

Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

***Dipartimento di Ingegneria Industriale***

---

**Marco Gentilini**

**Ottimizzazione economica di schemi di generatori  
MHD.**

---

Quaderni del Dipartimento

## **OTTIMIZZAZIONE ECONOMICA DI SCHEMI DI GENERATORI MHD.**

**1 - GENERALITA'.** Nella generazione convenzionale di energia elettrica, l'energia chimica, (o nucleare), di combustibili viene trasformata in energia termica primaria tramite l'innesco delle relative reazioni.

L'energia termica viene ceduta a un fluido che, per aumento delle sue caratteristiche termodinamiche, (fluido potenziale), genera energia meccanica espandendosi in macchine motrici.

L'energia meccanica applicata al moto di corpi conduttori in campi magnetici, tramite interazione elettromagnetica con produzione di correnti indotte, viene quindi convertita in forza elettromotrice che applicata a un carico esterno genera potenza elettrica utile, ovvero in energia elettrica.

La doppia trasformazione energetica, (termica – meccanica– elettrica), può realizzarsi con un fenomeno globale di conversione diretta di energia termica in energia elettrica, in sistemi magnetofluidodinamici, (**MHD**), in cui un fluido dotato di cariche elettriche libere di muoversi e a sufficienti valori di conducibilità, viene accelerato tramite espansione in ugelli opportunamente dimensionati a seconda del regime dinamico richiesto, e quindi fluisce in una regione in cui è presente un campo magnetico realizzando una separazione di cariche raccolte da elettrodi realizzati nel condotto **MHD**, ovvero la conversione di entalpia del fluido in energia elettrica.

Non si tratta quindi, di sistemi di conversione termodinamicamente diversi da quelli a fluido, ma di un generatore che assume sia la funzione di motrice meccanica che di generatore elettrico con sistemi statici, per i cui materiali costruttivi, sottoposti a minori sollecitazioni e più facilmente refrigerabili, è possibile a pari tecnologia, una più ampia scelta e conseguentemente un aumento delle temperature di picco dei cicli rispetto agli schemi convenzionali, ovvero rendimenti globali di conversione potenzialmente maggiori.

Per i fluidi impiegati sono richiesti sufficienti valori di conducibilità elettrica e pertanto il campo risulta limitato ai metalli liquidi e ai gas ionizzati, ovvero a temperatura non inferiore a circa **2.000 K**, (plasma).

Il ciclo termodinamico può essere sia a gas, (Brayton), che a vapore, (Rankine).

Il ciclo a vapore, tuttavia per ragioni di conducibilità, richiede l'impiego di metalli liquidi i quali risultano chimicamente fortemente aggressivi ed inoltre i parametri ottimali per un buon rendimento del ciclo

termodinamico non sono compatibili con quelli richiesti per il corrispondente rendimento di conversione **MHD**.

In un ciclo a vapore di sufficiente rendimento infatti, la pressione e la temperatura del fluido durante l'espansione diminuiscono rapidamente con conseguente riduzione della conducibilità del gas e quindi del rendimento di conversione **MHD**.

All'opposto in un ciclo a gas nel quale con aggiunta di piccole frazioni di metalli alcalini si ottengono comunque sufficienti valori di conducibilità, i limitati salti di temperatura e pressione richiesti lungo il condotto **MHD** per mantenere sufficienti valori di conducibilità elettrica del plasma, sono pure ottimali per i massimi livelli di efficienza termodinamica, per cui il ciclo a gas appare il più indicato per la conversione **MHD**.

I generatori **MHD** possono essere alimentati da una qualunque sorgente termica in grado di fornire un gas, (a meno dell'aggiunta di additivi), a sufficiente temperatura, ( $\geq 2.000 \text{ K}$ ).

I generatori **MHD** a plasma si distinguono in sistemi a ciclo aperto, con plasmi ottenuti direttamente come prodotti di combustione a perdere, e in ciclo chiuso, in cui il plasma di un gas inerte, (elio, argon), descrive il ciclo con scambio termico attraverso scambiatori a superficie.

I gas devono presentare un grado di ionizzazione che porti a sufficienti valori di conducibilità. Si realizzano quindi, cicli alle massime temperature tecnologicamente accettabili e si disperdono nel plasma piccole percentuali, ( $\sim 2\%$  in massa), di materiali facilmente ionizzabili, (metalli alcalini: potassio, cesio).

Nel ciclo chiuso il fluido motore riceve calore in uno scambiatore a superficie, si espande nel condotto **MHD**, alimenta eventuali caldaie o generatori secondari, quindi cede il calore di scarto all'esterno in un secondo scambiatore a superficie completando il ciclo.

In tali schemi è possibile una qualunque scelta del fluido di lavoro, in base alle migliori caratteristiche elettrodinamiche e termodinamiche, (mobilità elettronica, attitudine alla ionizzazione, proprietà di scambio termico, minima aggressività chimica), ma è richiesto l'impiego di scambiatori di calore ad alta temperatura.

Le temperature di combustione risultano di  $2.000 \div 2.300 \text{ K}$ , mentre con l'additivazione di metalli alcalini, (potassio, cesio), si ottengono conducibilità di  $50 \div 200 \text{ S/m}$ .

Negli schemi di funzionamento in ciclo aperto, il plasma viene prodotto per combustione diretta in aria e, dopo l'additivazione, l'espansione nel condotto **MHD**, l'alimentazione di caldaie secondarie e il recupero dell'additivo, i fumi vengono dispersi all'esterno.

La minore conducibilità dei gas, (di combustione), impiegati, (**5 ÷ 10 S/m**), impone maggiori temperature di combustione, (**2.800 ÷ 3.000 K**), ottenute tramite preriscaldamento del combustibile e dell'aria di alimento, e arricchimento in ossigeno dell'aria di combustione.

Le temperature di uscita risultano di **2.200 ÷ 2.400 K**, le pressioni, rispettivamente di ingresso e uscita dal generatore, risultano di **9 ÷ 10** e **1,2 ÷ 2 bar**, mentre le temperature di preriscaldamento dell'aria giungono a **1.750 K** e del combustibile a **800 K**.

L'arricchimento in ossigeno dell'aria risulta pari al **30 ÷ 40%** in massa.

L'impiego di un fluido allo stato liquido in un generatore **MHD**, comporta un aumento di conducibilità rispetto ai fluidi allo stato gassoso o di vapore, di un fattore dell'ordine di **10<sup>6</sup>**.

I metalli liquidi risultano i materiali più indicati e particolarmente attraente appare l'accoppiamento con i reattori nucleari veloci refrigerati a metallo liquido.

Tuttavia, poichè il generatore **MHD** converte l'energia cinetica di un fluido conduttore in moto, in energia elettrica, la difficoltà di conversione dell'energia termica primaria di un liquido in energia cinetica che permetta l'attraversamento delle linee di campo nel condotto e quindi, tramite interazione **MHD**, porti alla conversione di sufficienti frazioni del contenuto entalpico del fluido in energia elettrica sul carico esterno, pone la filiera in netto svantaggio rispetto ai cicli a gas. Le temperature di picco del liquido dalla sorgente risultano, inoltre, non superiori a circa **1.200 °C** e pertanto i rendimenti globali di conversione appaiono a favore degli schemi a gas.

Nei generatori **MHD** sono richiesti elevati valori del campo magnetico, ottenibili senza dissipare ingenti frazioni della potenza generata, con i magneti criogenici, o superconduttori alla temperatura dell'elio liquido, (**T~ 4 K**)

Infine a seconda della velocità del plasma, si distinguono generatori supersonici, (**Mach > 1**), e subsonici, (**Mach < 1**).

Analisi di tali sistemi mostrano come ottimale la realizzazione di condotti **MHD** a Mach costante e quindi, essendo la velocità del suono nel plasma decrescente lungo il condotto a causa della diminuzione di entalpia e quindi di temperatura del plasma stesso, a sezione crescente, (condotti divergenti), per diminuire corrispondentemente la velocità di efflusso del gas. Il dimensionamento geometrico del condotto risulta pertanto, definito direttamente dall'entità della conversione e dalle caratteristiche del plasma lungo il condotto stesso.

## 2 - EQUAZIONI MHD.

In un condotto **MHD** in cui fluisce un plasma con velocità di insieme  $\mathbf{u}$  e di conducibilità statica  $\mathbf{s}_0$ , la presenza di un campo magnetico,  $(\mathbf{B})$ , rende la conducibilità di un gas contenente cariche libere, una grandezza tensoriale non risultando allineati i vettori densità di corrente  $\underline{\mathbf{J}}$  e campo elettrico  $\underline{\mathbf{E}}$ .

Posto il campo magnetico  $\mathbf{B}$  perpendicolare alla velocità  $\mathbf{u}$  e scelta una terna di assi cartesiani con l'asse  $\mathbf{x}$  parallelo alla velocità  $\mathbf{u}$  e l'asse  $\mathbf{y}$  parallelo al campo magnetico  $\mathbf{B}$  in modo che l'assenza di interazione nella direzione  $\mathbf{y}$  renda il fenomeno bidimensionale, (piano  $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ ), le equazioni **MHD** risultano:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_x = \frac{\mathbf{s}_0}{1 + (\mathbf{m}_b \mathbf{B})^2} [\mathbf{E}_x - \mathbf{m}_b \mathbf{B}(\mathbf{E}_z + \mathbf{B}u)] \\ \mathbf{J}_y = 0 \\ \mathbf{J}_z = \frac{\mathbf{s}_0}{1 + (\mathbf{m}_b \mathbf{B})^2} [(\mathbf{E}_z + \mathbf{B}u) + \mathbf{m}_b \mathbf{B} \mathbf{E}_x] \end{cases}$$

avendo indicanto con  $\mathbf{m}_b$  la mobilità degli elettroni, (definita come il rapporto fra la velocità di equilibrio di una particella carica rispetto alle particelle neutre e il campo elettrico presente).

Indicando inoltre, con  $\mathbf{a}$  la pulsazione del moto della particella in presenza del campo magnetico e con  $\mathbf{t}_c$  il tempo medio di collisione delle particelle, si ottiene:  $\mathbf{m}_b \mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{t}_c$ .

Il parametro  $\mathbf{a} \mathbf{t}_c = \mathbf{m}_b \mathbf{B}$ , rappresenta lo spazio angolare percorso fra due collisioni successive, pertanto per  $\mathbf{a} \mathbf{t}_c \gg 1$  prevale lo spostamento lungo l'asse  $\mathbf{x}$  e viceversa per  $\mathbf{a} \mathbf{t}_c \ll 1$ , lungo l'asse  $\mathbf{z}$ .

Scelta, infatti, la direzione  $\mathbf{z}$  per il campo  $\underline{\mathbf{E}}$ , ( $\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_y = 0$ ), dal sistema

di equazioni, si ottiene:  $\frac{|\mathbf{J}_x|}{|\mathbf{J}_z|} = \mathbf{m}_b \mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{t}_c$ .

In funzione dei parametri fisici del plasma, si ottiene:  $\mathbf{a} \mathbf{t}_c \propto \mathbf{B}/\mathbf{p}$ , ( $\mathbf{p}$  pressione del plasma), che quantitativamente in caso di elettroni con gas a pressione atmosferica e  $\mathbf{B} \sim 4 \text{ T}$ , comporta:  $\mathbf{a} \mathbf{t}_c < 1$ , mentre a bassa pressione e  $\mathbf{B} > 6 \text{ T}$ , risulta:  $\mathbf{a} \mathbf{t}_c > 1$ .

Nel campo di valori relativi ai sistemi **MHD** la componente di conducibilità ionica risulta trascurabile rispetto a quella degli elettroni che risultano quindi le uniche cariche della corrente generata.

### 3 - SCHEMI DI GENERATORI MHD.

Con la disposizione elettrodinamica adottata, nel condotto **MHD** è disponibile una corrente di proiezione assiale, ( $\mathbf{J}_x$ ), e trasversale, ( $\mathbf{J}_z$ ), in grado di chiudersi su un circuito esterno e di intensità relativa dipendente dal parametro:  $m_b \mathbf{B} = at_c$ .

Ne derivano due tipi fondamentali di generatori:

- generatore di Faraday con carico alimentato da  $\mathbf{J}_z$ , ( $at_c < 1$ );
- generatore di Hall con carico alimentato da  $\mathbf{J}_x$ , ( $at_c > 10$ ).

### 4 - GENERATORE DI FARADAY.

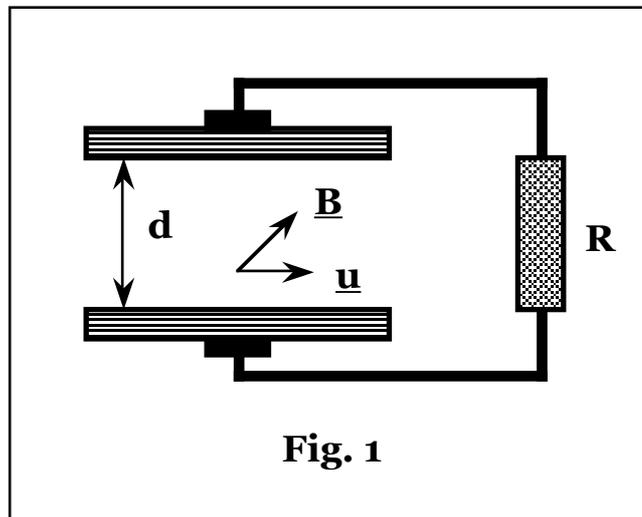
In tale schema, (**Fig. 1**), per la continuità degli elettrodi lungo l'asse  $x$ , si ha:  $\mathbf{E}_x = 0$ .

In condizioni di circuito aperto, (**ca**), risulta altresì:  $\mathbf{J}_z = 0$ , da cui:

$$(\mathbf{E}_z)_{ca} = - \mathbf{B}u.$$

Indicando con  $d$  la distanza fra gli elettrodi, la tensione in circuito aperto, ( $\mathbf{V}_{ca}$ ), risulta:  $\mathbf{V}_{ca} = (\mathbf{E}_z)_{ca}d = - \mathbf{B}ud$ .

Per:  $\mathbf{B} \sim 4 \text{ T}$ ;  $u \sim 10^3 \text{ m/s}$ ;  $d = 0,5 \text{ m}$ , si ottiene un ordine di grandezza per la tensione ottenibile in condotti **MHD**, pari a:  $\mathbf{V}_{ca} = 2.000 \text{ V}$ .



Nel generatore **MHD** alla chiusura del circuito risulta:

$$\frac{\mathbf{E}_z}{(\mathbf{E}_z)_{ca}} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}_{ca}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R} + \mathbf{R}_g} = k_c, \text{ con } \mathbf{R}, \mathbf{R}_g, \text{ resistenza del carico esterno e}$$

interna del generatore, rispettivamente.

Si ha quindi:  $\mathbf{E}_z = - k_c \mathbf{B}u$ , da cui:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_x = \frac{s_0(at_c)}{1 + (at_c)^2} (k_c - 1)Bu \\ \mathbf{J}_y = 0 \\ \mathbf{J}_z = \frac{s_0}{1 + (at_c)^2} (k_c - 1)Bu \end{cases} .$$

La potenza per unità di volume, ( $\mathbf{W}/\mathbf{m}^3$ ), risulta in generale pari a:  $\mathbf{EJ}$  e nel generatore di Faraday la densità di potenza, ( $\mathbf{P}_F$ ), vale quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_F &= |\mathbf{J}_z \mathbf{E}_z| = \left| \frac{s_0}{1 + (at_c)^2} (k_c - 1)Bu(-Bu k_c) \right| = \\ &= \frac{s_0}{1 + (at_c)^2} k_c(1 - k_c)B^2 u^2 . \end{aligned}$$

Per il calcolo del suo valore massimo, ( $\mathbf{P}_{Fmax}$ ), posto:  $d\mathbf{P}_F(k_c)/dk_c = 0$ , si ottiene:  $k_c \max = 1/2$ , (ovvero:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_g$ , condizioni indicate come

circuito equilibrato), da cui:  $\mathbf{P}_{Fmax} = \frac{s_0}{1 + (at_c)^2} \frac{B^2 u^2}{4}$ .

Per:  $\mathbf{B} \sim 4 \text{ T}$ ;  $\mathbf{u} \sim 10^3 \text{ m/s}$ ;  $at_c \sim 1$ ;  $s_0 \sim 10 \text{ S/m}$ , si ottiene:

$$\mathbf{P}_{Fmax} \sim 20 \text{ MW}/\mathbf{m}^3.$$

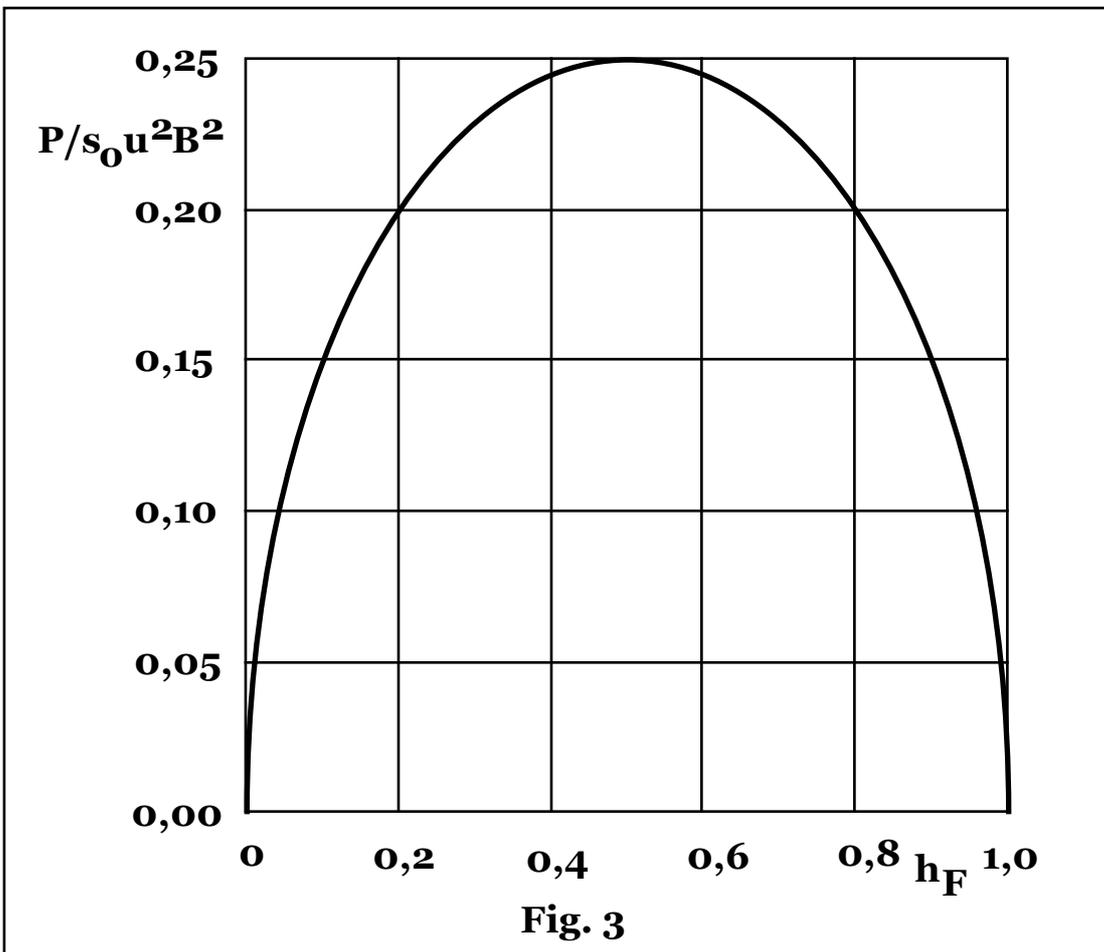
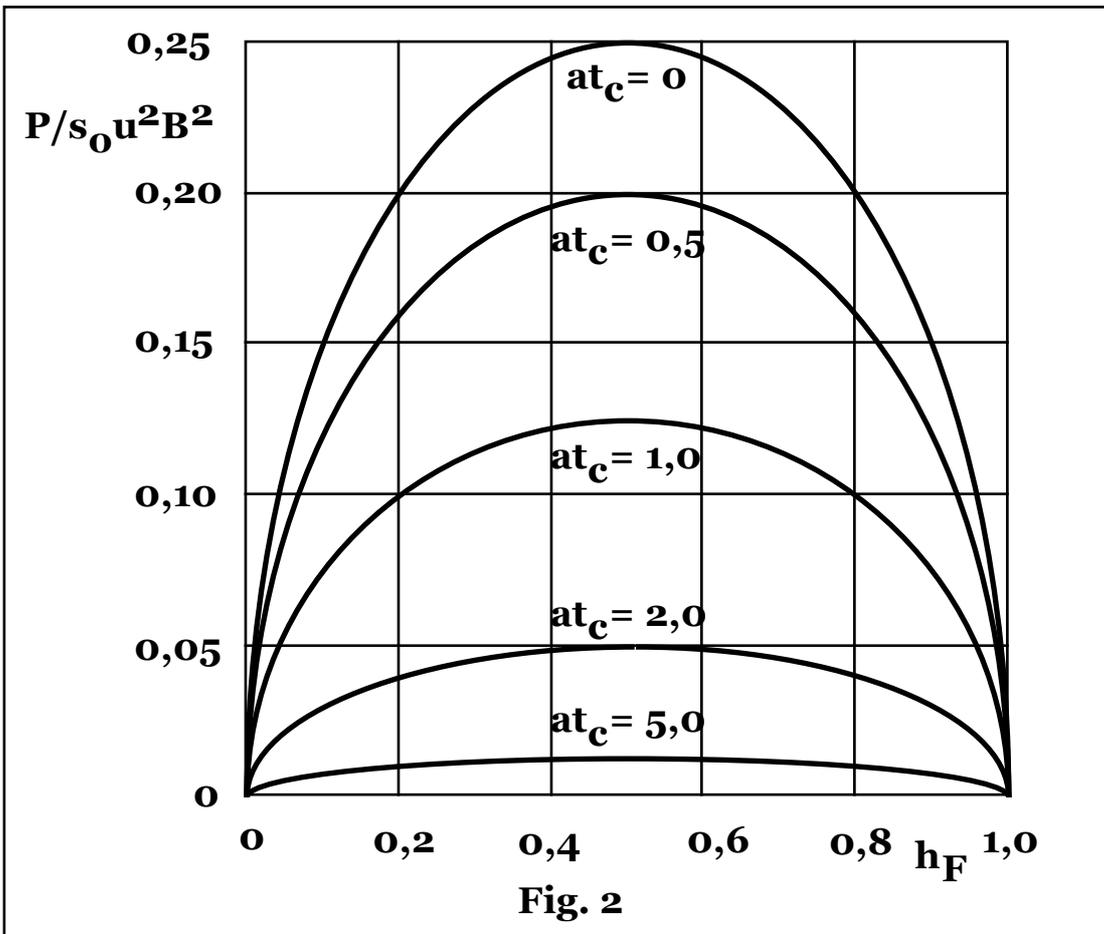
La forza resistente al moto è pari alla componente nella direzione  $-x$ , dell'interazione elettromagnetica.

Per la legge di Lorenz tale interazione vale:  $\mathbf{q} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , per cui la forza frenante per unità di volume vale:  $|\mathbf{J}_z \mathbf{B}|$ , e la potenza per unità di volume spesa nell'attraversamento delle linee di campo:  $\mathbf{J}_z \mathbf{B}u$ , che impressa inizialmente alle particelle cariche, si distribuisce per attrito a tutto il fluido.

Il rendimento di conversione del generatore **MHD** di Faraday, ( $\mathbf{h}_F$ ),

$$\text{risulta pertanto: } \mathbf{h}_F = \frac{|\mathbf{J}_z \mathbf{E}_z|}{|\mathbf{J}_z \mathbf{B}u|} = \left| \frac{-Bu k_c}{Bu} \right| = k_c.$$

Lo schema elettrodinamico del generatore di Faraday, risulta indicato per i minimi valori del parametro  $at_c$ .



Al crescere del suo valore infatti, la densità di potenza  $\mathbf{P}_F$  si discosta dal massimo teorico,  $[\mathbf{s}_0 \mathbf{k}_c (1 - \mathbf{k}_c) \mathbf{B}^2 \mathbf{u}^2]$ , valido per:  $\mathbf{a}_{t_c} = \mathbf{0}$ , diminuendo al crescere delle perdite assiali lungo gli elettrodi.

In **Fig. 2** e **3**, è riportato l'andamento della densità di potenza in funzione del rendimento, ( $\mathbf{h}_F = \mathbf{k}_c$ ), per il generatore di Faraday a elettrodi continui e il suo valore massimo ottenibile con con generatori a elettrodi segmentati, o in serie, che risulta ad andamento parabolico a concavità negativa con massimo per:  $\mathbf{k}_c = 1/2$  e simmetrica rispetto all'asse:  $\mathbf{h}_F = \mathbf{k}_c = 1/2$ .

### **Ottimizzazione economica del generatore di Faraday.**

L'ottimizzazione tecnica delle condizioni di funzionamento del generatore non è univoca essendo variabili in funzione del parametro  $\mathbf{k}_c$  la densità di potenza e il rendimento di conversione con dipendenza opposta.

Potendo variare ampiamente la densità di potenza, il costo specifico di impianto per unità di potenza, non può ritenersi costante, ma essendo il sistema composto da semplici elementi statici, identificato un costo proporzionale alla portata di fluido da trattare, ovvero, (note le condizioni termodinamiche del plasma), alle dimensioni del sistema, ( $\mathbf{q}$ ), il costo impianto è più realisticamente riferibile come proporzionale al volume del generatore, ( $\mathbf{V}$ ), ovvero, essendo il volume pari alla potenza diviso la densità della stessa, ( $\mathbf{V} = \mathbf{P}/\mathbf{P}_F$ ):

$$\mathbf{I}_0(\mathbf{V}) = \mathbf{qV} = \mathbf{q}(\mathbf{P}/\mathbf{P}_F) = \mathbf{q}[\mathbf{P}/\mathbf{s}_0 \mathbf{k}_c (1 - \mathbf{k}_c) \mathbf{B}^2 \mathbf{u}^2].$$

Occorre inoltre tenere conto degli oneri energetici relativi alla potenza richiesta dalla sezione di sostentamento del campo magnetico, ( $\mathbf{f}_m$ ), che essendo proporzionali alla densità di energia magnetica, ( $\mathbf{B}^2/2\mathbf{p}_{m0}$ ), fissato il valore del campo, risultano anch'essi proporzionali al volume del generatore:  $\mathbf{f}_m(\mathbf{V}) = \mathbf{f}_m \mathbf{V} = \mathbf{f}_m(\mathbf{P}/\mathbf{P}_F) = \mathbf{f}_m[\mathbf{P}/\mathbf{s}_0 \mathbf{k}_c (1 - \mathbf{k}_c) \mathbf{B}^2 \mathbf{u}^2]$ .

Il rendimento globale, ( $\mathbf{h}_m$ ), di conversione di un impianto **MHD**, risulta:  $\mathbf{h}_m = \mathbf{h}_g \mathbf{h}_t \mathbf{h}_i \mathbf{h}_M$ , essendo  $\mathbf{h}_g$ ,  $\mathbf{h}_t$ ,  $\mathbf{h}_i$ ,  $\mathbf{h}_M$ , i rendimenti del generatore di calore, di trasformazione di energia termica primaria in energia cinetica del plasma, rispetto all'isoentropica di espansione e del generatore **MHD**, rispettivamente.

Il **VAN** dell'investimento di un sistema **MHD** di potenza **P**, con generatore di Faraday, ( $\mathbf{h}_M = \mathbf{h}_F = \mathbf{k}_C$ ), indicando con:

$\mathbf{u}_m$  fattore di carico dell'impianto;

**T** periodo rateale di valutazione economica;

$\mathbf{c}_k$  costo specifico dell'energia elettrica prodotta;

$\mathbf{c}_c$  costo specifico del combustibile impiegato;

$1/t_{ek}$ ,  $1/t_{ec}$ ,  $1/t_{em}$ , fattori di annualità dell'energia elettrica, del combustibile impiegato e degli oneri di gestione e manutenzione dell'impianto;

**a** frazione di costo impianto relativo agli oneri di gestione e manutenzione;

$f_r$  coefficiente di aumento costo capitale per interessi durante la costruzione dell'impianto, vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{VAN} &= \frac{\mathbf{P} \mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_k}{t_{ek}} - \frac{\mathbf{G}_c \mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_c}{t_{ec}} - f_m \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}_F} \frac{\mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{\mathbf{a}}{t_{em}} \right) \mathbf{q} \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}_F} = \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{\mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_k}{t_{ek}} - \frac{\mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_c}{k_i h_g h_t h_i k_c t_{ec}} - \frac{f_m \mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_k}{\mathbf{P}_F t_{ek}} - \left( f_r + \frac{\mathbf{a}}{t_{em}} \right) \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{P}_F} \right\} = \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{\mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_k}{t_{ek}} - \frac{\mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_c}{k_i h_g h_t h_i k_c t_{ec}} - \frac{f_m \mathbf{u}_m \mathbf{T} \mathbf{c}_k + \mathbf{q} \left( f_r + \frac{\mathbf{a}}{t_{em}} \right)}{s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2} \right\}, \end{aligned}$$

essendo:  $\mathbf{G}_c = \frac{\mathbf{P}}{k_i h_m} = \frac{\mathbf{P}}{k_i h_g h_t h_i h_F} = \frac{\mathbf{P}}{k_i h_g h_t h_i k_c}$ ,

e quindi proporzionale alla potenza installata.

Posto:  $\frac{d\mathbf{VAN}(k_c)}{dk_c} = 0$ , si ottiene:

$$\frac{2k_c - 1}{(1 - k_c)^2} = \frac{s_0 B^2 u^2 c_c}{k_i h_g h_t h_i t_{ec}} = \text{costante.}$$

$$\frac{2k_c - 1}{(1 - k_c)^2} = \frac{f_m c_k}{t_{ek}} + \left( f_r + \frac{\mathbf{a}}{t_{em}} \right) \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{u}_m \mathbf{T}}$$

Al variare della costante, (comunque positiva), da zero a infinito, il parametro  $\mathbf{k}_C$  varia da  $1/2$  all'unità, (ovvero resistenza del carico esterno **R** che varia da  $\mathbf{R}_g$  all'infinito), pertanto nel campo dei valori significativi, ( $0 < \mathbf{k}_C < 1$ ), l'equazione ammette un'unica soluzione compresa nell'intervallo:  $1/2 < \mathbf{k}_C = \mathbf{h}_F < 1$ :

$$k_c \max = \frac{\text{costante} + 1 - \sqrt{\text{costante} + 1}}{\text{costante}},$$

ovvero rendimento ottimale comunque maggiore del limite di massima densità di potenza, ( $k_c = h_F = 1/2$ ), fino al quale, ( $h_F = k_c \leq 1/2$ ), risultano crescenti sia la densità di potenza che il rendimento di conversione con contemporaneo vantaggio economico sia per i costi di impianto che di esercizio.

Essendo il **VAN** riferito alla potenza, gli utili dell'impianto, fissati dalla potenza installata, non appaiono nell'espressione di ottimizzazione, e il costo specifico dell'energia elettrica, ( $c_k$ ), compare solo negli oneri relativi al sostentamento del campo magnetico.

Al tendere a zero degli oneri di impianto, ( $f_m, q$ ), ed esercizio, ( $c_k$ ), la costante tende a infinito e il rendimento tende all'unità divenendo ininfluenza la densità di potenza, mentre al tendere all'infinito degli stessi oneri, il rendimento tende a  $1/2$  divenendo essenziale la massima densità di potenza.

Parimenti al tendere all'infinito o a zero del costo combustibile, ( $c_c$ ), la costante tende agli stessi limiti e il rendimento passa dal valore unitario a  $1/2$ .

Il **VAN** dell'investimento di un sistema **MHD** di volume **V**, vale:

$$\begin{aligned} \text{VAN} &= \frac{[s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2 V] u_m T c_k}{t_{ek}} - \frac{G_c u_m T c_c}{t_{ec}} - f_m V \frac{u_m T c_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q V = \\ &= V \left\{ \frac{s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2 u_m T c_k}{t_{ek}} - \frac{s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2 u_m T c_c}{k_i h_g h_t h_i k_c t_{ec}} - \right. \\ &\quad \left. - f_m \frac{u_m T c_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q \right\} = \\ &= V \left\{ \frac{s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2 u_m T c_k}{t_{ek}} - \frac{s_0 (1 - k_c) B^2 u^2 u_m T c_c}{k_i h_g h_t h_i t_{ec}} - \right. \\ &\quad \left. - f_m \frac{u_m T c_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q \right\}, \end{aligned}$$

essendo in tal caso:  $G_c = \frac{P}{k_i h_m} = \frac{P_F V}{k_i h_g h_t h_i h_F} = \frac{s_0 (1 - k_c) B^2 u^2}{k_i h_g h_t h_i} V$ ,

che risulta coincidente con l'espressione precedente essendo:

$$V = P / s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2.$$

Posto:  $\frac{dVAN(k_c)}{dk_c} = 0$ , si ottiene:  $k_c = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c_c}{c_k k_i h_g h_t h_i} \frac{t_{ek}}{t_{ec}} \right)$ .

In questo caso, essendo il **VAN** riferito a un volume definito, (indipendente dal rendimento), i costi di investimento proporzionali a questo, non risultano variabili e non compaiono quindi, nell'espressione di ottimizzazione, mentre nel primo caso essendo fissata la potenza, il volume, (e quindi il costo di investimento), segue le variazioni della densità, e compare quindi, nell'espressione di ottimizzazione.

Il valore del rendimento risulta sempre maggiore di  $1/2$  e, minore dell'unità, per:  $\frac{c_c}{k_i h_g h_t h_i} < c_k$ , in quanto, in caso contrario, risultando

il costo dell'energia elettrica, inferiore al costo dell'energia termica primaria, il **VAN** sarebbe comunque negativo, ovvero paradossalmente positivo solo in caso di rendimento superiore all'unità, (è immediato verificare che per:  $c_k < \frac{c_c}{k_i h_g h_t h_i}$ , anche il **VAN** espresso per unità di potenza risulta comunque negativo).

L'indice di profitto:  $IP = \frac{VAN}{I_o} = \frac{VAN}{q \frac{P}{PF}} = \frac{VAN}{qV} =$

$$= \left\{ \left( \frac{k_c(1-k_c)c_k}{qt_{ek}} - \frac{(1-k_c)c_c}{qk_i h_g h_t h_i t_{ec}} \right) s_o B^2 u^2 u_m T - \frac{f_m u_m T c_k}{qt_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) \right\}$$

mostra evidentemente le stesse condizioni di ottimizzazione.

Il costo specifico dell'energia prodotta, ( $c_k^*$ ), in caso di utilizzo dell'energia autoprodotta per il sostentamento del campo magnetico, posto:  $VAN(c_k) = 0$ , risulta:

$$c_k^* = \frac{\frac{s_o(1-k_c)B^2 u^2 c_c}{k_i h_g h_t h_i} \frac{t_{ek}}{t_{ec}} + q \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right)}{s_o k_c(1-k_c)B^2 u^2 - f_m},$$

mentre in caso di energia elettrica proveniente dall'esterno:

$$c_k^* = \frac{c_c}{k_i h_g h_t h_i k_c} \frac{t_{ek}}{t_{ec}} + \frac{f_m c_k + \frac{qt_{ek}}{u_m T} \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right)}{s_o k_c(1-k_c)B^2 u^2}.$$

In questo caso, posto:  $\frac{dc_k * (k_c)}{dk_c} = 0$ , si ottiene la medesima condizione di ottimizzazione:

$$\frac{2k_c - 1}{(1 - k_c)^2} = \frac{\frac{s_0 B^2 u^2 c_c}{k_i h_g h_t h_i t_{ec}}}{\frac{f_m c_k}{t_{ek}} + \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) \frac{q}{u_m T}}$$

Infine nel caso di ritenere i costi di investimento proporzionali alla potenza, il VAN risulterebbe:

$$\begin{aligned} \text{VAN} &= \frac{P u_m T c_k}{t_{ek}} - \frac{G_c u_m T c_c}{t_{ec}} - f_m P \frac{u_m T c_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q P = \\ &= \frac{P u_m T c_k}{t_{ek}} - \frac{P u_m T c_c}{k_i h_g h_t h_i k_c t_{ec}} - f_m P \frac{u_m T c_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q P, \end{aligned}$$

con il solo il costo esercizio combustibile, dipendente dal rendimento, (o  $k_c$ ), da cui un andamento del VAN, (e parimenti l'indice di profitto), monotono crescente con l'aumento del rendimento, ovvero assenza di condizioni di ottimizzazione, fino al limite di rendimento unitario, in quanto la corrispondente densità di potenza nulla, non influirebbe sui costi proporzionali solo alla potenza.

Nella realtà essendo i costi dipendenti in maniera preponderante dal volume, ma certamente in parte anche dai macchinari e quindi dalla potenza, il valore ottimo del parametro  $k_c$ , (ovvero del rendimento), risulterà spostato verso l'unità, rispetto al valore ottimale relativo alla sola dipendenza dal volume, di una quota dipendente dal relativo contributo di costi.

## 5 - GENERATORE DI HALL.

Lo schema del generatore di Hall si ottiene ponendo il carico fra gli elettrodi estremi. (Fig.4), e quindi utilizzando la componente  $J_x$  della corrente.

A differenza dello schema di Faraday in cui la componente trasversale della densità di corrente, ( $J_z$ ), è maggioritaria, nello schema di Hall questa è minoritaria per cui le coppie di elettrodi affacciati vengono cortocircuitate per minimizzare la resistenza alla circolazione della componente  $J_z$ , comunque non utilizzata, massimizzandola con minime perdite ohmiche, con conseguente aumento della forza

elettromagnetica frenante,  $(\mathbf{J}_z \mathbf{B})$ , ovvero dell'interazione **MHD** e quindi della conversione di entalpia del plasma in energia elettrica.

In tal caso risulta:  $\mathbf{E}_z = \mathbf{0}$  e in condizioni di circuito aperto,  $(\mathbf{J}_x = \mathbf{0})$ , si ha:  $(\mathbf{E}_x)_{ca} = (at_c)\mathbf{Bu}$  e quindi:  $\mathbf{E}_x = k_c(at_c)\mathbf{Bu}$ , da cui:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_x = \frac{s_o(at_c)}{1 + (at_c)^2} (k_c - 1)\mathbf{Bu} \\ \mathbf{J}_y = 0 \\ \mathbf{J}_z = \frac{s_o}{1 + (at_c)^2} [1 + k_c(at_c)^2] \mathbf{Bu} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} P_H &= |\mathbf{J}_x \mathbf{E}_x| = \left| \frac{s_o(at_c)}{1 + (at_c)^2} (k_c - 1)\mathbf{Bu} [k_c(at_c)\mathbf{Bu}] \right| = \\ &= \frac{s_o(at_c)^2}{1 + (at_c)^2} k_c(1 - k_c)B^2 u^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_H &= \frac{|\mathbf{J}_x \mathbf{E}_x|}{|\mathbf{J}_z \mathbf{Bu}|} = \frac{\left| \frac{s_o(at_c)}{1 + (at_c)^2} (k_c - 1)\mathbf{Bu} [k_c(at_c)\mathbf{Bu}] \right|}{\left| \frac{s_o}{1 + (at_c)^2} [1 + k_c(at_c)^2] \mathbf{Bu} (\mathbf{Bu}) \right|} = \\ &= \frac{k_c(1 - k_c)(at_c)^2}{1 + k_c(at_c)^2}. \end{aligned}$$

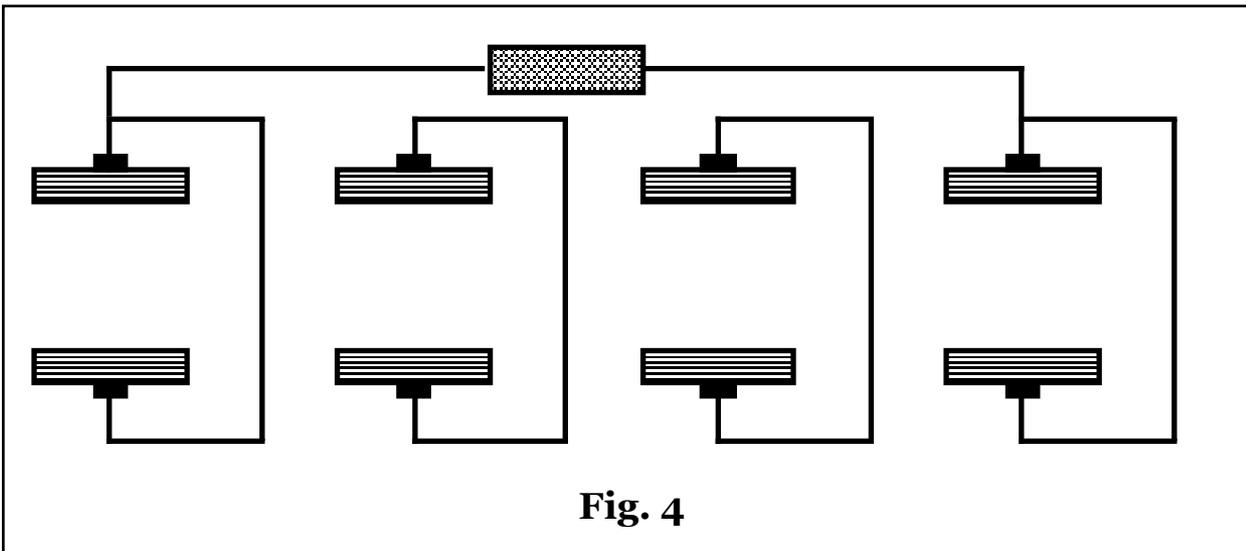


Fig. 4

Le due funzioni:  $P_H(\mathbf{at}_c, \mathbf{k}_c)$  e  $h_H(\mathbf{at}_c, \mathbf{k}_c)$ , nulle per:  $\mathbf{at}_c = \mathbf{0}$ , risultano monotone crescenti all'aumentare di  $\mathbf{at}_c$ , fino ai valori asintotici:

$$P_H = s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2; \quad h_H = 1 - k_c.$$

Dal punto di vista elettrodinamico, il generatore di Hall appare, quindi, vantaggioso per:  $\mathbf{at}_c \gg 1$ .

In tali condizioni, combinando le due relazioni, si ottiene:

$P_H = s_0 h_H (1 - h_H) B^2 u^2$ , per cui la densità di potenza risulta nulla per:  $h_H = 0$ ;  $h_H = 1$ , ( $k_c = 1$ ;  $k_c = 0$ ), mentre posto:  $dP_H(h_H)/h_H = 0$ , si ottiene:  $P_{Hmax} = s_0 B^2 u^2 / 4$ , per:  $h_H = 1/2$ , ( $k_c = 1/2$ ).

Pertanto circa le condizioni di accoppiamento al carico esterno, al variare del rapporto  $k_c$ , (o del rendimento  $h_H$ ), nell'intero intervallo:

$0 \leq k_c \leq 1$ , ( $1 \geq h_H \geq 0$ ), risulta:

$$0 \leq P_H \leq s_0 B^2 u^2 / 4; \quad 0 \leq k_c \leq 1/2, \quad (1 \geq h_H \geq 1/2);$$

$$s_0 B^2 u^2 / 4 \leq P_H \leq 0; \quad 1/2 \leq k_c \leq 1, \quad (1/2 \geq h_H \geq 0).$$

La curva risulta ancora parabolica a concavità negativa con massimo per:  $k_c = 1 - h_H = 1/2$  e simmetrica rispetto all'asse:  $k_c = 1/2$  in un senso e al medesimo asse:  $h_H = 1/2$ , nell'altro.

Per:  $B \sim 4 \text{ T}$ ;  $u \sim 10^3 \text{ m/s}$ ;  $\mathbf{at}_c \gg 1$ ;  $s_0 \sim 10 \text{ S/m}$ , si ottiene:

$$P_{Hmax} \sim 40 \text{ MW/m}^3.$$

### Ottimizzazione economica del generatore di Hall.

Nelle medesime ipotesi relative al generatore di Faraday, per il generatore di Hall, ( $h_M = h_H = 1 - k_c$ ), il VAN dell'investimento risulta:

$$\begin{aligned} VAN &= \frac{P u_m T c k}{t_{ek}} - \frac{G_c u_m T c c}{t_{ec}} - f_m \frac{P u_m T c k}{P_H t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q \frac{P}{P_H} = \\ &= \frac{P u_m T c k}{t_{ek}} - \frac{P u_m T c c}{k_i h_m t_{ec}} - f_m \frac{P u_m T c k}{P_H t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q \frac{P}{P_H} = \\ &= P \left\{ \frac{u_m T c k}{t_{ek}} - \frac{u_m T c c}{k_i h_g h_t h_i (1 - k_c) t_{ec}} - \frac{\frac{f_m u_m T c k}{t_{ek}} + q \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right)}{s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2} \right\}, \end{aligned}$$

essendo:  $G_c = \frac{P}{k_i h_g h_t h_i h_H} = \frac{P}{k_i h_g h_t h_i (1 - k_c)}$ , e quindi ancora proporzionale alla potenza installata.

Posto:  $\frac{dVAN(k_c)}{dk_c} = 0$ , si ottiene:

$$\frac{1 - 2k_c}{k_c^2} = \frac{\frac{s_0 B^2 u^2 c_c}{k_i h_g h_t h_i t_{ec}}}{\frac{f_m c_k}{t_{ek}} + \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) \frac{q}{u_m T}}$$

che ammette un'unica soluzione significativa, ( $0 < k_c < 1$ ):

$$k_c = \frac{\sqrt{\text{costante} + 1} - 1}{\text{costante}}, \text{ che al variare della costante da zero a infinito,}$$

appare compresa nell'intervallo:  $0 < k_c < 1/2$ , (ovvero resistenza del carico esterno  $R$  che varia da zero a  $R_g$ ), con rendimento comunque compreso fra gli stessi valori:  $1/2 < h_H = 1 - k_c < 1$ .

Pertanto nel generatore di Hall in ogni regime di funzionamento conveniente, il valore del parametro  $k_c$ , (variabile da zero a  $1/2$ ), risulta comunque inferiore a quello relativo al generatore di Faraday, (variabile da  $1/2$  all'unità), con, quindi, diminuzione del carico esterno  $R$  a parità di resistenza interna del generatore.

Il VAN dell'investimento di un generatore di Hall di volume  $V$ , (e il corrispondente indice di profitto), assume la stessa forma del modello relativo al generatore di Faraday, con la sola sostituzione dell'espressione del rendimento, ( $h_H = 1 - k_c$ ):

$$VAN = V \left\{ \frac{s_0 k_c (1 - k_c) B^2 u^2 u_m T c_k}{t_{ek}} - \frac{s_0 k_c B^2 u^2 u_m T c_c}{k_i h_g h_t h_i t_{ec}} - f_m \frac{u_m T c_k}{t_{ek}} - \left( f_r + \frac{a}{t_{em}} \right) q \right\}.$$

Posto:  $\frac{dVAN(k_c)}{dk_c} = 0$ , si ottiene:  $k_c = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_c}{k_i h_g h_t h_i c_k} \frac{t_{ek}}{t_{ec}} \right)$ , che

risulta comunque inferiore a  $1/2$  e maggiore di zero per:

$$\frac{c_c}{k_i h_g h_t h_i} < c_k, \text{ in quanto, in caso contrario, risultando il costo}$$

dell'energia elettrica, inferiore al costo dell'energia termica primaria, il VAN sarebbe comunque negativo, ovvero paradossalmente positivo solo in caso di rendimento superiore all'unità:  $h_H > 1$ , per  $k_c < 0$ , (è

immediato verificare che per:  $\mathbf{c_k} < \frac{\mathbf{c_c}}{\mathbf{k_i h_g h_t h_i}}$ , anche il **VAN** espresso

per unità di potenza risulta comunque negativo).

Il costo specifico dell'energia prodotta, risulta:

$$\mathbf{c_k^*} = \frac{\mathbf{c_c}}{\mathbf{k_i h_g h_t h_i (1 - k_c)}} \frac{\mathbf{t_{ek}}}{\mathbf{t_{ec}}} + \frac{\mathbf{f_m c_k} + \frac{\mathbf{q t_{ek}}}{\mathbf{u_m T}} \left( \mathbf{f_r} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t_{em}}} \right)}{\mathbf{s_o k_c (1 - k_c) B^2 u^2}},$$

con la medesima condizione di ottimizzazione:

$$\frac{\mathbf{1 - 2k_c}}{\mathbf{k_c^2}} = \frac{\frac{\mathbf{s_o B^2 u^2 c_c}}{\mathbf{k_i h_g h_t h_i t_{ec}}}}{\frac{\mathbf{f_m c_k}}{\mathbf{t_{ek}}} + \left( \mathbf{f_r} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t_{em}}} \right) \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{u_m T}}}$$

Ancora, nel caso di ritenere tutti i costi proporzionali alla potenza, l'unico termine dipendente dal rendimento, ( $\mathbf{h_H} = \mathbf{1 - k_c}$ ), risulterebbe il costo esercizio combustibile, portando quindi a un andamento del **VAN**, (e dell'indice di profitto), monotono crescente con l'aumento del rendimento, (ovvero diminuzione di  $\mathbf{k_c}$ ), e quindi assenza di condizioni di ottimizzazione, fino al limite di rendimento unitario, ( $\mathbf{k_c} = \mathbf{0}$ ), in quanto la corrispondente densità di potenza nulla, non influirebbe sui costi proporzionali solo alla potenza.

Nella realtà essendo i costi dipendenti non unicamente dal volume, ma anche in parte dalla potenza, il valore ottimo del parametro  $\mathbf{k_c}$ , risulterà spostato verso lo zero rispetto al valore ottimale relativo alla sola dipendenza dal volume, di una quota dipendente dal relativo contributo di costi.

Si conclude che dal valore dei parametri elettrodinamici scelti, risulta identificato lo schema di generatore idoneo e per ogni schema, (a valori dei parametri fissati in funzione di prestazioni tecniche od ottimizzati economicamente), risulta comunque:

$$\mathbf{P_{MHD}} \sim \mathbf{s_o k_c (1 - k_c) B^2 u^2}.$$

## 6 - COSTO DELL'ENERGIA DA CONVERSIONE MHD.

Il generatore **MHD**, pur sostituendo i gruppi turbogeneratori, risulta una macchina statica, non troppo sollecitata meccanicamente, facilmente refrigerabile e realizzabile con materiali termoresistenti.

Le temperature di picco possono, quindi, essere aumentate dai valori massimi degli impianti turbogas convenzionali, fino a **2.000 ÷ 3.000 K**, nelle realizzazioni attuali e aumentabili in futuro a tutto vantaggio dell'efficienza di conversione.

Ne derivano pertanto, rendimenti globali di conversione più elevati di quelli ottenibili con i sistemi convenzionali e, a differenza di questi, certamente aumentabili a breve termine con la maturità della relativa tecnologia.

I gas di scarico tuttavia posseggono ancora un contenuto entalpico elevato dovuto ai livelli di temperatura necessari al mantenimento di sufficienti valori di conducibilità del plasma in tutto il processo di conversione **MHD**.

Il gruppo **MHD** si colloca pertanto, come sezione di testa di un qualunque ciclo convenzionale, (a vapore, a gas, o misto), alimentato dal calore di scarto contenuto nei gas in uscita dal condotto **MHD**, realizzando un sistema misto a maggiore temperatura di picco e quindi a maggiore rendimento globale.

A differenza di altri sistemi avanzati di conversione, (fotovoltaico, celle a combustibile), composti da impianti di natura sostanzialmente diversa da quelli convenzionali e quindi di costo, (attuale o prevedibilmente futuro), possibilmente anche competitivo, un impianto **MHD** necessita quindi, di una sezione di impianto di conversione convenzionale a valle, (seppure di potenza relativa alla frazione di generazione globale), risultando, pertanto, comunque un sistema misto, comprendente una sezione a elevata tecnologia e complessità di realizzazione e gestione, e quindi di costo specifico superiore agli schemi convenzionali, con conseguente aggravio dei costi globali di installazione.

Le stime preventive sul costo specifico di investimento per i sistemi **MHD**, indicano un incremento di circa **1/3** rispetto ai costi specifici delle centrali di tipo convenzionale.

Con rendimenti globali delle centrali **MHD** pari a circa il **50%**, si ottiene quindi che, nonostante un incremento di rendimento pari a:  **$(0,5 - 0,4)/0,4 = 0,25$** , il costo specifico dell'energia elettrica prodotta, stante il maggior onere di investimento, risulta paragonabile a quello relativo alle centrali convenzionali, pure nell'ottimistica ipotesi che a maturità tecnologica avvenuta, il fattore di carico e la vita media di questi impianti siano paragonabili a quelli delle centrali tradizionali, ( **$u_m \sim 0,7$ ;  $n \sim 25$  anni**).

\*\*\*\*\*