Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

Dimensionamento di reti fluidodinamiche aperte. Metodo del ramo principale.

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

DIMENSIONAMENTO DI RETI FLUIDODINAMICHE APERTE METODO DEL RAMO PRINCIPALE.

1 – INTRODUZIONE.

E' noto che il dimensionamento di reti fluidodinamiche aperte risulta agevolmente determinabile con trattazioni teoriche elementari, ma che introducono relazioni non immediatamente valutabili al punto da giustificare il massiccio impiego di diagrammi pratici che ha fatto perdere di vista il modello analitico alla base degli stessi.
Tale modello tuttavia risulta attualmente di immediato e semplice impiego tramite sistemi informatici.
Quanto detto, però, è in realtà riferito alle reti percorse da fluidi incomprimibili, in quanto nel caso di fluidi comprimibili si ricorre a diversi artifici per ricondursi a modelli di calcolo assimilabili al caso di fluidi incomprimibili, mentre è parimenti possibile determinare un modello di calcolo rigoroso di cui si riporta la trattazione atta a identificare le relazioni di dimensionamento immediatamente trasferibili su programmi di calcolo.

2– METODO DEL RAMO PRINCIPALE.

Una rete aperta comunque complessa consiste in una serie di successive ramificazioni a partire dalla condotta di adduzione iniziale fino alle diverse utenze e comprende quindi sezioni, (nodi), nelle quali la portata si ripartisce nei diversi rami a seconda dell'impedenza fluidodinamica che ogni via oppone al passaggio del fluido, ovvero della perdita di carico per unità di lunghezza:

$$\mathbf{R = - dp/dL}.$$

Il dimensionamento della rete consiste pertanto nella determinazione di quei diametri delle diverse tubazioni, (che concorrono a formare l'impedenza stessa), tali per cui le portate risultino quelle richieste dalle utenze.

Si indica come **ramo principale**, (**RP**), di una rete aperta comunque complessa, (**Fig..1**), quel tratto compreso fra la sezione iniziale di pompaggio e una delle sezioni terminali, che appare per geometria e costituzione, il più sfavorito, ovvero affetto dalle maggiori perdite di carico.

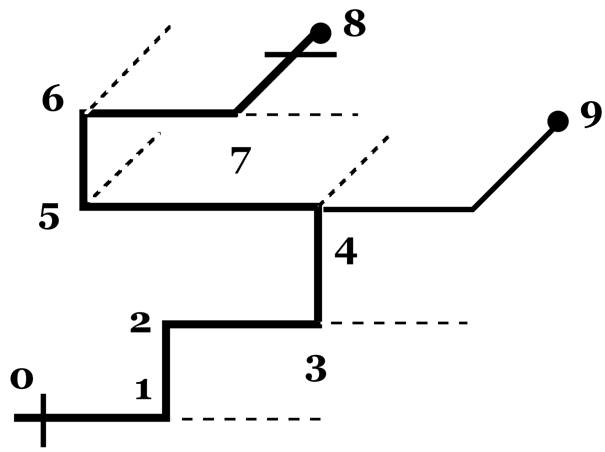

Fig.1

Il **metodo del ramo principale** consiste nel dimensionamento del ramo stesso come una condotta semplice, fissando un valore costante delle perdite di carico per unità di lunghezza, (**R**).

3– FLUIDI INCOMPRIMIBILI.

In caso di **fluidi incomprimibili**, indicando con:

k_a coefficiente di attrito fluidodinamico;

f_{ci} coefficiente di incidenza delle perdite concentrate rispetto a quelle distribuite nell'**i**esimo tronco di tubazione;

G_i portata in massa nell'**i**esimo tratto di tubazione;

D_i diametro dell'**i**esimo tratto di tubazione;

d_s densità del fluido,

dall'espressione della perdita di carico per unità di lunghezza geometrica in ogni tratto **i**esimo: $R = \dfrac{8k_a G_i^2}{d_s \pi^2 D_i^5}$, note le rispettive portate, i corrispondenti diametri delle tubazioni si ottengono dal sistema di equazioni indipendenti:

$$D_i^5 = \frac{8k_a G_i^2}{d_s \pi^2 R}, \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

con **n** numero di tratti a sezione costante del ramo principale, ovvero:

$$D_i^5 = \frac{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}{d_s\pi^2 R}, \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

in caso si tenga conto anche delle perdite di carico concentrate.
E' evidente come sia equivalente considerare la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica: $R = \frac{8k_a G_i^2}{d_s\pi^2 D_i^5}$ e inserire l'effetto delle perdite di carico concentrate nella relazione di dimensionamento: $D_i^5 = \frac{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}{d_s\pi^2 R}$, o considerare la perdita di carico estrapolata: $R = \frac{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}{d_s\pi^2 D_i^5}$, da cui direttamente la medesima relazione di dimensionamento, senza ulteriori correzioni.
Note la pressione richiesta all'utenza e la geometria della rete, fissata la perdita di carico per unità di lunghezza, (**R**), risulta nota la pressione, (p_i), in ogni nodo del ramo stesso, (o più in generale in ogni sua sezione): $p_i = p_o - R\sum_o^i (1 + f_{ci})L_i - \sum_o^i Dp_{gi}$,

con: $\sum_o^i (1 + f_{ci})L_i$, lunghezza totale estrapolata dalla sezione di pompaggio all'**i**esimo nodo;

$\sum_o^i Dp_{gi}$, perdita geodetica globale dalla sezione di pompaggio all'**i**esimo nodo,

e poichè la pressione richiesta alla mandata della sezione di pompaggio, (p_o), risulta: $p_o = (p_u)_{RP} + (Dp_g)_{RP} + R(1 + f_c)L_{RP}$,

con: $(p_u)_{RP}$ pressione richiesta all'utenza collegata al ramo principale;

$(Dp_g)_{RP}$ perdita geodetica globale lungo tutto il ramo principale;

$R(1 + f_c)L_{RP}$ perdite di carico globali lungo tutto il ramo principale;

f_c valore medio del coefficiente f_{ci}.

si ottiene:

$$\mathbf{p_i = (p_u)_{RP} + (Dp_g)_{RP} - \sum_o^i Dp_{gi} + R\left[(1 + f_c)L_{RP} - \sum_o^i (1 + f_{ci})L_i\right]}.$$

Per ogni ramo secondario compreso fra l'**i**esimo nodo del ramo principale e la **k**esima utenza, risulta dunque imposta la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica, ($\mathbf{R_{ik}}$), disponibile, pari a:

$$\mathbf{R_{ik} = \frac{p_i - Dp_{gik} - (p_u)_k}{L_{ik}}},$$

con: $\mathbf{Dp_{gik}}$ perdita geodetica totale nel ramo secondario **ik**;

$\mathbf{(p_u)_k}$ pressione richiesta dalla **k**esima utenza;

$\mathbf{L_{ik}}$ lunghezza totale del ramo secondario **ik**.

Il dimensionamento di ogni ramo secondario con origine nell'**i**esimo nodo è, pertanto, ottenibile ancora col metodo del ramo principale considerando il suddetto ramo in maniera indipendente, con la condizione che la perdita di carico per unità di lunghezza sia pari a quella disponibile, ($\mathbf{R_{RPi}}$), con riferimento al tratto più sfavorito a partire dal suddetto nodo, (ramo principale dall'**i**esimo nodo, **RPi**), e cioè col sistema di equazioni indipendenti, (comprensive delle perdite di carico concentrate): $\mathbf{D_j^5 = \dfrac{8k_a(1 + f_{cj})G_j^2}{d_s\pi^2 R_{RPi}}}$, ($\mathbf{j = 1, 2, ... n_i}$), con $\mathbf{n_i}$ numero di tratti a sezione costante del nuovo ramo principale **RPi**

Imposta la perdita di carico $\mathbf{R_{RPi}}$, (e note la pressione richiesta all'utenza finale e la geometria della rete), risulta, quindi, ancora nota la pressione, ($\mathbf{p_j}$), in ogni nodo del ramo **RPi**, (o più in generale in ogni sua sezione): $\mathbf{p_j = p_i - R_{RPi}\sum_i^j (1 + f_{cj})L_j - \sum_i^j Dp_{g_j}}$, con: $\mathbf{\sum_i^j (1 + f_{cj})L_j}$ e $\mathbf{\sum_i^j Dp_{gj}}$, lunghezza totale estrapolata e perdita geodetica globale, dall'**i**esimo al **j**esimo nodo, per cui il procedimento può essere completato fino ai rami semplici terminali.

In un generico nodo in cui giungano **n** portate, ($\mathbf{G_{ei}}$), con velocità $\mathbf{c_{ei}}$, ($\mathbf{i = 1, 2, ... n}$), e ne escano **m**, ($\mathbf{G_{uj}}$), con velocità $\mathbf{c_{uj}}$, ($\mathbf{j = 1, 2, ... m}$), per il principio di conservazione dell'energia, deve mantenersi fra monte e valle, l'energia cinetica, (l'unica che può subire variazioni), con ogni aumento/diminuzione in ogni ramo, globalmente compensato da corrispondenti diminuzioni/aumenti negli altri a effetto totale nullo:

$\sum_{i=1}^{n} G_{ei} \frac{c_{ei}^2}{2} = \sum_{j=1}^{m} G_{uj} \frac{c_{uj}^2}{2}$, con: $\sum_{i=1}^{n} G_{ei} = \sum_{j=1}^{m} G_{uj}$, con energia cinetica specifica media in ingresso, $(\frac{c_{em}^2}{2})$, pari a quella in uscita, $(\frac{c_{um}^2}{2})$:

$$\frac{c_{em}^2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_{ei} \frac{c_{ei}^2}{2}}{\sum_{i=1}^{n} G_{ei}} = \frac{\sum_{i=j}^{m} G_{uj} \frac{c_{uj}^2}{2}}{\sum_{i=1}^{n} G_{uj}} = \frac{c_{um}^2}{2}.$$

La medesima relazione, essendo: $\frac{c^2}{2} = \frac{8G^2}{d_s^2 \pi^2 D^4}$; $R = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2}$, assume anche le forme: $\sum_{i=1}^{n} \frac{G_{ei}^3}{D_{ei}^4} = \sum_{j=1}^{m} \frac{G_{uj}^3}{D_{uj}^4}$;

$$\sum_{i=1}^{n} R_{ei} G_{ei} D_{ei} = \sum_{j=1}^{m} R_{uj} G_{uj} D_{uj}; \quad \sum_{i=1}^{n} R_{ei}^{(4/5)} G_{ei}^{(7/5)} = \sum_{j=1}^{m} R_{uj}^{(4/5)} G_{uj}^{(7/5)}.$$

4– FLUIDI COMPRIMIBILI.

In caso di **fluidi comprimibili** non risulta possibile avere una perdita di carico per unità di lunghezza costante a meno di non aumentare con continuità il diametro della condotta stessa.
Infatti risolvendo l'espressione della perdita di carico per unità di lunghezza: $R = -\frac{dp}{dL} = \frac{\frac{8 k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1}}}{\sqrt{1 - \frac{16 k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}}}$, in funzione del diametro, si

ottiene: $\mathbf{D^5(L) = \frac{8k_aG^2L}{\pi^2 p_1 d_{s1}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{p_1^2}{R^2L^2}}\right)}$, ovvero diametro variabile con la distanza, per **R =** costante.
La perdita, che tende a infinito per $\mathbf{L = L_{oc}}$, qualora **R** e/o **L** risultino sufficientemente limitati, ($\mathbf{\frac{p_1}{RL} >> 1}$), diviene coincidente con la relazione valida per i fluidi incomprimibili:

$$\mathbf{D^5 \approx \frac{8k_aG^2L}{\pi^2 p_1 d_{s1}}\left(1 + \frac{p_1}{RL}\right) \approx \frac{8k_aG^2}{\pi^2 R d_{s1}}},$$

essendo in tal caso trascurabili le variazioni di densità.

Essendo in generale a partire da una generica pressione $\mathbf{p_o}$:

$\mathbf{Dp(L) = p_o\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16k_aG^2L}{\pi^2 D^5 d_{so} p_o}}\right)}$, in ogni **i**esimo tratto del ramo principale, il valore medio della perdita di carico per unità di lunghezza, risulta:

$$\mathbf{R = \frac{Dp(L_i)}{L_i} = \frac{p_{(i-1)}}{L_i}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16k_aG_i^2L_i}{\pi^2 D_i^5 d_{s(i-1)} p_{(i\pm1)}}}\right)}.$$

Supponendo fluidi assimilabili a gas, (o miscele di gas), perfetti e trasformazioni isoterme lungo ogni tratto, in generale si ha: $\mathbf{d_s(p, T) = \frac{p}{R_gT}}$, con $\mathbf{R_g}$ costante, (eventualmente media), del fluido e quindi: $\mathbf{d_{s(i-1)} = \frac{p_{(i-1)}}{R_gT_i}}$, da cui:

$\mathbf{R = \frac{Dp(L_i)}{L_i} = \frac{p_{(i-1)}}{L_i}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16k_aG_i^2L_iR_gT_i}{\pi^2 D_i^5 p_{(i-1)}^2}}\right)}$, che risolta in funzione dei diametri dei singoli tratti, ($\mathbf{D_i}$), fornisce il sistema di equazioni indipendenti di dimensionalmento dell'intero ramo principale:

$$\mathbf{D_i^5 = \frac{16k_aG_i^2R_gT_i}{\pi^2\left[2Rp_{(i-1)} - L_iR^2\right]}}, \quad \mathbf{(i = 1, 2, \ldots n_{RP})},$$

ovvero, tenuto conto delle perdite di carico concentrate:

$$\mathbf{D_i^5} = \frac{\mathbf{16k_a(1 + f_{ci})R_gT_iG_i^2}}{\pi^2\left[\mathbf{2Rp_{(i-1)} - L_iR^2}\right]}, \quad \mathbf{(i = 1, 2, \dots n_{RP})},$$

con:
$$\mathbf{p_{(i-1)} = (p_u)_{RP}} + \left[\mathbf{(Dp_g)_{RP}} - \sum_{o}^{i-1}\mathbf{Dp_{gi}}\right] +$$

$$+\mathbf{R}\left[\mathbf{(1 + f_c)L_{RP}} - \sum_{o}^{i-1}\mathbf{(1 + f_{ci})L_i}\right].$$

Affinchè le grandezze assumano significato fisico, (reali e positive), deve risultare: $\dfrac{\mathbf{16k_aG_i^2L_iR_gT_i}}{\pi^2\mathbf{D_i^5p_{(i-1)}^2}} \leq \mathbf{1}$, da cui: $\mathbf{D_i^5} \geq \dfrac{\mathbf{16k_aG_i^2L_iR_gT_i}}{\pi^2\mathbf{p_{(i-1)}^2}}$, con condizione limite: $\mathbf{R = p_{(i-1)}/L_i}$.

Per diametri inferiori, infatti, al termine del tratto di tubazione la pressione diverrebbe negativa e la perdita di carico assumerebbe valori immaginari, (fisicamente per portata in massa e diametro della condotta finiti, alla pressione, e quindi densità, che tende a zero corrisponde una velocità di efflusso che tende all'infinito).

La condizione: $\mathbf{D_i^5} \geq \dfrac{\mathbf{16k_aG_i^2L_iR_gT_i}}{\pi^2\mathbf{p_{(i-1)}^2}}$, diviene: $\mathbf{[p_{(i-1)} - RL_i]^2} \geq \mathbf{0}$, che tenuto conto delle soluzioni introdotte con l'elevazione al quadrato della relazione risolvente, risulta ancora: $\mathbf{R} \leq \mathbf{p_{(i-1)}/L_i}$, per cui la relazione di dimensionamento mantiene comunque significato fisico, con diametro, (reale e positivo), che varia da infinito per $\mathbf{R = 0}$, al suo valore minimo: $\mathbf{D_i^5} = \dfrac{\mathbf{16k_aG_i^2L_iR_gT_i}}{\pi^2\mathbf{p_{(i-1)}^2}}$, per: $\mathbf{R = p_{(i-1)}/L_i}$, ovvero qualora la pressione al termine del tratto sia nulla, (il risultato non è incompatibile con una sezione infinita richiesta a pressione nulla, in quanto il diametro trovato è quello medio nel tratto di condotta e nel calcolo del suo valore come media pesata lungo la tubazione, la pressione risulta nulla solo nel tratto infinitesimo terminale).

Note la pressione richiesta all'utenza, la geometria della rete e i salti geodetici, fissata la perdita di carico per unità di lunghezza, (**R**), risulta quindi ancora nota la pressione in tutti i suoi nodi e quindi la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica, ($\mathbf{R_{ik}}$), disponibile per ogni ramo secondario compreso fra l'**i**esimo nodo del ramo principale e la **k**esima utenza: $\mathbf{R_{ik} = \frac{p_i - Dp_{gik} - (p_u)_k}{L_{ik}}}$.

Il dimensionamento ogni ramo secondario con origine nell'**i**esimo nodo è, pertanto, ottenibile ancora col metodo del ramo principale col sistema di equazioni indipendenti, (comprensive dell'effetto delle perdite di carico concentrate):

$$\mathbf{D_j^5 = \frac{16k_a(1+f_{cj})G_j^2R_gT_j}{\pi^2\left[2R_{RPi}p_{(j-1)} - L_jR_{RPi}^2\right]}}, \quad \mathbf{(j = 1, 2, \dots n_i)},$$

con: $$\mathbf{p_{(j-1)} = (p_u)_{RPi} + \left[(Dp_g)_{RPi} - \sum_{o}^{j-1} Dp_{gj}\right] +}$$

$$\mathbf{+R_{RPi}\left[(1+f_c)L_{RPi} - \sum_{o}^{j-1}(1+f_{cj})L_j\right]},$$

con: $\mathbf{R_{RPi}}$ perdita di carico disponibile riferita al tratto più sfavorito a partire dal suddetto nodo, (ramo principale **RPi**);

$\mathbf{n_i}$ numero di tratti a sezione costante del nuovo ramo principale **RPi**;

$\mathbf{(p_u)_{RPi}}$ pressione richiesta all'utenza collegata al ramo principale **RPi**;

$\mathbf{R_{RPi}(1+f_c)L_{RPi}}$ perdite di carico globali lungo tutto il nuovo ramo principale,

e di seguito fino ai rami semplici terminali.

In pratica data la comune modesta incidenza delle perdite di carico rispetto alle pressioni totali, è possibile supporre la densità costante in ogni tratto di condotta, ovvero variabile a gradini a partire da ogni nodo e utilizzare in ogni ramo il modello relativo ai fluidi incomprimibili con valori medi di densità.

Supponendo trasformazioni isoterme in ogni tratto e indicando con $\mathbf{T_i}$ la temperatura assoluta media del fluido nell'**i**esimo tratto a sezione costante, si ha: $\mathbf{d_{si} = \frac{p_i}{R_gT_i}}$, per cui i diametri delle tubazioni del ramo principale comprensivi dell'effetto delle perdite di carico concentrate, si ottengono dal sistema di equazioni indipendenti:

$$\mathbf{D_i^5} = \frac{\mathbf{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}}{\mathbf{\pi^2 R}} \frac{\mathbf{R_g T_i}}{\mathbf{p_i}},$$ (**i** =**1**, **2**,..., **n**), ovvero:

$$\mathbf{D_i^5} = \frac{\mathbf{8k_a(1 + f_{ci})R_g T_i G_i^2}}{\mathbf{\pi^2 \left\{ R \left[(p_u)_{RP} + (Dp_g)_{RP} - \sum_o^i Dp_{gi} \right] + R^2 \left[(1 + f_c)L_{RP} - \sum_o^i (1 + f_{ci})L_i \right] \right\}}}$$

Qualora si scelga per la pressione in ogni tratto il suo valore all'inizio del tratto stesso, si ottiene una sottostima del diametro della tubazione, (inversamente proporzionale alla pressione stessa), e viceversa in caso di scelta del suo valore al termine del tratto.
Può quindi essere scelto il valore medio di pressione e quindi densità:

$$\mathbf{d_{smi}} = \frac{\mathbf{d_{s(i-1)} + d_{si}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_g T_i}} \left[\frac{\mathbf{p_{(i-1)} + p_i}}{\mathbf{2}} \right],$$

con i diametri delle tubazioni del ramo principale che si ottengono dal sistema di equazioni indipendenti, (comprensive delle perdite di carico concentrate): $\mathbf{D_i^5} = \frac{\mathbf{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}}{\mathbf{d_{smi}\pi^2 R}}$, (**i** =**1**, **2**,..., **n**).
Nota la pressione in ogni nodo del ramo principale, la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica, ($\mathbf{R_{ik}}$), disponibile per ogni ramo secondario compreso fra l'**i**esimo nodo del ramo principale e la **k**esima utenza risulta: $\mathbf{R_{ik}} = \frac{\mathbf{p_i - Dp_{gik} - (p_u)_k}}{\mathbf{L_{ik}}}$ e il dimensionamento di ogni ramo secondario con origine nell'**i**esimo nodo è, pertanto, ottenibile ancora col metodo del ramo principale.

In teoria qualunque tratto fra la sezione iniziale e un'utenza terminale potrebbe essere scelto come ramo principale, dimensionando i rami secondari in base alle conseguenti perdite disponibili.
In tal caso tuttavia non sarebbe più verificata la diseguaglianza $\mathbf{R_{ik} > R}$, ovvero perdite disponibili maggiori di quelle del ramo principale e a partire dall'**i**esimo nodo, il carico totale richiesto nel ramo secondario potrebbe risultare maggiore rispetto al ramo principale con possibilità di valori risultanti della perdita $\mathbf{R_{ik}}$ tali da richiedere inaccettabili

sovradimensionalmenti della rete, o addirittura valori $\mathbf{R_{ik} < 0}$, con impossibilità di convogliare le portate richieste.
In pratica pertanto, qualori si verifichi la condizione $\mathbf{R_{ik} < R}$, risulta evidentemente errata la scelta del ramo principale che deve coincidere, dall'**i**esimo nodo, col ramo secondario **ik** stesso.

In presenza di atmosfera, il termine geodetico, ($\mathbf{Dp_g}$), risulta:

$$\mathbf{Dp_g = (d_s - d_{sa})gH_g},$$

con $\mathbf{d_s}$ e $\mathbf{d_{sa}}$ densità del fluido e dell'atmosfera, rispettivamente.
Si ha quindi: $\mathbf{Dp_g \approx d_s g H_g}$ per i liquidi, $\mathbf{Dp_g = 0}$, per aria e generalmente trascurabile per i gas in comuni condizioni di impianto.
In ogni caso risultando le cadute di pressione per perdite di carico, ($\mathbf{Dp_r}$): $\mathbf{Dp_r \propto 1/d_s}$ e $\mathbf{Dp_g \propto d_s}$, si ha: $\mathbf{Dp_g/Dp_r \propto d_s^2}$ e quindi, a parità di altre condizioni, l'incidenza delle cadute di pressione per salti geodetici rispetto alle perdite di carico si riduce, passando da fluidi incomprimibili a fluidi comprimibili, di circa cinque – sei ordini di grandezza e quindi per fluidi comprimibili le perdite geodetiche risultano comunemente trascurabili.

Nel dimensionamento tecnico basato sul metodo del ramo principale, l'unica variabile, (o grado di libertà), impostabile arbitrariamente, (nel rispetto delle caratteristiche tecniche di funzionamento della rete, come le velocità di efflusso nelle condotte), risulta la perdita di carico per unità di lunghezza nel ramo principale, (**R**), in funzione della quale si ottiene la pressione $\mathbf{p_o}$, e quindi la potenza del gruppo di pompaggio da installare e parimenti risultano funzione di **R** le pressioni nei nodi da cui tutti i diametri delle tubazioni.
Il costo totale attualizzato, risulta quindi: $\mathbf{C_{ta} = C_{ta}(R)}$, da cui l'equazione di ottimizzazione economica: $\mathbf{dC_{ta}(R)/dR = 0}$, fornisce il valore delle perdite **R** di minimo onere globale.

****