Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

Ottimizzazione economica delle dimensioni delle condotte fluidodinamiche.

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

OTTIMIZZAZIONE ECONOMICA DELLE DIMENSIONI DELLE CONDOTTE FLUIDODINAMICHE.

1 – GENERALITA'.

Nel dimensionamento di una linea fluidodinamica, nota la planimetria e la portata da elaborare, rimane un grado di libertà per la scelta del diametro della tubazione, (o della velocità del fluido).
Le velocità dei fluidi nelle condotte sono limitate inferiormente da possibilità di sedimentazione, alle basse velocità, di eventuali impurità presenti nei fluidi con conseguente diminuzione della sezione di passaggio fino alla ostruzione della luce, aumento delle perdite di carico, danni e malfunzionamenti agli accessori di linea con necessità di interventi di smontaggio e pulizia e superiormente da problemi di vibrazioni, rumorosità e abrasioni delle particelle in sospensione sulle condotte, alle alte velocità.
Nell'intervallo di accettabilità tecnica, tuttavia, il sistema è passibile di ottimizzazione economica. Infatti al variare del diametro delle tubazioni variano gli oneri di installazione delle condotte e, in funzione delle corrispondenti variazioni di perdite di carico, gli oneri di installazione ed esercizio dei gruppi di pompaggio.

2 – MODELLO DI CALCOLO.

Indicando con q_p e q_t i costi specifici del gruppo di pompaggio, (comprensivo delle macchine operatrici e dei motori di guida), per unità di potenza utile, (**P**), e delle condotte per unità di massa dei relativi materiali costruttivi, il costo totale di installazione del sistema, (**I**), risulta: $I = q_p P + q_t d_{st} V_t$, con d_{st} e V_t densità e volume del materiale costruttivo delle tubazioni, rispettivamente.
La potenza utile del gruppo di pompaggio, vale:

$$P(D) = Q \frac{Dp}{h_p} = \frac{8 k_a (1 + f_c) L}{h_p \pi^2 D^5 d_{sm}^2} G^3,$$

con:
- h_p rendimento globale del gruppo di pompaggio;
- D diametro della tubazione:
- k_a coefficiente di attrito fluidodinamico;
- f_c coefficiente maggiorativo per perdite concentrate;
- d_{sm} densità media del fluido;

L lunghezza della tubazione;
Q portata volumetrica del fluido;
G portata in massa del fluido.

Il volume del materiale costruttivo delle tubazioni risulta:

$$V_t = \pi(r_e^2 - r_i^2)L = \pi(r_e + r_i)(r_e - r_i)L \approx \pi DsL,$$

con: $s = (r_e - r_i)$, spessore della tubazione.

Lo spessore **s** di una tubazione dipende dal diametro della stessa secondo una relazione monomia del tipo: $s = kD^a$, con $a \sim 1/3$.

E' tuttavia possibile adottare una relazione lineare: $s = r_d D$, ponendo il rapporto spessore diametro: $r_d = k\,D^{-2/3} = r_d\,(D)$ = costante, una volta che sia stimato approssimativamente il diametro della tubazione.

Si ottiene, quindi: $V_t = \pi L r_d D^2$, da cui:

$$I(D) = \frac{q_p 8k_a(1 + f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2}\frac{1}{D^5} + q_t d_{st} \pi L r_d D^2.$$

Indicando con:

u fattore di carico di utilizzo del sistema;
T numero di unità di tempo a periodo rateale;
c_k costo specifico dell'energia impiegata per la guida del gruppo di pompaggio;
$1/t_{ek}$, $1/t_{em}$ fattori di annualità dell'energia impiegata e delle opere di gestione manutenzione, rispettivamente;
a frazione di costo impianto a periodo rateale per opere di gestione e manutenzione;

il costo totale attualizzato, (C_{ta}), del sistema risulta quindi:

$$C_{ta}(D) = \frac{P(D)uT}{t_{ek}}c_k + \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)I(D) =$$

$$= \frac{8k_a(1 + f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2}\frac{uTc_k}{t_{ek}}\frac{1}{D^5} +$$

$$+\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\left(\frac{q_p 8k_a(1 + f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2}\frac{1}{D^5} + q_t d_{st} \pi L r_d D^2\right) =$$

$$= \frac{8k_a(1 + f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2}\left[\frac{uTc_k}{t_{ek}} + q_p\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\right]\frac{1}{D^5} +$$

$$+\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)q_t d_{st} \pi L r_d D^2.$$

Posto: $\frac{dC_{ta}(D)}{dD} = \frac{uTc_k}{t_{ek}}\frac{dP(D)}{dD} + \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\frac{dI(D)}{dD} = 0$,

l'equazione di ottimizzazione economica risulta:

$$\pm\frac{40k_a(1 + f_c)LG^3}{h_p\pi^2 d_{sm}^2}\left[\frac{uTc_k}{t_{ek}} + q_p\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\right]\frac{1}{D^6} +$$

$$+2\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)q_t d_{st}\pi L r_d D = 0,$$

da cui il diametro economico della tubazione, ($\mathbf{D_{ec}}$):

$$D_{ec} = \sqrt[7]{20\left[\frac{uTc_k}{t_{ek}\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)} + q_p\right]\frac{k_a(1 + f_c)G^3}{q_t d_{st} r_d h_p d_{sm}^2\pi^3}}.$$

Nel caso più generale, la potenza del gruppo di pompaggio è comprensiva delle quote relative alla prevalenza geodetica, (o salto di quota): $\mathbf{Dp_g = gd_{sm}H_g}$, con $\mathbf{H_g}$ salto totale di quota agli estremi della tubazione, all'eventuale aumento di pressione richiesto dall'utenza, ($\mathbf{Dp_u}$), e a eventuali specifiche relative alla velocità di uscita, ($\mathbf{c_u}$), che si traducono in variazioni di pressione, ($\mathbf{Dp_c}$), a monte di un tratto finale di tubazione a sezione convergente o divergente che risulta:

$$\frac{Dp_c}{d_{sm}} = \frac{c_u^2 - c^2}{2} = \frac{8G^2}{d_{sm}^2\pi^2}\left(\frac{1}{D_u^4} - \frac{1}{D^4}\right), \quad \text{con:} \quad c_u \quad \text{e} \quad D_u = \sqrt{\frac{4G}{\pi d_{sm} c_u}},$$

velocità del fluido richiesta all'utenza e relativo diametro di sbocco.

Si ottiene, quindi: $P(D) = \frac{G}{h_p d_{sm}}(Dp + Dp_g + Dp_u + Dp_c)$;

$$\frac{dP(D)}{dD} = \frac{G}{h_p d_{sm}}\left(\frac{dDp(D)}{dD} + \frac{dDp_g}{dD} + \frac{dDp_u}{dD} + \frac{dDp_c(D)}{dD}\right) =$$

$$= \frac{G}{h_p d_{sm}}\left[-\frac{40k_a(1 + f_c)LG^2}{d_{sm}\pi^2}\frac{1}{D^6} + \frac{32G^2}{d_{sm}\pi^2}\frac{1}{D^5}\right],$$

essendo: $\frac{dDp_g}{dD} = \frac{dDp_u}{dD} = 0$.

L'equazione di ottimizzazione economica:

$$\frac{dC_{ta}(D)}{dD} = \frac{uTc_k}{t_{ek}}\frac{dP(D)}{dD} + \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\left[q_p\frac{dP(D)}{dD} + 2\pi q_t d_{st} r_d LD\right] = 0,$$

risulta, quindi:

$$\left\{\frac{40k_a(1+f_c)G^3}{h_p\pi^2 d_{sm}^2}\right\} - \left\{\frac{32G^3}{h_p\pi^2 d_{sm}^2 L}\right\}D = \left\{\frac{2\pi q_t d_{st} r_d}{q_p + \dfrac{uTc_k}{t_{ek}\left(1+\dfrac{a}{t_{em}}\right)}}\right\}D^7 =$$

$= c_1 - c_2D = c_3D^7$, la cui soluzione può essere rappresentata graficamente dall'intersezione della retta a primo membro con la polinomiale del settimo ordine a secondo, (**Fig. 1**).

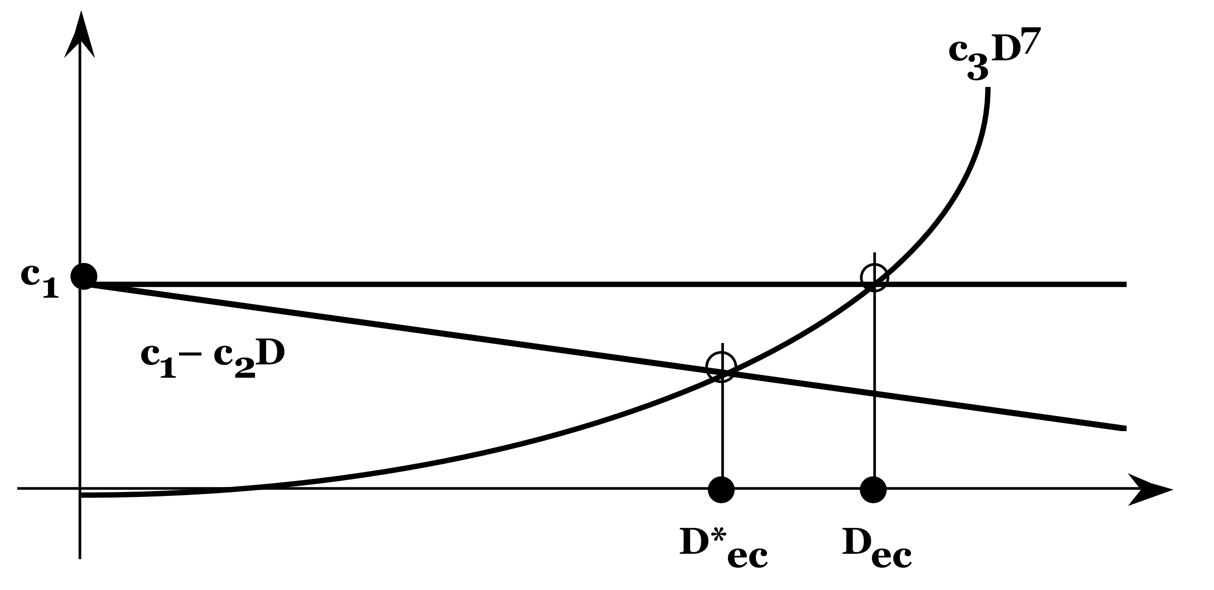

Fig. 1

In assenza del termine cinetico, ($Dp_c = 0$), si ha: $c_2 = 0$, e la retta diviene orizzontale, fornendo la soluzione D_{ec}.
Rispetto al caso in cui sia assente il termine cinetico, si ottiene, quindi, una diminuzione del diametro economico della tubazione.
Infatti nell'ottimizzazione economica che contrappone un termine inversamente proporzionale al diametro della condotta, ($1/D^5$), a uno proporzionale al diametro stesso, (D^2), si inserisce un termine ancora inversamente proporzionale al diametro, ma negativo, ($-1/D^4$), che sposta quindi il valore ottimo nella direzione di una sua crescita, ovvero a diametri inferiori, (per $c_u > c$, nel tratto finale è richiesto un aumento di pressione per cui il termine cinetico, che deve risultare positivo, vale:

$$\frac{\mathbf{Dp_c}}{\mathbf{d_{sm}}} = \frac{\mathbf{c_u^2 - c^2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{8G^2}}{\mathbf{d_{sm}^2 \pi^2}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{D_u^4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{D^4}} \right) > \mathbf{0},$$

essendo: $\mathbf{D_u < D}$, mentre per per $\mathbf{c_u < c}$, nel tratto finale è richiesta una diminuzione di pressione per cui il termine cinetico, che deve risultare negativo, è ancora pari a:

$$\frac{\mathbf{Dp_c}}{\mathbf{d_{sm}}} = \frac{\mathbf{c_u^2 - c^2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{8G^2}}{\mathbf{d_{sm}^2 \pi^2}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{D_u^4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{D^4}} \right) < \mathbf{0},$$

essendo in tal caso: $\mathbf{D_u > D}$).

****