

Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

**Recuperi energetici nei sistemi di rigassificazione
del gas naturale.**

Quaderni del Dipartimento

Nel mercato mondiale il gas viene consegnato ai consumatori o attraverso metanodotti o attraverso navi metaniere.

I metanodotti risultano estremamente economici una volta ammortizzato il costo di costruzione, ma vincolano gli acquirenti ai pochi proprietari dei gasdotti con forniture preferenziali in base a contratti stipulati a livello nazionale.

I prodotti energetici di conseguenza risultano spesso merce di scambio politico ed economico con possibilità vessatorie sia da parte dei paesi fornitori che di quelli attraversati dai metanodotti, con rischio di mancati approvvigionamenti anche solo per controversie fra questi.

Tuttavia esistono numerosi paesi che pur sedi di giacimenti metaniferi, non dispongono di linee di trasmissione e che pertanto rendono disponibile un prodotto a prezzo inferiore con possibilità di diversificazione dei fornitori.

Per il trasporto del gas in assenza di gasdotti, è necessario disporre di navi metaniere in cui il gas viene trasportato, per evidenti motivi di spazio, in forma liquida a bassa temperatura e pressione solo di poco superiore a quella ambiente, (il combustibile di propulsione della nave, oltre alla portata di gas di evaporazione che nonostante l'isolamento termico della struttura inevitabilmente si forma, può essere ottenuto per laminazione artificiale del liquido).

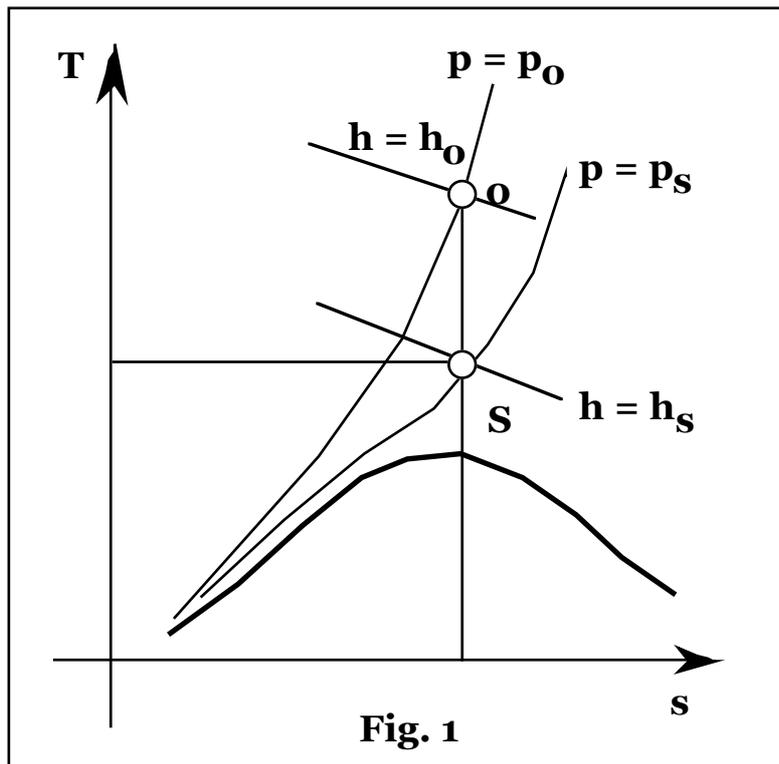
All'arrivo nei paesi consumatori è quindi necessario disporre di stazioni di gassificazione del metano, detti rigassificatori, in cui le principali operazioni da effettuare sono la compressione fino alla pressione di trasporto in rete e la cessione del calore di vaporizzazione del gas.

2 - UTILIZZO DEL GAS PER PRODUZIONE DI ENERGIA.

Alternativamente è possibile prevedere un utilizzo del gas liquido per produrre energia, realizzando un ciclo motore a gas metano, senza alcuna combustione, prelevando la potenza termica primaria fino alla temperatura ambiente per scambio termico con l'esterno a costo nullo.

Il ciclo risulta ipercritico essendo la temperatura, (T_c), e pressione critica, (p_c), del metano: $T_c = 190,55 \text{ K}$ e $p_c = 46,41 \text{ bar}$, inferiori alle normali pressioni, (p_s), di immissione in rete, (**Fig. 1**).

Fissata la pressione di picco del ciclo, (p_o), il lavoro specifico di compressione, risulta: $(p_o - p_s)/h_c d_{sm}$, (d_{sm} densità media del metano liquido, h_c rendimento globale di compressione), mentre il lavoro meccanico specifico di espansione, risulta: $(h_o - h_s)h_e$, (h_e rendimento globale di espansione).



Indicando con h_{ie} , h_{me} , i rendimenti rispetto all'isoentropica e meccanico di espansione con: t_{um} , (il pedice si riferisce alla temperatura di uscita del metano dai riscaldatori), e $t_s = \frac{t_{um}}{\left(\frac{p_0}{p_s}\right)^{\frac{k-1}{k}}}$, la temperatura di fine espansione isoentropica, ($k = c_p/c_v$), il lavoro specifico netto, (L_R), risulta:

$$\begin{aligned}
 L_R &= (h_{um} - h_s)h_e - (p_0 - p_s)/h_c d_{sm} = \\
 &= c_{pm}(t_{um} - t_s)h_{ie}h_{me} - (p_0 - p_s)/h_c d_{sm} = \\
 &= c_{pm} t_{um} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_s}\right)^{\frac{1-k}{k}} \right] h_{ie}h_{me} - (p_0 - p_s)/h_c d_{sm} = \\
 &= \frac{k}{k-1} p_{um} v_{um} \left[1 - \left(\frac{p_s}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] h_{ie}h_{me} - \frac{p_0 - p_s}{h_c d_{sm}}.
 \end{aligned}$$

All'uscita dalla turbina il gas risulta fortemente al di sotto della temperatura ambiente necessitando ancora di riscaldamento tramite scambio termico con l'esterno per l'immissione in rete.

3 - VALUTAZIONI COMPARATIVE CON CICLI MOTORI A GAS.

In un ciclo a gas, (**Fig. 2**), il lavoro specifico, (L_g), vale:

$L_g = c_{pa}(T_1 - T_2)h_{ie}h_{me} - c_{pa}(T_3 - T_{ua})/h_{ic}h_{mc}$, con: h_{ie} , h_{me} , h_{ic} , h_{mc} , rendimenti rispetto all'isoentropica e meccanico di espansione e compressione, rispettivamente, (il pedice **ua** si riferisce alla temperatura di uscita dell'aria da eventuali gruppi refrigeratori), con valore massimo per rapporto di temperature lungo una qualsiasi isoentropica, (t), pari a:

$$t = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T_{ua}} = \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_{ua}} h_{ic}h_{mc}h_{ie}h_{me}},$$

da cui: $T_2 = \frac{\sqrt{T_1 T_{ua}}}{\sqrt{h_{ie}h_{me}h_{ic}h_{mc}}};$

$$T_3 = \sqrt{T_1 T_{ua}} \sqrt{h_{ie}h_{me}h_{ic}h_{mc}}.$$

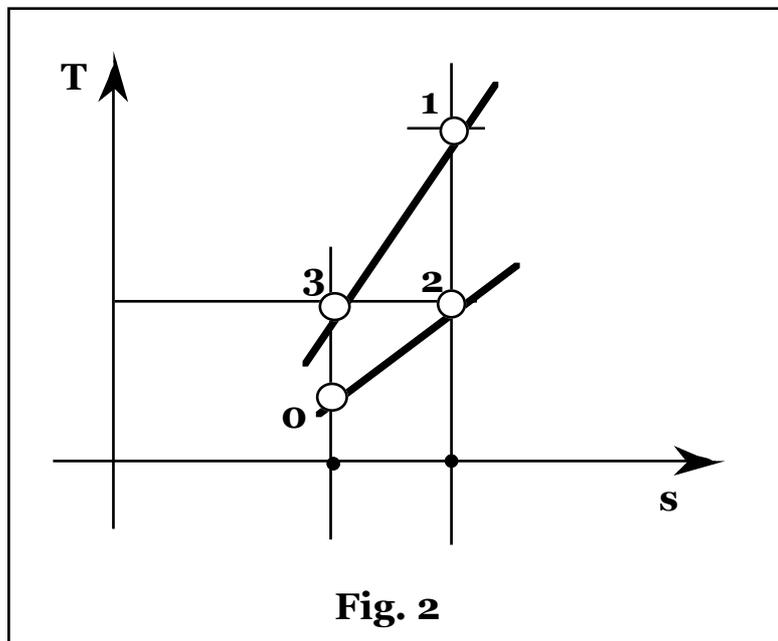


Fig. 2

Nel caso di rigassificatori a parità di potenza è quindi richiesta una portata in massa pari a: L_g/L_r , rispetto ai cicli motori a gas.

La portata volumetrica, invece, è proporzionale al rapporto dei volumi specifici medi del metano, (v_m), e dell'aria, (v_a), fra le temperature e pressioni estreme dei rispettivi cicli:

$$\frac{v_m}{v_a} = \frac{\frac{2}{p_0 + p_s} R_m \frac{T_0 + T_s}{2}}{\frac{2}{p_1 + p_2} R_a \frac{T_1 + T_2}{2}} = \frac{p_1 + p_2}{p_0 + p_s} \frac{c_{pm} - c_{vm}}{c_{pa} - c_{va}} \frac{T_0 + T_s}{T_1 + T_2}.$$

4 - UTILIZZO DELLA POTENZA FRIGORIFERA GENERATA.

Il ciclo completo rende disponibili due contributi di energia frigorifera: uno generato durante il riscaldamento del metano dalla temperatura di arrivo, (t_{em}), a quella di immissione in turbina, (t_{um}), e un secondo durante il riscaldamento del metano dalla temperatura reale di uscita dalla turbina: $t_{um} - h_{ie}(t_{um} - t_s)$, a quella ambiente, (T_0), di immissione in rete.

Per unità di massa di metano, l'energia frigorifera specifica, (q_f), vale quindi: $q_f = c_{pm}(t_{um} - t_{em}) + c_{pm}\{T_0 - [t_{um} - h_{ie}(t_{um} - t_s)]\} = c_{pm}[(T_0 - t_{em}) + h_{ie}(t_{um} - t_s)]$.

Impianti frigoriferi.

L'energia frigorifera non risulta un semplice sottoprodotto del ciclo, ma un ulteriore utile impiegabile direttamente in un impianto frigorifero, con risparmio della corrispondente energia elettrica richiesta:

$$q_f/COP \quad (\text{kJ/kg}).$$

Impianti motori a gas.

In un ciclo a gas, (**Fig. 2**), indicando con h_b , il rendimento della camera di combustione, il rendimento globale del ciclo:

$$h(T_{ua}) = h_b \frac{\frac{T_1}{T_{ua}} h_{ie} h_{me} \left(1 - \frac{1}{t}\right) - \frac{t-1}{h_{ic} h_{mc}}}{\left(\frac{T_1}{T_{ua}} - 1\right) - \frac{t-1}{h_{ic}}},$$

risulta una funzione monotona decrescente con T_{ua} dal limite:

$$\lim_{T_{ua} \rightarrow 0} h(T_{ua}) = h_b h_{ie} h_{me} \left(1 - \frac{1}{t}\right),$$

all'annullamento del parametro:

$$h(T_{ua}) = 0, \text{ per: } T_{ua} = t/h_{ic} h_{mc} h_{ie} h_{me}.$$

Pertanto, poiché una riduzione della temperatura T_{ua} , comporta un aumento di rendimento, l'energia frigorifera disponibile, può essere utilizzata per preraffreddare la portata di aria di alimento di un impianto motore a gas, portando l'unità di massa di aria alla temperatura T_{ua} , tale che: $c_{pa}(T_o - T_{ua}) = q_f$, ovvero:

$T_{ua} = T_o - q_f/c_{pa}$, con un incremento di energia ottenuta a parità di energia termica primaria impiegata:

$$DL = q[h(T_{ua}) - h(T_o)] = L/h(T_o)[h(T_{ua}) - h(T_o)],$$

ovvero con un incremento frazionario: $DL/L = h(T_{ua})/h(T_o) - 1$, corrispondente a un maggior lavoro: $L_g [h(T_{ua})/h(T_o) - 1]$.

La relazione: $c_{pa}(T_o - T_{ua}) = q_f$, ovvero: $T_{ua} = T_o - q_f/c_{pa}$, fissa la temperatura di preraffreddamento dell'aria che potrebbe non risultare tecnologicamente accettabile, o addirittura fisicamente impossibile, (negativa).

Occorre quindi prevedere una portata di gas per unità di portata di metano, G_g , (kg gas/kg metano), maggiore dell'unità, da cui:

$G_g c_{pa}(T_o - T_{ua}) = q_f$, e quindi:

$$G_g = \frac{q_f}{c_{pa}(T_o - T_{ua})} = \frac{c_{pm}}{c_{pa}} \left[\frac{T_o - t_{em}}{T_o - T_{ua}} + h_{ie} \frac{t_{um} - t_s}{T_o - T_{ua}} \right].$$

In tal caso l'incremento di energia, (De) , risulta:

$$\frac{L_g(T_o)q_f}{c_{pa}(T_o - T_{ua})} \left[\frac{h(T_{ua})}{h(T_o)} - 1 \right] = \frac{L_g(T_o)q_f}{c_{pa}(T_o - T_{ua})} \left[\frac{\frac{L_g(T_{ua})}{T_1 - T_{ua} \left(1 + \frac{t_2 - 1}{h_{ic}} \right)}}{\frac{L_g(T_o)}{T_1 - T_o \left(1 + \frac{t_1 - 1}{h_{ic}} \right)}} - 1 \right] =$$

$$= \left[\frac{L_g(T_{ua})}{T_1 - T_{ua} \left(1 + \frac{t_2 - 1}{h_{ic}} \right)} - L_g(T_o) \right] \frac{q_f}{c_{pa}(T_o - T_{ua})},$$

con: $L_g(T_o) = c_{pa}T_1(1 - 1/t_1)h_{ie}h_{me} - c_{pa}T_o(t_1 - 1)/h_{ic}h_{mc}$,

e in condizioni di ottimizzazione: $t_1 = \sqrt{\frac{T_1}{T_o} h_{ic}h_{mc}h_{ie}h_{me}}$;

$$L_g(T_{ua}) = c_{pa}T_1(1 - 1/t_2)h_{ie}h_{me} - c_{pa}T_{ua}(t_2 - 1)/h_{ic}h_{mc},$$

e in condizioni di ottimizzazione: $t_2 = \sqrt{\frac{T_1}{T_{ua}} h_{ic} h_{mc} h_{ie} h_{me}}$.

In realtà le condizioni di ottimizzazione relative al rendimento, (in pratica prossime a quelle di massimo lavoro specifico), si ottengono come radice della relazione: $dh(t)/dt = 0$, che risulta:

$$t^2 \left[\frac{1}{h_{ic} h_{mc} h_{ie} h_{me}} \left(\frac{T_o}{T_1} - 1 \right) + \frac{1}{h_{ic}} \right] - \frac{2}{h_{ic}} t + \left(\frac{T_1}{T_o} - 1 + \frac{1}{h_{ic}} \right) = 0,$$

delle cui due soluzioni solo una, per tipici valori delle variabili, risulta fisicamente accettabile.

In ogni caso a ottimizzazione avvenuta, la funzione risulta dipendente dalla sola variabile T_{ua} , e monotona crescente al diminuire di questa, richiedendo tuttavia crescenti rapporti di compressione ottimali nel ciclo. Inoltre all'aumentare della temperatura di riscaldamento del metano e al diminuire della temperatura di preraffreddamento dell'aria aumenta il lavoro ottenuto rispettivamente dal metano e dal gas, mentre aumentano le superficie di scambio degli scambiatori rendendo possibile la sola ottimizzazione economica del sistema.

5 - VALUTAZIONI NUMERICHE.

Analisi comparativa con cicli a gas.

In un ciclo motore a gas, per raggiungibili valori dei parametri del ciclo: $T_1 = 1500 \text{ K}$; $T_o = 300 \text{ K}$; $h_{ie} = h_{ic} = 0,85$; $h_{me} = h_{mc} = 0,95$, in condizioni ottimizzate al massimo lavoro specifico e circa massimo rendimento, si ottiene: $t \sim 1,8$, da cui le temperature, (lungo le isoentropiche):

$$T_2 = \frac{\sqrt{T_1 T_o}}{\sqrt{h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}}} = 830 \text{ K};$$

$$T_3 = \sqrt{T_1 T_o} \sqrt{h_{ie} h_{me} h_{ic} h_{mc}} = 542 \text{ K}, \text{ e quindi: } L_g = 240 \text{ kJ/kg}.$$

In un rigassificatore, il lavoro di compressione: $(p_o - p_s)/h_c d_{sm}$, essendo: $p_o = 160 \text{ bar}$; $p_s = 70 \text{ bar}$; $d_{sm} = 412 \text{ kg/m}^3$, ($\sim 2 \text{ bar}$), posto: $h_c = 0,95$, risulta: 22 kJ/kg , da cui il lavoro specifico netto:

$$L_r = c_{pm}(t_{um} - t_s)h_{ie}h_{me} - (p_o - p_s)/h_c d_{sm},$$

essendo: $c_{pm} = 2,2537 \text{ kJ/kg K}$; $c_{vm} = 1,7354 \text{ kJ/kg K}$, e quindi:

$$k = 1,3, \text{ da cui: } t_s = \frac{t_{um}}{\left(\frac{p_o}{p_s}\right)^{\frac{k-1}{k}}} = (t_{um} \sim T_o) = 248 \text{ K, } (-25 \text{ }^\circ\text{C}),$$

risulta: $L_T = 73 \text{ kJ/kg}$, e quindi: $L_g/L_T \sim 3$, mentre il rapporto: v_m/v_a , vale circa il 2%.

Energia frigorifera.

Essendo: $t_{em} = 113 \text{ K}$; $t_s = 248 \text{ K}$; $h_{ie} = 0,85$, l'energia frigorifera specifica vale: $q_f = 521 \text{ kJ/kg}$, da cui un risparmio di energia elettrica: $q_f/COP \sim 200 \text{ kJ/kg}$.

Utilizzo della potenza frigorifera in cicli a gas.

In condizioni ottimizzate al massimo lavoro specifico, (e circa rendimento), in un ciclo a gas per: $h_b \sim 0,9$; $T_o = 300 \text{ K}$, si ottiene:

$$t_1 = 1,8, (p_1/p_o = 8,3); h(T_o) = 0,2385; L_g(T_o) = 241 \text{ kJ/kg}.$$

Per: $T_{ua} = 250 \text{ K}$, si ha: $t_2 = 1,978$; $(p_1/p_o = 10,44)$; $h(T_{ua}) = 0,2769$; $L_g(T_{ua}) = 296 \text{ kJ/kg}$, da cui un maggior lavoro ottenuto pari a: 404 kJ/kg , che tenuto conto di una portata di gas: $G_g = 10,42 \text{ kg gas/kg metano}$, corrisponde a $38,77 \text{ kJ/kg}$, (pari a un aumento di lavoro specifico del 16%).

Per: $T_{ua} = 200 \text{ K}$, si ha: $t_2 = 2,21$; $(p_1/p_o = 15,32)$; $h(T_{ua}) = 0,322$; $L_g(T_{ua}) = 363,5 \text{ kJ/kg}$, da cui un maggior lavoro ottenuto pari a: $439,6 \text{ kJ/kg}$, che tenuto conto di una portata di gas: $G_g = 5,21 \text{ kg gas/kg metano}$, corrisponde a $84,375 \text{ kJ/kg}$, (pari a un aumento di lavoro specifico del 35%).

Per: $T_{ua} = 150 \text{ K}$, si ha: $t_2 = 2,55$; $(p_1/p_o = 25,13)$; $h(T_{ua}) = 0,3748$; $L_g(T_{ua}) = 448,32 \text{ kJ/kg}$, da cui un maggior lavoro ottenuto pari a: $478,38 \text{ kJ/kg}$, che tenuto conto di una portata di gas: $G_g = 3,47 \text{ kg gas/kg metano}$, corrisponde a $137,86 \text{ kJ/kg}$, (pari a un aumento di lavoro specifico del 57,2%).

Calcolo della superficie di scambio.

Il raffreddamento dell'aria può essere scisso in due parti di cui ai due contributi della potenza frigorifera: riscaldamento dopo l'espansione in turbina e riscaldamento dalla sorgente.

Tuttavia il contributo del metano in uscita dalla turbina non è in grado di raffreddare l'aria fino alle temperature richieste per l'immissione nel ciclo a gas, mentre un suo utilizzo in un preraffreddamento non consentirebbe il successivo riscaldamento del metano fino alla temperatura richiesta per l'immissione in turbina.

Impiegando uno scambiatore controcorrente, la superficie di scambio per unità di portata di metano, risulta:

$$S = \frac{R_t}{G_g c_{pa} - c_{pm}} \ln \frac{T_o - t_{um}}{T_{ua} - t_{em}}$$

Considerando il solo riscaldamento del metano dalla sorgente, si ha:

$$T_o = 300 \text{ K}; \quad T_{ua} = 200 \text{ K}; \quad t_{em} = 113 \text{ K}; \quad t_{um} = 290 \text{ K};$$

$$G_g = 5,21 \text{ kg gas/kg metano}; \quad c_{pm} = 2,2537 \text{ kJ/kg K};$$

$$c_{pa} = 1 \text{ kJ/kgK}; \quad R_t = 0,172 \text{ m}^2\text{K/W}, \text{ si ottiene:}$$

$$S = 1.478 \text{ m}^2/(\text{kg/s}) \text{ di metano.}$$

Tenuto conto di un lavoro specifico del metano: $L_r = 73 \text{ kJ/kg}$, ovvero una potenza di $73 \text{ kW}/(\text{kg/s})$ di metano, la superficie installata specifica, (S_r), risulta pari a circa: $S_r = 20 \text{ m}^2/\text{kW}$.

6 - COSTO DELL'ENERGIA PRODOTTA.

Nell'espressione del VAN dell'investimento:

$$VAN = \frac{PuTc_k}{t_{ek}} - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) I_o = \frac{PuTc_k}{t_{ek}} - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) qP,$$

ove è indicato con:

P potenza dell'impianto, (W);

u fattore di carico;

T tempo a periodo rateale, (s/anno);

c_k costo specifico dell'energia prodotta, (€/J);

a frazione di costo impianto per oneri di gestione e manutenzione a periodo rateale, (anni^{-1});

$1/t_{ek}$, $1/t_{em}$, fattori di annualità dell'energia e delle opere di gestione e manutenzione, (anni);

I_o = **qP** costo di investimento, (€),

posto: $\mathbf{VAN}(\mathbf{c}_k) = \mathbf{0}$, si ottiene il costo specifico dell'energia prodotta:

$$\mathbf{c}_k = \left(1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t}_{em}}\right) \frac{\mathbf{q} \mathbf{t}_e}{\mathbf{uT}}, \text{ con assenza di costo combustibile.}$$

Il costo specifico di impianto per unità di potenza, (\mathbf{q}), risulta in realtà la differenza di costo fra il sistema con generazione di potenza e di sola rigassificazione comunque richiesta.

Poiché il lavoro specifico di espansione del metano, nonostante il ridotto valore del lavoro di compressione del fluido allo stato liquido, risulta alcune volte inferiore a quello ottenibile nei normali cicli a gas, a parità di potenza risultano maggiori portate massive, ($\mathbf{L}_g/\mathbf{L}_r$).

Circa le portate volumetriche, invece, e quindi le dimensioni delle apparecchiature, occorre valutare il rapporto, ($\mathbf{v}_m/\mathbf{v}_a$), fra i valori dei volumi specifici medi dei gas nei rispettivi cicli, che essendo le pressioni del ciclo a metano estremamente superiori e le temperature estremamente inferiori a quelle tipiche dei cicli a gas, risulta pari a qualche percento.

L'incidenza quantitativa dei due effetti contrastanti comporta apparecchiature fortemente sottodimensionate rispetto a quelle relative ai comuni impianti a gas e seppure sollecitate da rilevanti pressioni, non sottoposte alle temperature estreme dei cicli a gas e all'azione corrosiva dei prodotti della combustione, per cui i costi specifici di impianto appaiono presumibilmente ridotti.

Occorre tuttavia prevedere un onere aggiuntivo relativo agli scambiatori di calore, (un costo: $\mathbf{b} = 20,00 \text{ €/m}^2$, comporta una quota di circa 400 €/kW , dell'ordine del $20 \div 40\%$ del costo specifico di impianto), mentre gli utili vanno maggiorati dell'incremento di energia prodotta nel ciclo a gas.

Indicando con \mathbf{G}_m , la portata di metano, la potenza generata vale:

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{L}_r + \mathbf{De}).$$

Nell'impianto a gas, la sezione motrice non risulta variata, la sezione di compressione elaborando una minore portata volumetrica per diminuzione di temperatura dell'aria di alimento, e comportando una minore potenza installata, risulta ridotta, mentre la potenza termica della camera di combustione risulta aumentata.

Ne consegue che i costi di impianto della sezione a gas non subiscono variazioni sensibili.

L'incremento di costo di investimento risulta pertanto relativo al solo rigassificatore: $\mathbf{I}_0 = \mathbf{qG}_m\mathbf{L}_r + \mathbf{bS}$, con \mathbf{q} differenza di costo fra il sistema

con generazione di potenza e di sola rigassificazione e **b** onere a unità di superficie per gli scambiatori.

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{VAN} = \frac{\mathbf{G}_m(\mathbf{L}_r + \mathbf{De})\mathbf{uTc}_k}{\mathbf{t}_{ek}} - \left(1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t}_{em}}\right)\mathbf{qG}_m\mathbf{L}_r - \mathbf{G}_m\mathbf{bS},$$

da cui:
$$\mathbf{c}_k = \frac{\mathbf{t}_e}{\mathbf{uT}(\mathbf{L}_r + \mathbf{De})} \left[\left(1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t}_{em}}\right)\mathbf{qL}_r + \mathbf{bS} \right].$$

Nell'espressione del **VAN** le funzioni portata di gas per unità di portata di metano, (**G_g**), lavoro della sezione metano, (**L_r**), incremento di produzione di energia per raffreddamento dell'aria, (**De**), superficie di scambio del gruppo riscaldatore, (**S**), risultano dipendenti dalle temperature di riscaldamento del metano, (**t_{um}**), e di preraffreddamento dell'aria, (**T_{ua}**), che essendo legate dalla relazione:

G_gc_{pa}(T_o - T_{ua}) = c_{pm}(t_{um} - t_{em}), comportano una dipendenza da un'unica variabile:

G_g = G_g(T_{ua}); L_r(T_{ua}); De = De(T_{ua}); S = S(T_{ua}), ovvero:

G_g = G_g(t_{um}); L_r(t_{um}); De = De(t_{um}); S = S(t_{um}),

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{VAN} = \frac{\mathbf{G}_m[\mathbf{L}_r(\mathbf{T}_{ua}) + \mathbf{De}(\mathbf{T}_{ua})]\mathbf{uTc}_k}{\mathbf{t}_{ek}} - \left(1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t}_{em}}\right)\mathbf{qG}_m\mathbf{L}_r(\mathbf{T}_{ua}) - \mathbf{bS}(\mathbf{T}_{ua}) = \mathbf{VAN}(\mathbf{T}_{ua}) = \mathbf{VAN}(\mathbf{t}_{um}),$$

da cui l'equazione di ottimizzazione economica del sistema: **dVAN(T_{ua})/dT_{ua} = 0**, ovvero: **dVAN(t_{um})/dt_{um} = 0**.
