

Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

**Sistemi di propulsione nucleare di missili
aerospaziali.**

Quaderni del Dipartimento

SISTEMI DI PROPULSIONE NUCLEARE DI MISSILI AEROSPAZIALI

1 - GENERALITA'

I veicoli idonei ai viaggi spaziali possono solo impiegare la propulsione a razzo, in sistemi cioè, in cui la spinta è ottenuta dalla quantità di moto della materia espulsa che deve essere pertanto contenuta nel razzo stesso costituendone il propellente.

Al di fuori di questa tecnica per un progetto extraorbitale, sarebbe necessario fornire a una massa **m**, un'energia cinetica iniziale pari a quella gravitazionale a livello del suolo.

La forza gravitazionale fra due masse **m** e **M**, risulta: \mathbf{GmM}/r^2 , con **G** costante di gravitazione universale e **r** distanza fra le due masse.

Sulla superficie di un pianeta di massa $\mathbf{M_T}$ e raggio medio $\mathbf{R_T}$, quindi, un grave di massa **m**, pesa: $\mathbf{GmM_T}/R_T^2$, e ha un'energia

gravitazionale pari a: $\int_{R_T}^{\infty} G \frac{mM_T}{r^2} dR = -G \frac{mM_T}{R_T}$.

Detta **g** la locale accelerazione di gravità, il peso del grave vale: **mg**, ovvero: $\mathbf{GmM_T}/R_T^2 = \mathbf{mg}$, da cui: $\mathbf{GmM_T}/R_T = \mathbf{mgR_T}$.

L'energia cinetica da fornire al grave risulta pertanto:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int_{R_T}^{\infty} G \frac{mM_T}{r^2} dR = G \frac{mM_T}{R_T} = mgR_T,$$

da cui una velocità iniziale del proietto, ($\mathbf{v_0}$): $\mathbf{v_0} = \sqrt{2G \frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T}$,

pari a: **11,2 km/s** dalla terra, ($\mathbf{M_T} = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg; $\mathbf{R_T} = 6,37 \cdot 10^6$ m)).

Fino ad oggi la missilistica e l'astronautica, (con missili a più stadi per ottenere le massime velocità), hanno esclusivamente utilizzato razzi a energia chimica, sviluppata cioè, da reazioni fra i propellenti, (o fra un combustibile e aria in caso di missili atmosferici), che preventivamente compressi e riscaldati dall'energia liberata dalla reazione chimica stessa, vengono espulsi tramite un condotto convergente divergente fornendo la spinta propulsiva.

I razzi chimici possono essere a propellente solido o liquido.

Il propellente solido è costituito da una miscela di combustibile e ossidante sotto forma di polvere compatta, (grana), stipata nella camera di combustione con un foro cilindrico centrale che, accesa con un impulso elettrico, comporta una reazione propulsiva incontrollabile fino all'esaurimento del propellente stesso.

Il propellente liquido è, invece, ottenuto dalla reazione fra combustibile e ossidante, contenuti in serbatoi separati, pompati in camera di combustione.

Il propellente liquido può anche essere un monopropellente, ovvero un composto chimico che in presenza di un catalizzatore in camera di combustione si decompone in una miscela gassosa.

Essendo originata dal pompaggio dei reagenti, la propulsione liquida può essere parzializzata e interrotta agendo sulle valvole di alimentazione.

Tali sistemi hanno ormai raggiunto i limiti intrinseci relativi al contenuto energetico dei relativi combustibili, per cui normali carichi utili orbitali o diretti solo verso la luna, richiedono vettori astronautici giganteschi.

I lanciatori chimici, inoltre, sono dotati di scarsa autonomia consumando tutto il propellente in pochi minuti per cui, pur essendo adatti a sfuggire a campi gravitazionali planetari, devono completare il viaggio per inerzia a meno di serbatoi di ingombro e massa improponibile, o ricorrere a rifornimenti in orbita economicamente insostenibili.

Moto di satellitti. Energia orbitale.

Il moto di una coppia di masse, (m_1 e m_2), origine e soggette ai corrispondenti campi gravitazionali con forza attrattiva proporzionale (tramite la costante di gravitazione universale G), alle masse dei due corpi e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i rispettivi baricentri: Gm_1m_2/r^2 , (legge di gravitazione universale), risulta centrale intorno al baricentro delle masse.

L'energia gravitazionale del sistema, (supposta nulla a distanza infinita), è pari a: $\int_{\infty}^r Gm_1m_2/r^2 = -Gm_1m_2/r$, per cui l'energia totale, (E), delle due masse rispetto a un qualunque sistema di riferimento inerziale, vale: $E = 1/2 m_1v_1^2 + 1/2m_2v_2^2 - Gm_1m_2/r$, mentre rispetto al sistema baricentrico, introdotta la massa ridotta:

$M = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, e indicando con v la velocità relativa dei due corpi, vale: $E = 1/2 M v^2 - Gm_1m_2/r$.

In caso risulti: $m_1 \ll m_2$, il baricentro del sistema tende al centro di massa del corpo più massivo, mentre la massa ridotta tende a quella del corpo meno massivo, ($M \sim m_1$), e l'energia del sistema vale:

$$E = 1/2 m_1 v^2 - G m_1 m_2 / r.$$

Per un corpo sulla superficie terrestre, si ha: $G m_1 M_T / R_T^2 = m_1 g$, da cui: $G M_T = g R_T^2$, e quindi: $E = 1/2 m_1 v^2 - g R_T^2 m_1 / r$,

A quota h dalla superficie della terra, l'energia risulta:

$$E = 1/2 m_1 v^2 - g R_T^2 m_1 / (R_T + h).$$

Un satellite si dice in orbita attorno a un corpo celeste che genera un campo gravitazionale, (con accelerazione g a livello del suolo), quando la forza centrifuga relativa al suo moto è pari alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dal corpo celeste su di esso.

La soluzione dell'equazione del moto orbitale, (moto centrale, detto dei due corpi), in un sistema baricentrico, risulta una conica che in coordinate polari, (r, q) , con origine degli assi nel centro del moto, coincidente con uno dei fuochi della conica, ha equazione:

$$r(q) = p / (1 + e \cos q).$$

E parimenti in coordinate cartesiane essendo:

$$x = r \cos q; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

si ottiene l'equazione: $(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx = p^2$, di una conica.

Per: $e < 1$, la traiettoria risulta un'ellisse, con costanti di integrazione:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \text{ (eccentricità); } p = a(1 - e^2) = b^2/a, \text{ (parametro dell'orbita),}$$

con a, b , semiassi maggiore e minore dell'ellisse e la distanza dal fuoco rimane compresa fra valori finiti del perielio e dell'afelio, ovvero:

$$p/(1 - e) \text{ e } p/(1 + e).$$

Infatti essendo la velocità del satellite: $v = \sqrt{\frac{2}{m_p} \left(E + \frac{G m_s m_p}{r} \right)}$,

annullandosi, ($v = 0$), quindi a distanza: $r_{\max} = - G m_s m_p / E$, per energia negativa esiste un limite per la distanza di allontanamento: $r_{\max} = |G m_s m_p / E|$ e i corpi rimangono legati in un reciproco moto periodico perpetuo, (traiettoria chiusa di forma ellittica).

In caso di moto circolare di raggio R dall'uguaglianza fra l'accelerazione centripeta e quella gravitazionale:

$$m_p v^2 / r = G m_s m_p / r^2, \text{ si ottiene:}$$

$1/2 m_p v^2 = 1/2 G m_s m_p / r$ e quindi: $E = - G m_s m_p / 2r$, da cui il limite per la distanza di allontanamento: $r_{max} = 2r$.

In caso di energia positiva, ($E > 0$), il risultato è privo di significato fisico, ($r < 0$), e poichè la velocità relativa risulta non nulla nemmeno a

distanza infinita, ($v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m_p}} > 0$), i corpi dopo un'eventuale

rivoluzione, si allontanano indefinitamente, (traiettoria aperta di forma iperbolica: $e > 1$), con caso particolare di energia nulla e quindi velocità nulla a distanza infinita, (traiettoria aperta di forma parabolica per: $e = 1$, con traiettoria ellittica con afelio che tende all'infinito ed ellisse che tende alla parabola).

In caso di un satellite in orbita circolare terrestre, (massa e velocità: m_s e v_s), dall'eguaglianza fra l'accelerazione centripeta a quella

gravitazionale: $\frac{v_s^2}{(R_T + h)} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{gR_T^2}{(R_T + h)^2}$, ovvero:

$$v_s^2 = \frac{gR_T^2}{R_T + h}, \text{ si ottiene: } E = 1/2 m_s v_s^2 - gR_T^2 m_s / (R_T + h) =$$

$$= \frac{1}{2} m_s \frac{gR_T^2}{R_T + h} - m_s \frac{gR_T^2}{R_T + h} = -\frac{1}{2} m_s \frac{gR_T^2}{R_T + h},$$

con energia, (coerentemente all'ipotesi), che tende a zero a distanza illimitata, a gravità e velocità nulle.

In caso di variazione di quota si ha: $\frac{dE(h)}{dh} = m_s \frac{gR_T^2}{(R_T + h)^2}$ e quindi il

passaggio fra due livelli, (h_1 e h_2), richiede un'energia DE , pari a:

$$DE = -\frac{1}{2} m_s \frac{gR_T^2}{R_T + h_2} - \left(-\frac{1}{2} m_s \frac{gR_T^2}{R_T + h_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} m_s g R_T^2 \left[\frac{h_2 - h_1}{(R_T + h_1)(R_T + h_2)} \right].$$

Sulla superficie terrestre il satellite ha velocità, (v_t), pari a quella di rotazione terrestre alla latitudine locale, (f): $v_t = 2\pi R_T \cos f / T$, con:

$T = 86.400 \text{ s}$, periodo di rotazione della terra.

In ogni missione è quindi opportuno sfruttare gratuitamente la massima velocità periferica di rotazione del pianeta, ponendo la base di lancio il più vicino possibile all'equatore, (il poligono di Kourou nella Guyana Francese dell'Agenzia Spaziale Europea, si trova soli 5,3 gradi).

L'energia del satellite alla base risulta quindi:

$$\mathbf{E} = 1/2 m_s v_t^2 - GM_T m_s / R_T = 1/2 m_s 4\pi^2 R_T^2 \cos^2 f / T^2 - m_s g R_T,$$

e quindi l'energia necessaria alla messa in orbita circolare del satellite alla quota h , vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{DE} &= -\frac{1}{2} m_s \frac{g R_T^2}{R_T + h} - \left[\frac{1}{2} m_s \frac{4\pi^2 R_T^2 \cos^2 f}{T^2} - m_s g R_T \right] = \\ &= m_s g R_T - \frac{1}{2} m_s \left(\frac{g R_T^2}{R_T + h} + \frac{4\pi^2 R_T^2 \cos^2 f}{T^2} \right). \end{aligned}$$

In caso di orbite ellittiche, l'energia del corpo in orbita dipende solo dal semiasse maggiore dell'ellisse, indipendentemente dall'eccentricità dell'orbita, (anche nulla ovvero circonferenza di raggio pari al semiasse maggiore a):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} m_s GM_T \frac{a}{b^2} (1 - e^2) = -1/2 GM_T / a = -1/2 g R_T^2 / a,$$

da cui l'energia necessaria al passaggio fra orbite circolari o ellittiche.

Per orbite circolari il periodo di rivoluzione, (T), vale:

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_s(h)} = \frac{2\pi (R_T + h)^{3/2}}{R_T \sqrt{g}}.$$

Il periodo minimo di rivoluzione di un satellite corrisponde, (a meno dell'impraticabilità in presenza di atmosfera), alla quota: $h = 0$, che per la Terra risulta: $T(0) = 2\pi(R_T/g)^{1/2} = 5.063 \text{ s} = 1 \text{ h } 24' 23''$, alla velocità: $v_s(0) = 7.905 \text{ m/s}$.

Risultano quindi dei limiti per le dimensioni, (R_T), dei corpi rotanti in funzione della massa, (M_T), e del periodo di rotazione T , (o velocità angolare: $2\pi/T$), relativi alla condizione in cui i corpi posti sulla linea equatoriale, (alla massima velocità periferica e quindi accelerazione centrifuga), si trovino "in orbita" sulla superficie, ovvero dotati di una accelerazione centrifuga pari a quella gravitazionale, oltre il cui limite limite ogni particella avrebbe una accelerazione centrifuga maggiore di quella gravitazionale e abbandonerebbe il corpo.

La velocità equatoriale risulta, infatti: $2\pi R_T/T$, con accelerazione centripeta pari a: $\frac{mv^2}{R_T} = \frac{m}{R_T} \left(\frac{2\pi R_T}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m R_T}{T^2}$, a fronte di una accelerazione gravitazionale: $\frac{GM_T m}{R_T^2}$.

Ogni particella posta sulla superficie equatoriale rimane quindi legata alla massa per: $\frac{4\pi^2 m R_T}{T^2} \leq \frac{GM_T m}{R_T^2}$, ovvero:

$$R_T \leq \left(\frac{GM_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3} = (GM_T)^{1/3} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{-2/3} = 42,22 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad (6,6 R_t);$$

$$\frac{v}{R_T} \leq \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}} = \sqrt{\frac{g}{R_T}} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}, \text{ pari a circa diciassette volte la}$$

velocità di rotazione terrestre, da cui il già citato tempo di rotazione limite: $2\pi/(v/R_t) = 5.064,45 \text{ s}$.

Tenuto conto della relazione: $M_T = \frac{4}{3} \pi d_{st} R_T^3$, si ottiene infine una condizione limite per la densità del pianeta: $d_{st} \geq \frac{3\pi}{GT^2}$, pari per la terra, ($d_{sT} = 5.507,32 \text{ kg/m}^3$), a: $18,93 \text{ kg/m}^3$, ovvero: $0,0034 d_{sT}$.

Per un periodo orbitale pari a quello di rotazione del pianeta, un satellite risulta fermo rispetto alla superficie e quindi particolarmente utile in caso di impieghi per telecomunicazioni.

Tale orbita viene detta geosincrona o geostazionaria, (identificata nel 1945 dallo scrittore Arthur Clarke), e per la terra, ($T = 86.400 \text{ s}$),

$$\text{risulta: } h = \left(\frac{R_o T \sqrt{g}}{2\pi} \right)^{2/3} - R_o = 3,5818 \cdot 10^7 \text{ m}; \quad v_s(h) = 3.067,3 \text{ m/s}.$$

Per un periodo orbitale inferiore a quello di rotazione del pianeta di un fattore intero, il satellite sorvola un punto ogni giorno alla stessa ora, (più un numero di volte pari al fattore di riduzione del periodo di rivoluzione meno uno, sfalsate di un tempo pari al periodo di rivoluzione del pianeta diviso il fattore di riduzione), percorrendo un'orbita detta pertanto eliosincrona.

In caso di orbita geosincrona, per lancio da latitudine equatoriale, ($\cos f = 1$), l'energia necessaria risulta:

$$DE = m_s g R_T - \frac{1}{2} m_s \left[\frac{(4\pi^2)^{1/3} g^{2/3} R_T^{4/3}}{T^2} + \frac{4\pi^2 R_T^2}{T^2} \right] \approx m_s g R_T,$$

pari a: **6,24 10⁷ J/kg** di carico utile.

Tenuto conto dell'entalpia di formazione dell'acqua, (**-1,59 10⁷ J/kg**), occorrerebbero: **3,92 kg** di ossigeno e idrogeno/**kg** di carico orbitale, per una frazione di carico pari a circa l'80% del totale per il solo combustibile.

In caso di propulsione chimica quindi, la frazione utile dell'intero lanciatore risulta estremamente ridotta, essendo richieste grandi quantità di combustibile per unità di massa di carico utile.

Considerando inoltre la massa delle strutture e dei propulsori e tutte le perdite per attriti aerodinamici in fase di lancio e di volo in atmosfera, dei rendimenti di combustione e di conversione ed efflusso dei motori, si ottengono, valori della frazione di carico utile non superiori a qualche per cento della massa totale.

In **Tab. 1** si riportano i dati relativi alla serie dei missili Ariane dell'Agenzia Spaziale Europea, (ESA), per missioni in orbita geostazionaria.

Tab. 1 – Dati relativi ai missili della serie Ariane, (ESA).

| Missile | Altezza (m) | Massa totale (kg) | Carico utile (kg) |
|-----------------------|------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Ariane 5 | 46,27 – 53,93 | 746.000 | 6.000 |
| Ariane 5 | | | |
| Versatile | 46,27 – 53,43 | 767.000 | 8.000 |
| Ariane 5 Esc-A | 50,56 – 57,72 | 777.000 | 10.500 |
| Ariane 5 Esc-B | 51,51 – 58,67 | 790.000 | 12.000 |

2 – GENERATORI NUCLEARI MOBILI.

L'impiego dell'energia nucleare ha trovato prevalente sviluppo nel campo delle centrali di potenza per la produzione di energia elettrica e in alcuni casi termica in sistemi di teleriscaldamento, che risultano economicamente vantaggiose per taglie di rilevanti dimensioni, tenuto

conto della massa critica di combustibile necessaria per l'autosostentamento della reazione a catena nel reattore.

Nondimeno, per rilevanti richieste di potenza, tale fonte energetica può essere utilizzata anche in sistemi mobili al duplice scopo di generazione di potenza per i sistemi di bordo o per la propulsione stessa dei veicoli.

Per tali generatori al di sopra di una potenza minima di soglia relativa alla massa del reattore, prevale la riduzione di masse e ingombri relativi alle riserve del combustibile che è necessario trasportare, con possibilità di prestazioni e autonomie impensabili con sistemi chimici.

In caso di sottomarini inoltre, mentre quelli convenzionali sono equipaggiati con un doppio sistema di propulsione, in immersione elettrico che non necessita di aria, ma richiede enormi batterie di accumulatori e diesel in emersione, (con ricarica degli accumulatori), la propulsione nucleare ha un'autonomia di combustibile praticamente illimitata, ovvero paragonabile alla vita del natante, (oltre 30 anni), con velocità subacquee di 90 km/h, (superiori a quelle dei siluri).

Inoltre non richiedendo l'impiego di ossigeno di combustione, nè di ricarica di sistemi elettrici, permette tempi di immersione, (inferiori all'ora per i sistemi convenzionali), di alcuni mesi, tenuto conto anche che disponendo di una sorgente di energia praticamente illimitata, l'aria e l'acqua vengono prodotte a bordo: l'ossigeno tramite elettrolisi e l'acqua tramite dissalazione di acqua marina.

I sistemi di propulsione nucleare, (fondamentalmente marini e sottomarini), con reattori ad acqua e ciclo motore a vapore, hanno ormai raggiunto i limiti di ottimizzazione in termini di sicurezza, affidabilità e potenza specifica, mentre gli impianti con reattori raffreddati a gas ad elevata temperatura, (e quindi rendimento), si propongono come sistemi compatti a maggiore densità di potenza volumetrica e di massa.

In caso di applicazioni aeronautiche e aerospaziali la riduzione di pesi e ingombri relativi agli impianti e alle riserve di propellente che è necessario trasportare a bordo, risulta ancora più essenziale, per cui le reazioni nucleari che liberano un'energia milioni di volte superiore a quella chimica, si presentano come la migliore soluzione sia per la produzione di potenza a bordo, (tramite reattori a gas ad alta temperatura, in particolare con schemi a letto fluido e accoppiamento a un impianto di turbina a gas in ciclo chiuso), sia nella propulsione missilistica e ancora di più in quella astronautica.

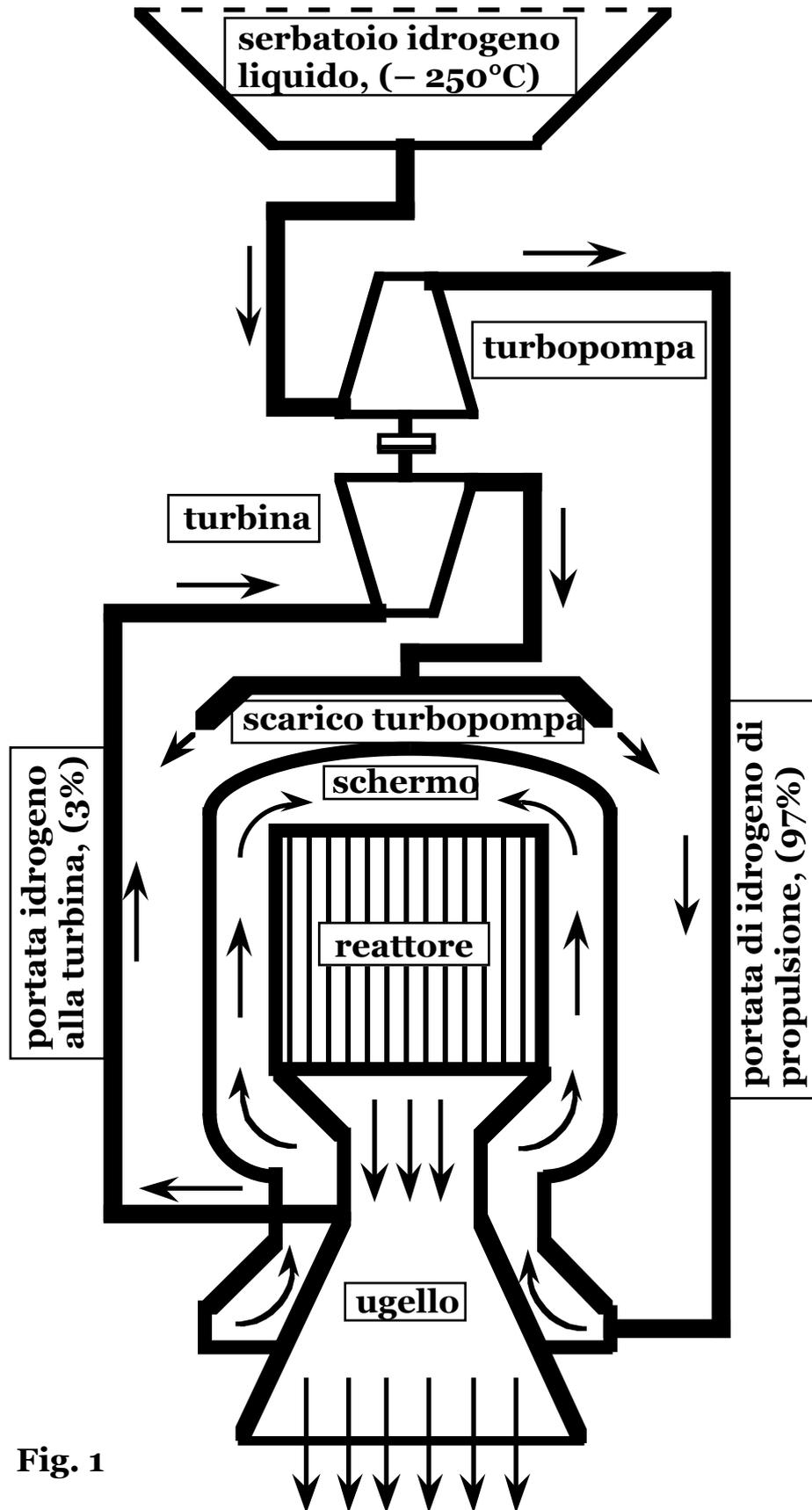


Fig. 1

Circa la potenza di bordo il primo reattore nucleare, (SNAP), da 500 W, fu posto in orbita, (1.400 km), dagli USA il 3 aprile 1965, mentre l'URSS mise in orbita i reattori della serie Topaz.

I sistemi a propulsione nucleare possono essere di tipo elettrico con motori a plasma, in cui un preventivo ciclo di conversione di energia nucleare in energia elettrica, (tradizionale o diretto), genera potenza impiegata per ottenere un plasma ad alta energia e di accelerarlo producendo la spinta propulsiva.

Nei sistemi a propulsione nucleare termica, il propellente/refrigerante preventivamente compresso, (aria in caso di missili atmosferici), viene riscaldato direttamente in un reattore nucleare, (che sostituisce la camera di combustione di un razzo chimico), e quindi espulso dopo essersi espanso in un condotto convergente divergente, fornendo la spinta propulsiva.

La ricerca statunitense sulla propulsione nucleare iniziò con il progetto Rover che impiegava reattori moderati a grafite e refrigerati a idrogeno che fungeva anche da propellente, cui seguì il progetto NERVA, (Nuclear Engine for Rocket Vehicle Application), **Fig.1**, con reattore ad alta temperatura, (2.000 °C).

2 - ANALISI COMPARATIVA DELLE PRESTAZIONI DI PROPULSORI AEROSPAZIALI CHIMICI E NUCLEARI.

L'uso dell'energia nucleare per i sistemi di propulsione aerospaziale, oltre alla maggiore densità di potenza dei relativi combustibili, comporta un ulteriore essenziale vantaggio.

Si consideri, infatti, un missile che viaggia nello spazio con espansione del propellente dalla pressione di camera di combustione al vuoto.

Indicando con $\mathbf{m}_r(t)$ la massa del razzo e con \mathbf{v}_r e \mathbf{v}_p le velocità assolute del razzo e del propellente, la portata di propellente vale:

- $\mathbf{dm}_r(t)/dt$ e quindi la quantità di moto totale del sistema al tempo t ,

risulta: $-\int_0^t \frac{dm_r}{dt} \mathbf{v}_p dt + \mathbf{m}_r(t) \mathbf{v}_r(t)$.

Poichè al di fuori del campo gravitazionale di corpi celesti il sistema non è soggetto a forze esterne, la variazione della quantità di moto globale è nulla, (ovvero la variazione della quantità di moto del razzo deve eguagliare quella del gas espulso dagli ugelli).

Si ottiene, quindi:

$$\frac{d}{dt} \left[-\int_0^t \frac{dm_r}{dt} \mathbf{v}_p dt + \mathbf{m}_r(t) \mathbf{v}_r(t) \right] =$$

$$= -\frac{dm_r}{dt} v_p + m_r(t) \frac{dv_r}{dt} + v_r(t) \frac{dm_r}{dt} = 0,$$

da cui, essendo: $v_p = v_r - v_e$, con v_e velocità di efflusso del gas dagli

ugelli, si ottiene: $m_r \frac{dv_r}{dt} = -v_e \frac{dm_r}{dt}$.

Si definisce impulso specifico, (I_{sp}), il rapporto fra la spinta ottenuta:

$m_r \frac{dv_r}{dt}$, e la portata in massa di propellente espulso, come parametro di valutazione dell'efficienza del propulsore, in quanto il propellente costituisce una massa aggiuntiva da portare in volo:

$$I_{sp} = \frac{m_r \frac{dv_r}{dt}}{\frac{dm_r}{dt}} = |v_e| \left[\frac{\text{N}}{\frac{\text{kg}}{\text{s}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

Le migliori prestazioni si ottengono, pertanto, con propulsori a fotoni, ovvero con velocità di efflusso delle particelle dagli ugelli pari a quella della luce, o a ioni a elevata energia.

Tali propulsori, tuttavia, risultano a bassa spinta e quindi non idonei ad uscire dal campo gravitazionale di corpi celesti, per cui possono trovare impiego solo nello spazio libero e dopo il raggiungimento di elevate velocità, a meno di non impiegare tempi inaccettabili di accelerazione alla velocità di crociera.

Per sistemi, (chimici o nucleari), che impiegano gas riscaldati, (in camera di combustione o in un reattore), che si espandono in un ugello convergente divergente, supponendo trasformazioni isoentropiche, il bilancio energetico lungo il condotto risulta:

$$\frac{1}{2} (v_e^2 - v_c^2) = c_p (T_c - T_e),$$

avendo indicato con il pedice c le grandezze riferite alla camera di combustione.

Essendo: $v_c \ll v_e$ e $c_p - c_v = R_g/M$, (R_g costante universale dei gas, M massa molecolare o atomica della sostanza), indicando con $k = c_p/c_v$ il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante della

politropica di espansione, si ottiene: $c_p = \frac{R_g}{M} \frac{k}{k-1}$, da cui:

$$v_e = I_{sp} = \sqrt{2R_g \frac{k}{k-1}} \sqrt{\frac{T_c - T_e}{M}}.$$

L'impulso specifico risulta pertanto direttamente proporzionale alla radice della temperatura, (T_c), e inversamente proporzionale alla radice della massa atomica o molecolare, del propellente, (M).

Nei sistemi a propulsione chimica, la massima temperatura ottenibile dalla reazione è quella relativa al rapporto stechiometrico dei reagenti, mentre la massa molecolare dei prodotti non può scendere al di sotto di quella della molecola prodotta dalla reazione.

In **Tab.2** si riporta il valore dell'impulso specifico ottenuto con propellenti chimici.

Tab.2 – Impulso specifico ottenuto con propellenti chimici.

PROPELLENTI SOLIDI

| Ossidante | Combustibile | Impulso specifico (m/s) |
|------------------------------|----------------------|------------------------------------|
| Perclorato di ammonio | Poluiuretano | 2.100 ÷ 2.500 |
| Perclorato di ammonio | Nitropolimero | 2.100 ÷ 2.500 |
| Nitrato di ammonio | Nitropolimero | 2.100 ÷ 2.500 |
| Nitrato di ammonio | Gomma | 1.700 ÷ 2.100 |
| Nitrato di ammonio | Poliestere | 1.700 ÷ 2.100 |
| Perclorato di ammonio | Gomma | 1.700 ÷ 2.100 |

PROPELLENTI LIQUIDI

| Ossidante | Combustibile | Impulso specifico (m/s) |
|------------------------------|---------------------|------------------------------------|
| Ozono | Idrogeno | 3.860 |
| Fluoro | Idrogeno | 3.800 |
| Ossigeno | Idrogeno | 3.600 |
| Fluoro | Ammoniaca | 3.000 |
| Fluoro | Idrazina | 2.800 |
| Fluoro | Cherosene | 2.750 |
| Ossigeno | Idrazina | 2.670 |
| Perossido di idrogeno | Idrazina | 2.620 |
| Ossigeno | Cherosene | 2.610 |
| Ozono | Cherosene | 2.600 |
| Ossido di fluoro | Ammoniaca | 2.600 |
| Ossido di fluoro | Idrazina | 2.570 |
| Ossigeno | Ammoniaca | 2.550 |

In un sistema a propulsione nucleare, invece, non vi sono limiti, (se non tecnologici), alle temperature ottenibili per il refrigerante/ propellente

all'interno del reattore, mentre la massa atomica del propellente stesso può essere la minima, impiegando reattori a fissione a gas, refrigerati a idrogeno.

Con motori a razzo spinti da getti di plasma ottenuti in reattori a fusione le temperature risulterebbero necessariamente estremamente più elevate e anche espellendo direttamente i prodotti di reazione, (elio), si avrebbero comunque pesi molecolari ridotti.

Circa le temperature di esercizio è possibile realizzare particelle di combustibile rivestite di refrattario ad alta resistenza, in grado di operare fino a temperature di **3.000 °C** in presenza di idrogeno, ovvero prossime a quelle, (~ 3.500 °C), ottenibili con idrogeno e ossigeno liquido nei migliori propulsori chimici.

Il rapporto fra gli impulsi specifici fra i due tipi di lanciatori, (nucleare e

chimico), risulterebbe in tal caso:
$$\frac{(I_{sp})_n}{(I_{sp})_c} = \frac{\left(\frac{k}{k-1}\right)_n}{\left(\frac{k}{k-1}\right)_c} \sqrt{\frac{M_c}{M_n}}$$
, che per:

$M_c = 18$, (ossigeno e idrogeno), e $M_n = 2$, (idrogeno), e con: $k = 1,3$, (vapore di acqua), e $k = 1,41$, (idrogeno), risulta: $(I_{sp})_n/(I_{sp})_c = 2,38$, (non si considera la dissociazione dei propellenti in quanto in tal caso nella relazione di bilancio si avrebbe una corrispondente variazione del calore specifico con effetto globale nullo), come risulta dalle prove sperimentali effettuate in cui si sono ottenuti impulsi specifici dell'ordine di **10.000 N/(kg/s)**, ovvero più che doppi rispetto a quelli ottenibili dai migliori sistemi chimici, (il tempo necessario per un viaggio verso Marte in tal caso sarebbe ridotto di circa i due terzi).

In tali schemi a utilizzo indiretto dell'energia nucleare, ovvero tramite scambio termico attraverso superficie solide, risultano limitazioni della temperatura del propellente e conseguentemente limiti per il valore dell'impulso specifico a livelli non superiori a circa il triplo dei lanciatori chimici.

Per impiegare direttamente l'energia liberata dalla reazione, sono stati pertanto proposti schemi costituiti da tubazioni di fissione chiuse a una estremità, (tipicamente del diametro dell'ordine di 40 cm e di lunghezza di 2,5 m per una potenza termica di circa 6 MW), sulle quali è depositato internamente uno strato critico di materiale fissile dello spessore di alcuni micron, in modo che i frammenti di fissione sfuggano dissipando la loro energia nel propellente che attraversa le tubazioni alla pressione di circa 6 bar prima di essere accelerato negli ugelli di propulsione, ottenendo temperature dell'ordine di 9.000 °C da cui

impulsi specifici fino a un ordine di grandezza superiori rispetto ai propulsori chimici.

A tali regimi termici sono richiesti materiali speciali, (ossidi, carburi, fibre di carbonio), debitamente raffreddati.

Le tubazioni sono immerse in un bagno di litio liquido circolante che alimenta schermi di dissipazione del calore nello spazio.

Al pari dei reattori convenzionali il sistema è corredato da barre di controllo e circondato da un mantello riflettore.

Per mantenere la criticità in tali geometrie, sono richiesti materiali fissili ad alta reattività come l'americio 242, (sezione d'urto di fissione 6.600 barns contro i 580 dell'uranio e una fertilità superiore di circa un terzo), isotopo artificiale ottenibile solo all'interno di reattori nucleari, che essendo fortemente minoritario rispetto agli isotopi 241 e 243, richiede un ulteriore irraggiamento neutronico dell'isotopo 241 e successivi procedimenti di separazione isotopica con evidente aggravio dei costi.

Inoltre poichè insieme al propellente viene espulsa anche circa la metà dei prodotti di fissione altamente radioattivi, per tali sistemi è precluso qualunque impiego al di fuori dello spazio interplanetario.

In ogni caso per potere essere allestiti i sistemi nucleari richiedono, a differenza di quelli chimici, una massa critica indipendente dall'entità del carico utile, per cui si ottiene una massa del carico utile limite, al di sotto della quale risulta conveniente, (almeno circa le masse necessarie al sistema), la propulsione chimica, mentre al di sopra risulta conveniente la propulsione nucleare.

Nello spazio libero dalla relazione: $m_r \frac{dv_r}{dt} = -v_e \frac{dm_r}{dt}$, ovvero:

$\frac{dm_r}{m_r} = -\frac{dv_r}{v_e}$, integrando fra l'istante di partenza del missile, ($v_r=0$), e

il generico tempo t , si ottiene la cosiddetta "equazione del rapporto di

massa": $\ln \frac{m_r(t)}{m_r} = -\frac{v_r(t)}{v_e} = -\frac{v_r(t)}{I_{sp}}$, da cui: $\frac{m_r}{m_r(t)} = e^{\frac{v_r(t)}{I_{sp}}}$.

Indicando con t_0 il tempo necessario al consumo totale del propellente di massa totale m_p , e posto: $m_b = m_r - m_p$, si ottiene:

$$\frac{m_r}{m_b} = e^{\frac{v_r(t_0)}{I_{sp}}} ; \quad \frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\frac{v_r(t_0)}{I_{sp}}}$$

Per portata di propellente: $\frac{dm_r}{dt} = \text{costante}$, la massa del missile decresce linearmente nel tempo: $m_r(t) = m_r + \frac{dm_r}{dt} t$, ($\frac{dm_r}{dt} < 0$), ed essendo:

$$t_0 = \frac{m_p}{-\frac{dm_r}{dt}}, \text{ si ottiene: } m_r(t) = m_r \left(1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0} \right).$$

In generale, indicando con \mathbf{x} la coordinata di moto con \mathbf{v}_0 la velocità del missile all'istante: $t = 0$, (supposta di direzione coincidente con quella della spinta propulsiva in maniera che il moto risulti rettilineo), dalle

$$\text{relazioni: } \frac{m_r}{m_r(t)} = e^{\frac{v_r(t) - v_0}{I_{sp}}} ;$$

$$m_r(t) = m_r \left(1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0} \right),$$

$$\text{si ottiene: } v_r(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 - v_e \ln \left(1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0} \right).$$

Posto: $t' = 1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0}$, dalla relazione: $v_r(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 - v_e \ln t'$, con:

$$\frac{dt'}{dt} = -\frac{m_p}{m_r} \frac{1}{t_0}, \text{ si ottiene: } \frac{dx(t')}{dt'} = \frac{m_r t_0 v_e}{m_p} \left(\ln t' - \frac{v_0}{v_e} \right), \text{ e quindi}$$

integrando fra $t' = 1$ e $t' = 1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0}$, (ovvero fra 0 e t):

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \frac{m_r v_e t_0}{m_p} \left[t' \ln t' - t' \left(1 + \frac{v_0}{v_e} \right) \right]_{t'=1}^{t'=1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0}} = \\ &= \left(\frac{m_r v_e t_0}{m_p} - v_e t \right) \left[\ln \left(1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0} \right) \right] + (v_0 + v_e) t = \\ &= \frac{v_e^2}{a_0} \left(1 - \frac{a_0 t}{v_e} \right) \left[\ln \left(1 - \frac{a_0 t}{v_e} \right) \right] + (v_0 + v_e) t, \end{aligned}$$

avendo indicato con:

$$\mathbf{a}_0 = \left(\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right)_{t=0} = \left[\left(-\mathbf{v}_e \frac{1}{1 - \frac{m_p}{m_r} \frac{t}{t_0}} \right) \left(-\frac{m_p}{m_r} \frac{1}{t_0} \right) \right]_{t=0} = \frac{m_p}{m_r} \frac{\mathbf{v}_e}{t_0},$$

l'accelerazione iniziale del missile.

L'accelerazione di gravità intesa come grandezza vettoriale in funzione

della quota risulta: $\overline{\mathbf{g}(\mathbf{h})} = \overline{\mathbf{g}} \left(\frac{\mathbf{R}_0}{\mathbf{R}_0 + \mathbf{h}} \right)^2$, con: $\mathbf{h} = \int_0^t \overline{\mathbf{v}_r(t)} \cdot \overline{\mathbf{k}(t)} dt$,

essendo $\mathbf{k}(t)$ il versore della direzione verticale, (o più precisamente della congiungente i baricentri del corpo celeste e del missile), per cui in caso di moto in presenza di un campo gravitazionale, (in cui cioè, parte dell'energia propulsiva è spesa per mantenere sospeso il veicolo), l'equazione, (vettoriale), generale risulta:

$$m_r \frac{d\overline{\mathbf{v}_r(t)}}{dt} + \frac{dm_r(t)}{dt} \overline{\mathbf{v}_e(t)} + \overline{\mathbf{g}(\mathbf{h})} m_r(t) \left[\frac{\mathbf{R}_0}{\mathbf{R}_0 + \int_0^t \overline{\mathbf{v}_r(t)} \cdot \overline{\mathbf{k}(t)} dt} \right]^2 = 0$$

In caso di lanci spaziali la direzione del moto da verticale al decollo, si inclina progressivamente fino a divenire orizzontale all'ingresso in orbita.

E' infatti possibile, inclinando il missile, ottenere una qualunque direzione della spinta propulsiva e quindi della direzione del moto.

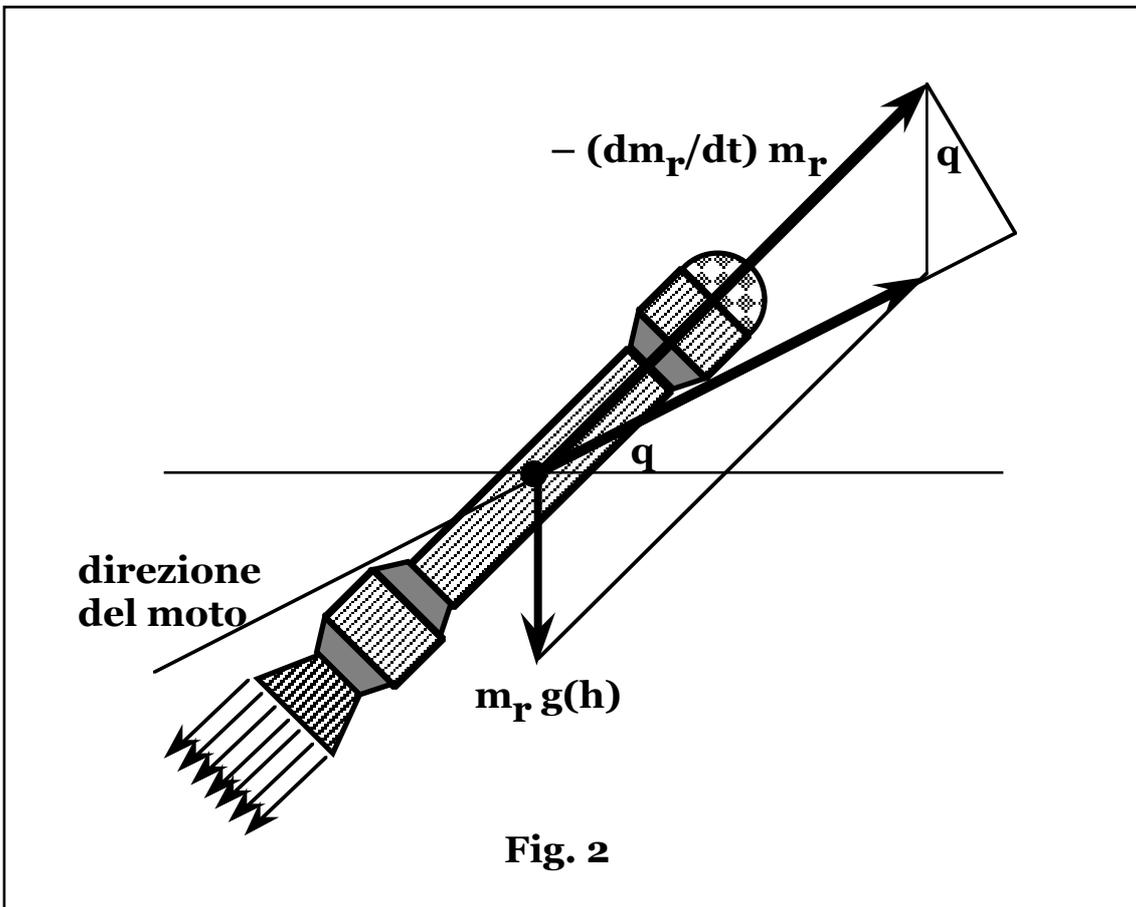


Fig. 2

L'angolo di inclinazione della direzione del moto, (q), infatti, è esprimibile in funzione dell'angolo di inclinazione della portata di propellente o spinta, ($p + q$), tramite la relazione, (Fig. 2):

$$AB = - \frac{dm_r}{dt} v_e \sin p = m_r g(h) \cos q,$$

da cui: $\sin p = \frac{-m_r g(h)}{\frac{dm_r}{dt} v_e} \cos q$; $p = \arcsin \left\{ - \frac{m_r g(h)}{\frac{dm_r}{dt} v_e} \cos q \right\}$,

e quindi: $(p + q) = q + \arcsin \left\{ - \frac{m_r g(h)}{\frac{dm_r}{dt} v_e} \cos q \right\} =$

$$= q + \arcsin \left\{ - \frac{m_r g}{\frac{dm_r}{dt} v_e} \left(\frac{R_o}{R_o + h} \right)^2 \cos q \right\}.$$

In particolare il moto può essere considerato su traiettoria prestabilita ad inclinazione q costante, (spirale), fra la direzione del moto e il piano

tangente alla locale superficie equipotenziale del campo gravitazionale, (orizzontale).

In tal caso il moto può essere schematizzato come la salita su di un piano inclinato a pendenza costante, (\mathbf{q}), altezza totale \mathbf{h} e lunghezza pari a: $\mathbf{h}/\sin \mathbf{q}$.

Delle forze presenti, quella gravitazionale: $\mathbf{m}_r \mathbf{g} \left(\frac{\mathbf{R}_0}{\mathbf{R}_0 + \mathbf{h}} \right)^2$, risulta decrescente all'aumentare della quota, (o del tempo), diminuendo sia la massa del missile che la locale forza di attrazione gravitazionale, mentre per portata e velocità di efflusso del propellente costanti, la spinta propulsiva risulta pure costante, (e quindi l'accelerazione risulta crescente), per cui, affinché non vari l'inclinazione della direzione del moto sull'orizzontale, l'inclinazione dell'asse del missile deve essere ridotta dal decollo, ($\mathbf{h} = \mathbf{0}$), all'entrata in orbita.

Proiettando la relazione dinamica nella direzione del moto, si ottiene:

$$-\mathbf{v}_e \frac{d\mathbf{m}_r}{dt} \cos \mathbf{p} - \mathbf{m}_r \mathbf{g}(\mathbf{h}) \sin \mathbf{q} = \mathbf{m}_r \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \cos \mathbf{p},$$

con: $-\frac{d\mathbf{m}_r}{dt} \mathbf{v}_e \sin \mathbf{p} = \mathbf{m}_r \mathbf{g}(\mathbf{h}) \cos \mathbf{q}.$

Per valori sufficientemente elevati del rapporto: $-\frac{d\mathbf{m}_r}{dt} \mathbf{v}_e$, fra la spinta propulsiva e la forza di attrazione gravitazionale, è possibile considerare la direzione della spinta coincidente con quella del moto, ($\cos \mathbf{p} \sim \mathbf{1}$), per cui proiettando la relazione di bilancio dinamico in questa direzione si ottiene:

$$\mathbf{m}_r \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \mathbf{m}_r \mathbf{g}(\mathbf{h}) \sin \mathbf{q} + \mathbf{v}_e \frac{d\mathbf{m}_r}{dt} = \mathbf{0},$$

ovvero: $\mathbf{m}_r \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \mathbf{g}(\mathbf{h}) \sin \mathbf{q} \right) = -\mathbf{v}_e \frac{d\mathbf{m}_r}{dt}.$

Alternativamente nelle medesime ipotesi, si ottiene il medesimo risultato considerando il bilancio energetico in un tempo infinitesimo $d\mathbf{t}$, si ha che il lavoro compiuto sul missile dalla portata di propellente espulso, è pari all'aumento dell'energia potenziale, (di quota), e cinetica, del missile:

$$-\frac{d\mathbf{m}_r}{dt} \mathbf{v}_e \mathbf{v}_r \cos \mathbf{p} d\mathbf{t} = \mathbf{m}_r \mathbf{g}(\mathbf{h}) d\mathbf{h} + \mathbf{m}_r \mathbf{v}_r \cos \mathbf{p} d\mathbf{v}_r, \text{ con: } \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{v}_r \sin \mathbf{q}.$$

Introducendo il valore medio dell'accelerazione di gravità:

$$\frac{1}{h} \int_0^h g \left(\frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2 dh = g \frac{R_0}{R_0 + h},$$

e integrando dalla partenza fino alle condizioni orbitali, si ottiene:

$$\frac{m_r}{m_r - m_p} = e \frac{v_s(h) + t_0 g \frac{R_0}{R_0 + h} \sin q}{I_{sp}},$$

ovvero:
$$\frac{m_p}{m_r} = 1 - e \frac{v_s(h) + t_0 g \frac{R_0}{R_0 + h} \sin q}{I_{sp}},$$

con t_0 tempo totale fra il decollo e il raggiungimento delle condizioni che permettono l'entrata in orbita.

In presenza di atmosfera, (almeno nella prima parte del viaggio), occorre introdurre due coefficienti correttivi per tener conto della resistenza atmosferica, (r_a), e della pressione allo scarico del diffusore diversa da zero, (r_s), che introdotti nelle relazioni comportano il risultato finale:

$$\frac{m_p}{m_r} = 1 - e \frac{v_s(h) + t_0 g \frac{R_0}{R_0 + h} \sin q}{r_a r_s I_{sp}}.$$

Per portata, (e quindi spinta), costante di propellente, (dm_r/dt), e quindi massa totale del missile linearmente decrescente nel tempo, supposto il completo consumo del combustibile nel tempo totale di

operazione del motore a razzo, (t_0): $t_0 = \frac{m_p}{-\frac{dm_r}{dt}}$, indicando con a_0

l'accelerazione iniziale del missile nella direzione del moto, si ha:

$$m_r \left(\frac{dv_r}{dt} + g(h) \sin q \right) = m_r a_0 = -v_e \frac{dm_r}{dt} = -I_{sp} \frac{dm_r}{dt}, \text{ da cui:}$$

$$-\frac{dm_r}{dt} = \frac{m_r a_0}{I_{sp}}, \text{ e quindi: } t_0 = \frac{m_p I_{sp}}{m_r a_0},$$

da cui:
$$\frac{m_p}{m_r} = 1 - e \frac{v_s(h) + \frac{m_p I_{sp}}{m_r a_0} g \frac{R_0}{R_0 + h} \sin q}{r_a r_s I_{sp}}.$$

Il tempo totale di espulsione del propellente a portata, (e quindi spinta),

costante: $t_o = \frac{m_p I_{sp}}{m_r a_o}$, tenuto conto della riduzione della massa totale

del missile nel tempo, corrisponde a una accelerazione crescente del missile dal valore iniziale, (a_o), a quello finale:

$$a_o \frac{m_r}{m_r - m_p} = a_o \frac{1}{1 - \frac{m_p}{m_r}}, \text{ ovvero a un piano di volo in cui il missile}$$

acquista nel tempo t_o la velocità massima, quindi rallenta per azione della forza gravitazionale, fino alla velocità orbitale, $v_s(h)$, alla quota h e non coincide quindi con il reale tempo totale di volo nel quale l'accelerazione viene ridotta progressivamente fino al valore zero di ingresso in orbita, in maniera da ottenere una velocità crescente da zero a $v_s(h)$, per limitare le perdite per resistenze atmosferiche e limitare le sollecitazioni alle strutture e all'eventuale equipaggio.

In ogni caso comunque, circa i bilanci energetici, (che a meno degli attriti atmosferici crescenti con l'inclinazione della rotta, risultano unicamente in un aumento di energia cinetica e potenziale di quota del proietto), è possibile considerare il moto lungo la verticale.

Si ottiene, in tal caso:

$$m_r \frac{dv_r}{dt} + m_r g(h) + v_e \frac{dm_r}{dt} = 0,$$

ovvero:
$$m_r \left(\frac{dv_r}{dt} + g(h) \right) = -v_e \frac{dm_r}{dt},$$

$$\frac{v_s(h) + t_o g \frac{R_o}{R_o + h}}{I_{sp}}$$

da cui integrando:
$$\frac{m_r}{m_r - m_p} = e^{\frac{v_s(h) + t_o g \frac{R_o}{R_o + h}}{I_{sp}}},$$

$$\frac{v_s(h) + t_o g \frac{R_o}{R_o + h}}{I_{sp}}$$

ovvero:
$$\frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\frac{v_s(h) + t_o g \frac{R_o}{R_o + h}}{I_{sp}}},$$

$$-\frac{v_s(h) + t_o g \frac{R_o}{R_o + h}}{I_{sp}}$$

e in presenza di atmosfera:
$$\frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\frac{v_s(h) + t_o g \frac{R_o}{R_o + h}}{r_a r_s I_{sp}}}.$$

Il tempo totale di espulsione del propellente a portata costante, risulta:

$$t_o = \frac{m_p I_{sp}}{m_r a_o}, \text{ da cui: } \frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\frac{v_s(h) + \frac{m_p I_{sp} g R_o}{m_r a_o R_o + h}}{r_a r_s I_{sp}}}$$

Le due espressioni appaiono solo formalmente diverse, in quanto l'accelerazione da considerarsi è in un caso la componente di quella totale diretta secondo la retta inclinata dell'angolo q rispetto all'orizzontale e nell'altro la totale diretta secondo la verticale per cui intendendo con a_o il modulo dell'accelerazione totale, in caso di moto lungo traiettoria inclinata, la componente da considerare vale: $a_o \sin q$ e il risultato diviene il medesimo.

La massima velocità finale di un missile di assegnate prestazioni, (impulso specifico del propellente), e suddivisione di masse, (fra strutture, impianto di potenza, propellente e carico utile), si otterrebbe idealmente eliminando, insieme al propellente, ogni massa connessa col sistema di propulsione, in modo da avere, al termine del volo, solo il carico utile.

In pratica è possibile approssimare tale espulsione continua di massa, con uno schema a più stadi staccabili al termine del loro utilizzo.

Si realizzano, pertanto, vettori a più stadi costituiti da più sezioni propulsive collegate, che vengono innescate in sequenza ed eliminate non appena terminata la loro azione propulsiva, in modo che la velocità iniziale di ogni sezione sia pari alla somma di quelle finali degli stadi precedenti.

La velocità finale del proietto risulta diverse volte maggiore a quella ottenibile da un missile monostadio di pari prestazioni e suddivisione di masse.

Infatti indicando con m_{ri} e $m_{bi} = m_{ri} - m_{pi}$, le masse rispettivamente iniziali e finali dell' i esimo stadio del missile, (con ordine di conteggio inverso di quello di utilizzazione), e in caso di volo libero, (la metodologia è qualitativamente applicabile anche al volo in presenza di un campo gravitazionale), si ottiene:

$$\frac{m_{ri} + \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}}{m_{bi} + \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}} = e^{\frac{(v_{si} - v_{si-1})}{I_{spi}}}$$

Indicando con: $L_i = \frac{1}{m_{ri}} \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}$, il "fattore di carico utile", e con:

$b_i = \frac{m_{bi}}{m_{ri}}$, il rapporto fra le masse finali e iniziali dello stadio si ottiene:

$$\frac{m_{ri} + \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}}{m_{bi} + \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}} = \frac{1 + L_i}{b_i + L_i} = e^{\frac{(v_{si} - v_{si-1})}{I_{spi}}}$$

Le condizioni di massimo incremento di velocità si ottengono ponendo:

$$\frac{d}{di} \frac{(v_{si} - v_{si-1})}{I_{spi}} = 0,$$

ovvero:
$$\frac{b_i + L_i}{1 + L_i} \frac{d}{di} \left(\frac{1 + L_i}{b_i + L_i} \right) = \frac{(b_i - 1) \frac{dL_i}{di} - (1 + L_i) \frac{db_i}{di}}{(1 + L_i)(b_i + L_i)} = 0.$$

Per: $b_i \sim \text{costante} = b$, (ed evidentemente minore di 1), si ottiene quindi: $dL_i/di = 0$, ovvero: $L_i = \text{costante} = L$, (massa di ogni stadio proporzionale alla somma dei rimanenti), e l'incremento di velocità, (a parità di impulso specifico in tutti gli stadi), risulta costante per ogni stadio: $v_{si} - v_{s(i-1)} = \text{costante} = Dv_s = I_{sp} \ln\left(\frac{1 + L}{b + L}\right)$ e pertanto per n

stadi la velocità finale, (v_s), del missile risulta: $v_s = nI_{sp} \ln\left(\frac{1 + L}{b + L}\right)$.

L'incremento totale di velocità, può quindi essere aumentato a piacere aumentando il numero, (n), degli stadi, con soluzione di compromesso mediata fra opposte esigenze di prestazioni da un lato, e affidabilità, complessità e costo del sistema, dall'altro.

Per una valutazione comparativa con missili monostadio, posto in condizioni di ottimizzazione: $L_i = \text{costante} = L$, la massa totale m_{rn} di un missile a n stadi, (supposto che al distacco dell'ultimo stadio

rimanga solo il carico utile m_u), risulta: $m_{rn} = m_u \left(1 + \frac{1}{L}\right)^n$, pertanto

per un missile monostadio di pari massa totale al decollo, si ottiene:

$$\frac{m_r}{m_b} = \frac{m_u \left(1 + \frac{1}{L}\right)^n}{m_b} = e^{\frac{v_s}{I_{sp}}},$$

ovvero una velocità finale pari a: $v_s = I_{sp} \ln \left[\frac{m_u}{m_b} \left(1 + \frac{1}{L}\right)^n \right]$.

In realtà tuttavia, supposto che per un missile monostadio la massa del carico utile sia molto minore di quella totale relativa ai sistemi di propulsione, la variazione di massa totale risulta imputabile al consumo di propellente e quindi: $m_r/m_b \sim 1/b$, da cui: $v_s = I_{sp} \ln \frac{1}{b}$.

In caso di volo in presenza di un campo gravitazionale e atmosfera, si

$$\text{ha: } \frac{m_{ri} + \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}}{m_{bi} + \sum_{j=1}^{i-1} m_{ri}} = e^{\frac{(v_{si} - v_{si-1}) + \left(1 - \frac{m_{bi}}{m_{ri}}\right) \frac{I_{spi}}{a_{oi}} g \frac{R_o}{R_o + h}}{r_a r_s I_{spi}}},$$

$$\text{ovvero: } \frac{1 + L_i}{b_i + L_i} = e^{\frac{(v_{si} - v_{si-1}) + (1 - b_i) \frac{I_{spi}}{a_{oi}} g \frac{R_o}{R_o + h}}{r_a r_s I_{spi}}}, \text{ e quindi:}$$

$(v_{si} - v_{si-1}) = r_a r_s I_{spi} \ln \left(\frac{1 + L_i}{b_i + L_i} \right) - (1 - b_i) \frac{I_{spi}}{a_{oi}} g \frac{R_o}{R_o + h}$, per cui differenziando, ($b_i \sim$ costante), si ottengono gli stessi risultati:

$$\begin{aligned} v_{si} - v_{s(i-1)} &= \text{costante} = Dv_s = \\ &= r_a r_s I_{sp} \ln \left(\frac{1 + L}{b + L} \right) \pm (1 - b) \frac{I_{sp}}{a_o} g \frac{R_o}{R_o + h}; \\ v_s &= n r_a r_s I_{sp} \ln \left(\frac{1 + L}{b + L} \right) - n(1 - b) \frac{I_{sp}}{a_o} g \frac{R_o}{R_o + h}, \end{aligned}$$

mentre in caso di missili monostadio, si ha:

$$\frac{m_r}{m_b} \approx \frac{1}{b} = e^{\frac{v_s + \left(1 - \frac{m_b}{m_r}\right) \frac{I_{sp}}{a_o} g \frac{R_o}{R_o + h}}{r_a r_s I_{sp}}},$$

da cui:
$$\mathbf{v_s} = \mathbf{r_a r_s I_{sp}} \ln \frac{1}{\mathbf{b}} - (1 - \mathbf{b}) \frac{\mathbf{I_{sp}}}{\mathbf{a_o}} \mathbf{g} \frac{\mathbf{R_o}}{\mathbf{R_o} + \mathbf{h}}.$$

La soluzione missilistica a più stadi risulta evidentemente incompatibile con la realizzazione di vettori interplanetari riutilizzabili, mentre in caso di propulsori nucleari non essendo pensabile realizzare sezioni propulsive a perdere, (a meno di contenitori di combustibile necessari al decollo), sia per motivi di inquinamento e sicurezza, che di costi essendo la sezione propulsiva quella di massimo valore, si limita l'analisi dei lanciatori a sistemi monostadio.

Indicando con:

- $\mathbf{m_r}$ massa totale del veicolo;
- $\mathbf{m_p}$ massa totale del propellente;
- $\mathbf{m_t}$ massa totale dei serbatoi di propellente;
- $\mathbf{m_s}$ massa delle strutture connesse;
- $\mathbf{m_e}$ massa dell'apparato di pompaggio;
- $\mathbf{m_n}$ massa del sistema propulsivo nucleare;
- $\mathbf{m_f}$ massa dell'ugello e delle strutture reggispinta,

si ha:
$$\mathbf{m_r} = \mathbf{m_p} + \mathbf{m_t} + \mathbf{m_s} + \mathbf{m_e} + \mathbf{m_n} + \mathbf{m_f} + \mathbf{m_u}.$$

Dal punto di vista strutturale fra le masse dei diversi componenti del sistema possono porsi le seguenti relazioni lineari:

$$\mathbf{m_s} = \mathbf{c_{n1}} \mathbf{m_t}; \quad \mathbf{m_t}/\mathbf{m_p} = \mathbf{c_{n2}};$$

da cui:
$$\mathbf{m_t} + \mathbf{m_s} = \mathbf{c_{n2}} (\mathbf{c_{n1}} + 1) \mathbf{m_p};$$

$$\mathbf{m_e} = \mathbf{c_{n3}} \mathbf{m_r} + \mathbf{c_{n4}};$$

$$\mathbf{m_n} + \mathbf{m_f} = \mathbf{c_{n5}} \mathbf{m_r} + \mathbf{c_{n6}}.$$

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{m_r} = \frac{1 + \mathbf{c_{n2}}(\mathbf{c_{n1}} + 1)}{1 - \mathbf{c_{n3}} - \mathbf{c_{n5}}} \mathbf{m_p} + \frac{1}{1 - \mathbf{c_{n3}} - \mathbf{c_{n5}}} \mathbf{m_u} + \frac{\mathbf{c_{n4}} + \mathbf{c_{n6}}}{1 - \mathbf{c_{n3}} - \mathbf{c_{n5}}}.$$

Circa i propulsori chimici, le relazioni risultano qualitativamente simili, a meno della mancanza del termine $\mathbf{c_{c6}}$ non essendovi in pratica alcuna massa critica estrapolata a zero:

$$\mathbf{m_r} = \frac{1 + \mathbf{c_{c2}}(\mathbf{c_{c1}} + 1)}{1 - \mathbf{c_{c3}} - \mathbf{c_{c5}}} \mathbf{m_p} + \frac{1}{1 - \mathbf{c_{c3}} - \mathbf{c_{c5}}} \mathbf{m_u} + \frac{\mathbf{c_{c4}}}{1 - \mathbf{c_{c3}} - \mathbf{c_{c5}}}.$$

Il dimensionamento di un lanciatore nucleare in grado di inserire un carico utile, ($\mathbf{m_u}$), in un'orbita circolare di altezza \mathbf{h} sul livello del mare, può quindi essere effettuato combinando la relazione strutturale con l'equazione del rapporto di massa, ovvero col sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_r = \frac{1 + c_{n2}(c_{n1} + 1)}{1 - c_{n3} - c_{n5}} m_p + \frac{1}{1 - c_{n3} - c_{n5}} m_u + \frac{c_{n4} + c_{n6}}{1 - c_{n3} - c_{n5}} \\ \frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\frac{v_s(h) + \frac{m_p I_{spn}}{m_r a_o} g \frac{R_t}{R_t+h}}{r_a r_s I_{spn}}} \end{array} \right. ,$$

La seconda relazione può essere risolta per via iterativa, ottenendo: $m_p/m_r = c_{n7}$.

Nell'equazione: $\frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\left[\frac{v_s(h)}{r_a r_s I_{sp}} + \frac{m_p}{m_r} \frac{g}{a_o r_a r_s} \frac{R_t}{R_t+h} \right]}$, infatti, la

pendenza della funzione a secondo membro:

$$\frac{g}{a_o r_a r_s} \frac{R_t}{R_t+h} e^{-\left[\frac{v_s(h)}{r_a r_s I_{sp}} + \frac{m_p}{m_r} \frac{g}{a_o r_a r_s} \frac{R_t}{R_t+h} \right]}$$

risulta comunque inferiore al valore unitario della pendenza della funzione a primo membro, (m_p/m_r) , per ogni valore di I_{sp} , per cui l'equazione ammette una sola radice.

Si ricava quindi:

$$m_r = \frac{1 + c_{n2}(c_{n1} + 1)}{1 - c_{n3} - c_{n5}} c_{n7} m_r + \frac{1}{1 - c_{n3} - c_{n5}} m_u + \frac{c_{n4} + c_{n6}}{1 - c_{n3} - c_{n5}}$$

$$\text{ovvero: } m_r = \frac{m_u}{1 - c_{n3} - c_{n5} - c_{n7} - c_{n2} c_{n7} (c_{n1} + 1)} + \frac{c_{n4} + c_{n6}}{1 - c_{n3} - c_{n5} - c_{n7} - c_{n2} c_{n7} (c_{n1} + 1)} = f_n(m_u).$$

Analogamente per lanciatori chimici, dal sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_r = \frac{1 + c_c2(c_c1 + 1)}{1 - c_c3 - c_c5} m_p + \frac{1}{1 - c_c3 - c_c5} m_u + \frac{c_c4}{1 - c_c3 - c_c5} \\ \frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\frac{v_s(h) + \frac{m_p I_{spc}}{m_r a_o} g \frac{R_t}{R_t+h}}{r_a r_s I_{spc}}} \end{array} \right. ,$$

(nel quale la seconda relazione può ancora essere risolta per via iterativa, ottenendo: $m_p/m_r = c_c7$), si ricava:

$$m_r = \frac{m_u}{1 - c_c3 - c_c5 - c_c7 - c_c2 c_c7 (c_c1 + 1)} +$$

$$+ \frac{c_{c4}}{1 - c_{c3} - c_{c5} - c_{c7} - c_{c2}c_{c7}(c_{c1} + 1)} = f_c(m_u).$$

Poichè i propulsori nucleari permettono maggiori valori dell'impulso specifico rispetto a quelli chimici, ($I_{sp_n} > I_{sp_c}$), all'aumentare del carico utile, la massa di propellente necessaria, (e quindi la massa totale), del lanciatore nucleare cresce più lentamente di quella relativa ai lanciatori chimici, si ha, cioè: $\frac{df_n(m_u)}{dm_u} < \frac{df_c(m_u)}{dm_u}$, ovvero:

$$\frac{1}{1 - c_{n3} - c_{n5} - c_{n7} - c_{n2}c_{n7}(c_{n1} + 1)} < \frac{1}{1 - c_{c3} - c_{c5} - c_{c7} - c_{c2}c_{c7}(c_{c1} + 1)}$$

Infatti al crescere del valore dell'impulso specifico I_{sp} da zero a infinito, il rapporto m_p/m_r , decresce dal valore unitario: $\lim_{I_{sp} \rightarrow 0} \frac{m_p}{m_r} = 1$,

$$\left[\frac{df(m_u)}{dm_u} \rightarrow \infty \right], \text{ a zero, } \left[\frac{df(m_u)}{dm_u} \rightarrow 0 \right], \text{ come si evince dall'equazione:}$$

$$\frac{m_p}{m_r} = 1 - e^{-\left[\frac{v_s(h)}{r_a r_s I_{sp}} + \frac{m_p g}{m_r a_0 r_a r_s R_t + h} \right]}$$

in cui nelle condizioni limite: $I_{sp} \rightarrow \infty$, le curve a primo e secondo membro passano entrambe per l'origine degli assi e la radice, (unica), dell'equazione coincide quindi col valore nullo del rapporto m_p/m_r .

La massa di estrapolazione a zero del carico utile, invece, risulta maggiore nel caso di propulsione nucleare per la presenza della massa critica del reattore.

Si ottiene pertanto una massa di carico utile limite, $[(m_u)_{lim}]$, radice dell'equazione: $f_n(m_u) = f_c(m_u)$, al di sotto della quale risulta conveniente, (almeno circa la massa totale del lanciatore), la propulsione chimica e al di sopra della quale, invece, risulta conveniente la propulsione nucleare.

3 - ANALISI NUMERICA DELLE PRESTAZIONI COMPARATIVE DEI PROPULSORI AEROSPAZIALI CHIMICI E NUCLEARI.

Per l'analisi numerica delle prestazioni comparative dei propulsori aerospaziali chimici e nucleari, considerando una missione per la

messa in orbita sincrona di un carico utile m_u , si ha: $h = 3,5818 \cdot 10^7$ m; $v_s(h) = 3.067,3$ m/s, mentre si può stimare:

$r_a \sim r_s = 0,96 \div 0,98$, da cui: $r_a r_s = 0,94$.

Posto, inoltre: $a_0 = 1,5$ g, ($1,1$ g < $a_0 = 2$ g), e calcolato il valore medio dell'accelerazione di gravità in funzione della quota:

$$\frac{1}{h} \int_0^h g(h) dh = \frac{g}{h} \int_0^h \left(\frac{R_t}{R_t + h} \right)^2 dh = g \frac{R_t}{R_t + h} = 0,15g, \text{ da cui:}$$

$$\frac{g}{a_0} \frac{R_t}{R_t + h} = 0,1, \text{ si ottiene: } (m_p/m_r)_n = 0,36, (m_p/m_r)_c = 0,5827,$$

ovvero una massa frazionaria del missile al netto del propellente:

$[(m_r - m_p)/m_r]$, disponibile quindi, (oltre che per motori, strutture, apparecchiature ausiliarie), per il carico utile, che passa dal **64** al **42%**, con un decremento del **34%**.

Introducendo l'analisi delle componenti strutturali dei sistemi, per il lanciatore nucleare si ottiene il valore delle costanti:

$$c_{n1} = 0,01 \div 0,1 \quad c_{n2} = 0,1 \div 0,3 \quad c_{n3} = 0,006$$

$$c_{n4} = 50 \text{ kg} \quad c_{n5} = 0,1 \quad c_{n6} = 250 \div 2.000 \text{ kg.}$$

Posto: $c_{n2}(c_{n1} + 1) = 0,211$; $c_{n4} + c_{n6} = 950$ kg, si ottiene:

$$m_r = 1,3546 m_p + 1,12 m_u + 1.065.$$

Circa il valore dell'impulso specifico ottenibile, si pone:

$$I_{sp_n} = |v_e| = 8.000 \text{ m/s,}$$

e quindi il sistema risolutivo risulta:

$$\begin{cases} m_r = 1,3546 m_p + 1,12 m_u + 1.065 \\ \frac{m_p}{m_r} = 1 - 0,665 e^{-0,11 \frac{m_p}{m_r}} \end{cases},$$

da cui: $m_p/m_r = 0,36$ e quindi: $m_r = 2,186 m_u + 2.079$.

Per il lanciatore chimico, la medesima analisi strutturale porge paragonabili valori delle analoghe costanti: c_{c1} , c_{c2} , c_{c3} , c_{c4} , mentre risulta: $c_{c5} = 0,025$, da cui: $1 - (c_{c3} + c_{c5}) = 0,969$ e quindi: $m_r = 1,2497 m_p + 1,032 m_u + 51,6$.

Circa il valore dell'impulso specifico ottenibile, si pone:

$$I_{sp_c} = |v_e| = 4.000 \text{ m/s,}$$

e quindi il sistema risolutivo risulta:

$$\begin{cases} m_r = 1,2497 m_p + 1,032 m_u + 51,6 \\ \frac{m_p}{m_r} = 1 - 0,4423 e^{-0,1 \frac{m_p}{m_r}} \end{cases},$$

da cui: $m_p/m_r = 0,5827$ e quindi: $m_r = 3,7969 m_u + 190$.

Risulta pertanto: $(m_u)_{lim} = 1.173 \text{ kg}$, per un carico totale:

$m_r = 4.642 \text{ kg}$ e una frazione di carico utile: $m_u/m_r = 0,25$.

Passando dal lanciatore nucleare al propulsore chimico, l'incremento frazionario della massa totale del missile, (m_r), a parità di carico utile,

$$(m_u), \text{ risulta infine: } \frac{\frac{df_c(m_u)}{dm_u} - \frac{df_n(m_u)}{dm_u}}{\frac{df_c(m_u)}{dm_u}} \approx 0,42.$$
