ISSN 2282-6483

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
DEPARTMENT OF ECONOMICS

# Risparmio dei lavoratori e contrattazione in un modello di capitalismo come gioco differenziale

Giancarlo Gozzi

*Quaderni - Working Paper DSE N°971*

# Risparmio dei lavoratori e contrattazione in un modello di capitalismo come gioco differenziale

Giancarlo Gozzi
Dipartimento di Scienze Economiche
Università di Bologna

Ottobre 2014

**Sommario**

In un articolo del 1984 M. Pohjola ha introdotto nel modello di Lancaster la considerazione della contrattazione fra capitalisti e lavoratori nella analisi della relazione fra distribuzione del reddito e accumulazione del capitale in termini di un gioco differenziale. Lo scopo del nostro lavoro è quello di estendere l'analisi di Pohjola al caso in cui i lavoratori possono decidere di risparmiare e quindi di accumulare capitale per analizzarne le conseguenze sull'equilibrio non cooperativo del corrispondente gioco differenziale.



*Parole chiave*: modello di Lancaster, distribuzione e crescita, contrattazione.



**Abstract**

In his paper of 1984 M. Pohjola generalized Lancaster's model of capitalism as a differential game by considering the bargaining process between capitalists and workers in the analysis of the relationship between income distribution and capital accumulation. Our contribution aims to extend his model by introducing the possibility of saving for the workers and its consequences on the noncooperative equilibrium of the correspondin differential game.



*Keywords*: Lancaster's model, growth and distribution, bargaining.

**JEL classification**: C73, E10,O41

# 1 Introduzione

Lancaster [31] ha formalizzato la dinamica di una economia capitalistica in termini di un modello di gioco differenziale a somma non nulla; due sono, a parere di chi scrive, gli aspetti rilevanti di tale impostazione.

Anzitutto l'aspetto metodologico; con il lavoro di Lancaster la relazione fra distribuzione del reddito e crescita, con riferimento ad una economia capitalistica, viene studiata in termini di teoria dei giochi, quindi di un approccio che sottolinea l'aspetto conflittuale (e/o cooperativo) del problema.

Il secondo aspetto degno di menzione è di natura sostanziale; la esplicita considerazione dell'interazione fra capitalisti e lavoratori nel modello di Lancaster è, in determinate circostanze, la causa che fa precipitare il sistema economico in una situazione di inefficiente allocazione intertemporale delle risorse[1]; la società, nel suo complesso, potrebbe conseguire livelli più elevati di benessere qualora fosse possibile coordinare le decisioni delle diverse classi che, a diverso titolo, partecipano al processo economico.

Il contributo di Lancaster ha dato il via ad un certo numero di lavori che hanno cercato di estendere il modello iniziale e saggiarne, così, la robustezza dei risultati. In alcuni di questi lavori[2] si è cercato di generalizzare le ipotesi (estremamente semplificatrici) del modello di Lancaster concernenti la descrizione dell'economia (tecnologia, rappresentazione delle funzioni obiettivo delle classi, etc...), in altri si è indagato in che modo differenti assetti istituzionali dell'economia e differenti modi di interazione strategica fra capitalisti e lavoratori possano influenzare il grado di efficienza della allocazione intertemporale delle risorse in una economia capitalistica[3].

È in questa direzione che ci siamo mossi prendendo come termine di riferimento il modello di Pohjola [36] in cui si considera espressamente il processo di contrattazione fra lavoratori e capitalisti, per quanto concerne distribuzione del reddito e crescita dell'economia; ciò al fine di analizzare le conseguenze, su tale processo di contrattazione, derivanti dalla esplicita considerazione della possibilità di risparmiare (e quindi accumulare) da parte della classe lavoratrice.

Il lavoro è diviso in due parti. Nella prima parte vengono richiamate le caratteristiche principali del modello di Lancaster; ciò consente, fra le altre cose, di formulare alcune osservazioni critiche sul modello, così come inizialmente foemulato dallo stesso Lancaster; nella seconda parte si procede,

[1] In una situazione, per riprendere un ben noto esempio della teoria noncooperativa dei giochi, di dilemma del prigioniero.

[2] Cfr. Hoel[26], Pohjola[36], in particolare. Si rimanda a Pohjola[39] per una sintetica rassegna della letteratura sul modello di Lancaster e a Pohjola [38] per le applicazioni della teoria dei giochi dinamici alla macroeconomia. Una trattazione sistematica delle applicazioni economiche della teoria dei giochi differenziali è contenuta in Dockner, Jorgensen, Van Long e Sorger [14].

[3] Ci preme menzionare, fra gli altri, i lavori di Pohjola [35, 36], Haurie e Pohjola [22], Basar, Haurie e Ricci [5], Balducci e Denicolò [1], Mehring [33].

invece, a estendere la versione del modello di Lancaster considerata da Pohjola ([36]) per tenere conto della contrattazione fra capitalisti e lavoratori al fine di considerare, come già ricordato, la possibilità di risparmio e quindi di accumulazione da parte dei lavoratori.

# 2 Il modello di Lancaster: equilibrio noncooperativo ed ottimo paretiano

## 2.1 La soluzione noncooperativa del modello

Il modello di economia capitalistica di Lancaster è formato dalle seguenti equazioni:

$$Q = aK \tag{1}$$

La (1) definisce il livello di produzione ( e di reddito) per questa economia. L'economia considerata da Lancaster produce un solo bene e dispone di una sola tecnica di produzione; la tecnologia di questa economia è descritta da una funzione di produzione del tipo a coeffcienti fissi (o limitazionale):

$$Q = \min (aK, mL)$$

dove $a^{-1} = \alpha$ è il coeffciente di capitale e $m^{-1} = \mu$ è il coefficiente di lavoro. Lancaster, inoltre, assume che la forza-lavoro esistente sia sempre suffciente a consentire la piena utilizzazione della capacità produttiva esistente in ciascun periodo od istante di tempo, per cui:

$$aK < mL \quad \forall t$$

Le due relazioni congiuntamente implicano la (1).

$$C_1 = aKu_1 \tag{2}$$

La (2) definisce il consumo dei lavoratori. Nella formulazione di Lancaster i lavoratori non risparmiano: pertanto $u_1$ rappresenta al tempo stesso la quota di reddito che va a finire in consumo della classe lavoratrice e la quota dei salari sul reddito nazionale; tale variabile, in altre parole, può essere presa come espressione della distribuzione del reddito (fra profitti e salari e, al tempo stesso, fra capitalisti e lavoratori):

$$u_1 = \frac{C_1}{aK} \equiv \frac{W}{Q}$$

$$C_2 = aK (1 - u_1)(1 - u_2) \tag{3}$$

La (3) definisce il consumo dei capitalisti. Poichè solo i capitalisti risparmiano (ed investono) nel modello di Lancaster, e dato che non vi sono attività alternative per detenere ricchezza, abbiamo che $u_2$ rappresenta la quota dei profitti risparmiati (e, per una data distribuzione del reddito fra capitalisti e lavoratori, la quota di reddito investito[4]):

$$u_2 = \frac{S}{Q - C_1} = \frac{I}{aK\left(1 - u_1\right)}$$

$$I = aK\left(1 - u_1\right)u_2 \tag{4}$$

La (4), infine, è la usuale condizione di equilibrio fra risparmio ed investimento; in realtà il modello, da questo punto di vista, ha una matrice essenzialmente classica in quanto identifica risparmi ed investimenti e quindi non considera alcun meccanismo (in termini di aggiustamenti di prezzo, come avviene nell'ambito della teoria neoclassica tradizionale, o di quantità, come avviene invece nel modello keynesiano) per quanto concerne la realizzazione di tale condizione di equilibrio. Per dirla con altri termini, nell'economia descritta dal modello di Lancaster non sorgono in alcun modo problemi di domanda effettiva; l'economia si trova sempre in situazione di pieno impiego della capacità produttiva[5].

Il modello di Lancaster si differenzia dal tradizionale modello neoclassico (aggregato) di crescita[6] per quanto concerne la determinazione dei valori di equilibrio di $u_1$ ed $u_2$. Lancaster assume infatti che tali variabili siano sotto il diretto controllo delle due classi che partecipano al processo produttivo e che la determinazione del loro valore (di equilibrio) risponda essenzialmente all'obiettivo che ciascuna di esse si prefigge di ottenere. In particolare si assume che i lavoratori, in quanto classe, siano in grado di fissare la distribuzione del reddito fra profitti e salari (ovvero fra capitalisti e lavoratori, per le ipotesi che caratterizzano il modello e che abbiamo in precedenza esposte), quindi $u_1$, mentre i capitalisti, sempre come classe, abbiano pieno controllo del processo di accumulazione, e quindi siano in grado di fissare $u_2$.

Distribuzione del reddito e propensione al risparmio dei capitalisti (e quindi della collettività, nel modello considerato) sono determinate come soluzione di equilibrio non-cooperativo del seguente gioco differenziale a somma non nulla ed orizzonte finito:

[4]Vale infatti la seguente relazione:

$$u_2\left(1 - u_1\right) = \frac{S}{Q - C_1}\frac{Q - C_1}{Q} = \frac{I}{Q - C_1}\frac{Q - C_1}{Q} = \frac{I}{Q}$$

[5]La produzione effettiva coincide sempre con la produzione potenziale, determinata, per le ipotesi fatte, dalla dotazione di capitale.

[6]Facciamo, ovviamente, riferimento al modello di Solow [44]. Il modello di Lancaster ne condivide, tuttavia, la filosofia di fondo, come avremo modo di sottolineare più avanti.

$$\max_{u_1} J^1(u_1,u_2) = \int_0^T aKu_1 dt \tag{5}$$
$$\max_{u_2} J^2(u_1,u_2) = \int_0^T aK(1-u_1)(1-u_2)\cdot dt \tag{6}$$

Le relazioni precedenti definiscono gli obiettivi delle classi; Lancaster assume che lavoratori e capitalisti abbiano come obiettivo la massimizzazione del rispettivo consumo sull'orizzonte temporale $[0,T]$.

La dinamica dello stock di capitale è descritta dalla equazione seguente[7]:

$$\dot{K} = aK(1-u_1)u_2, \quad K(0) = K_0 \tag{7}$$

Le variabili decisionali di capitalisti e lavoratori soddisfano, infine, le condizioni seguenti:

$$u_1 \in \mathcal{U}_1 = \{u_1 | \, u_1 = \varphi(t) : [0,T] \longmapsto [c,b]\,, u_1 \text{ continua a tratti}\} \tag{8}$$
$$u_2 \in \mathcal{U}_2 = \{u_2 | \, u_2 = \phi(t) : [0,T] \longmapsto [0,1]\,, u_2 \text{ continua a tratti}\} \tag{9}$$

Gli insiemi $\mathcal{U}_i\,(i=1,2)$ definiscono gli spazi di strategie rispettivamente di lavoratori e capitalisti; Lancaster assume che l'equilibrio non cooperativo del modello vada cercato nelle cosiddette strategie open-loop[8].

Applicando il *Principio del Massimo* di Pontryagin ricaviamo le seguenti condizioni necessarie e sufficienti[9] per l'esistenza della soluzione di equilibrio non-cooperativo:

$$(u_1^* - u_1)(1-p_1u_2)\,aK \geq 0 \tag{10}$$
$$(u_2^* - u_2)(1-u_1)(p_2-1)\,aK \geq 0 \tag{11}$$

$$\dot{p}_1 = -a(u_1 + p_1(1-u_1)u_2)\,, \quad p_1(T) = 0 \tag{12}$$
$$\dot{p}_2 = -a(1-u_1)(1-u_2(1-p_2))\,, \quad p_2(T) = 0 \tag{13}$$

$$\dot{K} = aK(1-u_1)u_2, \quad K(0) = K_0 \tag{14}$$

[7] Lo stock di capitale e il suo prezzo ombra sono le variabili di stato del modello, come vedremo più avanti analizzando il corrispondente sistema dinamico.

[8] La politica ottimale, per ciascuna classe, dipende quindi dal valore iniziale della variabile di stato, cioè dallo stock di capitale, e dall'intervallo di tempo trascorso dall'istante iniziale ma non dallo stato del sistema nell'istante in cui viene presa la decisione. Per una rassegna degli spazi di strategia che possono essere definiti in un gioco differenziale si rimanda a Basar e Olsder [2] o a Dockner, Jorgensen, Van Long e Sorger [14], per trattazioni esaustive, oppure a Fershtman [18] e [16] per esposizioni più sintetiche.

[9] Data la concavità degli hamiltoniani.

e con:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(K, p_1, u_1, u_2) &= (p_1 u_2 + u_1(1 - p_1 u_2))\, aK \qquad (15)\\ \mathcal{H}^2(K, p_2, u_1, u_2) &= (1 - u_2(1 - p_2))(1 - u_1)\, aK \qquad (16)\end{aligned}$$

che rappresentano gli hamiltoniani del problema. La soluzione di equilibrio del modello è allora la seguente, per quanto concerne le variabili di controllo delle due classi[10]:

| | $t \in [0, \bar{t})$ | $t \in [\bar{t}, T]$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | $c$ | $b$ |
| $u_2$ | 1 | 0 |

Tabella 1

dove $\bar{t} = \max(0, T - 1/a(1-b))$; ai valori di equilibrio delle variabili di controllo $u_1$,$u_2$ corrispondono le seguenti funzioni per la variabile di stato (lo stock di capitale dell'economia, $K$) e per le variabili ausiliarie (la valutazione dell'investimento da parte dei lavoratori, $p_1$, e da parte dei capitalisti, $p_2$);

$$K = \begin{cases} K_0 e^{a(1-c)t} & t \in [0, \bar{t}) \\ K_0 e^{a(1-b)\bar{t}} & t \in [\bar{t}, T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{cases} \frac{c}{1-c}\left(e^{-a(1-c)(\bar{t}-t)} - 1\right) + \frac{b}{1-b} & t \in [0, \bar{t}) \\ \frac{b}{1-b} - ab(t - \bar{t}) & t \in [\bar{t}, T] \end{cases} \\ p_2 &= \begin{cases} e^{-a(1-c)(\bar{t}-t)} & t \in [0, \bar{t}) \\ 1 - a(1-b)(t - \bar{t}) & t \in [\bar{t}, T] \end{cases} \end{aligned}$$

La dinamica del modello è pertanto caratterizzata dalla successione di due fasi. Durante la prima fase i capitalisti investono interamente i loro profitti mentre i lavoratori fissano la distribuzione del reddito più favorevole per la

[10] Nel testo è considerato espressamente il caso in cui $b \geq 1/2$. Se $b < 1/2$ la soluzione del modello è la seguente:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \begin{cases} c & t \in [0, t^*) \\ b & t \in [t^*, T] \end{cases} \\ \hat{u}_2 &= \begin{cases} 1 & t \in [0, t^*) \\ 0 & t \in [t^*, T] \end{cases} \end{aligned}$$

con $t^* = \max\left(0, \bar{t} - \frac{1-2b}{ab(1-b)}\right)$, $\bar{t} = \max\left(0, T - \frac{1}{a(1-b)}\right)$ e quindi, per opportuni valori dei parametri $T$ ed $a$, la fase di pura accumulazione e quella di puro consumo sono separate da una fase intermedia in cui i capitalisti continuano ad accumulare mentre i lavoratori consumano al livello massimo; si rimanda al lavoro di Lancaster per maggiori dettagli.

classe capitalistica (potremmo chiamare questa fase quella del compromesso di classe), vale a dire fissano il saggio di salario al suo livello minimo; l'economia cresce al saggio massimo possibile:

$$g = \frac{I}{K} = au_2\,(1-u_1) \leq a\,(1-c)$$

e tutto il reddito che eccede la sussistenza della forza-lavoro viene investito. Durante la seconda fase, invece, i capitalisti consumano interamente i profitti ed i lavoratori fissano il saggio di salario al livello massimo possibile; l'economia si trova così in una situazione di stazionarietà con tutto il reddito che viene consumato.

Schematizzando possiamo dire che abbiamo una prima fase di accumulazione di capitale (che è tanto più lunga quanto più grande è la produttività media, e marginale, del capitale e quanto più grande è la quota minima dei profitti nel reddito nazionale) ed una seconda fase di consumo[11].

Sul piano prettamente analitico il modello di Lancaster presenta due caratteristiche principali. Come si può, anzitutto, riscontrare dalle condizioni necessarie (e sufficienti) per un ottimo la determinazione dei valori ottimali delle variabili di controllo, $u_1$ ed $u_2$, nonchè degli associati valori delle variabili ausiliarie, $p_1$ e $p_2$, non dipendono dal valore di $K$, cioè della variabile di stato del modello. Abbiamo, in altri termini, una decomponibilità delle condizioni necessarie (e sufficienti): le (10)-(13) permettono di determinare simultaneamente i valori di $u_1$, $u_2$, $p_1$, $p_2$, mentre la (14) determina il corrispondente valore dello stock di capitale. E' questa una caratteristica che contraddistingue i giochi differenziali *state-separable*[12]. Si ricava inoltre facilmente che gli hamiltoniani sono lineari nella variabile di stato, $K$, nelle variabili ausiliarie,$p_1$ e $p_2$, nonchè nelle funzioni delle variabili di controllo; il modello di Lancaster appartiene alla classe dei giochi differenziali *trilineari*[13]. Si può inoltre dimostrare che la soluzione di equilibrio non-cooperativo così ottenuta gode della proprietà di essere *self-enforcing*[14].

## 2.2 La soluzione cooperativa

Lancaster, nel suo lavoro, considera anche una particolare soluzione cooperativa appartenente all'insieme delle soluzioni Pareto ottimali, e precisamente

[11]Questo risultato, certamente non sconvolgente, è in sintonia con la visione di fondo del processo economico che caratterizza il modello di Lancaster e che è quella tipicamente neoclassica di un processo finalizzato al consumo; l'elemento di novità rispetto alla tradizionale formulazione dei modelli di sviluppo economico di matrice neoclassica è la esplicita considerazione di un elemento di esternalità nel processo decisionale dei singoli attori, come avremo modo di sottolineare più diffusamente nel testo.

[12]Per tale classe di giochi differenziali si rimanda a Dockner et al. [12] una più ampia trattazione.

[13]Cfr. Clemhout e Wan [11].

[14]Si veda l'appendice al presente lavoro.

quella in cui lavoratori e capitalisti coordinano le loro scelte in modo tale da massimizzare il consumo complessivo[15]; in questo caso particolare il gioco differenziale si riduce, in realtà, ad un normale problema di controllo ottimale:

$$\max_{v} J^{*}(v) = \int_{0}^{T} aK(1-v)\,dt \tag{17}$$

$$\dot{K} = aKv, \quad K(0) = K_0 \tag{18}$$

con:

$$v \in \mathcal{V} = \{ v |\, v = \psi(t) : [0,T] \longmapsto [0, 1-c], v \text{ continua a tratti} \}$$

dove $\mathcal{V}$ è lo spazio ammissibile di strategie (ancora una volta di tipo open-loop) e con $v$ che indica la quota di reddito nazionale investito dalla collettività:

$$v \equiv (1-u_1)\,u_2 = \frac{Q - C_1}{Q}\frac{I}{Q - C_1} = \frac{I}{Q}$$

Abbiamo parlato, con riferimento a tale soluzione cooperativa considerata da Lancaster nel suo modello, di soluzione particolare dal momento che l'insieme delle soluzioni Pareto ottimali per il gioco differenziale che stiamo considerando si ottiene dalla seguente famiglia di problemi di controllo ottimale[16]:

$$\max_{u_1,u_2} J^{\alpha} = \alpha J^{1}(u_1,u_2) + (1-\alpha)\,J^{2}(u_1,u_2) \tag{19}$$

$$\dot{K} = aK(1-u_1)\,u_2, \quad K(0) = K_0 \tag{20}$$

$$u_1 \in [c,b] \;,\; u_2 \in [0,1] \tag{21}$$

dove ciascun problema è parametrizzato dal peso relativo: $\beta = (1-\alpha)/\alpha$ dell'obiettivo di ciascuna classe. Le condizioni necessarie per la risoluzione del generico problema di controllo ottimale della famiglia di problemi (19) sono le seguenti:

$$\begin{aligned} (\hat{u}_1 - u_1)\left((1-\beta) + u_2(\beta - p)\right) aK &\geq 0 \\ (\hat{u}_2 - u_2)(1-u_1)(p-\beta)\, aK &\geq 0 \end{aligned}$$

[15] Senza indagare il modo in cui tale consumo si ripartisce fra le due classi.

[16] Per maggiori e più ampi dettagli si rimanda a Ho [25], oppure a Starr e Ho [45].

$$\dot{p} = -a\left(u_1 + (1-u_1)(p-\beta)u_2 + \beta(1-u_1)\right), \quad p(T) = 0$$

$$\dot{K} = aK(1-u_1)u_2, \quad K(0) = K_0$$

Per $\beta = 1$ abbiamo il caso particolare considerato da Lancaster; la soluzione del problema, in questo caso è la seguente(limitandoci a considerare il valore delle variabili di controllo, per comodità):

| | $t \in [0, t^*)$ | $t \in [t^*, T]$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | $c$ | $h \in [c, b]$ |
| $u_2$ | 1 | 0 |

Tabella 2

dove $t^* = \max(0, T - 1/a)$. E' agevole constatare che sull'intervallo $[t^*, T]$ è del tutto indifferente, per quanto concerne la soluzione ottimale del problema, il modo in cui il consumo complessivo della collettività si ripartisce fra consumo dei lavoratori e consumo dei capitalisti. Su tale intervallo abbiamo infatti che:

$$C = C_1 + C_2 = a\bar{K}h(T-t^*) + a\bar{K}(1-h)(T-t^*) = \bar{K}$$

dove $\bar{K} = K_0 e^{a(1-c)t^*}$ è lo stock di capitale di cui dispone l'economia nel momento in cui il processo di accumulazione viene a cessare e l'economia si trova in una configurazione di stato stazionario[17]. La soluzione del problema (17) è la seguente:

| | $t \in [0, t^*)$ | $t \in [t^*, T]$ |
|---|---|---|
| $v$ | $1-c$ | 0 |
| $p$ | $\frac{1}{1-c}e^{-a(1-c)(t-t^*)} - c$ | $1 - a(t-t^*)$ |
| $K$ | $K_0 e^{a(1-c)t}$ | $K_0 e^{a(1-c)t^*}$ |

Tabella 3

Anche nel caso cooperativo la dinamica dell'economia è caratterizzata da due fasi, la prima di pura accumulazione, durante la quale la collettività consuma nella misura minore possibile, la seconda di puro consumo, in cui l'economia viene a trovarsi in una situazione di stato stazionario; ciò che cambia, rispetto alla soluzione noncooperativa del modello, è la lunghezza

[17]Possiamo esprimere la stessa cosa dicendo che la frontiera dei pay-off possibili è, almeno per un tratto, lineare. In tal caso appare lecito, quindi, considerare come unica variabile decisionale la quota di reddito nazionale investita; la determinazione del flusso massimo di consumo è indipendente dalla sua distribuzione fra le classi.

di tali fasi (per un medesimo orizzonte temporale $T$). Poichè, in particolare, risulta $t^* > \bar{t}$ Lancaster giunge alla conclusione che la soluzione di equilibrio noncooperativo del modello è inefficiente; tale inefficienza assume la forma di una insufficiente accumulazione di capitale durante la prima fase. Ciò è dovuto al fatto che, con riferimento alla soluzione noncooperativa del modello, nell'economia opera una esternalità dinamica; il tentativo di ciascuna classe di sostenere il processo di accumulazione potrebbe infatti andare (in tutto od in parte) a vantaggio dell'altra classe dal momento che nella funzione obiettivo di ciascuna classe interviene una variabile che è direttamente sotto il controllo dell'altra. Per usare le parole dello stesso Lancaster:

> Thus the welfare loss from capitalism is due to the game-type situation which arises from the separation of the consumption decision from the investment decision. In this sense the weakness of capitalism is of a keynesian, rather than marxian, kind.[18]

Ci sembra, tuttavia, che la spiegazione in chiave keynesiana avanzata da Lancaster non sia del tutto appropriata; in effetti l'inefficienza del modello noncooperativo non ci sembra che possa imputarsi a problemi di domanda effettiva[19] (la separazione fra decisioni di spesa e decisioni di risparmio di per sè non è sufficiente a generare situazioni di tipo keynesiano - o, per dirla in altri termini, non è tipica della sola teoria keynesiana) quanto, piuttosto, alla mancata coordinazione delle scelte di lavoratori e capitalisti e, soprattutto, alla impossibilità, per lo meno nella versione del modello considerata da Lancaster, di rendere efficaci (vincolanti) eventuali accordi fra le classi volti ad eliminare tale inefficienza (Nel modello di Lancaster non si considera, p.e., il ruolo che potrebbe svolgere lo stato, a tale riguardo, attraverso un opportuno sistema di incentivi[20]).

# 3 Il modello di Lancaster con risparmio dei lavoratori

## 3.1 Generalizzazioni del modello di Lancaster

L'analisi di Lancaster ha costituito il punto di partenza per tutta una serie di generalizzazioni del modello di capitalismo come gioco differenziale; si possono al riguardo distinguere due principali filoni:

[18]Cfr. Lancaster [31, p. 1106].

[19]E' appena il caso di ricordare che il modello è caratterizzato dalla piena utilizzazione della capacità produttiva nonchè dalla completa identificazione fra decisioni di risparmio e decisioni di investimento.

[20]Per una rassegna della letteratura sulla teoria degli incentivi affrontata espressamente nell'ottica della teoria dei giochi si rimanda alla rassegna di Laffont e Maskin [30].

(i) generalizzazioni del modello per saggiarne la robustezza dei risultati (in modo particolare l'inefficienza della soluzione noncooperativa del modello);

(ii) generalizzazioni concernenti la struttura del modello, in particolar modo le ipotesi di comportamento delle classi sociali; possiamo far rientrare in questo secondo filone tutti quei lavori che si prefiggono di analizzare sotto quali condizioni l'equilibrio del modello risulta efficiente.

Con riferimento al problema della robustezza dei risultati possiamo anzitutto prendere in esame la struttura della soluzione del modello (sia nel caso noncooperativo che nel caso di comportamento cooperativo delle classi). Come abbiamo visto nella sezione precedente tale struttura è caratterizzata da due fasi[21], la prima di pura accumulazione e la seconda di puro consumo. Questa proprietà della soluzione del modello è strettamente connessa con la natura trilineare del gioco differenziale che in esso viene considerato, e quest'ultima discende dall'ipotesi di linearità della tecnologia nonchè delle funzioni obiettivo di lavoratori e capitalisti. E' bene, tuttavia, sottolineare che la non linearità della tecnologia di per sè è condizione nè necessaria nè sufficiente affinchè la soluzione del modello non sia di tipo "bang-bang"; possiamo, a tale riguardo, fare riferimento alla generalizzazione del modello di Lancaster operata da Hoel [26] dove si mantiene l'ipotesi di linearità delle funzioni obiettivo di capitalisti e lavoratori e si introduce, invece, l'ipotesi di rendimenti decrescenti del capitale, oppure a quella operata da Balducci e Denicolò [1][22] in cui si considerano rendimenti decrescenti sia per il capitale che per il lavoro (con il che viene meno la sufficienza) oppure alla generalizzazione contenuta in uno dei lavori di M. Pohjola[37]in cui si mantiene una tecnologia lineare ma si ipotizzano, invece, funzioni obiettivo nonlineari per entrambe le classi (con il che viene meno la necessarietà della condizione).

Un secondo aspetto riguarda l'estensione dell'orizzonte temporale del modello; l'ipotesi di un orizzonte temporale finito sembra difficilmente accomodabile con il fatto che gli agenti economici considerati nel modello sono classi e non individui. L'ipotesi di orizzonte temporale illimitato può essere facilmente introdotta nel modello di Lancaster. Poichè Lancaster non considera il caso di un saggio positivo di preferenza intertemporale, nel definire gli obiettivi di capitalisti e lavoratori, possiamo ricorrere ad un particolare criterio di valutazione dei flussi di consumo delle due classi, vale a dire al criterio che, nella letteratura sulla teoria del controllo ottimo, è noto

[21] Consideriamo, per comodità, solamente il caso in cui $b \geq 1/2$.

[22] In modo particolare la sez. 3 del lavoro.

come *overtaking principle*[23]. Con riferimento al criterio (debole)[24] di overtaking si dice che una coppia di strategie $(u_1^*, u_2^*)$ costituisce un equilibrio noncooperativo se, e solamente se:

$$\limsup_{T\to\infty} \left( J_T^i \left(u_i^*, u_j^*\right) - J_T^i \left(u_i, u_j^*\right)\right) \geq 0$$

$\forall i = 1, 2; i \neq j$ e $\forall u_i \in \mathcal{U}_i$ (cioè per ogni strategia appartenente all'insieme di strategie possibili) e dove abbiamo posto:

$$J_T^i = \int_0^T C^i(t)\, dt$$

cioè il flusso di consumo sull'orizzonte temporale $[0, T]$.

Le condizioni necessarie per l'esistenza di una coppia di strategie (di tipo open-loop) di equilibrio sono le seguenti[25]:

$$\begin{aligned} (u_1^* - u_1)(1 - u_2 p_1)\, aK &\geq 0 \qquad (22)\\ (u_2^* - u_2)(1 - u_1)(p_2 - 1)\, aK &\geq 0 \qquad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -a\left(u_1 + p_1(1 - u_1)\, u_2\right) \qquad (24)\\ \dot{p}_2 &= -a(1 - u_1)\left(1 - u_2(1 - p_2)\right) \qquad (25) \end{aligned}$$

$$\dot{K} = aK(1 - u_1)\, u_2, \quad K(0) = K_0 \qquad (26)$$

Dalle condizioni precedenti si ricava immediatamente che$p_1$, $p_2$ sono funzioni non crescenti di $t$ e quindi esisterà un istante di tempo in corrispondenza derl quale $p_2 = 1$. La struttura della soluzione, quindi, non cambia sostanzialmente rispetto al caso di orizzonte finito; avremo anche in questo caso una fase di accumulazione per un intervallo di tempo finito seguita dalla fase di consumo in cui l'economia si viene a trovare nella configurazione di stato stazionario[26].

[23]Si veda, in particolare, Brock e Haurie [8] nonchè Haurie e Leitman [21]. Per una sistematica esposizione di tale criterio e dell'uso che ne viene fatto nella teoria dei giochi si rimanda a A. Seierstad-K. Sydsæter [42] oppure Carlson e Haurie [10]. Come noto, in particolar modo dalla letteratura sulla teoria dello sviluppo ottimale, tale criterio consente di valutare scelte starategiche alternative senza imporre la condizione che il pay-off dei giocatori, su di un orizzonte temporale infinito, risulti finito.

[24]Esiste anche la versione forte del principio di overtaking. Essa può essere formulata nel modo seguente:

$$\lim_{T\to\infty} \inf \left( J_T^i \left(u_i^*, u_j^*\right) - J_T^i \left(u_i, u_j^*\right)\right) \geq 0$$

$i = 1, 2$; $i \neq j$. Si vedano, in proposito, i riferimenti bibliografici citati alla nota precedente per maggiori dettagli.

[25]Cfr. Haurie e Leitman [21], oppure Halkin [19].

[26]E' anche possibile, se sono soddisfatte certe condizioni sulla tecnologia e/o sulla struttura di preferenze degli agenti (cioè sulle loro funzioni obiettivo), che l'evoluzione dell'economia sia di tipo ciclico; si veda, p.e., Dockner e Feichtinger [13]

Un terzo aspetto riguarda il grado di aggregazione del modello; può essere di un qualche interesse considerare il modello nella versione multisettoriale, dato che in tal caso diventa fondamentale il problema della determinazione della composizione della produzione anche all'interno del settore che produce i beni capitali.

Ci pare, tuttavia, che la strada più interessante da seguire, per quanto concerne la generalizzazione del modello, sia quella menzionata al punto 2). Essa ha a che vedere, sostanzialmente, con il tipo di strategie a disposizione delle due classi, e quindi con le corrispondenti strutture informative che vengono utilizzate dalle stesse nel definire i loro piani d'azione. Come abbiamo già menzionato all'inizio il modello di Lancaster è formulato in termini di strategie open-loop; se però andiamo a riconsiderare le condizioni necessarie[27] per l'esistenza di una coppia di strategie (open-loop) ottimali notiamo immediatamente come $(u_1, u_2)$ non dipendano da $K$, cioè dalla variabile di stato[28]. In particolare non dipenderanno da $K_0$ (cioè lo stock di capitale iniziale); la soluzione di open-loop del modello di Lancaster si caratterizza, pertanto, anche come soluzione di feed-back[29] anche se di tipo particolare; si tratta infatti di una soluzione di feed-back che è però costante rispetto allo stato del sistema e dipende solamente dal tempo.

Ciò ci permette di concludere che le variabili ausiliarie[30] e di controllo sono funzioni dell'intervallo di tempo che intercorre fra $t$ (cioè il momento in cui viene presa la decisione) e $T$ (cioè l'orizzonte del modello); la soluzione del modello di Lancaster è pertanto *subgame-perfect*[31] e *time-consistent*[32]. Nella misura in cui le generalizzazioni del modello di Lancaster che sono state proposte non modificano la struttura "state-separable" del gioco differenziale di base, le corrispondenti soluzioni continuano a godere della proprietà di feed-back[33].

Le possibili generalizzazioni del modello di Lancaster, secondo questa prospettiva, concernono la esplicita presa in considerazione di asimmetrie

[27] Nel modello di Lancaster tali condizioni sono anche sufficienti dato che gli hamiltoniani sono lineari.

[28] Ciò deriva dal fatto, come già sappiamo, che il modello di Lancaster appartiene alla classe dei giochi differenziali *state-separable*.

[29] Cfr. Dockner et al. [12]

[30] Cioè i prezzi ombra del capitale per le due classi oppure, nel caso di versione cooperativa del modello, il prezzo ombra determinato socialmente.

[31] Dato che non dipende da $K_0$. Il riferimento classico per la nozione di "subgame perfectness" è, naturalmente, Selten [43]. Una trattazione sistematica è quella di Van Damme [49].

[32] Si rimanda a Basar [3] e a Pohjola [38] per una introduzione non particolarmente tecnica al problema della "time-consistency" mentre Kydland e Prescott [29] è il riferimento classico per questo argomento.

[33] Il modello di Basar, Haurie e Ricci [5] è un esempio di modello in cui si elimina la caratteristica di trilinearità e quindi la loro versione del modello di Lancaster non soddisfa la proprietà di "state-separability".

nella strutture informative delle due classi[34] ovvero la considerazione, sul piano analitico, di spazi di strategie più complessi di quelli open-loop, quali ad esempio gli spazi di strategie con memoria; è facendo riferimento a questa rappresentazione analitica degli insiemi di strategie, in modo particolare, che è possibile fondare analisi di situazioni conflittuali che determinano dinamiche efficienti dell'economia[35].

Una terza possibilità è quella di considerare esplicitamente il processo di contrattazione fra lavoratori e capitalisti; la possibilità di ottenere una soluzione del modello che sia Pareto ottimale si fonda sulla utilizzazione del modello di contrattazione di Nash[36] opportunamente adattato per poter essere utilizzato in uno schema di gioco differenziale. Questa alternativa presenta degli indubbi vantaggi dal punto di vista analitico in quanto consente di evitare il ricorso a strategie con memoria, per lo meno per quanto concerne la fase cooperativa del modello di contrattazione[37]; in questo caso, infatti, appare lecita l'adozione di strategie open-loop[38]. Matti Pohjola ha, in effetti, esplicitamente considerato questa estensione del modello di Lancaster[39]; tuttavia egli ha continuato a mantenere l'ipotesi che siano i soli capitalisti ad accumulare capitale[40]. Quello che cercheremo allora di fare, nella prossima sezione, sarà di estendere l'analisi di Pohjola al caso in cui anche i lavoratori possono non solo risparmiare ma anche accumulare capitale; cercheremo, in altri termini, di integrare l'analisi di Pohjola con quella sviluppata nell'interessante lavoro di Balducci e Denicolò già menzionato.

---

[34] E' questo il caso, ad esempio, quando si va alla ricerca della soluzione di Stackelberg del modello con ipotesi alternative per quanto riguarda la leadership del gioco. La soluzione di Stackelberg è stata utilizzata per rappresentare sul piano analitico soluzioni del tipo "politica dei redditi" con riferimento ad una economia capitalistica; si veda M. Pohjola (1983).

[35] Vale a dire che le configurazioni di equilibrio (non-cooperativo) che le descrivono godono della proprietà di non dominanza (sono cioè degli ottimi paretiani). Il riferimento obbligato, in questo caso, è ad alcuni lavori di tolwinski; si veda, in particolare, Tolwinski [47] e la bibliografia ivi citata.

[36] O di un altro modello di contrattazione. Per una interessante rassegna della teoria della contrattazione si rimanda a Harsanyi [20] e a Muthoo [34]; per una raccolta di saggi a Binmore e Dasgupta [6] . Molto utile, a giudizio di chi scrive, è anche la più recente rassegna di E. Kalai [28].

[37] Cioè la fase che segue la formulazione delle strategie di minaccia. Il modello di contrattazione che prenderemo in considerazione nel seguito è quello nella versione cosiddetta "strategica". Una trattazione sistematica della versione "assiomatica" (che noi non prenderemo, però, in considerazione) del modello di contrattazione è quella di Roth [41].

[38] Naturalmente ciò presuppone l'esistenza di una terza parte il cui compito è quello di garantire il rispetto degli accordi, e cioè che la strategia scelta congiuntamente venga di fatto adottata dalle parti. Viene immediato di pensare allo stato per questo ruolo di "arbitro".

[39] Cfr. Pohjola [36].

[40] Questo presuppone, ovviamente, che i lavoratori non prendano in considerazione la possibilità di realizzare il loro obiettivo - comunque esso sia definito - sostituendo i capitalisti nel creare le condizioni materiali per tale realizzazione.

## 3.2 Il modello di Lancaster con risparmio dei lavoratori

Quando si considera espressamente la possibilità da parte dei lavoratori di risparmiare la distribuzione del reddito per classi non coincide più con la distribuzione del reddito per categorie di reddito. Ciò che quindi ci interessa, ora, è la distribuzione del reddito per classi; in particolare avremo che:

$$\begin{aligned} Y_1 &= wL + \Pi_1 && (27) \\ Y_2 &= \Pi_2 && (28) \end{aligned}$$

rappresentano, rispettivamente, il reddito complessivo dei lavoratori e quello dei capitalisti . Poichè:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{K_1}{K}$$

con $\Pi = \frac{\Pi}{K}\frac{K}{X}X$, si ricava che:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (1 - u_1)\, aK_1 \\ \Pi_2 &= (1 - u_2)\, aK_2 \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere i redditi delle due classi nel modo seguente[41]:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a\,(K_1 + u_1 K_2) \\ Y_2 &= (1 - u_1)\, aK_2 \end{aligned}$$

Il gioco differenziale che descrive l'interazione fra capitalisti e lavoratori è, in questo caso, il seguente:

$$\begin{aligned} \max_{u_1, s_1} J^1(u_1, s_1, u_2) &= \int_0^T s_1 a\,(K_1 + u_1 K_2)\, dt && (29) \\ \max_{u_2} J^2(u_1, s_1, u_2) &= \int_0^T (1 - u_2)(1 - u_1)\, aK_2 dt && (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= (1 - s_1)\, a\,(K_1 + u_1 K_2)\,, \quad K_1(0) = K_{10} && (31) \\ \dot{K}_2 &= u_2(1 - u_1)\, aK_2, \quad K_2(0) = K_{20} && (32) \end{aligned}$$

$$u_1 \in [b, c]\,,\ s_1 \in [0, 1]\,,\ u_2 \in [0, 1] \qquad (33)$$

dove con $s_1$ abbiamo indicato la propensione al consumo dei lavoratori (che ora diventa una variabile addizionale di controllo per i lavoratori).

La determinazione dell'equilibrio secondo lo schema del modello di contrattazione di Nash passa per le seguenti tre fasi:

[41] Sfruttando il fatto che, per definizione, $K = K_1 + K_2$ .

1. determinazione di una coppia di strategie[42] $\gamma_1, \gamma_2$ che rappresenta la situazione che si viene a creare qualora un accordo fra le classi non sia raggiunto;

2. determinazione della coppia di strategie $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$tali per cui:

$$\left(\tilde{J}^1 - \phi_1\right)\left(\tilde{J}^2 - \phi_2\right) \geq \left(J^1 - \phi_1\right)\left(J^2 - \phi_2\right)$$

sull'insieme $\left\{\left(J^1, J^2\right) \middle| J^1 \geq \phi_1,\ J^2 \geq \phi_2\right\}$, con $\tilde{J}^i = J^i\left(\tilde{u}_1, \tilde{s}_1, \tilde{u}_2\right)$, $\phi_i = J^i\left(\gamma_1, \gamma_2\right)$ e $J^i = J^i\left(u_1, s_1, u_2\right)$;

3. determinazione della coppia di strategie di minaccia ottimali, $\gamma_1^*, \gamma_2^*$, vale a dire[43]:

$$\tilde{J}^i\left(\gamma_i^*, \gamma_j^*\right) \geq \tilde{J}^i\left(\gamma_i, \gamma_j^*\right) \qquad i = 1, 2\,;\ i \neq j$$

L'equilibrio che stiamo cercando è quindi un equilibrio di Nash nelle strategie di minaccia[44]. Per risolvere questo problema possiamo fare ricorso ad un risultato di P.T. Liu [32] che fornisce una condizione sufficiente per l'individuazione di strategie di minaccia ottimali:

**Teorema 1** (P.T. Liu (1973), p. 163)**.** *Se esiste una costante $\xi \in (0, \infty)$ ed inoltre esistono due coppie di strategie ammissibili $\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right), \left(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\right)$ tali per cui:*

$$\begin{aligned}
\tilde{J}^1 + \xi\tilde{J}^2 &= \max\left(J^1 + \xi J^2\right) &(34)\\
J^1\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right) - \xi J^2\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right) &= \min_{\gamma_2}\max_{\gamma_1}\left(J^1 - \xi J^2\right) &(35)\\
\left(\tilde{J}^1 - J^1\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right)\right) &= \xi\left(\tilde{J}^2 - J^2\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right)\right) &(36)
\end{aligned}$$

*per ogni possibile coppia di strategie allora $\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right)$ è una coppia di strategie di minaccia ottimali e $\left(\tilde{J}^1, \tilde{J}^2\right)$ sono le utilità (pay-off) che realizzano i giocatori; in altri termini:*

$$\tilde{J}^i\left(\tilde{u}_1, \tilde{s}_1, \tilde{u}_2\right) = \tilde{J}^i\left(\gamma_1^*, \gamma_2^*\right) \qquad i = 1, 2$$

Dalla (35) del Teorema ricaviamo che le strategie di minaccia ottimali si ottengono dalla risoluzione del seguente gioco differenziale a somma nulla:

$$\min_{u_2}\max_{u_1, s_1}\left(J^1\left(u_1, s_1, u_2\right) - \xi J^2\left(u_1, s_1, u_2\right)\right)$$

[42] Si tratta delle cosiddette strategie di minaccia.

[43] Come appare chiaro dal punto 2) le strategie ottimali per ciascuna classe dipendono dalle strategie di minaccia formulate dai giocatori.

[44] Una volta, infatti, determinate le minacce ottimali per ciascuna classe possiamo ricavare quali saranno le strategie che, congiuntamente, decideranno di attuare

vale a dire dalla determinazione del punto di sella del gioco differenziale il cui pay-off è:

$$J = J^1 - \xi J^2$$

L'hamiltoniano di tale problema è il seguente:

$$\mathcal{H} = (s_1 + p_1(1-s_1))\, a\,(K_1 + u_1 K_2) + (p_2 u_2 - \xi(1-u_2))(1-u_1)\, aK_2$$

da cui, applicando come al solito il principio del massimo, si ricavano le seguenti condizioni necessarie:

$$\begin{aligned}
(\hat{u}_1 - u_1)(s_1 + p_1(1-s_1) + \xi(1-u_2) - u_2 p_2)\, aK_2 &\geq 0 \\
(\hat{s}_1 - s_1)\, a\,(K_1 + u_1 K_2)(1-p_1) &\geq 0 \\
(\hat{u}_2 - u_2)\, aK_2 (1-u_1)(p_2 + \xi) &\leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= -(s_1 + p_1(1-s_1))\, a, \quad p_1(T) = 0 \\
\dot{p}_2 &= -\left[a u_1 (s_1 - p_1(1-s_1)) + a(1-u_1)(\xi(1-u_2) - p_2 u_2)\right], p_2(T) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}_1 &= (1-s_1)\, a\,(K_1 + u_1 K_2), \quad K_1(0) = K_{10} \\
\dot{K}_2 &= u_2 (1-u_1)\, aK_2, \quad K_2(0) = K_{20}
\end{aligned}$$

Dalle espressioni precedenti si ricava:

$$\hat{u}_1 = \begin{cases} c & \xi + p_1 + (1-p_1)\, s_1 < (p_2 + \xi)\, u_2 \\ b & \xi + p_1 + (1-p_1)\, s_1 > (p_2 + \xi)\, u_2 \end{cases} \tag{37}$$

$$\hat{s}_1 = \begin{cases} 0 & p_1 > 1 \\ 1 & p_1 < 1 \end{cases} \tag{38}$$

$$\hat{u}_2 = \begin{cases} 0 & p_2 + \xi > 0 \\ 1 & p_2 + \xi < 0 \end{cases} \tag{39}$$

La struttura delle strategie ottimali di minaccia può essere ricavata nel modo seguente. Dalla condizione di trasversalità per $p_1$ si ricava facilmente che $\hat{s}_1 = 1$ per $t \in \left[\tilde{t}, T\right]$ mentre dalla condizione di trasversalità per $p_2$ si ricava che $\hat{u}_2 = 0$ per $t \in \left[\tilde{t}, T\right]$. Inoltre $\hat{u}_1 = b$ dato che $1 + \xi > 0$ (per $t$ tale per cui $\hat{u}_2 = 0$). Il valore di $\tilde{t}$ può essere facilmente calcolato; si ricava infatti che $p_1\left(\tilde{t}\right) = a\left(T - \tilde{t}\right) = 1$ da cui si ottiene $\tilde{t} = T - \frac{1}{a}$.

Analogamente si ricava che $\underline{t} = \max\left(0, T - \frac{\xi}{a(\xi(1-b)-b)}\right)$.

Possiamo allora sintetizzare la soluzione del modello nella seguente tabella:

| $\xi < \frac{abT}{aT(1-b)-1}$ | $\xi > \frac{abT}{aT(1-b)-1}$ |
|---|---|
| $\hat{u}_1 = b \quad \forall t \in [0,T]$ | $\hat{u}_1 = b \quad \forall t \in [0,T]$ |
| $\hat{s}_1 = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, T - \frac{1}{a}\right) \\ 1 & t \in \left[T - \frac{1}{a}, T\right] \end{cases}$ | $\hat{s}_1 = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, T - \frac{1}{a}\right) \\ 1 & t \in \left[T - \frac{1}{a}, T\right] \end{cases}$ |
| $\hat{u}_2 = b \quad \forall t \in [0,T]$ | $\hat{u}_2 = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, T - \frac{\xi}{a(\xi(1-b)-b)}\right) \\ 1 & t \in \left[T - \frac{\xi}{a(\xi(1-b)-b)}, T\right] \end{cases}$ |

Tabella 4

Da queste espressioni possiamo poi ricavare l'andamento dello stock di capitale di lavoratori e capitalisti. Quale l'interpretazione da dare al risultato ottenuto? Possiamo notare che qualora la capacità contrattuale dei capitalisti non sia troppo elevata, la minaccia dei capitalisti consiste nell'astenersi dall'investire, mentre la minaccia dei lavoratori consiste da un lato nel determinare la distribuzione del reddito più sfavorevole per i capitalisti e dall'altro nell'accumulare capitale per un certo intervallo (finito) di tempo, e cio al fine di modificare la composizione della proprietà dello stock di capitale. Nel caso in cui il peso contrattuale dei capitalisti è più pronunciato abbiamo che i capitalisti usano, quale strategia di minaccia ottimale, quella di accumulare capitale per un certo periodo di tempo (mentre invariata rimane la strategia di minaccia dei lavoratori).

Si noti che la (34) del Teorema equivale ad individuare l'insieme di strategie cui corrispondono ottimi paretiani. Possiamo impostare il problema come un normale problema di controllo ottimale:

$$\max_{u_1, s_1, u_2} J^1 + \xi J^2 \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= (1 - s_1)\, a\, (K_1 + u_1 K_2)\,, \quad K_1(0) = K_{10} && (41) \\ \dot{K}_2 &= u_2 (1 - u_1)\, a K_2, \quad K_2(0) = K_{20} && (42) \end{aligned}$$

$$u_1 \in [b, c]\,,\ s_1 \in [0,1]\,,\ u_2 \in [0,1] \tag{43}$$

Applicando nuovamente il principio del massimo si può verificare che si ottengono i seguenti valori delle variabili di controllo, in equilibrio:

- caso in cui $\xi < 1$:

$$\hat{u}_1 = \begin{cases} c & t \in [0, t''] \\ b & t \in [t'', T] \end{cases}, \hat{s}_1 = \begin{cases} 0 & t \in \left[0, T - \frac{1}{a}\right] \\ b & t \in \left[T - \frac{1}{a}, T\right] \end{cases}, \hat{u}_2 = \begin{cases} 1 & t \in [0, t'] \\ 0 & t \in [t', T] \end{cases}$$

- caso in cui $\xi > 1$:

$$\hat{u}_1 = c \quad \forall t \in [0,T]\,, \quad \hat{u}_2 = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \tilde{t}\right] \\ 0 & t \in \left[\tilde{t}, T\right] \end{cases}$$

mentre non cambia il valore di equilibrio di $s_1$;

- caso in cui $\xi = 1$:

$$\hat{u}_1 = \begin{cases} c & t \in [0, t^*] \\ h \in [c, b] & t \in (t^*, T] \end{cases}, \hat{s}_1 = \begin{cases} 0 & t \in [0, t^*] \\ 1 & t \in (t^*, T] \end{cases}, \hat{u}_2 = \begin{cases} 0 & t \in [0, t^*] \\ 1 & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

e dove:

$$\begin{aligned} t' &= \tilde{t} = T - \frac{\xi}{a\,(b + \xi\,(1 - b))} \\ t'' &= \tilde{t} + \ln \frac{b + \xi\,(1 - b)}{a\,(1 - b)} \\ t^* &= T - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Dalla (36) del teorema di Liu ricaviamo, infine, il valore di $\xi$, cioè della variabile che esprime il rapporto relativo di forza fra le due classi. Per fare questo dobbiamo calcolare i valori delle funzioni obiettivo in corrispondenza di ciascuna strategia ottimale (di minaccia e di ottimo paretiano). Possiamo però analizzare il problema anche da un punto di vista qualitativo; a tale scopo riscriviamo la (36) del teorema di Liu che ci dà le condizioni sufficienti, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \tilde{J}^1 - \xi \tilde{J}^2 &= \eta\,(\xi) \\ J^1\,(\gamma_1^*, \gamma_2^*) - \xi J^2\,(\gamma_1^*, \gamma_2^*) &= \Phi\,(\xi) \end{aligned}$$

Anzitutto abbiamo che[45]:

$$\lim_{\xi \to 0} \eta\,(\xi) > \lim_{\xi \to 0} \Phi\,(\xi)$$

Inoltre:

$$\lim_{\xi \to \infty} \eta\,(\xi) < \lim_{\xi \to \infty} \Phi\,(\xi)$$

Poichè le funzioni $\eta\,(\xi)$ e $\Phi\,(\xi)$ sono, inoltre, monotone decrescenti (cambiando infatti il parametro $\xi$ ci muoviamo lungo la frontiera degli ottimi paretiani) esisterà certamente un valore di $\xi$ tale per cui:

$$\eta\,(\xi) = \Phi\,(\xi) \tag{44}$$

[45] Questa è una proprietà che discende dal modello di contrattazione.

## 4 Conclusioni

Lo scopo principale di questo lavoro è stato quello di integrare due generalizzazioni del modello di capitalismo come gioco differenziale proposto da Lancaster nel suo contributo del 1973; da un lato quella che considera espressamente la possibilità per i lavoratori di risparmiare e, quindi, di poter anche accumulare, eventualmente, capitale, dall'altro la esplicita contrattazione fra capitalisti e lavoratori per quanto concerne la formulazione dei comportamenti strategici delle due classi. Si è così visto che la strategia a disposizione dei lavoratori per indurre un determinato comportamento dei capitalisti comprende ora non solo la possibilità di agire sulla distribuzione del reddito, bensì anche quella di operare sulla composizione dello stock di capitale fra le due classi (con ovvie conseguenze sul possibile assetto istituzionale qualora l'orizzonte temporale non sia troppo breve).

## Appendice matematica

Con riferimento alla soluzione delmodello di Lancaster, nel caso in cui $b \geq 1/2$, supponiamo che i lavoratori decidano di passare dal consumo minimo a quello massimo alla data $\bar{t} + \tau$ con $\tau \geq 0$, e dove abbiamo indicato con $\bar{t}$ la data alla quale i lavoratori decidono di passare dal consumo minimo a quello massimo. Pertanto:

$$u_1 = \begin{cases} c & t \in [0, \bar{t} + \tau] \\ b & t \in (\bar{t} + \tau, T] \end{cases} \tag{45}$$

indica la politica scelta dai lavoratori. Il comportamento razionale dei capitalisti, in questo caso, sarà dato dalla soluzione del seguente problema:

$$\max_{u_2} \int_0^T aK\,(1 - u_1)\,(1 - u_2)\,dt \tag{46}$$

$$\dot{K} = aK\,(1 - u_1)\,u_2, \quad K\,(0) = K_0 \tag{47}$$

e con $u_1$ dato dall'espressione precedente. Applicando il principio del massimo di Pontryagin otteniamo le seguenti condizioni necessarie (che nel nostro caso sono anche sufficienti per via della linearità dell'hamiltoniano) per la individuazione della politica ottimale dei capitalisti:

$$(u_2^* - u_2)\,(1 - u_1)\,(p_2 - 1)\,aK \geq 0 \tag{48}$$

$$\dot{p}_2 = -a\,(1 - u_1)\,(1 + (p_2 - 1)\,u_2)\,, \quad p_2\,(T) = 0 \tag{49}$$

$$\dot{K} = aK\,(1 - u_1)\,u_2, \quad K\,(0) = K_0 \tag{50}$$

Dalla (48) si ricava immediatamente che:

$$u_2^* = \begin{cases} 1 & p_2 > 1 \\ 0 & p_2 < 1 \end{cases}$$

Sfruttando la condizione di trasversalità otteniamo:

$$\dot{p}_2 = -a\,(1-b)$$

per $t \in [\bar{t}+\tau, T]$, cioè:

$$p_2\,(t) - p_2\,(\bar{t}+\tau) = a\,(1-b)\,(t-(\bar{t}+\tau))$$

Poichè $p_2(T) = 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} p_2\,(\bar{t}+\tau) &= a\,(1-b)\,(T-(\bar{t}+\tau)) \\ &= 1 - a\,(1-b)\,\tau \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\dot{p}_2 = -a\,(1-c)$$

per $t \in \left[\hat{t}, \bar{t}+\tau\right]$, ovvero $p_2\,(t) - p_2\left(\hat{t}\right) = -a\,(1-c)\left(t-\hat{t}\right)$. Dalla condizione $p_2\left(\hat{t}\right) = 1$ si ricava:

$$p_2\,(\bar{t}+\tau) - p_2\left(\hat{t}\right) = a\,(1-c)\left(\bar{t}+\tau-\hat{t}\right)$$

vale a dire, ponendo $\hat{t} = \bar{t}+\tau'$ con $\tau' > 0$:

$$\tau' = \tau + \frac{b-1}{1-c}\tau = \frac{b-c}{1-c}\tau \tag{51}$$

Il significato della (51) è evidente. I capitalisti passeranno da una politica di accumulazione (al ritmo massimo) ad una politica di puro consumo all'istante $\hat{t} = \bar{t}+\tau'$ e dalla (51) si ricava che $\tau' < \tau$ (essendo $b < 1$).

Nell'ottenere questo risultato si è supposto che $\hat{t} = \bar{t} + \tau\prime > \bar{t}$; ciò, tuttavia, è corretto. Infatti $p_2\,(\bar{t}) = 1$, nel modello non-cooperativo, dove $\dot{p}_2 = -a\,(1-b)$ per $t \in (\bar{t}, T]$.

Ora abbiamo invece:

$$\dot{p}_2 = \begin{cases} -a\,(1-b) & t \in (\bar{t}+\tau, T] \\ -a\,(1-c) & t \in \left[\hat{t}, \bar{t}+\tau\right] \end{cases}$$

Chiaramente $a(1-c) > a(1-b)$ e questo comporta $\hat{t} > \bar{t}$ (ed essendo $p_2\left(\hat{t}\right) = 1$).

Possiamo così sfruttare la (51) congiuntamente alla seguente osservazione: se i capitalisti cessano di accumulare all'istante $\hat{t} = \bar{t}+\tau'$ allora i lavoratori cambieranno politica (passeranno cioè dal consumo minimo a quello massimo) non più tardi di $\hat{t} = \bar{t}+\tau'$ (questo in quanto è sempre inefficiente, per i lavoratori, consumare al livello minimo quando i capitalisti non stanno investendo). Sfruttando tale risultato avremo, pertanto:

$$\tau'' = \frac{b-c}{1-c}\tau' = \left(\frac{b-c}{1-c}\right)^2 \tau \tag{52}$$

cioè, in generale:

$$\tau^{(n)} = \left(\frac{b-c}{1-c}\right)^n \tau \tag{53}$$

per cui chiaramente $\tau^{(n)} \to 0$ per $n \to \infty$ e quindi l'istante di tempo in cui i lavoratori ed i capitalisti passano, rispettivamente, dal consumo minimo a quello massimo e dall'accumulazione al consumo converge al medesimo valore $\bar{t}$, cioè il valore determinato dalla soluzione noncooperativa del modello.

## Riferimenti bibliografici


[1] Balducci R., Denicolò V.[1984], Quando i lavoratori risparmiano: sovraccumulazione del capitale ed eutanasia dei capitalisti. *Economia Politica*.

[2] Basar, T, Olsder G.J. [1995], *Dynamic noncooperative game theory*, seconda edizione, Academic Press.

[3] Başar T. (ed) [1986], *Dynamic games and applications in economics*, Springer Verlag.

[4] Başar T.[1986], A tutorial on dynamic and differential games, in T. Basar (ed) [1986].

[5] Basar T., Haurie A., Ricci G. [1985], On the dominance of capitalists leadership in a feedback Stackelberg solution of a differential game model of capitalism, *Journal of Economic Dynamics and Control*.

[6] Binmore K., Dasgupta P.[1987], *The economics of bargaining*, Basil Blackwell.

[7] Bishop R. [1963], Game theoretic analysis of bargaing, *Quarterly Journal of Economics*.

[8] Brock W., Haurie A. [1976], On existence of overtaking optimal trajectories over an infinite time horizon, *Mathematics of Operations Research*.

[9] Bryant R. et al, (eds) [1987], *Global macroeconomics*, Macmillan.

[10] Carlson D.A., Haurie A. [1987], *Infinite horizon optimal control*, Springer Verlag.

[11] Clemhout S., Wan H., Jr. [1974], A class of trilinear differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

[12] Dockner E. et al [1985], Tractable classes of non-zero sum open-loop Nash differential games: theory and examples, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

[13] , E. Dockner, G. Feichtinger [1991], On the optimality of limit cycles in dynamic economic systems, Journal of Economics.

[14] , Dockner E., Jorgensen S., Van Long N., Sorger G. [2000], *Differential games in economics and management science*, Cambridge University Press.

[15] Elster J.[1985], *Making sense of Marx*, Cambridge University Press.

[16] Feichtinger G. [1985], Differential games in management: an overview, *International Journal of Operations Research*.

[17] Feichtinger G.(ed), [1985], Optimal control theory and economic analysis, North Holland.

[18] Fershtman C. [1987], Alternative approaches to dynamic games, in R. Bryant et al. (eds), Global Macroeconomics, (1987).

[19] Halkin H. [1974], Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizon, *Econometrica*.

[20] Harsanyi J. [1977], *Rational behaviour and bargaining equilibrium in games and social situations*, Cambridge University Press.

[21] Haurie A., Leitmann G. [1984], On the global asymptotic stability of equilibrium solutions for open-loop differential games, *Large Scale Systems*.

[22] Haurie A., Pohjola M. [1987], Efficient equilibria in a differential game of capitalism, Journal of Economic Dynamics and Control.

[23] Hicks J. [1973], *Capital and time*, Clarendon Press.

[24] Hildenbrand W. (ed) [1985], *Advances in economic theory*, Cambridge University Press.

[25] Ho Y.C. [1970], Differential games, dynamic optimization and general control theory, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

[26] Hoel M.[1978], Distribution and growth as a differential game between workers and capitalists, *International Economic Review*.

[27] Hurwicz L. et al, (eds) [1985], *Social goals and social organization*, Cambridge University Press.

[28] Kalai E., [1985], Solutions to the bargaining problem, in L. Hurwicz et al (eds), [1985].

[29] Kydland F.-Prescott E., [1977], Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans; Journal of Political Economy.

[30] Laffont J.-Maskin E., [1985], The theory of incentives: an overview, in W. Hildenbrand (ed), [1985].

[31] Lancaster K., [1973], The dynamic inefficiency of capitalism, Journal of Political Economy.

[32] Liu P.T., [1973], Optimal threats strategies in differential games, Journal of Optimization Theory and Applications.

[33] Mehring P., [1986], A classical model of the class struggles: a game theoretic approach, Journal of Political Economy.

[34] Muthoo A. [1999], *Bargaining theory with applications*, Cambridge University Press.

[35] Pohjola M., [1983], Nash and Stackelberg solutions in a differential game model of capitalism, Journal of Economic Dynamics and Control.

[36] Pohjola M., [1984], Threats and bargaining in capitalism, Journal of Economic Dynamics and Control.

[37] Pohjola M., [1985], Growth, distribution and employment modelled as a differential game, in G. Feichtinger (ed), [1985].

[38] Pohjola M., [1986], Applications of dynamic game theroy to macroeconomics, in T. Basar (ed), [1986].

[39] Pohjola M., [1987], Differential games of capitalism: a survey, Mathematical Modelling.

[40] Roemer J., [1982], A general theory of exploitation and class, Harvard University Press.

[41] Roth A., [1979], Axiomatic models of bargaining, Springer Verlag.

[42] Seierstad A.-Sydsæter K., [1987], Optimal control theory with economic applications, North Holland.

[43] Selten R., [1975], Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, International Journal of Game Theory.

[44] Solow R., [1956], A contribution to the theory of economic growth, Quarterly Journal of Economics.

[45] Starr A.W.-Ho Y.C., [1969], Non-zero sum differential games, Journal of Optimization Theory and Applications.

[46] Starr A.W.-Ho Y.C., [1969], Further properties of non-zero sum differential games, Journal of Optimization Theory and Applications.

[47] Tolwinski B., [1982], A concept of cooperative equilibrium for dynamic games, Automatica.

[48] Weeks J., [1981], Capital and exploitation, Edward Arnold.

[49] Van Damme E., [1988], Stability and perfection of Nash equilibria, Springer Verlag.

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
DEPARTMENT OF ECONOMICS

Strada Maggiore 45
40125 Bologna - Italy
Tel. +39 051 2092604
Fax +39 051 2092664
http://www.dse.unibo.it