

Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

**Comportamento termico di recipienti e serbatoi in
regime permanente e transitorio.**

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

COMPORTAMENTO TERMICO DI RECIPIENTI E SERBATOI IN REGIME PERMANENTE E TRANSITORIO.

1 - PREMESSA.

Le utenze termiche comprendono numerosi recipienti e serbatoi di accumulo e alimentazione di fluidi che devono essere mantenuti a temperatura superiore a quella ambiente e che subiscono transitori durante le diverse fasi di esercizio.

Per ottenere un sensibile controllo della temperatura di funzionamento risulta quindi necessario valutarne il comportamento in funzione dei parametri di progetto e utilizzo.

2 - DETERMINAZIONE E CONTROLLO DELLA TEMPERATURA DEI SERBATOI.

Per un contenitore di fluido, (**Fig.1**), la potenza termica scambiata con l'ambiente esterno, vale:

$$Q = (T - T_e) \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{R_{ti}} = \frac{(T - T_e)}{R_{to}} S,$$

con: **T** temperatura del fluido contenuto nel recipiente;

T_e temperatura dell'ambiente esterno;

S_i porzione di superficie di trasmissione a resistenza termica globale **R_{ti}**;

$$S = \sum_{i=1}^n S_i, \text{ superficie totale di frontiera;}$$

$$R_{to} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{R_{ti}}} = \frac{S}{\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{R_{ti}}}, \text{ resistenza termica globale media del serbatoio.}$$

Trascurando la capacità termica della struttura del serbatoio la stessa potenza termica, vale: $\dot{Q} = - d_s V c_p dT/dt$, con: **d_s**, **V**, **c_p**, densità, volume e calore specifico del liquido contenuto nel recipiente.

Si ottiene, quindi: $(T - T_e) \frac{S}{R_{to}} = -d_s V c_p \frac{dT}{dt}$,

da cui: $-\frac{dT}{T - T_e} = \frac{S}{R_{to} d_s V c_p} dt$,

e quindi integrando: $\ln \frac{T_0 - T_e}{T - T_e} = \frac{S}{R_{to} d_s V c_p} t$,

ovvero: $T(t) = T_e + (T_0 - T_e) e^{-\frac{S}{R_{to} d_s V c_p} t}$, essendo: $T_0 = T(0)$, la temperatura del liquido all'istante iniziale di riferimento, ($t = 0$).

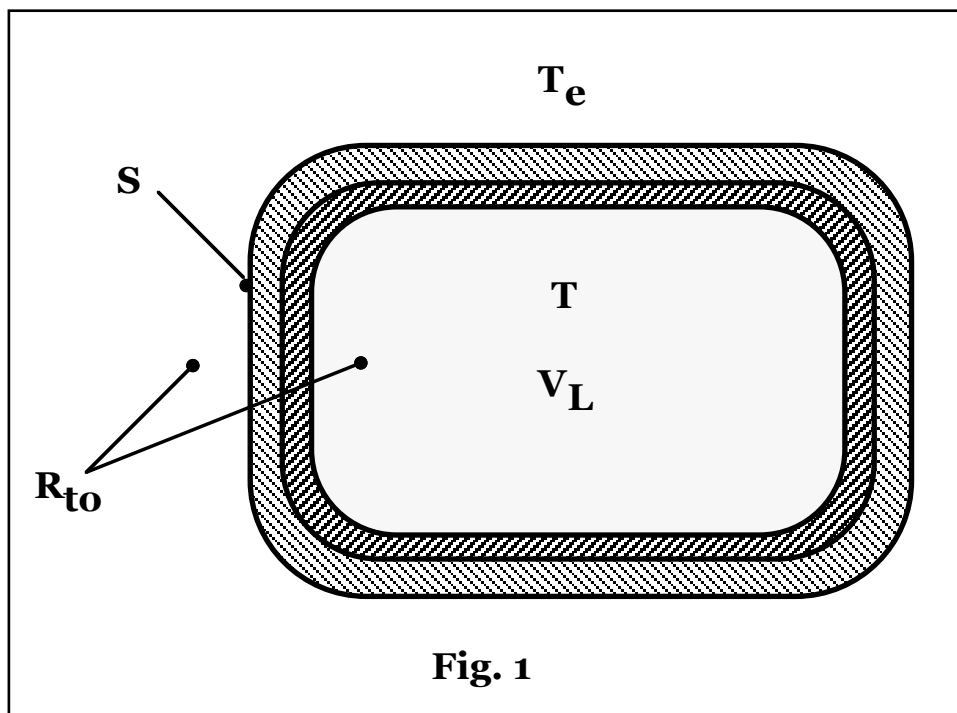


Fig. 1

Indicando con t_f , l'intervallo di tempo di permanenza del fluido nel serbatoio, con $T_f = T(t_f)$, la temperatura finale a partire dalle condizioni iniziali, (T_0), note le condizioni geometriche del serbatoio, (S, V) e quelle ambientali, (T_e), imposte due delle tre variabili, (T_f, t_f, R_{to}), che compaiono nella relazione, è possibile risalire alla rimanente, ovvero determinare la temperatura finale, (T_f), o il tempo necessario, (t_f), a raggiungerne un determinato valore, o infine, il grado di isolamento richiesto, (R_{to}), per soddisfare le specifiche imposte:

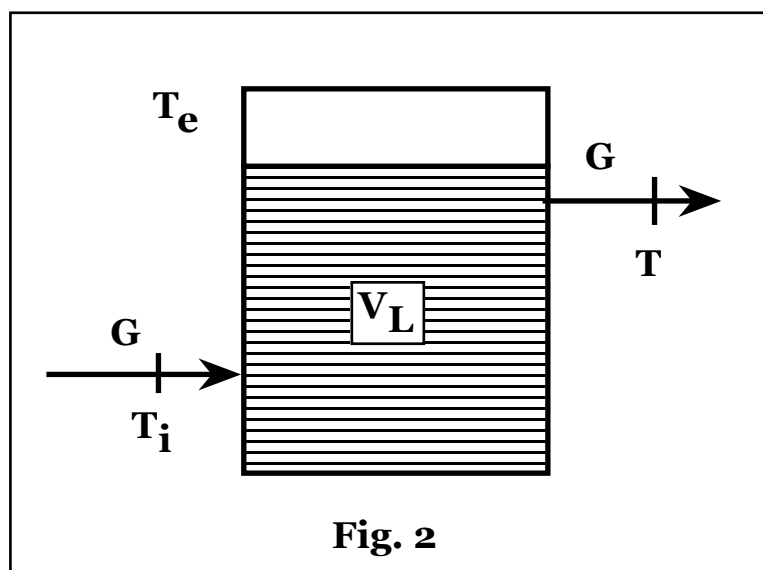
$$T_f = T_e + (T_o - T_e)e^{-\frac{S}{R_{to}d_s V c_p} t_f};$$

$$t_f = \frac{R_{to}d_s V c_p}{S} \ln \frac{T_o - T_e}{T_f - T_e};$$

$$R_{to} = \frac{S}{d_s V c_p \ln \frac{T_o - T_e}{T_f - T_e}} t_f.$$

Le grandezze t_f e R_{to} mantengono comunque significato fisico, (reali e positive), in quanto risultando la temperatura finale compresa fra quella iniziale, (T_o), e quella ambiente, (T_e), le differenze: $T_o - T_e$ e $T_f - T_e$ assumono in ogni caso lo stesso segno e risulta: $T_o - T_e > T_f - T_e$.

Nel caso in cui il serbatoio sia attraversato da una portata G di liquido, con temperatura T_i in ingresso, (**Fig.2**), l'equazione di bilancio risulta:



$$Gc_p T_i - (T - T_e)S/R_{to} - Gc_p T = d_s V c_p dT/dt,$$

la cui soluzione è pari alla somma di quella dell'omogenea associata:

$$T (S/R_{to} + Gc_p) + d_s V c_p dT/dt = 0,$$

più un integrale particolare che può ottenersi ponendo: $dT/dt = 0$, con condizioni iniziali: $T(0) = T_o$;

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{t=0} = \frac{(T_i - T_o)G}{d_s V} - \frac{(T_o - T_e)S}{R_{to}d_s V c_p}.$$

Si ottiene:

$$T(t) = \left(T_o - \frac{Gc_p T_i + \frac{S}{R_{to}} T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}} \right) e^{-\frac{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}}{d_s V c_p} t} + \frac{Gc_p T_i + \frac{S}{R_{to}} T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}},$$

da cui la temperatura di regime, (T_r): $T_r = \frac{Gc_p T_i + \frac{S}{R_{to}} T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}}$, alla quale

la temperatura del fluido $T(t)$, tende asintoticamente, dalle condizioni iniziali, con andamento monotono.

Pertanto note le condizioni geometriche del serbatoio, (S), e quelle ambientali, (T_e , T_i), imposte due delle tre variabili, (T_r , G , R_{to}), che compaiono nella relazione, è possibile risalire alla rimanente, ovvero determinare la temperatura T_r di regime, o la portata G necessaria a imporre la temperatura stessa, o il grado di isolamento richiesto, (R_{to}), all'ottenimento delle condizioni imposte:

$$T_r = \frac{Gc_p T_i + \frac{S}{R_{to}} T_e}{Gc_p + \frac{S}{R_{to}}}; \quad G = \frac{S}{c_p R_{to}} \frac{T_e - T_r}{T_r - T_i}; \quad R_{to} = \frac{S}{Gc_p} \frac{T_e - T_r}{T_r - T_i}.$$

La portata, (G), e la resistenza termica media, (R_{to}), mantengono comunque significato fisico, (positive).

La temperatura di regime T_r infatti, risulta intermedia fra le temperature T_e e T_i , essendone la media pesata, per cui le differenze: $T_e - T_i$ e $T_r - T_i$, assumono in ogni caso lo stesso segno.

3 - SISTEMI TERMICI INTERMITTENTI. ANALISI DEI CONSUMI ENERGETICI DURANTE LE FASI DI ARRESTO.

I regimi di funzionamento dei sistemi raramente sono continui, ma più spesso risultano cicli in cui a periodi esercizio seguono periodi di arresto.

In caso di utenze termiche i corpi a temperatura superiore a quella ambiente durante la fermata possono essere lasciati allo spontaneo transitorio di raffreddamento e successivamente riscaldati fino alla temperatura di utilizzo, o viceversa mantenuti alla temperatura di esercizio con diverse soluzioni impiantistiche.

A meno di particolare esigenze tecnologiche, in ogni caso occorre eseguire una preventiva analisi energetica atta a valutare la spesa energetica nei diversi casi.

Qualora un serbatoio, (o un qualunque corpo), di massa m e calore specifico medio c_p , che in regime di funzionamento deve essere mantenuto a una temperatura T_r maggiore di quella ambiente, (T_e), rimanga inutilizzato per un periodo di tempo t_o , per mantenerlo alla temperatura di regime occorre un dispendio di energia termica pari a:

$$Q_{dc} = \frac{S}{R_{t_o}} (T_r - T_e)t_o, \text{ essendo } S \text{ e } R_{t_o} \text{ la superficie totale di frontiera}$$

e la resistenza termica totale del corpo, rispettivamente.

Qualora il serbatoio venga, invece, lasciato raffreddare e successivamente riscaldato fino alla temperatura di utilizzo, l'energia termica dispersa nel transitorio risulta:

$$Q_{di} = \int_0^{t_o} [T_f(t) - T_e]dt = mc_p(T_r - T_1) + \int_{t_1}^{t_o} [T_f(t) - T_e]dt,$$

con t_1 e T_1 istante di inizio riscaldamento e corrispondente temperatura cui è giunto il serbatoio: $T_1 = T_f(t_1)$.

L'equazione di bilancio nel transitorio di raffreddamento risulta:

$$\frac{S}{R_{t_o}} [T_f(t) - T_e] = -mc_p \frac{dT}{dt},$$

da cui:

$$T_f(t) = (T_r - T_e)e^{-\frac{S}{R_{t_o}mc_p}t} + T_e.$$

Indicando con Q la potenza termica di riscaldamento, l'equazione di bilancio del relativo transitorio risulta:

$$Q = \frac{S}{R_{t_o}} [T_r(t) - T_e] + mc_p \frac{dT}{dt},$$

da cui, essendo imposto che sia: $T_r(t) = T_r$, per $t = t_o$, si ottiene:

$$T_r(t) = \left[(T_r - T_e) - Q \frac{R_{t_o}}{S} \right] e^{-\frac{S}{R_{t_o}mc_p}(t-t_o)} + Q \frac{R_{t_o}}{S} + T_e.$$

L'istante di inizio riscaldamento si ottiene quindi come radice, (t_1), dell'equazione: $T_f(t) = T_r(t)$, ovvero:

$$(T_r - T_e)e^{-\frac{S}{R_{t_o}mc_p}t_1} + T_e =$$

$$= \left[(T_r - T_e) - Q \frac{R_{to}}{S} \right] e^{-\frac{S}{R_{to} m c_p} (t_1 - t_0)} + Q \frac{R_{to}}{S} + T_e,$$

da cui:

$$t_1 = \frac{R_{to} m c_p}{S} \ln \left[\frac{S}{Q R_{to}} (T_r - T_e) \left(1 - e^{-\frac{S t_0}{R_{to} m c_p}} \right) + e^{-\frac{S t_0}{R_{to} m c_p}} \right].$$

Posto: $Q = f_a \frac{S}{R_{to}} (T_r - T_e)$, (con $f_a > 1$, affinché il riscaldamento porti il serbatoio a temperatura di regime in un tempo finito), si ottiene:

$$t_1 = \frac{R_{to} m c_p}{S} \ln \left(\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{-\frac{S}{R_{to} m c_p} t_0} \right).$$

La temperatura di fine raffreddamento e inizio riscaldamento vale

quindi:
$$T_1 = T(t_1) = \frac{T_r - T_e}{\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{-\frac{S}{R_{to} m c_p} t_0}} + T_e.$$

E' immediato verificare che per $f_a \rightarrow \infty$, (potenza di riscaldamento illimitata), tende a zero il periodo di riscaldamento e il tempo t_1 tende a quello totale di interruzione, (t_0).

Si ottiene, pertanto:

$$Q_{di} = m c_p \left(T_r - \frac{T_r - T_e}{\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{-\frac{S}{R_{to} m c_p} t_0}} + T_e \right) +$$

$$+ \int^{t_0} \left\{ \frac{R_{to} m c_p}{S} \ln \left(\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{\frac{S}{R_{to} m c_p} t_0} \right) \left[(T_r - T_e) - Q \frac{R_{to}}{S} \right] e^{-\frac{S}{R_{to} m c_p} (t - t_0)} + Q \frac{R_t}{S} + T_e \right\} dt.$$

In realtà tenuto conto che la fase di impiego di energia esterna è il solo periodo di riscaldamento a potenza costante, (Q), si ha:

$$Q_{di} = Q(t_0 - t_1) = f_a \frac{S}{R_{to}} (T_r - T_e)(t_0 - t_1) = f_a \frac{S}{R_{to}} (T_r - T_e) \left[t_0 - \frac{R_{to} m c_p}{S} \ln \left(\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{\frac{S}{R_{to} m c_p} t_0} \right) \right].$$

Per $f_a \rightarrow \infty$, il limite, (che assume forma indeterminata), può essere valutato considerando che per: $t_1 = t_0$, non si hanno disperdimenti alle pareti durante il riscaldamento, ma solo il contributo della variazione di temperatura, per cui risulta: $Q_{di} = m c_p [T_r - T(t_0)]$,

$$\text{ovvero: } Q_{di} = m c_p (T_r - T_e) \left(1 - e^{-\frac{St_0}{R_{to} m c_p}} \right).$$

Il rapporto fra l'energia spesa in caso di interruzione e funzionamento continuo, rispettivamente risulta quindi:

$$\frac{Q_{di}}{Q_{dc}} = f_a \left[1 - \frac{R_{to} m c_p}{St_0} \ln \left(\frac{1}{f_a} + \frac{f_a - 1}{f_a} e^{\frac{S}{R_{to} m c_p} t_0} \right) \right].$$

Per lo studio della funzione si ha: $\lim_{f_a \rightarrow 1} \frac{Q_{di}}{Q_{dc}} = 1$;

$$\lim_{f_a \rightarrow \infty} \frac{Q_{di}}{Q_{dc}} = \frac{R_{to} m c_p}{St_0} \left(1 - e^{-\frac{St_0}{R_{to} m c_p}} \right) < 1 \quad \forall \quad St_0 / R_{to} m c_p;$$

$$\frac{d \frac{Q_{di}}{Q_{dc}}(f_a)}{df_a} =$$

$$= 1 - \frac{R_{to}mcp}{St_o} \left\{ \ln \left[\frac{1}{f_a} + \left(1 - \frac{1}{f_a} \right) e^{\frac{St_o}{R_{to}mcp}} \right] + \frac{\frac{St_o}{e^{\frac{St_o}{R_{to}mcp}} - 1}}{1 + (f_a - 1)e^{\frac{St_o}{R_{to}mcp}}} \right\},$$

che dal valore: $1 - \frac{R_{to}mcp}{St_o} \left(e^{\frac{St_o}{R_{to}mcp}} - 1 \right) < 1, \forall St_o/R_{to}mcp,$

per $f_a = 1$, tende asintoticamente a zero per $f_a \rightarrow \infty$.

Si conclude quindi che la curva: Q_{di}/Q_{dc} risulta monotona decrescente dal valore unitario al valore limite per: $f_a \rightarrow \infty$ e il funzionamento intermittente risulta quindi energeticamente conveniente per qualunque valore dei parametri.
