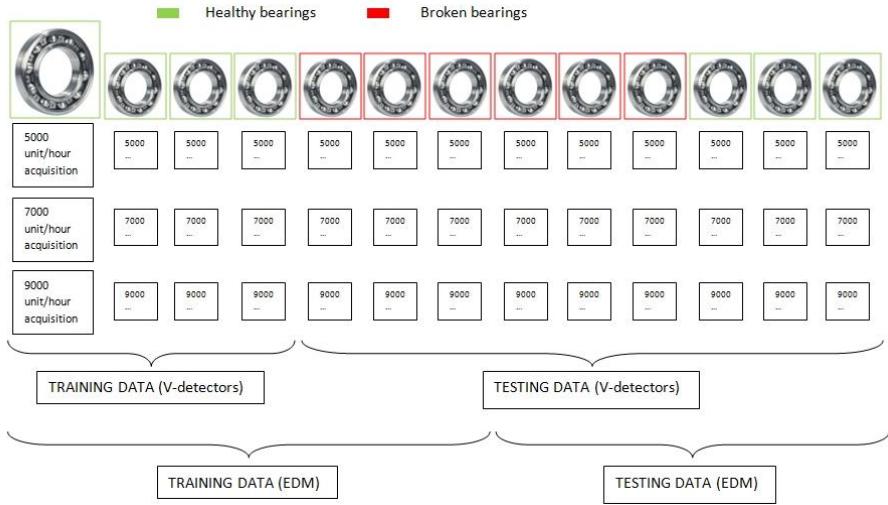
Observing its modality of action in a bi-dimensional space of solution like the one in figure 6 it is possible to notice that the algorithm performs a simple task: it describes the shape of the self-zone through the generation of discrete elements called detectors. The randomization component present in the process of generation makes this method completely stochastic, but its results in the anomaly detection tend to the same level of efficiency if a sufficient number of detectors is generated. Like other negative selection based algorithms, also the v-detectors' one has many different formulations for a better coverage of the non-self-space with a minimum number of detectors, solving the problem as an optimization issue. One of the most effective solutions for example exploits mixed detectors with very different shapes, such as triangles or rectangles which can easily be implemented in the algorithms as a set of *if...else* rules. However in this paper the number of detectors is not considered as a constraint, but only the efficiency of the algorithm will be taken in consideration.

#### 4. EXPERIMENTAL ACTIVITY

The V-detectors and the EDM methods can certainly find a relevant utility in case servomotors are used. In particular most of the times the SMB (servo motor based) actuation is characterized by extremely rapid variations of the shaft speed and even the sense of the rotation is inverted. With these conditions the signals acquired do not present characteristic frequencies associated to a fault which could eventually be present on the bearing analyzed. Then it's not possible to find a correlation between the speed of the shaft and these frequencies in order to monitor their level of energy so that all the methods based on this modality cannot produce results in the diagnostics activity, and only few other approaches result usable in this case: the V-detectors and the EDM are two of them. The case selected for testing the algorithms simulated a real case of industrial diagnostics. Thirteen bearings were mounted on a packaging machine for liquid food production. This SMB actuation provided rapid variations of speed and inversions in the rotation sense of the shaft. Of the whole bearings six resulted faulted and the other seven healthy from a visual inspection. Afterwards they were mounted on a dedicated test bench which replied the original actuation following the same motion profile, and about fifty seconds of acquisitions were taken by accelerometer for every bearing at a 10 kHz sampling rate with the three types of operative modalities possible on the original machine ( 5000, 7000 or 9000 packages per hour). Then the whole data were divided into two classes:

- Training data: consisting of the acquisitions taken from 4 of the 7 healthy bearings (for the V-detectors) and also from 3 broken ones (for the EDM). These data have been used to generate a set of detectors.
- Testing data: consisting of all the remaining bearings, which are used for the evaluation of the algorithm. All the tests have been repeated for the three modalities 5000-7000-9000 units per hour.

Once that these data have been generated, another step is required before using them into the methods. The algorithms in fact require a spatial representation of these data which can be provided through a conversion of the signals into a set of real valued arrays. This can be obtained using real features of the vibration signal collected in a single array. The method used in this application, which is reported in figure 8, computes 3 different features

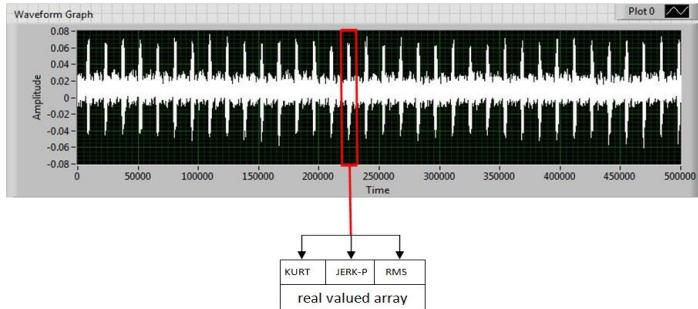


**Figure 7:** Representation of data acquisition procedure from the bearings provided by the company.

i.e. kurtosis, jerk-peak and RMS, though even a different number can be taken to represent the signals. Moreover other features can be selected, even if these three parameters have shown the ability to create very descriptive arrays, and are very sensitive to the eventual faults located on the bearings. Another important concept to take into consideration while choosing these features is just their dependency on the anomalies of the components. If for example the medium speed of the shaft was taken as fourth feature (as done in the first tests before perfecting the procedure), the resulting arrays would be, in the fourth dimension, independent from the damage, because both healthy and a broken bearings could share the same medium speed. On the contrary two bearings working in the same conditions with different state of health almost certainly will produce signals with very different kurtosis values. This is a very important point to consider for the right application of this algorithm, in fact if there is even only one feature which isn't fault dependent, then the method results completely useless giving wrong results. Returning on the array generation process, every vibration signal was then divided for the number of machine cycles performed during the acquisition. From every of these sub-signals the three features (Kurtosis, Jerk-peak and RMS) have been computed and then joined in order to form a three components real valued array which represents a specific machine cycle in the acquisition.

### EDM implementation

Once the process of antigen preparation is terminated, they will be introduced in the algorithm to operate the anomaly detection. This will be achieved by the classification of the Ag-test, performing all Euclidean distances between the Ag-test and all the Ag-train, and then considering which antigen and which category (B or W) is associated with the minimum Euclidean distance.



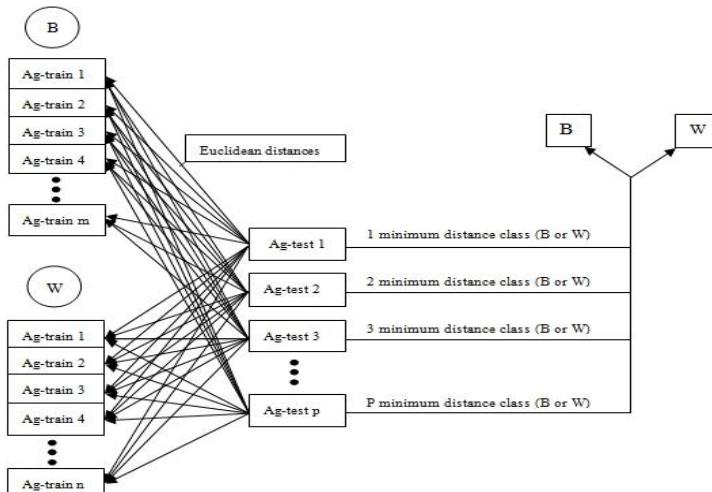
**Figure 8.** Array extraction process from a single sub-signal.

At the end of the process all Ag-tests are classified into the B category and/or the W category. The largest population of one of the two categories will provide the final classification. This is summarized in Fig. 9.

In the software implementation created, the algorithm, after evaluating the minimum distances, provides as output percent values representative of the quantity of Ag-test attributed to the two conditions B and W to provide a description of the most probable health state.

### V-detectors implementation

Although the method uses a precise procedure, its implementation results, thanks to its simplicity and generality, quite flexible and adaptable to the specific demands of the diagnostic activity performed. In this specific case the algorithm was implemented in LabVIEW and a couple of input parameters were created to improve its handling and adaptation:



**Figure 9.** Classification scheme: for every  $(\text{Ag-test})_j$  the distances with every Ag-train are performed, then the quantity of minimum distances relative to the two classes are compared

to obtain the final classification. The totality of Ag-test (1,2,3,...n) represents all the features extracted from the signal of the bearing to be classified.

- the number of detectors N
- the initial radius  $r$  before the expansion.

The first parameter N guarantees a control over the number of the detectors in case the memory of computation results a constraint, and because the algorithm requires a great number of multidimensional (in this case three-dimensional) distances to be calculated, so the less detectors the faster will be the process, even if a lower number will be traduced in less precise results as their set will be less descriptive of the shape of the self-zone. In figure 10 a three-dimensional representation is given for this behavior.

The second input value r was created to avoid a particular behavior of the algorithm which tends to create positive false. In the case of a distributed group of self-arrays, some small detectors could be generated into the self-zone giving wrong anomaly signals during the testing phase and reducing the abstraction ability of the method. Then the r value states the initial radium right after the detectors are generated, and if they already couple a self-array at this point, they will be automatically eliminated according to the negative selection principle, otherwise are expanded until the nearest one.

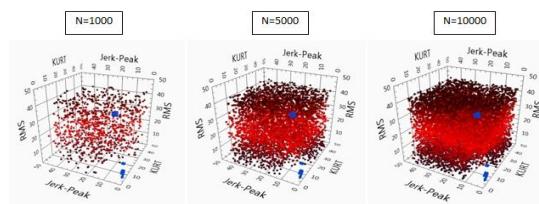
An optimal setting of these two parameters was found at N=100 and r=10 values and the testing activity was performed.

## 5. RESULTS

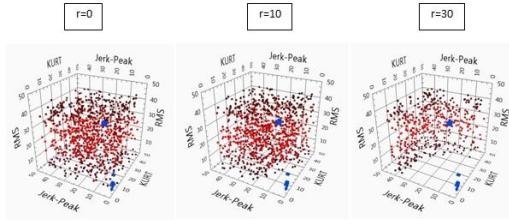
In this section the behaviour of the two methods presented will be taken in consideration in order to evaluate the positive and negative aspects of both.

### Euclidean Distance Minimization

The EDM was able to recognize all of the six test bearings with no error. 100% of Ag-test derived from the three broken bearings were classified as B and the 100% of the antigens derived from the three healthy bearings were associated to the W category. The results are summarized in Fig. 12. These results were quite unexpected as between the tested bearings, one of the healthy was not subject to a breaking-in process and presented really high values of RMS and Jerk-peak, almost comparable with those of broken bearings.



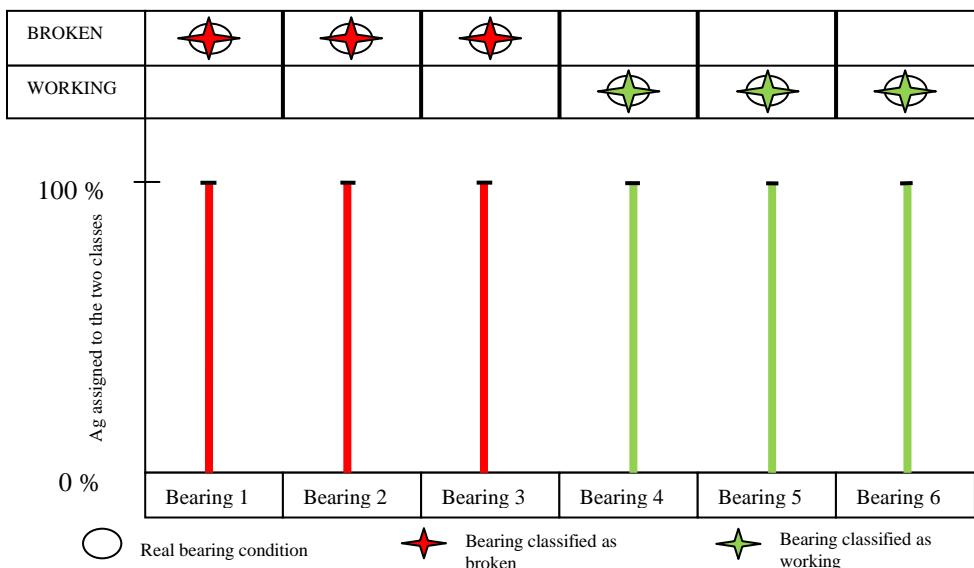
**Figure 10.** Effect in the detectors descriptiveness increasing the input parameter N (generated detectors). The blue dots are the self-arrays while the red ones are the punctual representations of the detectors. The parameter r was set to the same value (10) in every of the three cases.



**Figure 11.** Effect of the  $r$  parameter on the detectors distribution in relation the self-arrays for the same value of  $N=1000$

### V-detectors

The first software implementation created provided the number of arrays which have been coupled by the originated detectors as output in the testing phase. In a further development it was set that a danger signal was given as output when the percentage of the coupled arrays overcame the 50%, in order to ensure greater tolerance to the algorithm and to avoid the positive false phenomena. Nine bearings were used for testing (six broken and three healthy) in the three production capacities of the original machine (5000/7000/9000 units/hour). A set of detectors was generated in the K-J-R space using all the arrays obtained from the training data. Then for every of the three operative modalities these detectors were compared with the unknown arrays originated from the testing bearings, in order to classify the health condition of the components. The results of this experimental activity are shown in table 1. The values reported for every bearing represent the effective percentage of its dangerous arrays i.e. the ones recognized by the detectors.



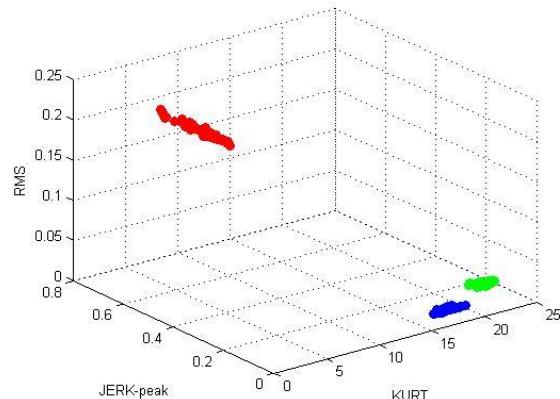
**Figure 12.** Experimental results of the EMD algorithm.

**Table 1.** Results of the diagnostics activity on the 9 bearings tested. The red color indicates that the bearing was found broken in the initial inspection, while the green represents the right health state.

Bearing1	Bearing2	Bearing3	Bearing4	Bearing5	Bearing6	Bearing7	Bearing8	Bearing9
<b>5000 hourly capacity</b>								
100%	100%	100%	100%	100%	100%	0%	0%	26.3%
<b>7000 hourly capacity</b>								
100%	100%	100%	100%	100%	100%	0%	0%	27.1%
<b>9000 hourly capacity</b>								
100%	100%	100%	100%	100%	100%	0%	0%	29.5%

It is possible to notice that all the broken bearings were completely recognized and reported, while of the three healthy bearings just the number 9 presents positive false. Although its danger percentage is not sufficient to classify it as broken, it resulted quite high for a bearing which did not present any kind of fault, so further research was made on the cause of this phenomenon. Contacting the company which provided the bearings it was discovered that this specific one had been mounted on the original machine for a very short period, so it didn't receive a run-in process. The consequences of this can be seen in the spatial distribution of its arrays compared to the ones from the other two healthy bearings (Figure 13). Higher values of RMS and Jerk-peak characterize this bearing worsening the algorithm efficiency in this specific case.

Despite of this small anomaly in its diagnostics ability, the algorithm was able of correctly classify all the bearings anyway, proving to be a very flexible tool for the industrial fault detection. Moreover it has to be considered that this run-in defect does not verifies if there is another bearing in the same conditions used for the training phase, which is a very common situation if a data acquisition system is used from the begin of the useful life of the components.



**Figure 13.** K-J-R distribution of the arrays from bearing 7 (blue), 8 (green) and 9 (red).

## 6. CONCLUSIONS

In this paper the Artificial Immune System approach was applied for the fault detection and diagnostics of mechanical components, and in particular of bearings working in non stationary conditions. Two algorithms owning to the AIS field were introduced and applied in a real case to evaluate the health state of bearings. The methods require the generation of antigens or real valued arrays from the investigated bearings, that will be used as training and testing data to operate the classification. The EDM algorithm proved to be very precise in the evaluation, but lacking of applicability in industrial cases where the data obtained from broken bearings are not available. On the other hand the V-detectors can work as an unsupervised method just using the signals from the healthy components, but with less accuracy and with the necessity of a much wider training dataset. Compared to the other methods owning to the artificial intelligence approach the AIS present some very interesting features, like the possibility to perform diagnostics without the data of the faulted components, and the ability to execute automatically on the field the training and testing phase with an adequate data acquisition system. Moreover, due to its generality and simplicity, it results one of the few approaches which seem to be able to perform a real industrial diagnostic in case of consistently nonlinear speed profiles.

## Acknowledgements

The authors wish to thank the Inter Departmental Research Center INTERMECH MoRE of the University of Modena and Reggio Emilia for the financial support.

## REFERENCES

- [1] Neale, M.J., and Woodley, B.J., 1978. A guide to the condition monitoring of machinery. Report TRD 223, British Department of Industry.
- [2] McFadden, P.D. and Smith, J.D., 1984. "Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing". *Journal of Sound and Vibration*, **96**(1), pp. 69–82.
- [3] Randall, R.B., 2011. *Vibration-based Condition Monitoring: industrial, aerospace and automotive application*. John Wiley and Sons, Chichester, UK.
- [4] Randall, R.B. and Antoni, J., 2011. "Rolling element bearing diagnostics - A tutorial, Mechanical System and Signal Processing". *Mechanical Systems & Signal Processing* **25**(2), pp. 485–520.
- [5] Kotsiantis, S.B., 2007. "Supervised Machine Learning: a Review of Classification Techniques". In *Emerging Artificial Intelligence Applications in Computer Engineering*, Maglogiannis et al. Eds., IOS Press, pp. 3–24.
- [6] Cocconcelli, M., and Rubini, R., 2011. "Support Vector Machines for condition monitoring of bearings in a varying-speed machinery". In Proceedings of Eighth International Conference on Condition Monitoring, June 20-22, Cardiff, UK, pp. 1–11.
- [7] Cocconcelli, M., Rubini, R., Zimroz, R., and Bartelmus, W., 2011. "Diagnostics of ball bearings in varying-speed motors by means of Artificial Neural Networks". In Proceedings of Eighth International Conference on Condition Monitoring, June 20-22, Cardiff, UK, pp. 12–23.
- [8] Zimroz, R., and Bartkowiak, A., 2011. "Investigation on Spectral Structure of Gearbox Vibration Signals by Principal Component Analysis for Condition Monitoring Purposes". In Proceedings of 9th International Conference on Damage Assessment of Structures, Vol. **305** of *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, pp. 1–10.

- [9] Bartkowiak, A. and Zimroz, R., 2011. "Outliers analysis and one class classification approach for planetary gearbox diagnosis". In Proceedings of 9th International Conference on Damage Assessment of Structures, Vol. **305** of *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, pp. 11–20.
- [10] Bartkowiak, A., and Zimroz, R., 2012. "Data dimension reduction and visualization of multidimensional data with application to gearbox diagnostics data: comparison of several methods". *Solid State Phenomena* **180**, pp. 177–184.
- [11] De Castro, L., and Timmis, J., 2002. *Artificial Immune Systems: a new computational approach*. Springer-Verlag, London, UK.
- [12] Greensmith J., Whitbrook, A.M., and Aickelin, U., 2010. Artificial Immune Systems, See also URL <http://arxiv.org>.
- [13] Nunes de Castro, L., and Von Zuben, F. J., 1999. Artificial immune systems: Part1 – Basic theory and applications. Technical Report. TR-DCA 01/99.
- [14] Perelson, A.S. and Oster, G.F., 1979. "Theoretical Studies of Clonal Selection: Minimal Antibody Repertoire Size and Reliability of Self-Non-self Discrimination". *Journal of Theoretical Biology* **81**(4), pp. 645–670.
- [15] Worden, K., Staszewski, W.J., and Hensman, J.J., 2011. "Natural computing for mechanical systems research: A tutorial overview". *Mechanical Systems and Signal Processing* **25**(1), pp. 4-111.
- [16] Widodo, A., Yang, B.-S., 2007. "Support vector machine in machine condition monitoring and fault diagnosis". *Mechanical Systems and Signal Processing* **21**(6), pp. 2560–2574.
- [17] Huang, R., Xi, L., Li, X., Richard Liu, C., Qiu, H., Lee, J. 2007. "Residual life predictions for ball bearings based on self-organizing map and back propagation neural network methods". *Mechanical Systems and Signal Processing* **21**(1), pp. 193–207.
- [18] Dasgupta, D., 1997. "Artificial Neural Networks and Artificial Immune Systems: Similarities and Differences". In Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. **1**, pp. 873–878.
- [19] Lucifredi, A., Silvestri, P., and Arrighi, S., 2011. "Studio ed applicazione su modelli di macchine rotanti di un algoritmo di diagnostica basato sul metodo del sistema immunitario artificiale". In Proceedings of XX Congresso AIMETA (in italiano).
- [20] Strackeljan, J., and Leivska. K., 2008. "Artificial Immune System approach for the Fault Detection in Rotating Machinery". In Proceedings of the International Conference on Condition Monitoring, Edinburgh, UK.
- [21] Forrest, S., Perelson, A.S., Allen, L., and Cherukuri, R., "Self-Nonself Discrimination in a Computer". In Proceedings of IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy, pp. 202–212.
- [22] Dasgupta, D., and Ji, Z., 2004. "Real-valued Negative Selection Algorithm with Variable-sized Detectors". In Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference, Seattle, WA, USA, June 26-30. Part I., pp 287–298.
- [23] Plett, E., and Das, S. 2008. "A Region Restricted V-Detector Algorithm for Automatic Bearing Testing Machines". In Proceedings of International Conference on Artificial Intelligence, Las Vegas, pp. 232–237 .



# A TIME-VARYING DYNAMIC PROBLEM FOR THE FREQUENCY ANALYSIS OF AN OFF-ROAD MOTORCYCLE

Alessandro Zanarini, Enrico Brugnoni

*Department of Industrial Engineering,*

*University of Bologna, Italy*

*e-mail: a.zanarini@unibo.it*

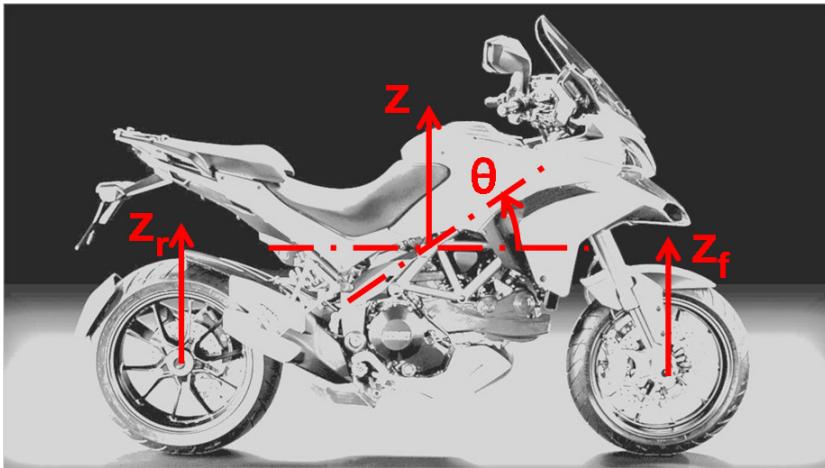
**Abstract.** A motorbike running on off-road terrains, braking and transmitting traction forces to uneven road profiles is certainly a time-varying non-linear mechanical system with broad motion and under heavy external conditions, due to the non-linearity in damping, stiffness and inertial properties. A frequency analysis can highlight the variability of the dynamic properties along the working domain of the mechanism.

A relatively simple but complete planar model of the vehicle on uneven terrain, with full suspension system and flexible tyres, has been here adopted, which takes into account the whole dynamics and non-linear rigid body kinematics of the motorbike. This complete planar model is the computational engine for running the eigenvalue analysis of the time-varying eigenproblems. Tracking the eigensolution variability along the working space becomes a relevant insight on the behaviour of the motorbike under the different conditions and it can be of aid in assessing the controllability of such dynamic system. Theoretical formulation and simulations are discussed in detail.

**Keywords:** vehicle dynamics, non-linear kinematics, kinematic-based dynamic variability, time-varying eigenproblem

## 1. INTRODUCTION

Multibody modelling [1, 2] is nowadays a common procedure in approaching complex dynamic problems like vehicle design. Reliable dynamic properties and generalised forces in 3D-space are kept at the cost of high complexity in the models and of high computational effort. When simplicity and low cost simulations are asked, extremely simplified models [3] are conversely often used for the first assessment of the dynamic behaviour of a generalised vehicle. The latter simple models may retain none of the kinematic, inertial, stiffness and absorption non-linearities of spatial mechanisms; the lumped properties are sometime not as simple as it can seem to be evaluated without solving the complete set of differential motion equations. Only vertical movement and pitch around the centroid are considered, without a precise definition of the pitch axis due to the suspension constraints, are indeed considered in quarter car models or similar, thus they oversimplify the suspension kinematics up to the extreme consequence that it becomes not straightforward to introduce real part properties



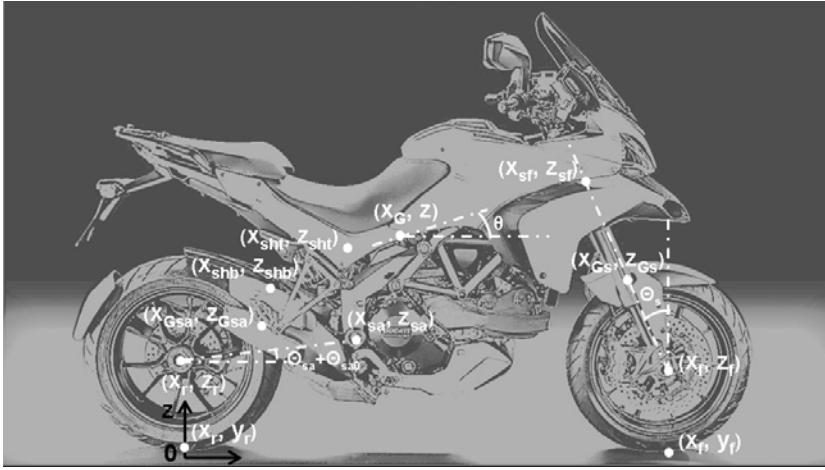
**Figure 1.** Degrees-of-freedom in the model

into the simple linear motion equation and that the models do not reflect the variability of the machine behaviour along with the kinematic position. A linear motion model could be better approached by suggesting to lump the spatial kineto-static properties of all the parts that make the assembly into quantities that are linearised around the working point of interest, keeping in mind the limited validity of the lumped properties, which should be re-calculated every time the system moves away from the neighbourhoods of the linearisation point due to a change in the kinematic configuration.

It is thus evident that oversimplified models can not take into account the kinematic based variability of the system dynamics, losing the chance to highlight the contributions that a spatial mechanism, such as a real suspension, can offer in tuning the vehicle dynamics and NVH characteristics; furthermore, this might also induce the wrong conclusion that all suspension architectures are equivalent.

By means of 4 degrees-of-freedom (dofs), a relatively simple but complete planar model of the vehicle on uneven terrain, approached by means of Lagrangian non-linear motion equations, has been here adopted; the modelled motorbike has its rigid frame, suspensions mechanisms, shock absorber packs and deformable tires. The shock absorber properties are also non-linear, with attention paid to the extension and rebound conditions. The kinematics of the attaching points of the spring-damper assembly on the rear wheel suspension gives a non linear behaviour to the elastic and absorption forces. Further, traction, braking and aerodynamic effects can be taken into account in the model, as well as vertical acceleration in the plane of the motorbike due to cornering.

The transient solution of integrated non-linear motion equations provides all the motion conditions that are relevant to evaluate a time-varying transfer function matrix and to formulate a time-varying eigenproblem. At each time instant at which the motion equations are integrated, a linearisation of the Lagrange equations around the working point can be performed, obtaining the linearised mass, damping and stiffness matrices, from which to calculate the transfer function matrix and formulate the eigenproblem. The instant eigensolution



**Figure 2.** Positions of remarkable points of the vehicle on the global reference frame

can be evaluated with the properly updated properties, with a moderate computational cost, and without the limits of a time-frequency Fourier-based analysis based only on the time histories, since there are no constraints on the frequency resolution due to transforming operations. The variability of the transfer function matrix and of the eigenproblem solution can be evaluated along the time axis or transient dynamics. The eigenvalues might show stable damped oscillations, but also the conditions for rising instabilities, which might not evolve into chaotic motion just because of the limited time-validity for those conditions, but test the potentiality to relevant uncontrollable oscillations; they might also underline changes into the restraining conditions and related unstable or overdamped non-oscillatory motions. The eigenvectors might also show the change in motion distribution due to the external running conditions. From the drawn analysis, the effort of the pilot or of an aiding automated control system in reaching targets about comfort, traction and braking issues might also be assessed like in [4].

## 2. PLANAR MODEL OF A MOTORBIKE WITH SUSPENSION KINEMATICS

The motorbike is modelled by means of 5 rigid bodies: the suspended mass (frame, engine, upper sliders of the front fork and pilot), the rear wheel, the front wheel, the swing-arm of the rear suspension, the lower stanchions of the front fork. These bodies are connected by revolute joints or by a translational joint (front fork). The tires are both considered as elastic bodies with their stiffness and damping properties. The shock absorbers in the front fork and in the rear swing arm have been modelled with elastic and damping characteristics.

If the motion in the symmetry plane of the motorbike is sought, disregarding the horizontal motion and the wheel rotations, the kinematics of the vehicle can be analysed by means of just 4 dofs as in Fig.1: the vertical displacement  $z$  and the pitch angle  $\theta$  of the suspended mass, the vertical displacement  $z_f$  of the front wheel and the vertical displacement  $z_r$  of the rear wheel. The location of the contact patches of the tires are considered by the displacements  $y_r$  and  $y_f$ , as function of the ground shaping.

**Table 1.** Kinematic constants**Table 2.** Inertial properties **Table 3.** Stiffness & damping

constant	value	constant	value	constant	value
$x_{G0}, z_0$	0.696, 0.741[m]	$m_t$	250[kg]	$k_{sf}$	13000[N/m]
$x_{sa0}, z_{sa0}$	0.541, 0.471[m]	$m_{sa}$	8[kg]	$k_{sr}$	85000[N/m]
$x_{Gsa0}, z_{Gsa0}$	0.350, 0.450[m]	$m_s$	4[kg]	$k_{pf}$	172916[N/m]
$l_{sa}$	0.565[m]	$m_{rt}$	12[kg]	$k_{pr}$	180664[N/m]
$x_{r0}, z_{r0}$	0, 0.307[m]	$m_{ft}$	10[kg]	$c_{sf}$	1000[Ns/m]
$x_{f0}, z_{f0}$	1.548, 0.294[m]	$I_t$	40[kgm <sup>2</sup> ]	$c_{sr}$	4000[Ns/m]
$x_{Gs0}, z_{Gs0}$	1.400, 0.800[m]	$I_{sa}$	0.3[kgm <sup>2</sup> ]	$c_{pf}$	150[Ns/m]
$x_{sf0}, z_{sf0}$	1.251, 0.900[m]	$I_s$	0.1[kgm <sup>2</sup> ]	$c_{pr}$	200[Ns/m]
$\theta_{so}$	26[°]				

### Displacements & kinetic energy in the motorbike assembly

The displacements of the points of interest are described in the global coordinate system, whose origin is located at the contact patch between the rear tyre and the flat ground, as in Fig.2. The location  $(x_{sa}, z_{sa})^T$  of the pivot linking the swing-arm depends on the vertical movement and on the pitch of the suspended mass:

$$\begin{pmatrix} x_{sa} \\ z_{sa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{sa0} - x_{G0} \\ z_{sa0} - z_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

where  $(x_G, z)^T$  is the instantaneous position of the suspended mass centroid,  $(x_{sa0}, z_{sa0})^T$  is the constant location of the swing-arm pivot in the motorbike frame reference when at time  $t = 0$  the latter is parallel to the global reference,  $(x_{G0}, z_0)^T$  is the initial absolute position of the suspended mass centroid,  $(x_{sa0} - x_{G0}, z_{sa0} - z_0)^T$  is the relative location of the swing-arm pivot in the motorbike frame local reference. If the angle  $\theta_{sa}$  of the swing-arm (of length  $l_{sa}$ ) to the horizontal axis is defined as  $\theta_{sa} = \arcsin((z_{sa} - z_r)/l_{sa}) - \theta_{sa0}$ , being  $\theta_{sa0} = \arccos((x_{sa0} - x_r)/l_{sa})$ , it also follows that  $x_{sa} = l_{sa} \cos(\theta_{sa} + \theta_{sa0})$ .

The location  $(x_{Gsa}, z_{Gsa})^T$  of the swing-arm centroid is defined by:

$$\begin{pmatrix} x_{Gsa} \\ z_{Gsa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \\ z_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_{sa} & -\sin \theta_{sa} \\ \sin \theta_{sa} & \cos \theta_{sa} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{Gs0} - x_{r0} \\ z_{Gs0} - z_{r0} \end{pmatrix} \quad (2)$$

The location  $(x_{Gs}, z_{Gs})^T$  of the centroid of the lower stanchions in the front fork can be defined as:

$$\begin{pmatrix} x_{Gs} \\ z_{Gs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ z_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s \\ \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{Gs0} - x_{f0} \\ z_{Gs0} - z_{f0} \end{pmatrix} \quad (3)$$

where the location  $(x_{sf}, z_{sf})^T$  of a point on the upper part of the front fork can be defined as  $\begin{pmatrix} x_{sf} \\ z_{sf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{sf0} \\ z_{sf0} \end{pmatrix}$ ,  $\theta_s = \theta_{s0} + \theta$  and  $x_f = x_{sf} + (z_{sf} - z_f) \tan \theta_s$ .

The total kinetic energy  $E_{kin}$  of the system will thus be a non-linear function of the  $(z, \theta, z_r, z_f)^T$  dofs, through the explicit constraints above written and disregarding the forward motion of the motorbike & the rotation of the wheels, as:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(m_t \dot{z}^2 + I_t \dot{\theta}^2 + m_{sa} \dot{z}_{sa}^2 + I_{sa} \dot{\theta}_{sa}^2 + m_s \dot{z}_{Gs}^2 + I_s \dot{\theta}_s^2 + m_{rt} \dot{z}_r^2 + m_{ft} \dot{z}_f^2) \quad (4)$$

In Eqn.4  $m_t$  &  $I_t$  are the mass and the moment of inertia (around the centroid) of the suspended part in the motorcycle with its pilot;  $m_{sa}$  &  $I_{sa}$  are the mass and the moment of inertia of the swing-arm;  $m_s$  &  $I_s$  are the mass and the moment of inertia of the lower stanchions of the front fork;  $m_{rt}$  is the rear wheel&tire mass;  $m_{ft}$  is the front wheel&tire mass. The values of the constants in the implemented model can be found in Tab.1, while the inertial properties of the sub-parts are outlined in Tab.2.

### Pitch axis location

The pitch axis for the suspended mass can be easily identified if the positions of the wheels' pivots are fixed in a kinematic compatible configuration [5–8]; in this way the mechanism has one dof only, and the pitch axis location  $(x_{cir}, z_{cir})$ , also known as centre of instantaneous rotation, is found at the intersection of the line that passes through the centres of the rotational joints on the swing-arm  $((x_r, z_r)$  &  $(x_{sa}, z_{sa})$ ) with the line that passes through the centre of the front wheel pivot and that is orthogonal to the prismatic joint given by the stanchions of the front fork.

If the actual wheelbase  $p$  is evaluated as  $p = l_{sa} \cos \theta_{sa} + (x_{sf} - x_{sa}) + z_{sf} \tan \theta_s$ , introducing the distances  $l_r$  and  $l_f$  of the pitch axis from the rear and front wheel pivots, it follows the system of closure equations that describes the position of the pitch axis:

$$l_r \cos \theta_{sa} = p + l_f \cos \theta_s \quad (5)$$

$$z_r + l_r \sin \theta_{sa} = z_f + l_f \sin \theta_s \quad (6)$$

which gives  $l_r = \frac{p \tan \theta_s + z_r - z_f}{\cos \theta_{sa} \tan \theta_s - \sin \theta_{sa}}$  and finally  $(x_{cir}, z_{cir})^T = (x_r + l_r \cos \theta_{sa}, z_r + l_r \sin \theta_{sa})^T$ .

### Suspensions and tires with stiffness and damping

The elastic and absorption properties of the vehicle are lumped in the shock absorbers inside the front & rear suspension and in the compressible tires. Generally linear springs are mounted, whereas a non-linear effect on the swing-arm forces is obtained with the design of the kinematics of the extremes of the shock absorber packs; in this model also a linear behaviour of the tire stiffness is modelled; in Tab.3  $k_{sf}$ ,  $k_{sr}$  are the stiffness constant in the front and rear suspension,  $k_{pf}$  and  $k_{pr}$  in the front and rear tires;  $c_{sf}$ ,  $c_{sr}$  are the damping coefficient in the front and rear suspension,  $c_{pf}$  and  $c_{pr}$  in the front and rear tires. The model takes into account an increase of stiffness in the shock absorbers when the relative displacement is locked at the opposite sides of the range; further, the damping coefficients can be different in compression and extension, or modelled by means of characteristic curves, e.g. by bi-linear curves by each branch. By introducing the relative lengths  $l_{sf}$  and  $l_{sr}$  at the extremes of the front and rear shock absorbers as in Fig.2, expressed by  $l_{sf} = \sqrt{(z_{sf} - z_f)^2 + (x_{sf} - x_f)^2}$  and  $l_{sr} = \sqrt{(z_{shb} - z_{sht})^2 + (x_{shb} - x_{sht})^2}$ , where  $\begin{pmatrix} x_{shb} \\ z_{shb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \\ z_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_{sa} & -\sin \theta_{sa} \\ \sin \theta_{sa} & \cos \theta_{sa} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{shb0} - x_r \\ z_{shb0} - z_r0 \end{pmatrix}$  and  $\begin{pmatrix} x_{sht} \\ z_{sht} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{sht0} - x_G \\ z_{sht0} - z_G0 \end{pmatrix}$ , the elastic energy potential can be formulated as follows:

$$E_{elas} = \frac{1}{2}(k_{sf}l_{sf}^2 + k_{sr}l_{sr}^2 + k_{pf}(z_f - y_f)^2 + k_{pr}(z_r - y_r)^2) \quad (7)$$

The Rayleigh function of the energy dissipated in the shock absorbers and in the tires can be written as follows:

$$W_{diss} = \frac{1}{2}(c_{sf}l_{sf}^2 + c_{sr}l_{sr}^2 + c_{pf}(\dot{z}_f - \dot{y}_f)^2 + c_{pr}(\dot{z}_r - \dot{y}_r)^2) \quad (8)$$

The motion due to the compliance of the elastic elements causes also a change in the gravitational potential, which can be written as follows:

$$U_g = m_t gz + m_{sa} g z_{Gsa} + m_s g z_{Gs} + m_{rt} g z_r + m_{ft} g z_f \quad (9)$$

The total potential energy  $U$  of the system is thus the sum of the elastic energy of Eqn.7 and of the gravitational potential of Eqn.9:

$$U = E_{elas} + U_g \quad (10)$$

### Ground shaping

With the hypothesis of a constant forward velocity of the vehicle, the relative motion against any uneven terrain can be easily modelled, taking into account the spatial delay between the front and rear tires due to the wheel base  $p$ . Thus, by imposing the velocity, the function that shapes the ground gives the instant values of the  $y_r$  and  $y_f$  quantities, meaning that the terrain is considered in relative motion towards the motorbike.

### External forces

The modelling can take into account different external forces on the vehicle: chain pulling forces (both in traction and in braking conditions), horizontal inertial forces, aerodynamic forces and braking torques on both wheels. In order to include these forces in the model, the virtual work principle was adopted. Although the model does not have the horizontal translational dof, the application point of these forces have a complete description of its motion in the local coordinate system used; there follows that all the external forces do virtual work and contribute to the local dynamics of the system.

**Traction.** The propulsive torque  $M_m$  of the engine is transmitted through a primary gear ratio  $\tau_g$  and a final ratio  $\tau_f$  to the pinion:  $M_P = M_m \tau_g \tau_f$ . Then the chain transmission has a further ratio, which depends on the geometry (radius  $r_p$  and  $r_s$ ) of the pinion and sprocket:  $M_s = M_p r_s / r_p$ . It follows that the chain tension  $T$ , acting on both the motorbike chassis and on the rear wheel pivot with opposite signs, has module  $T = M_p / r_p$  and its direction is that of the actual tense branch of the chain, here simplified by the direction that passes through the points  $(x_p, z_p + r_p)^T$  and  $(x_r, z_r + r_s)^T$ . Finally, disregarding the friction in the pivots and the rolling resistance in the ground contact, the horizontal (friction) component of the constrain force of the ground on the rear tire becomes  $S_t = M_s / r_{er}$ , where  $r_{er}$  is the external radius of the rear tire.

**Braking.** During braking, with radial callipers, there is a pure braking torque applied to the wheels. Disregarding the friction in the pivots and the rolling resistance of the ground on the tires, the braking torques are balanced by the horizontal component of the constraint reactions given by the ground to each wheel  $S_{bf} = M_{bf} / r_{ef}$  and  $S_{br} = M_{br} / r_{er}$ , where  $r_{ef}$  is the external radius of the front tire, and by the opposite torques of reaction  $M_{bfr} = -M_{bf}$  and  $M_{brr} = -M_{br}$ , given by the front fork and the swing-arm.

**Aerodynamic force.** The aerodynamic force  $\mathbf{F}_a$ , applied in the centre of pressure on the suspended mass  $(x_{cp}, z_{cp})^T$ , can be considered in its drag and lift components. The drag component  $F_{ad} = 1/2\rho c_d A v^2$  is horizontal and opposite to the forward direction of the motorcycle, the lift component  $F_{al} = 1/2\rho c_l A v^2$  is vertical and upward, where  $\rho$  is the air density,  $c_d$  is the drag coefficient,  $A$  is the area of the frontal section of the vehicle,  $v$  is the forward velocity of the motorbike and  $c_l$  is the aerodynamic lift coefficient.

**Horizontal inertial forces.** With the assumption of no rolling resistance of the ground on the tires and of no dissipation on the pivots, the horizontal inertial force  $F_i$ , applied to the centroid of the suspended mass, has been simulated as being opposite to the sum of vectors  $S_t$ ,  $S_{bf}$  and  $S_{br}$ ;  $F_i$  has thus positive sign in braking and negative sign in traction.

**Virtual work of external forces.** The total virtual work  $\delta W_e$  of the external forces on the system is the sum of each component virtual work:

$$\delta W_e = \delta W_{tc} + \delta W_b + \delta W_a + \delta W_{if} \quad (11)$$

where  $\delta W_{tc} = -\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{X}_{pc} + \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{X}_{sc}$  is the virtual work of the chain pulling force,  $\delta \mathbf{X}_{pc}$  is the virtual movement of the point on the tense branch tangent to the pinion,  $\delta \mathbf{X}_{sc}$  is the virtual movement of the point on the tense branch tangent to the sprocket;  $\delta W_b = -\mathbf{M}_{bfr} \cdot \delta \theta - \mathbf{M}_{brr} \cdot \delta \theta_{sa}$  is the virtual work of the braking torques;  $\delta W_a = \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{X}_{cp}$  is the virtual work of the aerodynamic force;  $\delta W_{if} = -(S_t + S_{bf} + S_{br}) \delta x_g$  is the virtual work of the horizontal inertial forces here modelled.

### 3. EQUATIONS OF MOTION

With the kinetic energy of Eqn.4, the conservative potential of Eqn.10, the Rayleigh dissipated energy of Eqn.8 and with the total virtual work of external forces of Eqn.11, the  $i$ -th equation of motion has the following Lagrange formulation, where  $\mathbf{q}^T = (z, \theta, z_f, z_r)^T$  are the generalised lagrangian coordinates:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial W_{diss}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \delta W_e}{\partial q_i} \quad (12)$$

With the explicit constraint formulation adopted, ground shaping and time dependent external forces, an ordinary differential equation (ODE) set can be integrated to obtain the time-domain motion solution of the modelled vehicle.

### 4. LINEARISATION OF THE MODEL & EIGENPROBLEM FORMULATION

It is quite used (or abused) to transform the time domain data into frequency domain, but this poses many restrictions in terms of frequency resolution. This is even more evident in short transients, such as the limited lapse that can have a vehicle in highly changing scenarios: in these events the problem is traditionally worked around by means of an extremely high number of minimal investigation time steps, obtaining a rough frequency resolution at high computational costs.

The advantage of the approach here described is to obtain a highly detailed frequency analysis of the behaviour of the vehicle in changing conditions at a low computational cost.

The approach proposes to formulate a linearised time-varying dynamic problem, whose solution is followed along the time axis in terms of transfer function matrix and eigenproblem, at each time step of interest, chosen with complete freedom from the solution of the motion equations. Instead of pursuing the linearisation around kinematic compatible positions only, as was done in [9] where a position-frequency domain mapping was proposed, in this paper the linearisation was done around points of interest in the time histories of the generalised coordinates  $\mathbf{q}$  that solve Eqn.12, with the evaluated  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ .

### Linearisation of displacements and higher order contributions

Around each position of interest, the formulation of the displacements is linearised by means of a first order Taylor series expansion, while in energy related functions only  $2^{nd}$  order terms are kept, disregarding the products of different variables. There follows a linearised set of ODEs for free oscillations, which can be easily represented in matrix formulation by 4x4 mass  $\mathbf{M}$ , damping  $\mathbf{C}$  and stiffness  $\mathbf{K}$  constant matrices:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (13)$$

By means of a transformation of Eqn.13 into the Laplace domain, the dynamic stiffness  $\mathbf{Z}(p)$  can be obtained as:

$$\mathbf{Z}(p) = p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (14)$$

from which there follows the transfer function matrix  $\mathbf{H}(p) = [\mathbf{Z}(p)]^{-1}$ ; the transfer function matrix is changing with the linearisation point [10] and turns into the frequency response function matrix with the Laplace variable  $p = i\omega$ , with  $i$  as imaginary unit.

### State-space solution of the eigenproblem

Being potentially in the case of general damping due to the high damping in the shock absorbers, i.e. non-proportional damping might be present and thus  $\mathbf{C} \neq \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are constants, the eigenproblem results in a complex-valued representation, thus approached by means of a state-space formulation of the motion equations:

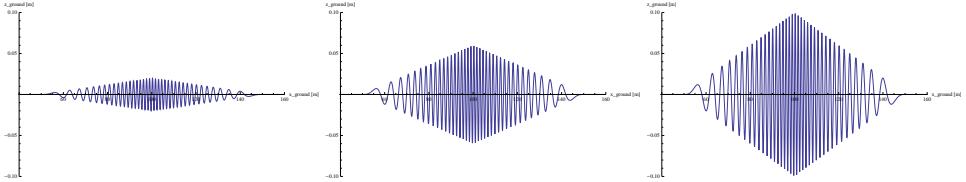
$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (15)$$

where  $\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  can be defined as *modal*  $\mathbf{m}_A$  8x8 matrix, while  $\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}$  as *modal*  $\mathbf{m}_B$  8x8 matrix. The eigensolution is based on the generalised eigenproblem formulation:

$$\mathbf{m}_A^{-1}\mathbf{m}_B\Phi = \lambda\Phi \quad (16)$$

where  $\Phi$  is the state space 8x1 eigenvector  $(\psi^T, \lambda\psi^T)^T$  containing the spatial domain 4x1 eigenvector  $\psi$  and the eigenvalue  $\lambda$ , both as complex-valued quantities. The eigensolution occurs [11] in complex-conjugate pairs when the constraints are properly defined (when they are bilateral and there is no breaking of any coupling) and  $\mathbf{m}_A$  &  $\mathbf{m}_B$  matrices are symmetrical. In the asymmetry of the modal  $\mathbf{m}_A$  &  $\mathbf{m}_B$  matrices, left and right eigenvectors can differ [12], but remain orthogonal.

Stable oscillations occur with complex-valued eigenvalues having a negative real part, while unstable oscillation are present if the real part turns positive. The generalised modal parameters of the oscillatory behaviour of the system can be obtained from the complex-valued



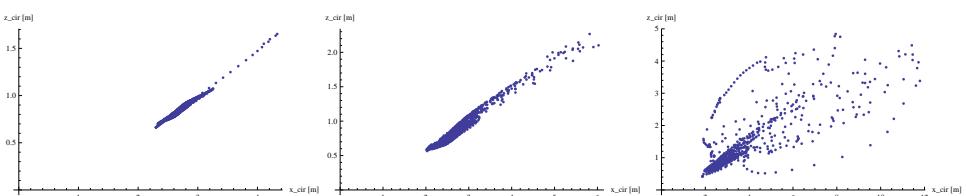
**Figure 3.** 100m uneven terrain shapes, with maximal height of 20mm, 60mm, 100mm

eigenvalues of the type  $\lambda_j = -\zeta_j \omega_{n_j} \mp i \omega_{n_j} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$ : the undamped natural frequency of the  $j$ -th mode is  $\omega_{n_j} = \sqrt{k_j/m_j} = \sqrt{Re_{\lambda_j}^2 + Im_{\lambda_j}^2} = |\lambda_j|$ , where  $Re_{\lambda_j} = -\zeta_j \omega_{n_j} = -c_j/(2m_j)$ ,  $Im_{\lambda_j} = \omega_{n_j} \sqrt{1 - \zeta_j^2} = \omega_{d_j}$ ,  $m_j$ ,  $c_j$ ,  $k_j$ ,  $\zeta_j = c_j/(2\sqrt{k_j m_j})$  and  $\omega_{d_j}$  are respectively the modal mass, modal damping coefficient, modal stiffness coefficient, modal damping ratio and damped frequency of the  $j$ -th mode. But there might also be a linearisation point around which the imaginary parts of the complex-conjugate eigenvalues completely vanish, being the eigenvalues only real-valued like  $\lambda_j = -\zeta_j \omega_{n_j} \mp \omega_{n_j} \sqrt{\zeta_j^2 - 1}$ , highlighting a change in the behaviour of the system; in the case eigenvalue is negative, there will be no oscillation and the system shows a modal over-damping; when the eigenvalue is positive, instead, an unstable non-oscillatory motion is present around that linearisation point.

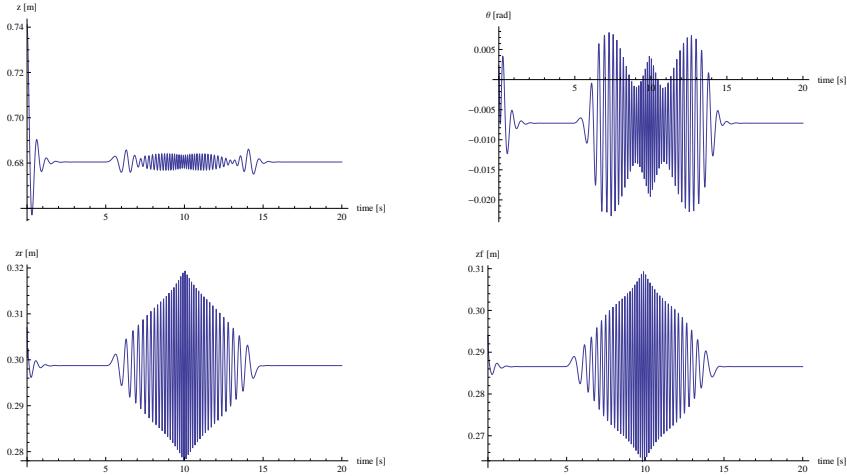
At each position of interest the eigensolution complex-valued pairs  $(\lambda, \Phi, \Phi^*)$  (symmetrical matrices) or  $(\lambda, \Phi_l, \Phi_r)$  (asymmetrical matrices) can be evaluated with no restriction in frequency resolution, giving a first order approximation, but more sensitive than time-based analysis, of the instant dynamic behaviour of the system around that position.

## 5. TEST CASE AND RESULTS

The frequency analysis approach here presented was tested on the model of a motorbike with reliable property values taken from a mass production motorcycle. The analysed manoeuvres are the overtaking of a 100m long waving terrain, modelled by means of a sine wave with linearly increasing amplitude and spatial frequency, reaching 3 different maximal height amplitudes of 20mm, 60mm and 100mm as can be seen in Fig.3, at a constant horizontal speed of 10m/s, selected for its completeness of behaviours.



**Figure 4.** The instantaneous centre of rotation of the motorbike frame during the traversing of 100m uneven terrain shapes, with maximal height of 20mm, 60mm, 100mm



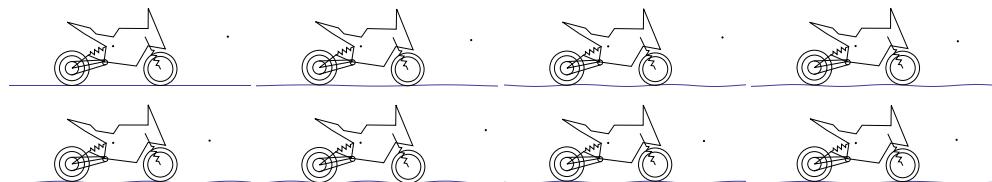
**Figure 5.** Time history charts of the 4 dofs in overtaking a wavy terrain with maximal height of 20mm at constant speed

In comparing the behaviour on 3 different wavy terrains it appears evident that the non-linearity of the suspension system is playing a relevant role, since the time domain responses of the system are completely different and unscaled. The travelling of the suspensions really redefines the dynamic properties of the vehicle.

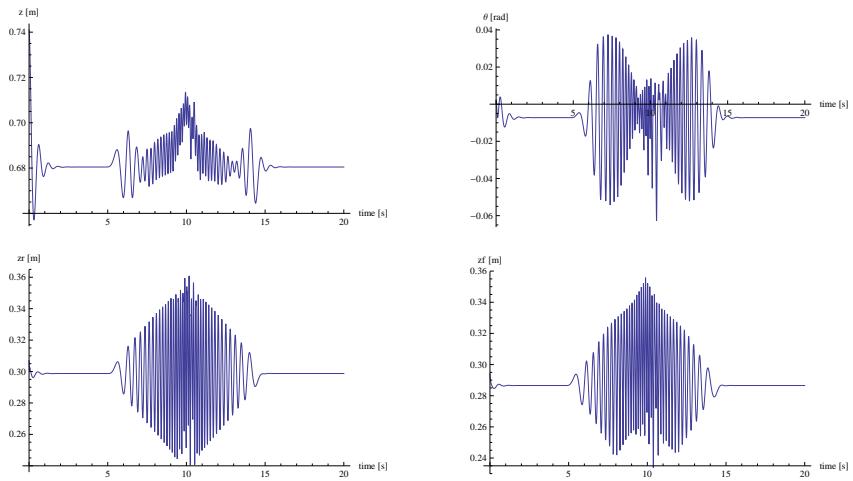
### Time-domain motions

The location of the centre of instantaneous rotation (*cir*) shows markedly different behaviour in the 3 simulations carried on, as can be seen in Fig.4, where the upper limits of the charts are respectively [4.4m,1.7m], [6.0m,2.6m] and [12.0m,5.0m], and where the shape of the *cir* locus, especially in the most severe conditions, is not matched among the response results.

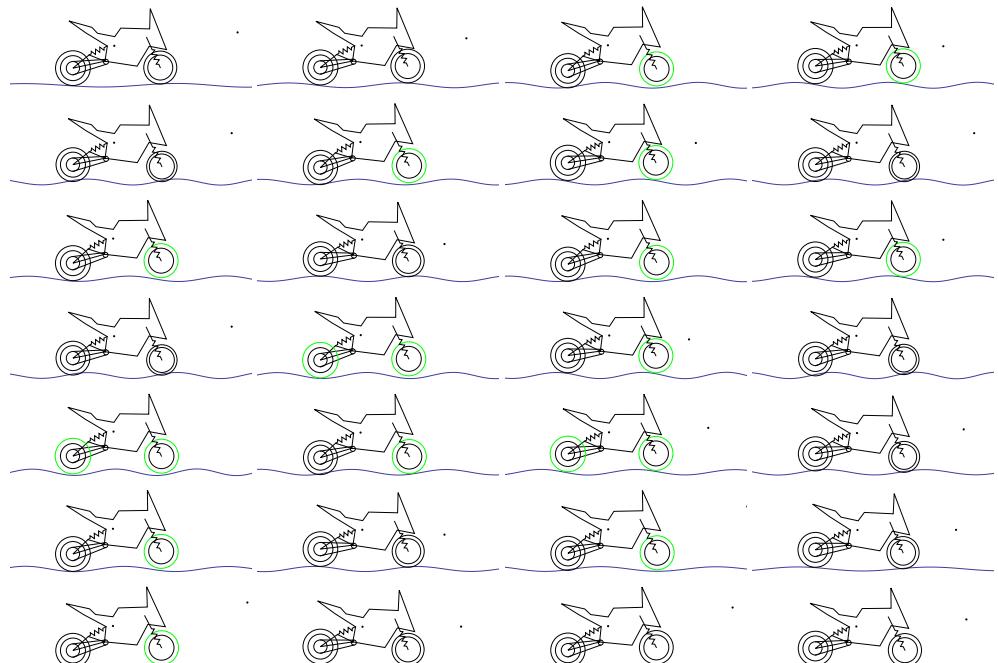
In Fig.5 are depicted the time histories of the 4 dofs of Eq.12 obtained with the first ground shape of Fig.3: after the initial stage of the simulation, in which the equilibrium point between gravitational and elastic forces is reached, the vehicle smoothly copies the (low) irregularity of the terrain. The vertical  $z$  motion of the vehicle frame is more pronounced at



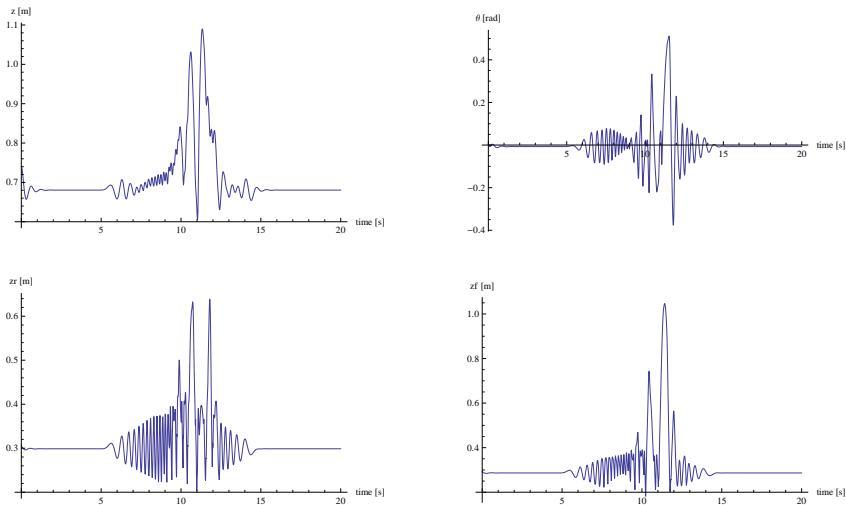
**Figure 6.** Time history evaluation of the motorbike motion in overtaking a wavy terrain with maximal height of 20mm at constant speed



**Figure 7.** Time history charts of the 4 dofs in overtaking a wavy terrain with maximal height of 60mm at constant speed



**Figure 8.** Time history evaluation of the motorbike motion in overtaking a wavy terrain with maximal height of 60mm at constant speed



**Figure 9.** Time history charts of the 4 dofs in overtaking a wavy terrain with maximal height of 100mm at constant speed

lower terrain spatial frequency, then reduced in the central zone of higher ground roughness, showing the correct behaviour of the suspension system, which limits the  $z$  oscillation in the range of 4mm, against the 20mm of maximal height of the wavy ground. The wheelbase motions  $z_r$  and  $z_f$  are instead responding with a nearly linear behaviour to the increase of height and spatial frequency of the waving ground; especially at the centre of the travelled zone their travel leaves the linearity, whereas the  $z$  had a low decrement. The  $\theta$  rotation is almost negligible, in the range of 0.015 rads oscillation, showing again that the motorbike frame is well isolated from the ground. In Fig.6 are reported the time-domain simulation frames, where the motorbike is in steady-state before traversing the wavy terrain and later follows precisely the asperities.

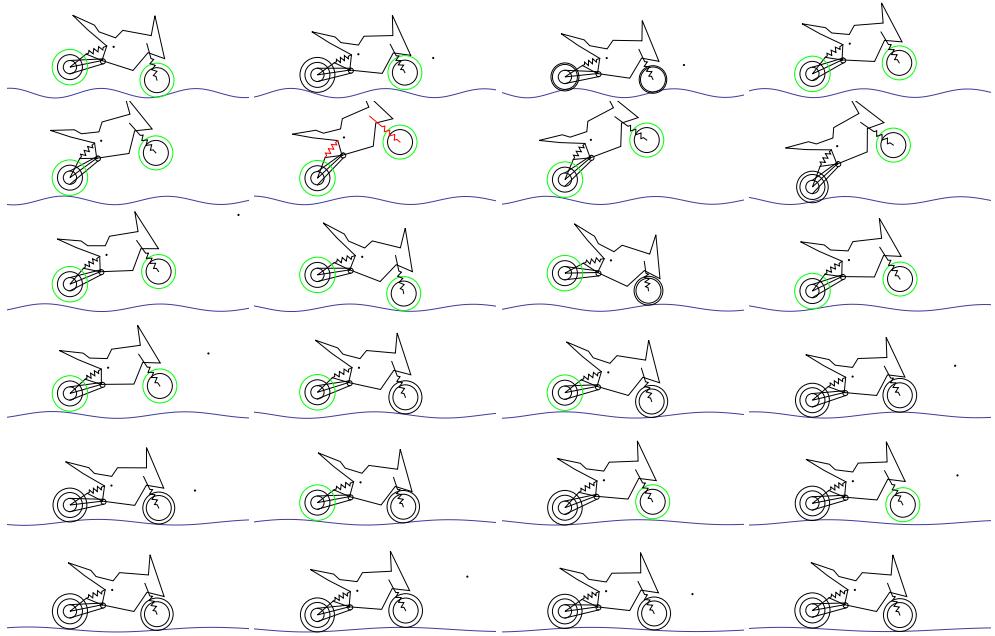
With the increased maximal ground height up to 60mm, the behaviour of the vehicle starts to detached from a simple 3x scaling of the responses, in particular at the top of the ground displacement, where the suspension system is not able any more to filter the unevenness of the ground, as can be seen in Fig.7, where the maximal travelling of the vehicle frame reaches 2/3 of the height of the terrain; there appears also an unexpected rising trend in the  $z$  oscillations, followed by spikes, which draws from the oscillatory pattern of constant dynamic characteristics. In Fig.8 some frames of the simulation, with the second ground shape of Fig.3, are shown. The high travel of the suspensions, together with the increase of spatial frequency in the wavy ground, starts to excite the elastic & damping non-linearities of the system, with some kind of "memory effect" that shifts the equilibrium state and explains the rising trend of  $z$ : the vehicle frame is not returned back to the previous equilibrium state that is again excited from the sweeping unevenness. In particular, tire and suspension compression/extension is shown by means of deformed elastic elements, while in green are highlighted the detachments of the wheels from the ground, a rapidly change on the constraints that is the cause of the unexpected spikes in dofs diagrams.

Extreme & unexpected variability is shown by the system in the simulation with the third ground shape of Fig.3, as can be seen in Fig.9. There is a limited domain where oscillations are present, sustained by a marked rising trend of the equilibrium points, before unstable behaviour appears. Starting from the detachment of one wheel, there follows steps of flying and bouncing behaviour, with the elastic elements coming to their working extremes (highlighted in red), both in compression and extension, as depicted in Fig.10. The fast increasing travelling of the suspensions, in terms of amplitude and frequency content of the excitation, yields the motion in the resonance region, and gives the vehicle an uncontrolled flying, bouncing, wheelie and overturning attitude, as in Fig.11.

It is clear that any time one wheel is detached from the ground the dynamic properties are changing dramatically, as will be followed by the frequency analysis. It is also understandable how the flying condition is dominated by the gravity, which induces an unstable non-oscillatory motion to the system, with increasing amplitude up to the landing instant.



**Figure 10.** Time history evaluation of the motorbike motion in overtaking a wavy terrain with maximal height of 100mm at constant speed, part A



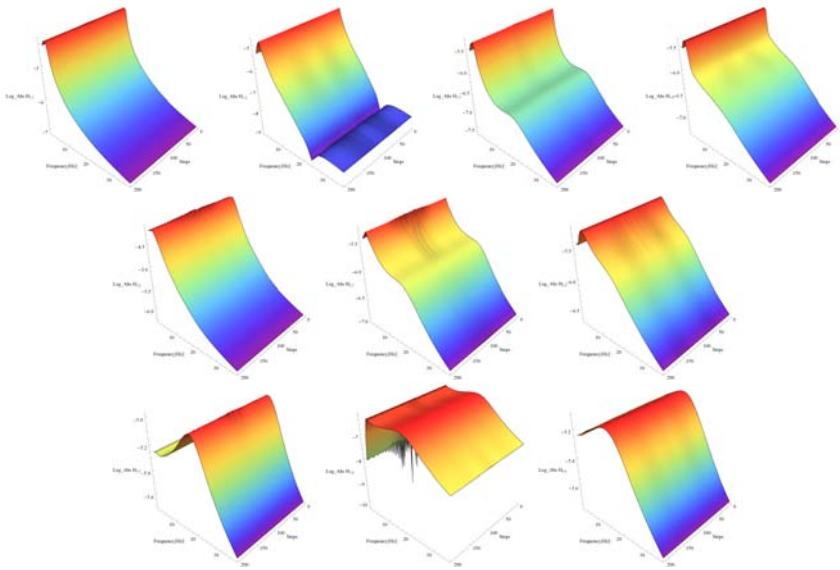
**Figure 11.** Time history evaluation of the motorbike motion in overtaking a wavy terrain with maximal height of 100mm at constant speed, part B

### Frequency Response Function variability

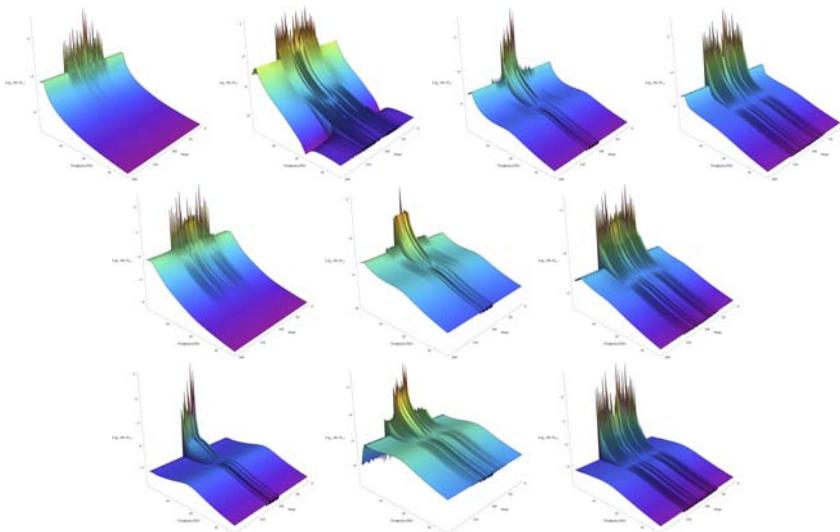
In Fig.12 the FRFs components of the  $\mathbf{H}$  matrix are depicted in the time (steps) - frequency domain of the first simulation with 20mm maximal wavy terrain amplitude, with logarithmic amplitudes. It appears manifest the variability of the dynamic properties due to the non-linear behaviour of the vehicle. Besides, this variability is moderate and it is the projection of a system that preserves its constraints, whereas it has updated mechanical characteristics: this can be seen in the smooth, but corrugated, surfaces of the  $\mathbf{H}$  matrix components. The resonance/antiresonances are strongly smoothed by the high damping in the tires and shock absorbers, which is much higher than structural damping. It can be noticed that the cross terms manifest an higher variability of the FRFs, which can be linked to the nonlinear kinematics of the suspension mechanisms.

In Fig.13 the FRFs components of the  $\mathbf{H}$  matrix have a marked variability, due to a more pronounced non-linear behaviour of the system, and to a dominant change in the dynamic behaviour when the wheels are detached from the ground, with a dramatic change in the dynamic properties of the system, in terms of low frequency contribution for the driving point FRFs, but also in terms of influences at higher frequencies for the cross FRFs. Indeed it must be remembered that the suspensions can still oscillate even when the motorbike is in the flying motion, the rotation of the body can have only some little restrain from the suspension dynamic forces, while the vertical motion of the body has even weaker restraints.

In Fig.14 the rapid changing of the dynamic properties due to flying, bouncing, wheelie and overturning situations is reflected in extreme roughness of the FRFs components. Again,

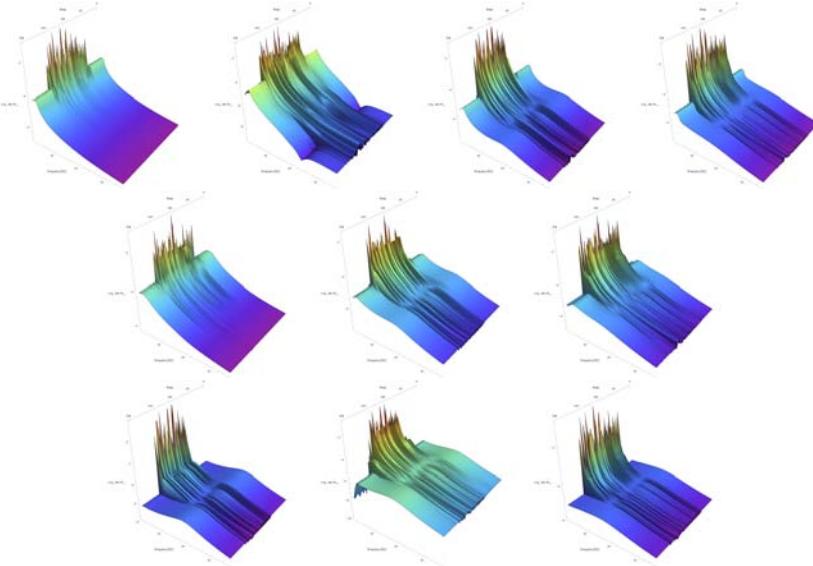


**Figure 12.** FRFs maps of the time-varying state-space eigenproblem on 20mm height wavy terrain: a)  $\mathbf{H}_{11}$ , b)  $\mathbf{H}_{12}$ , c)  $\mathbf{H}_{13}$ , d)  $\mathbf{H}_{14}$ , e)  $\mathbf{H}_{22}$ , f)  $\mathbf{H}_{23}$ , g)  $\mathbf{H}_{24}$ , h)  $\mathbf{H}_{33}$ , i)  $\mathbf{H}_{34}$ , l)  $\mathbf{H}_{44}$ .



**Figure 13.** FRFs maps of the time-varying state-space eigenproblem on 60mm height wavy terrain: a)  $\mathbf{H}_{11}$ , b)  $\mathbf{H}_{12}$ , c)  $\mathbf{H}_{13}$ , d)  $\mathbf{H}_{14}$ , e)  $\mathbf{H}_{22}$ , f)  $\mathbf{H}_{23}$ , g)  $\mathbf{H}_{24}$ , h)  $\mathbf{H}_{33}$ , i)  $\mathbf{H}_{34}$ , l)  $\mathbf{H}_{44}$ .

the strongest effect is more evident at lower frequency, due to the loose of constraints, but still leaves its footprint also in the whole system dynamics, as can be seen at higher frequencies.



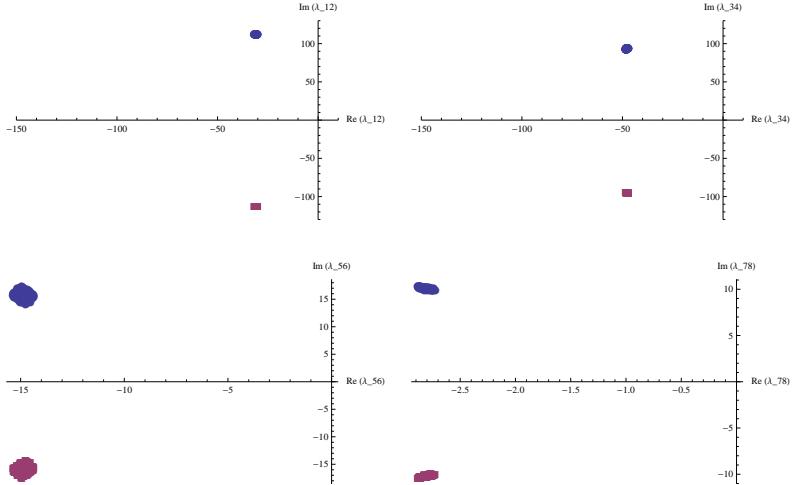
**Figure 14.** FRFs maps of the time-varying state-space eigenproblem on 100mm height wavy terrain: a)  $\mathbf{H}_{11}$ , b)  $\mathbf{H}_{12}$ , c)  $\mathbf{H}_{13}$ , d)  $\mathbf{H}_{14}$ , e)  $\mathbf{H}_{22}$ , f)  $\mathbf{H}_{23}$ , g)  $\mathbf{H}_{24}$ , h)  $\mathbf{H}_{33}$ , i)  $\mathbf{H}_{34}$ , l)  $\mathbf{H}_{44}$ .

### Eigenproblem variability

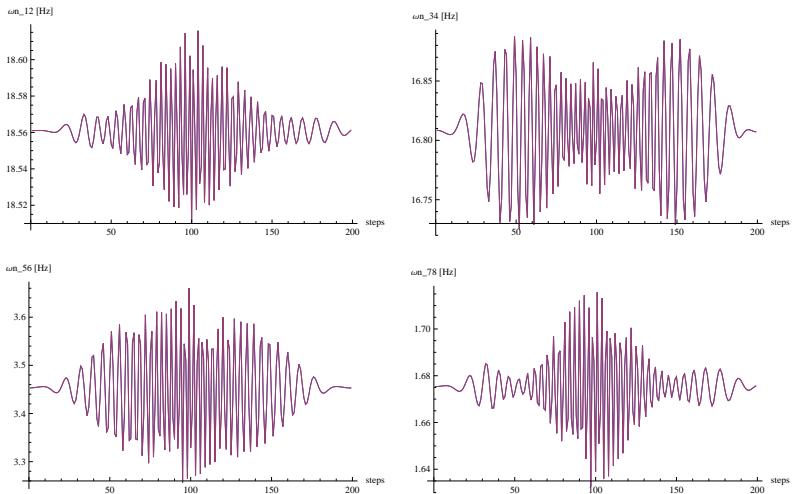
The variability of the eigenproblem is here analysed in terms of changes in the eigenvalues, natural frequencies, modal damping ratios and eigenvectors at the time step of linearisation.

**Eigenvalues, natural frequencies & modal damping.** The eigenvalues are plotted in pairs on the complex plane, as in Fig.15 regarding the first simulation, with the first eigenvalue of the pair being represented in a blue circle, while the second in a red square. All eigenvalues represent damped oscillations. The first four eigenvalues have a close natural frequency of support when both wheels are in contact with the ground, as can be seen in Fig.16a-b, which corresponds to that of the suspension dynamics towards the suspended motorbike body, being the rear suspension a little more harder ( $\omega_{n_{12}} \approx 18.56$  Hz) than the front one ( $\omega_{n_{34}} \approx 16.81$  Hz) in the model as in Fig.16; the modal damping ratio of the front suspension is higher than in the rear as in Fig.17, with  $\zeta_{34} \approx 0.452$  against  $\zeta_{12} \approx 0.265$  on the rear; thus the damped frequencies are a bit more detached ( $\omega_{d_{12}} \approx 17.9$  Hz vs  $\omega_{d_{34}} \approx 15.0$  Hz). From Figs.15-17 the frequency domain analysis highlights the variability of the vehicle dynamic properties, with quantitative assessments. The system gets updated by copying the road profile, thou this fluctuation is restrained in minor variations: 0.2% for  $\omega_{n_{12}}$ , 0.4% for  $\omega_{n_{34}}$ , 5.5% for  $\omega_{n_{56}}$  and 0.2% for  $\omega_{n_{78}}$ , confirming that the non-linearity of the suspension kinematics is sought for the dive/lift behaviour as in Fig.24, linked to the rotation of the vehicle frame with  $\omega_{n_{56}}$ , and the load transfer between front & rear wheels.

In the frequency analysis of the second simulation as in Figs.18-20 it appears clear that the system is behaving in a different manner than in the previous simulation. In Fig.18 the eigenvalues are much more scattered and, even more relevant, they show not only damped os-

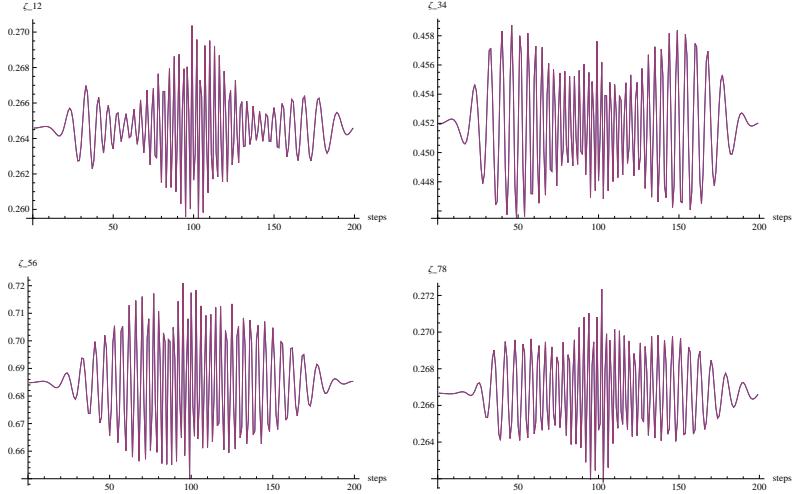


**Figure 15.** Eigenvalues of the time-varying state-space eigenproblem on the complex plane due to 20mm height wavy terrain traversing: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup> and d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>



**Figure 16.** Modal natural frequencies of the time-varying state-space eigenproblem along the wavy 20mm height terrain traversing time steps: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup>, d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>

cillations, but also non-oscillatory stable motion for the  $\omega_{n_{12}}$ ,  $\omega_{n_{34}}$  and  $\omega_{n_{56}}$  eigenvalues, and unstable non-oscillatory motion for  $\omega_{n_{78}}$ . The stable non-oscillatory motions of the wheels (related to  $\omega_{n_{12}}$ ,  $\omega_{n_{34}}$ ) can become overdamped when the tires are detached from the ground, as can be seen in Fig.20a-b, together with a drop of the corresponding natural frequency as in Fig.19. The pitching behaviour ( $\omega_{n_{56}}$ ), with a natural frequency  $\omega_{n_{56}} \approx 3.5$  Hz when the vehicle has both wheels on the ground, is more scattered, but appears to remain stable, even

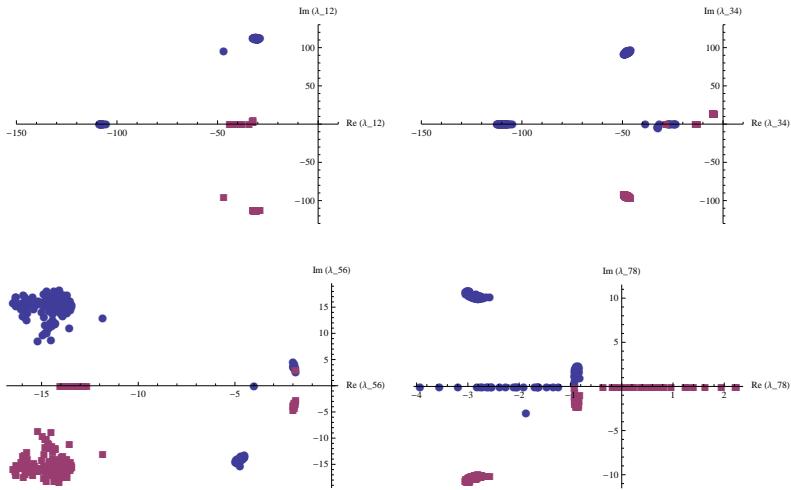


**Figure 17.** Modal damping factors of the time-varying state-space eigenproblem along the wavy 20mm height terrain traversing time steps: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup>, d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>

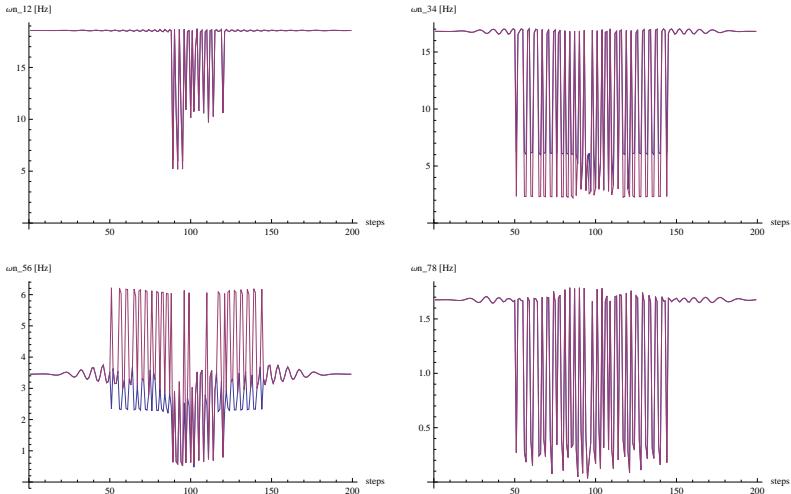
if non-oscillatory, as in flight or partial bouncing, when the suspension system inertia provide a moving reference for the dynamic forces. In these situations the state-space matrices are no more perfectly symmetric. Furthermore, the forward motion can behave differently from the backward motion, related to which wheel is in contact, also revealing overdamping for the red component and lower damping for the blue one. The seventh and eight eigenvalues are mostly related to the vertical motion of the vehicle, with quite a low natural frequency  $\omega_{n78} \approx 1.68\text{Hz}$  in steady-state conditions, as in Fig.19d. The vertical motion of the vehicle (related to  $\omega_{n78}$ ) can present unstable non-oscillatory motion (Fig.18): it is the landing of the flying trajectory, with a negative modal damping  $\zeta_{78}$  in Fig.20d after the climax of the flight, when gravity expands the vertical downward motion.

It must be pointed out that, when both wheels are in contact with the ground, the modal stiffness is higher due to the tire contributions, thus reducing the modal damping ratio  $\zeta_{12}$  &  $\zeta_{34}$  of the modes linked to the predominant motion of the suspensions; on the other side, when the wheels do not touch the ground, the shock absorbers do an over-damped action on the suspensions, as can be followed in Fig.20 where the effective value of  $\zeta_{12}$  &  $\zeta_{34}$  can be also higher than unity.

The frequency analysis of the third simulation in Figs.21-23 is the more scattered one, starting from the complex plane where the eigenvalues  $\omega_{n12}$  &  $\omega_{n34}$  show damped oscillations and non-oscillatory motion of the wheels, even if the fourth eigenvalue gets close to the origin, underlining that the first four eigenvalues represent stable damped behaviours of the system. Instead, the  $\omega_{n56}$  &  $\omega_{n78}$ , especially the latter, highlight also unstable non-oscillatory motion, the first due to unrestrained pitching, the latter due to fall with gravity. In the automated solution of the eigenproblem there might be some switching in the ranking of the eigenvalues, sorted in descending magnitude, reflected in Fig.21, where the eigenvalue distribution does not appear perfectly symmetric in regards to the real axis but can be reconstructed by means of following the symmetric patterns in all the pictures. Again, the natural frequencies in Fig.22

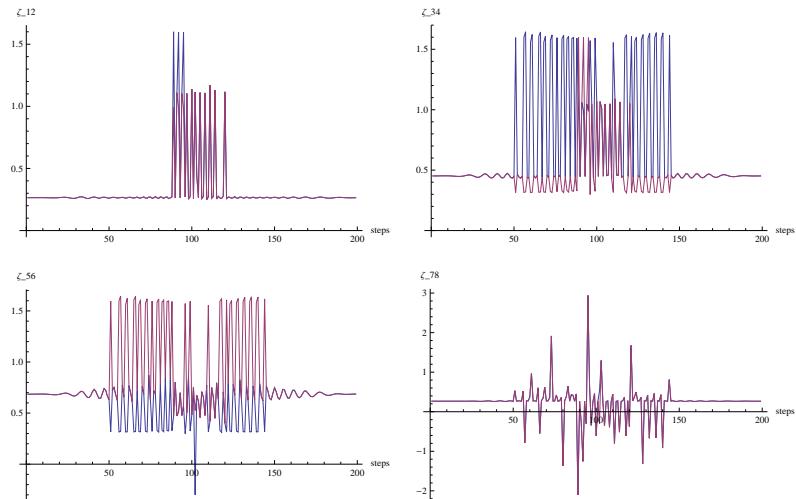


**Figure 18.** Eigenvalues of the time-varying state-space eigenproblem on the complex plane due to 60mm height wavy terrain traversing: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup> and d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>

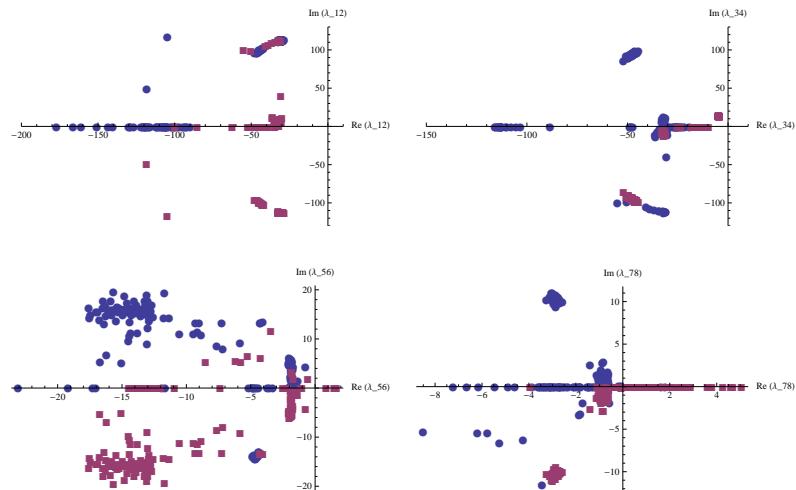


**Figure 19.** Modal natural frequencies of the time-varying state-space eigenproblem along the wavy 60mm height terrain traversing time steps: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup>, d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>

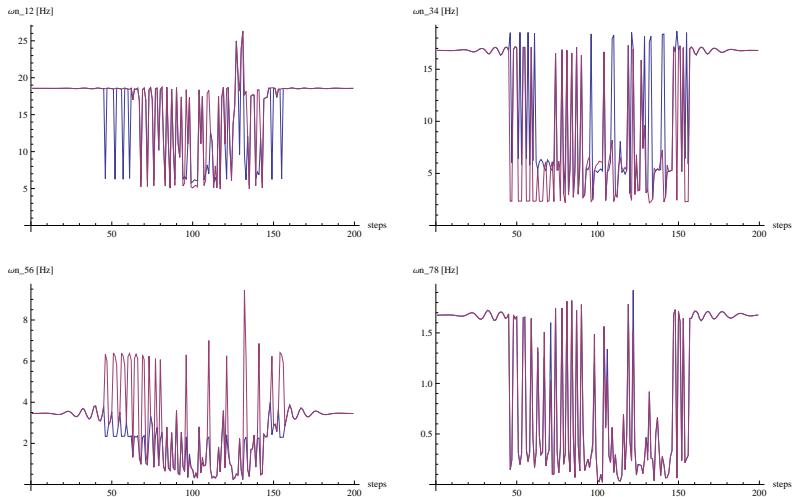
follow closely the constraint situation, with wheel detachment, flying and rebound (with non-linear increment of the suspension stiffness). Figure 23 underlines the overdamping tendency when the wheels are raised from the ground, together to precise highlight on the unstable pitch or vertical fall, with negative modal damping factors in  $\zeta_{56}$  &  $\zeta_{78}$ .



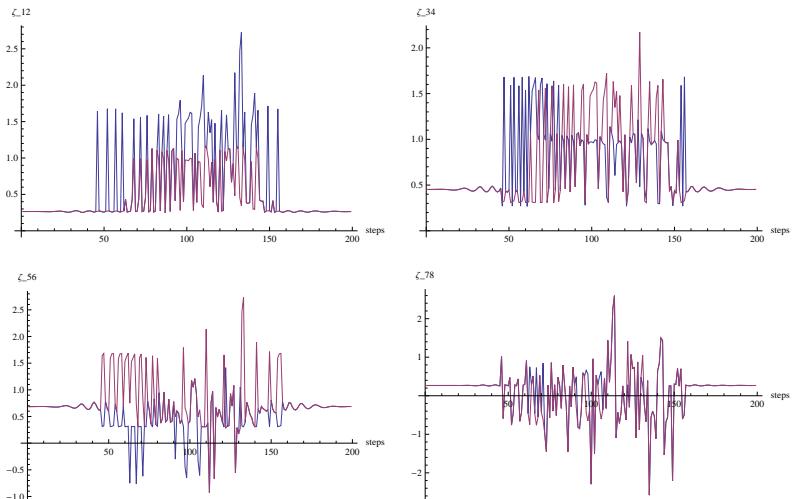
**Figure 20.** Modal damping factors of the time-varying state-space eigenproblem along the wavy 60mm height terrain traversing time steps: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup>, d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>



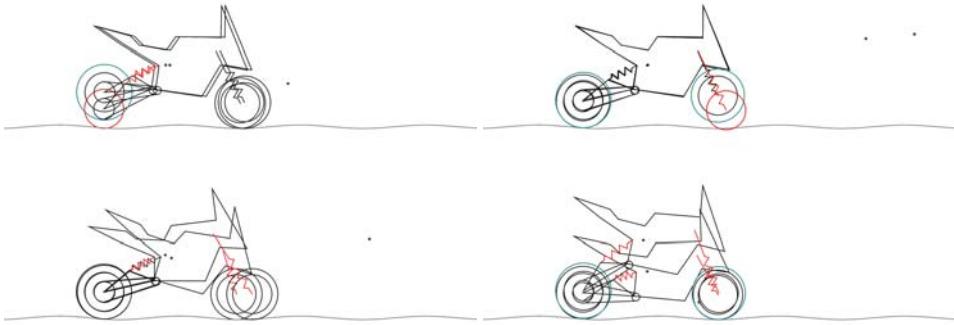
**Figure 21.** Eigenvalues of the time-varying state-space eigenproblem on the complex plane due to 100mm height wavy terrain traversing: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup> and d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>



**Figure 22.** Modal natural frequencies of the time-varying state-space eigenproblem along the wavy 0.1m height terrain traversing time steps: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup>, d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>



**Figure 23.** Modal damping factors of the time-varying state-space eigenproblem along the wavy 0.1m height terrain traversing time steps: a) 1<sup>st</sup>-2<sup>nd</sup>, b) 3<sup>rd</sup>-4<sup>th</sup>, c) 5<sup>th</sup>-6<sup>th</sup>, d) 7<sup>th</sup>-8<sup>th</sup>

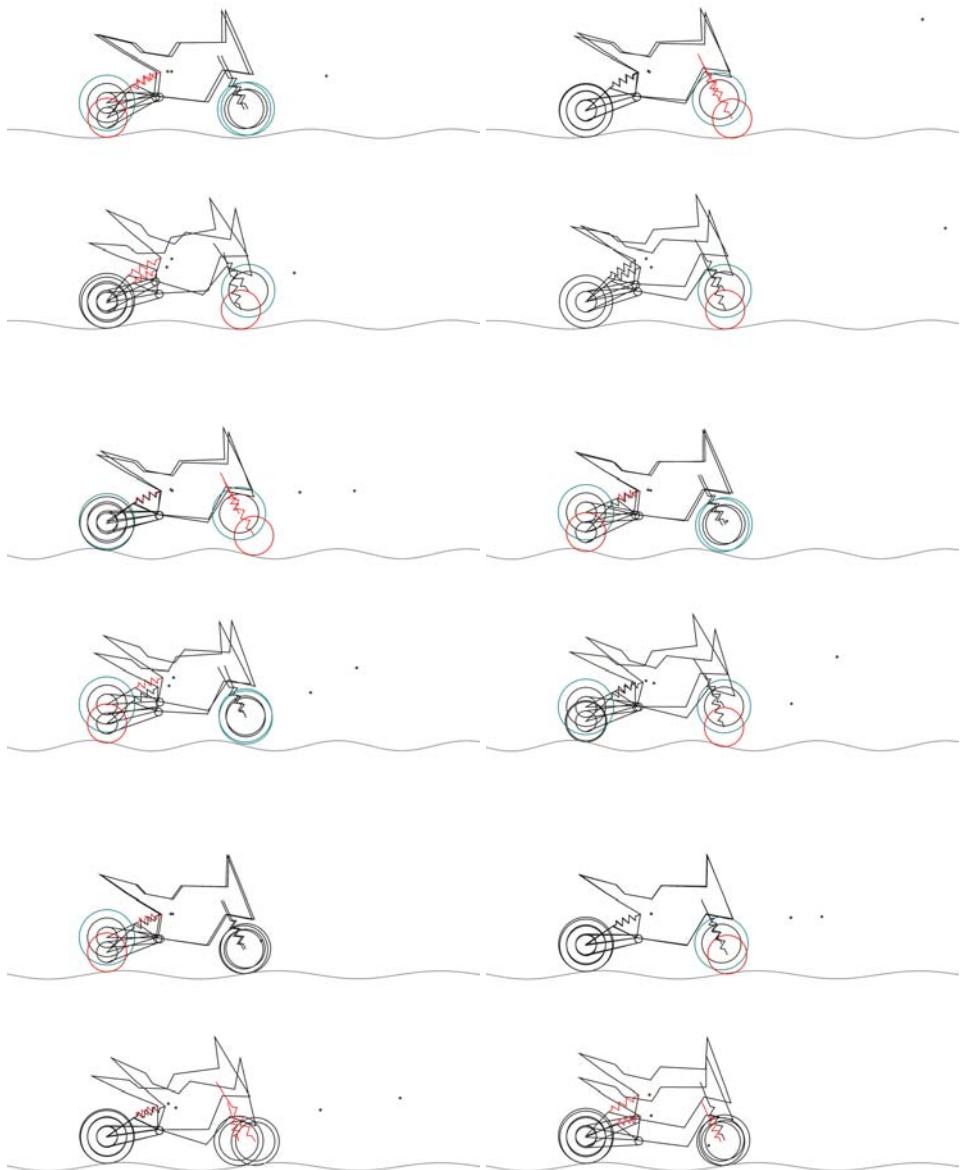


**Figure 24.** The four pairs of eigenmodes of the time-varying state-space eigenproblem on the wavy 20mm height terrain traversing with all wheels in contact

**Eigenvectors.** In Figs.24-27 are presented, by means of superimposed images, the four pairs of complex-valued eigenvectors of the linearised state-space model obtained in time instants of the three simulation, taking the forward mode (1, 3, 5, 7) in its extreme deployment; the first picture of each sequence is the 1<sup>st</sup> & 2<sup>nd</sup> eigenvector, then follow the 3<sup>rd</sup> & 4<sup>th</sup> in the second image, the 5<sup>th</sup> & 6<sup>th</sup> in the third and the 7<sup>th</sup> & 8<sup>th</sup> in the last. Again, when state-space matrices are not perfectly symmetrical, the paired modes might not be exactly a complex-valued conjugate pair, but they remain orthogonal. Being complex-valued, the eigenvectors carry also a distributed potential delay inside the shape, when represented as time-domain animation, which can be a further check on the consistency of the analysis; be aware that the magnitude of the displacements in the picture is augmented to let the reader identify the motorbike modal behaviour, thus there also follows the compression or the lift of the tire from the ground, with coded colours (red for maximal compression, green when free from contact).

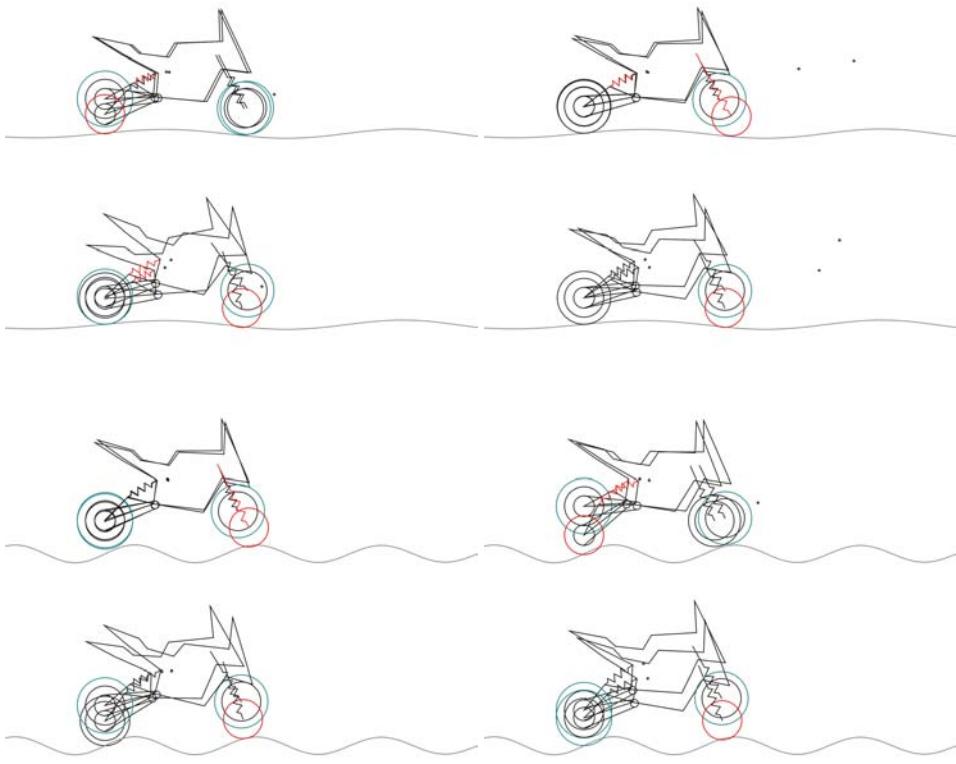
The eigenvectors in Fig.24 are taken from the frequency analysis of the first simulation, when the dynamic properties had a slight variability, that is not appreciable in a qualitative comparison, thus the time instant is selected in the middle of the raising wavy terrain, with both the wheels in contact with the ground, and the dynamic behaviour can be decomposed in four damped oscillations. It is clear that the first picture describes the eigenmode dominated by the oscillation of the rear suspension, the second by the mode of the front suspension, the third by the pitching and the last by the vertical travelling of the vehicle.

The Fig.25 is related to the changes induced by a more severe ground excitation (like that of the second simulation), when the four modes are sketched in three different simulation instants. While the first two eigenmodes of each group are clearly dominated again by the suspensions, but with a light mixing of pitching rotation and eventually raised wheels (in green), it can be noticed an exchange in position due to the automated eigenvalue-descending ranking in the analysis. The third and fourth eigenmodes, beside this ranking position exchange, may indeed reveal modifications induced by ground shaping and dynamic forces: in position 80 the pitching is constrained only by the rear suspension, with the raised front wheel, while the vertical motion is substituted by nearly a rigid body rotation of the vehicle,



**Figure 25.** The four pairs of eigenmodes of the time-varying state-space eigenproblem in 3 different positions (80,102,122) of the wavy 60mm height terrain traversing with raised front wheel, pitching-bouncing and all wheels in contact

revealing again a loose contact of the front wheel; in position 102 a real vertical motion is not present, substituted by a mixture of behaviours, where both the wheels tend to be de-



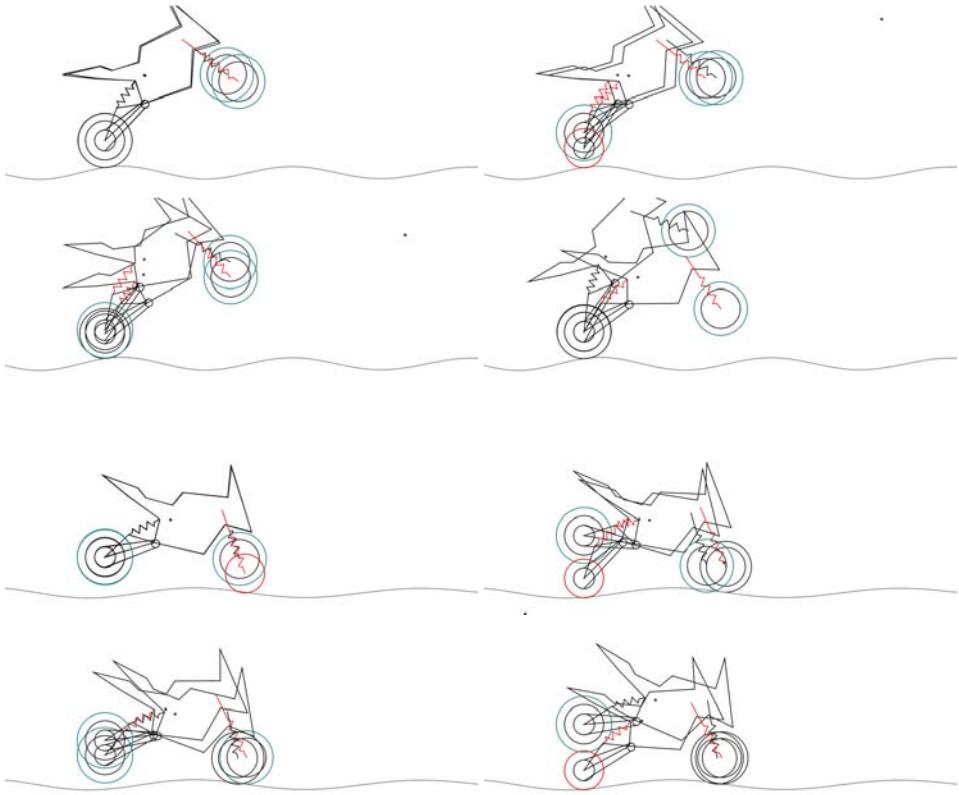
**Figure 26.** The four pairs of eigenmodes of the time-varying state-space eigenproblem in 2 different positions (47,101) of the wavy 100mm height terrain traversing with raised wheels and bouncing

tached from the ground, in a pitching-bouncing fashion; last, in position 122 there is again full contact and modes show to be as in Fig.24.

In Figs.26-27 the behaviour in extreme and uncontrollable conditions is shown; it is thus put in evidence how the four eigenmodes rapidly change their shape due to the dynamic conditions, without the chance to find a scalable match with previous solutions. While in step 47 the front wheel appears to be raised, in position 101 there is again a pitching-bouncing over the waves of the ground, with potentially both wheels detached. As extreme situations of the unstable behaviours, marked wheelie eigenmodes in step 129 and over-turning eigenmodes in step 144 are sketched.

### Computational cost

A limited computational burden was indeed asked by each test case evaluation on a dual Intel Xeon Paxville DP (dual core 2.8GHz CPUs) 64bit workstation: 3.33GB of memory allocated and 55 minutes were taken for the complete calculations on the time domain (for an integration lasting 10s) and 200  $\mathbf{H}(i\omega)$  matrices & eigenproblems solved.



**Figure 27.** The four pairs of eigenmodes of the time-varying state-space eigenproblem in 2 different positions (129,144) of the wavy 100mm height terrain traversing with uncontrolled wheelie and over-turning behaviours

## 6. CONCLUSIONS

The test cases here presented have proved the effectiveness of the frequency analysis approach on a time-varying mechanism as complex as an off-road motorbike in the action of travelling over wavy terrains. The analysis approach behaves consistently with the asked targets of getting detailed information in the frequency domain. The formulation of the linearised equations of motion around a point of interest, obtained from a detailed nonlinear dynamic analysis, indeed gives the chance to explore the frequency domain with the high resolution that is not generally available with the time-history transformation only, at a reasonable computational cost. Indeed the computational burden required in this frequency analysis is instead limited in comparison to ask the integrator of the motion equations to give all the data for obtaining such frequency meaningful content in a Fourier-based approach.

Further efforts will be dedicated to test the approach also on other manoeuvres and different shapes of the ground. This planar vehicle modelling & analysis approach has chances to be the conceptual basis for the implementation on larger models and on spatial mechanisms.

## Acknowledgements

The first author wishes to thank Mr. Brugnoni for his diligent and smart work during the preparation of his BA dissertation [13], which constitutes in this research paper the calculation engine for the time-domain solution of the motorbike model, and the starting point for the further dynamic analysis in the frequency domain carried on by the first author.

## REFERENCES

- [1] R. S. Sharp, S. Evangelou, D. J. N. L., 2004. “Advances in the modelling of motorcycle dynamics”. *Multibody System Dynamics*, **12**, pp. 251–283. Kluwer Academic Publishers.
- [2] V. Cossalter, R. Lot, M. M., 2011. “An advanced multibody code for handling and stability analysis of motorcycles”. *Meccanica*, **46**, pp. 943–958. Springer.
- [3] L. WU, W.-J. Z., 2010. “Hierarchical modeling of semi-active control of a full motorcycle suspension with six degrees of freedoms”. *Int. J. Automotive Technology*, **11**(1), pp. 27–32. KSAE.
- [4] M. Corno, S. M. Savaresi, G. J. B., 2009. “On linear-parameter-varying (lpv) slip-controller design for two-wheeled vehicles”. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **19**, pp. 1313–1336. John Wiley & Sons.
- [5] Ellis, J. R., 1969. *Vehicle Dynamics*. London Business Books Ltd., London.
- [6] Gillespie, T. D., 1992. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE, Warrandale, PA-USA.
- [7] W. F. Milliken, D. L. M., 1995. *Race car vehicle dynamics*. SAE, Warrandale, PA-USA.
- [8] Zanarini, A., 2012. *Analisi cinetostatica grafica di meccanismi piani. Applicazioni per la Meccanica delle Macchine*. Società Editrice Esculapio, Bologna, Italy. ISBN - 978-88-7488-545-9.
- [9] Zanarini, A., 2008. “Kinematics-based variability of the dynamic behaviour in spatial mechanisms”. In Proceedings of the ISMA2008 Conference, Leuven, Belgium, 2008 September 15-17, P. Sas, ed., Vol. Multi-body dynamics and control, KUL.
- [10] A. Carrella, D. J. E., 2011. “Identifying and quantifying structural nonlinearities in engineering applications from measured frequency response functions”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **25**, pp. 1011–1027. Elsevier.
- [11] F. Tisseur, K. M., 2001. “The quadric eigenvalue problem”. *SIAM Review*, **43**(2), pp. 235–286. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [12] L. Starek, D. J. I., 2001. “Symmetric inverse eigenvalue vibration problem and its application”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **15**, pp. 11–29. Elsevier.
- [13] Brugnoni, E., 2011. “Analisi del comportamento dinamico di un motoveicolo”. Ba final dissertation in fundamentals of machine mechanics, Degree in Energy Engineering, University of Bologna - Italy. A. Zanarini supervisor.

## INDICE DEGLI AUTORI

Andrisano Angelo Oreste	89, 121, 307
Angelini Guido	1
Ansaloni Matteo	89
Baldini Andrea	177
Barbieri Marco	121
Berselli Giovanni	89
Berti Alessandro	61
Bertocchi Enrico	177, 203
Bonazzi Enrico	89
Brugnoni Enrico	351
Canzler Andreas	1
Carli Andrea	79
Carricato Marco	61
Castagnetti Davide	237
Cocconcelli Marco	333
Cristofolini Luca	149
Dalpiaz Giorgio	293
Donati Lorenzo	283
Dragonì Eugenio	215, 225, 251
Faccio Maurizio	79
Fava Elisabetta	121
Finetto Christian	79
Freddi Alessandro	129
Gherardini Francesco	89
Giacopini Matteo	177, 203
Golinelli Nicola	225
Leali Francesco	89
Leonelli Luca	269
Martini Alberto	323
Mazzotti Claudio	111
Meneghetti Umberto	41
Merlet Jean-Piere	61
Molari Pier Gabriele	1
Montechiesi Luca	333
Mozaffari Foumashi Mohammad	111
Mucchi Emiliano	293
Oliva Enrico	177
Parenti Castelli Vincenzo	101, 111

Pellicano Francesco	121, 307
Pellicciari Marcello	89
Pini Fabio	89
Reggiani Barbara	283
Renzi Cristina	89
Rivola Alessandro	323
Rosati Giulio	79
Rossi Aldo	79
Rubini Riccardo	333
Sancisi Nicola	101
Sannipoli Pietro	1
Scirè Mammano Giovanni	251
Segatori Antonio	283
Spaggiari Andrea	225
Strozzi Antonio	177, 203
Strozzi Matteo	307
Tomesani Luca	283
Troncossi Marco	111, 323
Vergnano Alberto	89
Zanarini Alessandro	351
Zannoli Diego	111



In questo volume sono raccolte le memorie presentate in occasione della “Sesta Giornata di Studio Ettore Funaioli”, che si è svolta il 16 luglio 2012 presso la Facoltà di Ingegneria dell’Alma Mater Studiorum – Università di Bologna.

La Giornata è stata organizzata dagli ex allievi del Prof. Funaioli con la collaborazione del DIEM – Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche, Nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia dell’Alma Mater Studiorum – Università di Bologna e con il patrocinio dell’Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna e del GMA – Gruppo di Meccanica Applicata.

Questo volume è stato stampato con il contributo di G.D S.p.A.

AlmaDL è la Biblioteca Digitale dell’Alma Mater Studiorum Università di Bologna. AlmaDL ospita al suo interno gli archivi Open Access che rendono pubblicamente disponibili i contributi derivanti dalle attività di ricerca, didattiche e culturali dell’Ateneo bolognese. AlmaDL attua così i principi del movimento internazionale a sostegno dell’accesso aperto alla letteratura scientifica, sottoscritti dall’Università di Bologna assieme a molte altre istituzioni accademiche, di ricerca e di cultura, italiane e straniere.

<http://almadl.unibo.it>

ISBN 978-88-7488-615-9



ISBN 978-88-7488-615-9