Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

Frazionamento economico dei sistemi.

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

FRAZIONAMENTO ECONOMICO DEI SISTEMI.

1 – FRAZIONAMENTO ECONOMICO DELLA POTENZIALITA' DEI SISTEMI.

Un sistema di assegnata potenzialità complessiva può tecnicamente essere suddiviso arbitrariamente, (nei limiti commerciali costruttivi), in più unità di potenzialità totale pari a quella complessiva richiesta.
La scelta del grado di frazionamento ovvero del valore della potenzialità del singolo modulo a meno di strategie di manutenzione programmata e funzionamento parziale in caso di avarie, risulta economica.
Considerando, infatti, la relazione generale: $\mathbf{I_o = f(P)}$, con la quale è possibile esprimere il costo di investimento $\mathbf{I_o}$ in funzione della potenzialità produttiva in beni o servizi $\mathbf{P}$, (intesa come fattore quantitativo caratterizzante le prestazioni, le capacità produttive, o una qualche dimensione caratteristica di un'apparecchiatura, un impianto, o un qualunque sistema), il costo specifico medio riferito alla potenzialità, vale: $\mathbf{I_m = I_o/P = f(P)/P}$.
Per minimizzare la funzione: $\mathbf{I_o = f(P)}$, non è possibile porre:
$\mathbf{df(P)/dP = 0}$, in quanto la potenzialità installata è fissata e la soluzione risulterebbe comunque: $\mathbf{P = 0}$, (il costo è chiaramente crescente con la potenzialità), mentre esprimendo il costo totale come: $\mathbf{I_o = I_m(P)P}$, le radici dell'equazione: $\dfrac{d I_m(P)}{dP} = \dfrac{P\dfrac{d f(P)}{dP} - f(P)}{P^2} = 0$, relative a condizioni di minimo della funzione, rappresentano punti di convergenza economica per la potenzialità dei moduli, ovvero condizioni ottimali di frazionamento, fra le quali l'estremante di minimo assoluto, ($\mathbf{P_{ne}}$), rappresenta la potenzialità di frazionamento di massima economia.
Dalla relazione: $\mathbf{dI_m(P)/dP = 0}$, si ottiene: $\mathbf{f(P)/P = df(P)/dP = I_M}$, con $\mathbf{I_M}$ "costo marginale" del sistema, ovvero incremento di costo totale per aumento unitario della potenzialità a partire dal generico valore $\mathbf{P}$.
Per sistemi aventi potenzialità comprese nell'intervallo costruttivo a tecnologia provata e produzione di serie, i costi di singole apparecchiature, componenti di impianto e impianti completi, risultano dipendenti dalla relativa potenzialità secondo una relazione monomia,

(detta legge delle economie di scala, esprimibile come: $\frac{I_o}{I_r} = \left(\frac{P}{P_r}\right)^b$, essendo: I_r e P_r il costo impianto e la relativa potenzialità di riferimento e **b** un coefficiente, (detto fattore di scala), inferiore all'unità e comunemente pari a: $b = 0{,}6 \div 0{,}9$.
Posto: $q = I_r/P_r^b$, si ottiene, quindi: $I_o = f(P) = qP^b$.
In tal caso si ha: $I_m = f(P)/P = qP^{(b-1)}$ e la relazione di ottimizzazione economica: $dI_m(P)/dP = 0$, risulta allora: $q(b - 1)P^{(b-2)} = 0$, che appare verificata solo per $b = 1$ e in tal caso, (essendo i costi lineari con la potenzialità), per qualunque valore della potenzialità stessa e quindi del grado di frazionamento.
Per $b \neq 1$, (nell'ipotesi che i coefficienti **q** e **b** siano costanti al variare della taglia del sistema), si ha: $dI_m(P)/dP > 0$, per $b > 1$ e $dI_m(P)/dP < 0$ per $b < 1$ e poichè nel campo delle economie di scala risulta: $b < 1$, appare conveniente la realizzazione di sistemi concentrati.
In pratica esiste in generale un intervallo della variabile in cui la curva dei costi presenta una concavità negativa in cui vale la legge delle economie di scala, con $b < 1$, mentre al di fuori dell'intervallo delle economie di scala si entra nella zona delle diseconomie, ovvero in quel campo di valori di potenzialità per i quali l'assenza di produzione di serie e le particolarità dei sistemi, rendono necessarie tecnologie, macchinari e cicli di lavorazione generalmente più complessi e quindi costosi e in cui la curva presenta una concavità positiva.
La condizione $dI_m(P)/dP > 0$, corrisponde a una zona in cui si ha: $f(P)/P > df(P)/dP$, ovvero costo medio maggiore di quello marginale per cui conviene il frazionamento e viceversa la condizione $dI_m(P)/dP < 0$, corrisponde a: $f(P)/P < df(P)/dP$, ovvero costo medio minore di quello marginale per cui conviene la centralizzazione.
I valori della potenzialità di minimo costo specifico radici dell'equazione $dI_m(P)/dP = 0$, fra cui l'estremante di minimo assoluto, (P_{ne}), costituiscono, cioè, i limiti fra le due zone.
Infatti essendo all'interno dell'intervallo delle economie di scala $I_m(P)$ decrescente all'aumentare della potenzialità **P**, si ha: $dI_m(P)/dP < 0$, da cui: $I_m = f(P)/P > df(P)/dP = I_M$, ovvero costo marginale inferiore al costo specifico a indicare che un aumento di potenzialità ne comporta la diminuzione e quindi la non convenienza al frazionamento ma alla concentrazione e in tale campo è determinabile un esponente $b < 1$, tale

che si possa ritenere valida le legge delle economie di scala nella forma: $\mathbf{I_o = f(P) = qP^b}$.

Oltre tale zona al contrario, si ha: $\mathbf{I_M > I_m}$, a indicare la non convenienza ad aumenti di potenzialità e quindi la convenienza al frazionamento.

La funzione: $\mathbf{I_m(P) = f(P)/P}$ può anche essere pensata come rapporto fra i costi reali in funzione della potenzialità, [**f(P)**], e la legge di proporzionalità diretta, (**P**), ovvero di ininfluenza della taglia sul costo specifico di impianto.

Pertanto nell'intervallo di valori positivi della pendenza di detta funzione, [$\mathbf{dI_m(P)/dP > 0}$], la funzione costi, [**f(P)**], all'aumentare della potenzialità cresce più rapidamente della curva di proporzionalità diretta, (**P**), e risulta quindi conveniente il frazionamento e viceversa nella regione in cui si ha $\mathbf{dI_m(P)/dP < 0}$, ove risulta economicamente conveniente la centralizzazione della taglia.

Si conclude, pertanto, che la massima economia nei costi specifici si ha per il massimo valore di potenzialità compreso nella zona delle economie di scala, per cui il frazionamento appare conveniente solo se sposta la potenzialità del singolo modulo verso tale valore.

Considerando tutto il campo dei possibili valori della potenzialità, è possibile esprimere la funzione **f(P)** con una polinomiale del **3**° ordine:

$$\mathbf{f(P) = aP^3 + bP^2 + cP + d},$$

da cui:

$$\mathbf{I_m = f(P)/P = aP^2 + bP + c + d/P};$$

$$\mathbf{I_M = df(P)/dP = 3aP^2 + 2bP + c}.$$

La polinomiale del **3**° ordine, (**Fig.1**), presenta due estremanti per:

$$\mathbf{P = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \pm 3ac}}{3a}}, \ [\mathbf{df(P)/dP = 0}]$$

e un flesso, [$\mathbf{d^2f(P)/dP^2 = 0}$], per: $\mathbf{P = -\,b/3a}$.

Nell'ipotesi che sia verificata la legge delle economie di scala, ovvero che esista un livello di frazionamento economico in un intervallo significativo della variabile, ($\mathbf{P > 0}$), la concavità della curva deve cambiare segno nel semipiano positivo delle potenzialità e quindi la derivata **df(P)/dP** deve presentare un minimo, (corrispìondente al flesso della funzione, ovvero al costo marginale minimo radice dell'equazione: $\mathbf{\frac{d^2f(P)}{dP^2} = 0}$), per $\mathbf{P > 0}$ e almeno uno degli estremanti è quindi relativo a potenzialità positive.

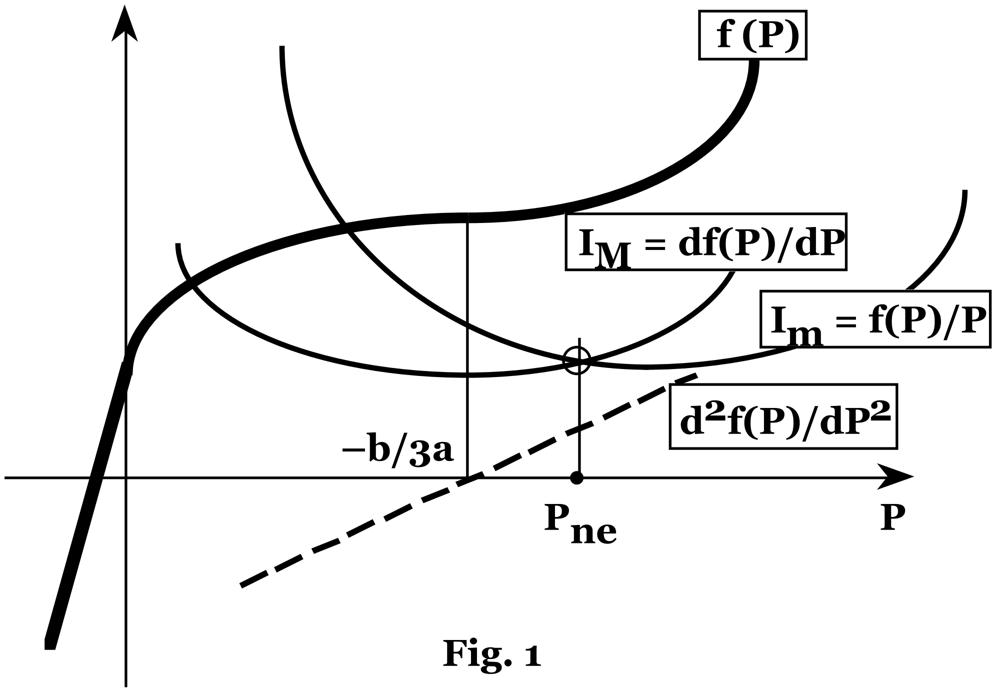

Fig. 1

Essendo, inoltre **a > 0**, (costo tendente a infinito per potenzialità infinita), con flesso, (**P = – b/3a**), per potenzialità positive, si ha: **b < 0**.
Tuttavia la funzione costi nel campo dei valori significativi della variabile, (**P > 0**), è necessariamente monotona crescente, [**df(P)/dP > 0 ∀ P > 0**], per cui le radici dell'equazione: **df(P)/dP = 0**, devono risultare immaginarie, ($b^2 - 3ac < 0$), con condizione limite di flesso orizzontale: $\frac{df(P)}{dP}\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0$, da cui si ottiene appunto la condizione: $b^2 - 3ac = 0$, con quindi: **c > 0** e infine: **d > 0**, (costo estrapolato a potenzialità zero).
La relazione per il calcolo della potenzialità di minimo costo specifico, ($dI_m(P)/dP = 0$, ovvero: $I_m = I_M$), risulta in tal caso:
$2aP^3 + bP^2 - d = 0$, con assenza del termine lineare, ininfluente sull'economia del frazionamento.
Delle tre, (in accordo con il teorema fondamentale dell'algebra), soluzioni dell'equazione solo una risulta significativa.
Infatti l'annullamento della derivata della funzione: $I_m = I_m(P)$:
$dI_m(P)/dP = 2aP + b - d/P^2 = 0$, che può essere visualizzato graficamente, (**Fig. 2**), come intersezione delle curve: **2aP + b** e d/P^2, mostra come nell'ipotesi di esistenza di una zona di economia di scala, ovvero col segno dei coefficienti determinato, si abbia comunque una e una sola soluzione relativa a valori positivi della potenzialità **P**, che

risulta un minimo della funzione $\mathbf{I_m(P)}$ e quindi soluzione significativa del frazionamento economico, mentre le altre due sono immaginarie.

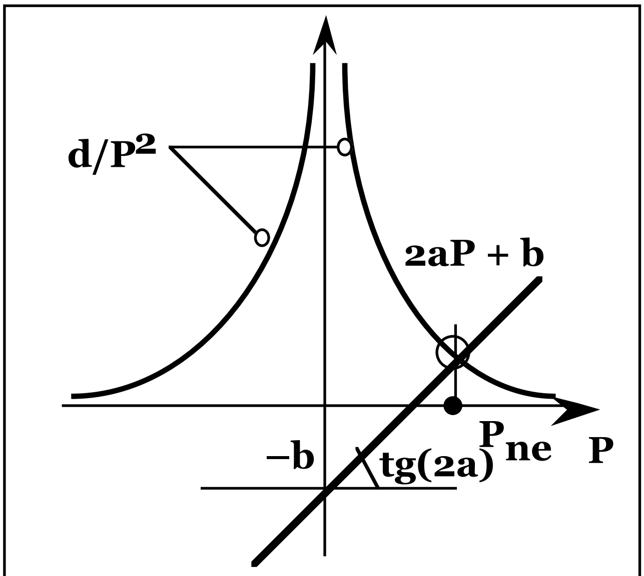

Fig. 2

Determinata la soluzione significativa di tale equazione, ($\mathbf{P_{ne}}$), che costituisce il limite della legge delle economie di scala, si ottiene, pertanto, il grado economico di frazionamento, ($\mathbf{n_e}$): $\mathbf{n_e = P_o/P_{ne}}$, con $\mathbf{P_o}$ potenzialità complessiva richiesta al sistema.

2 – ESEMPI DI APPLICAZIONE NUMERICA.

Si consideri un sistema il cui costo globale, (in unità arbitrarie), in funzione della potenzialità: $\mathbf{I_o = I_o(P)}$, risulti:

$$\mathbf{I_o(P) = 0{,}01\ P^3 - 0{,}1\ P^2 + 0{,}5\ P + 3}.$$

La funzione non può ammettere evidentemente estremanti significativi e infatti le radici della sua derivata:

$$\mathbf{I_M(P) = dI_o(P)/dP = 0{,}03\ P^2 - 0{,}2\ P + 0{,}5},$$

risultano immaginarie, ($\mathbf{P = 3{,}33 \pm 2{,}357\ i}$).

La derivata seconda della funzione: $\mathbf{d^2I_o(P)/dP^2 = 0{,}06\ P - 0{,}2}$, si annulla in un unico punto di flesso della funzione, per: $\mathbf{P = 3{,}33}$, risultando negativa per valori inferiori della potenzialità e positiva per valori maggiori.

Il costo specifico, risulta: $\mathbf{I_m = I_o(P)/P = 0{,}01\ P^2 - 0{,}1\ P + 0{,}5 + 3/x}$.

Posta la condizione di ottimizzazione: $\mathbf{dI_m(P)/dP = 0}$, ovvero: $\mathbf{I_m = I_M}$, si ottiene: $\mathbf{0{,}02\ P^3 - 0{,}1\ P^2 - 3 = 0}$, la cui soluzione significativa risulta:

$\mathbf{P_{ne} = 7{,}5982}$, arrotondata al valore commerciale: $\mathbf{P_{ne} = 7{,}5}$.

Posta la potenzialità globale pari a: $\mathbf{P_{tot} = 15}$, (ancora in unità arbitrarie), il costo per il sistema monoblocco risulta: $\mathbf{I_o(15) = 21{,}75}$, mentre per suddivisione in $\mathbf{P_{tot}/P_{ne} = 2}$ moduli, il sistema ha un costo pari a: $\mathbf{2 \times I_o(7{,}5) = 10{,}6875}$.

Un'ulteriore suddvisione comporta, invece, un aggravio dei costi, risultando ad esempio per quattro moduli: $\mathbf{4 \times I_o(3{,}75) = 15{,}98}$.

****