Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

Dimensionamento economico dell'isolamento termico.

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

DIMENSIONAMENTO ECONOMICO DELL'ISOLAMENTO TERMICO.

1 – GEOMETRIA PIANA.

Attraverso una superficie piana unitaria che separa due ambienti fra i quali si ha un salto di temperatura **DT**, la potenza termica trasmessa, vale: $\mathbf{DT/R_t}$, (con $\mathbf{R_t}$ resistenza termica per unità di superficie), e pertanto, detto **u** il coefficiente di utilizzazione degli impianti termici o frigoriferi, l'energia termica, ($\mathbf{Q_a}$), trasmessa a periodo di tempo di riferimento, (**T**), vale: $\mathbf{Q_a = uT\,DT/R_t}$.

In caso di un impianto di riscaldamento, il costo specifico dell'energia termica, ($\mathbf{c_q}$), limitando l'analisi del costo ai soli oneri di esercizio, vale:

$$c_q = c_c/(k_i h_g),$$

con:
- $\mathbf{c_c}$ costo specifico del combustibile impiegato;
- $\mathbf{k_i}$ potere calorifico del combustibile impiegato;
- $\mathbf{h_g}$ rendimento del generatore di calore.

In caso di un impianto frigorifero, si ha: $\mathbf{c_q = c_k/COP}$, con:
- $\mathbf{c_k}$ costo specifico dell'energia elettrica;
- **COP** coefficiente di effetto frigorifero.

Indicando con **s** lo spessore dell'isolante, il costo di installazione per unità di superficie, [**I(s)**], può esprimersi come: $\mathbf{I(s) = c_o + c_i\, s}$,

con:
- $\mathbf{c_o}$ costo fisso di installazione a unità di superficie;
- $\mathbf{c_i}$ costo a unità di volume dell'isolante.

La resistenza termica totale della parete vale: $\mathbf{R_t = R_o + s/c_{ti}}$, con:

$$R_o = \frac{1}{c_{si}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{mi}}{c_{tmi}} + \frac{1}{c_{se}},$$

resistenza termica della parete non isolata, $\mathbf{c_{ti}}$ conducibilità termica dell'isolante e $\mathbf{c_{tmi}}$, $\mathbf{s_{mi}}$ conducibilità termica e spessore dell'**i**esimo strato resistivo della parete.

Il costo totale attualizzato del sistema impianto di riscaldamento/ frigorifero più isolamento termico, ($\mathbf{C_{ta}}$), risulta quindi:

$$C_{ta}(s) = Q_a \frac{c_q}{t_{eq}} + I(s) = \frac{uT\,DT}{R_t} \frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i s =$$

$$= \frac{uT\,DT}{R_o + \dfrac{s}{c_{ti}}}\frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i s.$$

Posto: $dC_{ta}(s)/ds = 0$, si ottiene: $\dfrac{\left(R_o + \dfrac{s}{c_{ti}}\right)^2 c_i c_{ti}}{DT\,uTc_q} = \dfrac{1}{t_{eq}}$,

la cui radice risulta lo spessore economico dell'isolante termico, (s_{ec}):

$$s_{ec} = \sqrt{DTc_{ti}c_q \frac{uT}{c_i t_{eq}}} - c_{ti}R_o.$$

Il costo c_o non appare nella relazione, risultando analiticamente una costante in un processo di derivazione e in sostanza essendo l'ipotesi di installare comunque un isolante di un qualche spessore e di dovere, quindi, in ogni caso sostenere l'onere c_o.

La funzione: $C_{ta} = C_{ta}(s)$, tende al valore finito: $DTc_q uT/(R_o t_{eq}) + c_o$, per s che tende a zero e all'asintoto: $c_o + c_i s$, per s che tende all'infinito, presentando, (analiticamente), due estremanti per:

$$s = \pm\sqrt{DTc_{ti}c_q \frac{uT}{c_i t_{eq}}} - c_{ti}R_o,$$

di cui il maggiore: $$s = \sqrt{DTc_{ti}c_q \frac{uT}{c_i t_{eq}}} - c_{ti}R_o,$$

necessariamente un minimo essendo positiva la pendenza dell'asintoto.

In pratica è pertanto sufficiente, verificare che lo spessore economico dell'isolante abbia senso fisico, ($s_{ec} > 0$).

Il valore della resistenza R_o limite di convenienza economica all'isolamento, (R_o*), si ottiene ponendo: $s_{ec} = 0$ e risulta:

$$R_o^* = \sqrt{\frac{DTc_q uT}{c_{ti}c_i t_{eq}}}.$$

Generalmente la geometria piana si riferisce a impianti termici o frigoriferi in cui la potenza installata dipende dall'entità dell'isolamento, pertanto anche il costo di investimento dell'impianto risulta variabile in funzione dell'isolamento.

Nel caso in cui la potenza installata dell'impianto, (Q), sia pari, (o proporzionale), alla potenza termica trasmessa da o verso l'esterno, si ha: $Q = DT\ S/R_t$, con S e R_t superficie totale di trasmissione e resistenza termica totale equivalenti del sistema: $\frac{S}{R_t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{R_{ti}}$, con S_i **i**esima superficie di trasmissione di resistenza termica globale R_{ti}.

Indicando con **q** il costo a unità di potenza dell'impianto, il relativo onere di installazione per unità di superficie di trasmissione, vale:

$$q\frac{Q}{S} = q\frac{DT}{R_t}.$$

Il costo specifico totale di impianto, (comprensivo dell'isolamento), risulta dunque: $I(s) = c_o + c_i s + q\frac{DT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}}$.

Il costo totale attualizzato del sistema, (C_{ta}), risulta quindi:

$$C_{ta}(s) = \frac{uT\,DT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}}\frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i s + \frac{qDT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}}.$$

Posto: $dC_{ta}(s)/ds = 0$, si ottiene lo spessore economico dell'isolante termico, (s_{ec}), pari a: $s_{ec} = \sqrt{\frac{DTc_{ti}}{c_i}\left(q + \frac{uTc_q}{t_{eq}}\right)} - c_{ti}R_o$, per il quale occorre la medesima verifica di positività.

Il valore della resistenza R_o limite di convenienza economica all'isolamento, (R_o*), si ottiene ponendo: $s_{ec} = 0$ e risulta:

$$R_o^* = \sqrt{\frac{DT}{c_i c_{ti}}\left(q + \frac{uTc_q}{t_{eq}}\right)}.$$

Per considerare anche eventuali oneri gestionali, (proporzionali al costo di installazione), è sufficiente inserire a fattore del costo **q** il termine: $(1 + a/t_{em})$.

Per gli impianti di riscaldamento civili o industriali la potenza installata risulta pari a: $Q = f_a SDT/R_t$, con f_a coefficiente correttivo di sicurezza, ($f_a > 1$), per attenuazione, intermittenza avviamento ed esposizione, mentre l'energia termica dispersa a periodo, (annuo), di valutazione vale: $Q_a = f_g SGG/R_t$, con **GG** numero di gradi–giorno della zona.

Il costo totale attualizzato in funzione dello spessore dell'isolante termico del sistema, vale quindi:

$$C_{ta}(s) = \frac{qf_a SDT}{R_t(s)} + c_o + c_i Ss + \frac{f_g SGGc_q}{t_{eq}R_t(s)},$$

e quindi lo spessore economico dell'isolante termico, (s_{ec}), si ottiene come radice dell'equazione:

$$\frac{dC_{ta}(s)}{ds} = c_i - \frac{\left(qf_aDT + \frac{f_gGGc_q}{t_{eq}}\right)}{R_t^2(s)} \frac{dR_t(s)}{ds} = 0,$$

da cui: $$s_{ec} = \sqrt{\left(qf_aDT + \frac{f_gGGc_q}{t_{eq}}\right)\frac{c_{ti}}{c_i}} - c_{ti}R_o.$$

2 – GEOMETRIA CILINDRICA.

In geometria cilindrica l'energia termica trasmessa per unità di lunghezza di corpo cilindrico a periodo di riferimento, risulta:

$$Q_a = uT\ DT/R_t(r),$$

con: $$R_t(r) = \frac{1}{2\pi c_{se}r} + \frac{\ln\frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}} + \frac{\ln\frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{si}r_i},$$

mentre il costo di installazione dell'isolamento per unità di lunghezza di corpo cilindrico, vale: $I(r) = c_o + c_i\,\pi\,(r^2 - r_e^2)$.

Il costo totale attualizzato del sistema, (C_{ta}), vale, quindi:

$$C_{ta}(r) = \frac{uT\,DT}{R_t(r)}\frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i\pi\left(r^2 - r_e^2\right).$$

L'equazione di ottimizzazione economica, [$dC_{ta}(r)/dr = 0$], per il calcolo della radice r_{ec}, e quindi dello spessore economico di isolante: $s_{ec} = r_{ec} - r_e$, risulta quindi:

$$\frac{dC_{ta}(r)}{dr} = -\frac{uT\,DTc_q}{t_{eq}R_t^2(r)}\frac{dR_t(r)}{dr} + 2\pi c_i r =$$

$$= -\frac{uT\,DTc_q}{t_{eq}R_t^2(r)}\left(\frac{1}{2\pi c_{ti}r} - \frac{1}{2\pi c_{se}r^2}\right) + 2\pi c_i r = 0,$$

ovvero: $$\frac{r^3R_t^2(r)}{c_{se}r - c_{ti}} = \frac{uT\,DTc_q}{4\pi^2 t_{eq}c_ic_{ti}c_{se}},$$

delle cui soluzioni occorre verificare il senso fisico, ($r_{ec} > r_e$), e che risulti: $C_{ta}(r_{ec}) < C_{ta}(r_e) = DTc_quT/(R_ot_{eq})$, altrimenti non conviene, (economicamente), isolare la tubazione.

Il valore della resistenza termica del corpo cilindrico non isolato:

$\mathbf{R_o = \dfrac{1}{2\pi c_{se} r_e} + \dfrac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \dfrac{1}{2\pi c_{si} r_i}}$, limite di convenienza economica all'isolamento, ($\mathbf{R_o}$*), si ottiene imponendo che per tale valore della variabile, ($\mathbf{r = r_e}$, $\mathbf{s_{ec} = 0}$), l'equazione di ottimizzazione economica sia

verificata, ovvero: $$\frac{r_e^3 R_t^2(r_e)}{c_{se} r_e - c_{ti}} = \frac{uT\,DTc_q}{4\pi^2 t_{eq} c_i c_{ti} c_{se}},$$

da cui: $$R_o^* = \sqrt{\frac{(c_{se} r_e - c_{ti})DT\,uTc_q}{4\pi^2 r_e^3 c_i c_{se} c_{ti} t_{eq}}}.$$

Per $\mathbf{r_e \le c_{ti}/c_{se}}$, (raggio critico), $\mathbf{R_o}$* risulta nulla o immaginaria in quanto non conviene mai isolare.

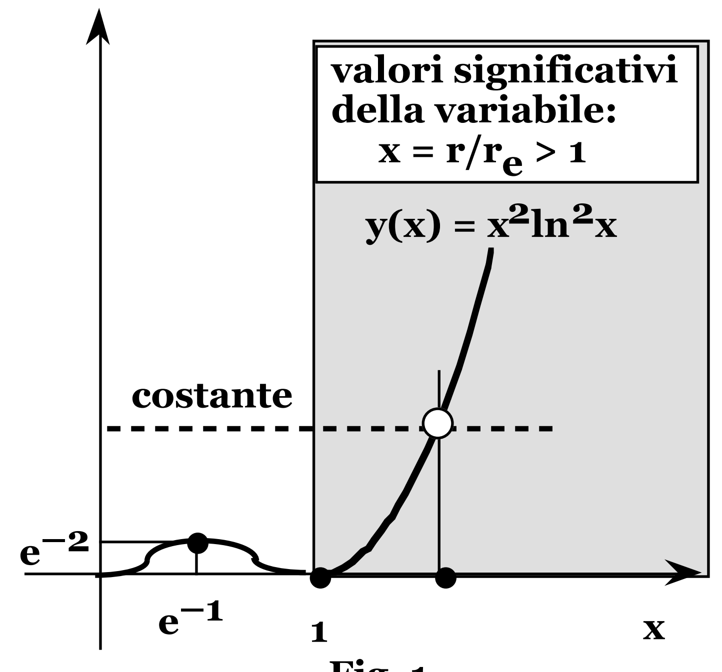

Fig. 1

Qualora sia lecito trascurare la resistenza della parete nuda rispetto a quella dell'isolante, (eventualmente maggiorata di un fattore correttivo

$k_n > 1$), ovvero porre: $R_t(r) = k_n \dfrac{\ln \dfrac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}}$, le relazioni risultano:

$$C_{ta}(r) = \frac{uTDTc_q}{t_{eq}k_n}\frac{2\pi c_{ti}}{\ln \dfrac{r}{r_e}} + c_o + c_i\pi(r^2 - r_e^2);$$

$$\frac{dC_{ta}(r)}{dr} = -\frac{2\pi c_{ti}uTDTc_q}{t_{eq}k_n}\frac{1}{r\ln^2\left(\dfrac{r}{r_e}\right)} + 2c_i\pi r,$$

che posta uguale a zero risulta: $\left(\dfrac{r}{r_e}\right)^2 \ln^2\left(\dfrac{r}{r_e}\right) = \dfrac{uTDTc_qc_{ti}}{k_n\, t_{eq}c_ir_e^2}$, ovvero

un'equazione adimensionale del tipo: $x^2 \ln^2 x =$ costante, (**Fig. 1**), che ammette una e una sola soluzione significativa, ($x_{ec} = r_{ec}/r_e > 1$), in ogni caso in quanto in assenza di isolamento, l'ipotesi di trascurare la resistenza termica della parete nuda, comporta un costo totale attualizzato illimitato.

Determinato il valore dello spessore economico dell'isolamento termico, è possibile verificare la correttezza del valore assegnato al coefficiente:

$$k_n = \frac{R_o + \dfrac{\ln \dfrac{r_{ec}}{r_e}}{2\pi c_{ti}}}{\dfrac{\ln \dfrac{r_{ec}}{r_e}}{2\pi c_{ti}}} = 1 + \frac{2\pi c_{ti}R_o}{\ln \dfrac{r_{ec}}{r_e}},$$ e ripetere il calcolo in maniera iterativa fino alla convergenza del procedimento.

Generalmente la geometria cilindrica si riferisce a condotte di convogliamento di fluidi con dispersioni termiche comunque ridotte rispetto a quelle relative agli ambienti riscaldati, (o refrigerati), e agli altri contributi di scambio termico, per cui la potenza installata non risente sensiblmente dell'entità di tale isolamento e di conseguenza il relativo costo di impianto non compare nelle valutazioni di ottimizzazione economica.

A ottimizzazione effettuata, occorre verificare che lo spessore economico dell'isolante sia in grado di evitare fenomeni di saturazione del fluido, o di stillicidio dell'aria: in caso contrario la scelta di isolamento risulta il suddetto limite tecnico.

****