

DISTRIBUZIONE ED ACCUMULAZIONE  
IN UNA  
ECONOMIA CAPITALISTICA  
COME GIOCO DIFFERENZIALE:  
UNA RASSEGNA CRITICA.

di

GIANCARLO GOZZI

*Dipartimento di Scienze Economiche,  
Università di BOLOGNA.*

MARCO ZILIOTTI

*Istituto di Scienze Economiche,  
Università di PARMA.*

OTTOBRE 1989

## Table of Contents

1	INTRODUZIONE. ....	1
2	IL MODELLO DI LANCASTER: ESPOSIZIONE ED OSSERVAZIONI CRITICHE. ....	2
	2.1 Il modello. ....	2
	2.2 L'inefficienza dinamica della soluzione noncooperativa. ....	8
3	GENERALIZZAZIONI DEL MODELLO DI LANCASTER. ....	10
	3.1 Aspetti riguardanti la struttura del modello. ....	10
	3.2 Le strategie delle classi. ....	12
4	CONCLUSIONI E PROSPETTIVE DI RICERCA. ....	13
5	BIBLIOGRAFIA. ....	15

## 1 INTRODUZIONE.

K. Lancaster ha formalizzato la dinamica di una economia capitalistica in termini di un gioco differenziale (a somma non nulla) fra capitalisti e lavoratori<sup>1)</sup>. Il risultato principale che emerge da tale lavoro è che la separazione delle decisioni di risparmio, da un lato, e di investimento, dall'altro, determina *normalmente* una situazione di *inefficienza (dinamica)*<sup>2)</sup> per l'economia: si potrebbero realizzare livelli di benessere, per entrambe le classi, maggiori se vi fosse una qualche forma di coordinamento delle decisioni. E' bene fin da ora sgomberare il campo da possibili equivoci per quanto concerne la caratterizzazione, sul piano teorico, di questo risultato, equivoci che, a parere nostro, Lancaster tende in qualche modo ad alimentare<sup>3)</sup>. L'accento che Lancaster pone sulla spiegazione dell'inefficienza dinamica (di un processo di allocazione intertemporale delle risorse) in una economia capitalistica in termini di separazione fra (decisioni di) risparmio e (decisioni di) investimento non ha, secondo noi, alcunchè di keynesiano: la separazione di decisioni di risparmio e di investimento non comporta in alcun modo problemi di domanda effettiva per l'economia presa in considerazione nel modello di Lancaster. Nell'economia (capitalistica?) che Lancaster prende in considerazione nel suo modello la capacità produttiva è sempre pienamente utilizzata ed il problema fondamentale che in essa deve essere risolto è quello della allocazione, in un contesto intertemporale, delle risorse fra consumo ed investimento<sup>4)</sup>; la logica del modello di Lancaster, da questo punto di vista, è quindi quella tipicamente neoclassica (o marginalista<sup>5)</sup>). La novità dell'analisi di Lancaster è rappresentata dal fatto che vengono esplicitamente presi in considerazione gli effetti che le decisioni di ciascuna classe producono sui risultati che conseguirà l'altra: viene esplicitamente considerata, in altre parole, una esternalità (di tipo dinamico, come vedremo) nel processo di allocazione delle risorse<sup>6)</sup>. Sul piano metodologico non v'è dubbio che Lancaster fa propria la visione dei fenomeni economici che contraddistingue l'*individualismo metodologico*<sup>7)</sup>; il fatto che *gli attori* del

---

1) K. Lancaster [1973].

2) Rimandiamo a E. Burmeister [1980], per una precisa formulazione della nozione di *efficienza dinamica*.

3) Si veda, soprattutto, l'introduzione del lavoro di Lancaster.

4) Ovvero, come apparirà più chiaramente nei paragrafi seguenti, fra *consumo presente* e *consumo futuro*, un *trade-off* che contraddistingue la concezione neoclassica (marginalista) del processo di accumulazione.

5) Nel seguito i due termini verranno usati per indicare il medesimo tipo di approccio teorico, fondato su di una particolare visione del processo economico, quella in cui assume rilevanza l'*allocazione di risorse (scarse) fra usi alternativi*.

6) Non intendiamo, in questa sede, entrare nel merito di un altro problema sollevato da Lancaster, quello concernente la nozione di *sfuttamento* (e della sua corretta formulazione). L'idea di Lancaster, a questo proposito, è che il problema dello sfruttamento possa essere analizzato solamente in un contesto dinamico, e non statico (cib che, secondo Lancaster, caratterizza, invece, l'analisi marxiana del problema). Per una analogia posizione, pur se in un contesto analitico molto diverso, si rimanda il lettore interessato a C.C. von Weizsäcker [1973]. Una rigorosa analisi del concetto di sfruttamento, in sintonia con l'approccio dall'individualismo metodologico, è quella portata avanti in diversi e fondamentali contributi da J. Roemer; ci limitiamo qui a citare J. Roemer [1989].

7) Rimandiamo a P. Donzelli [1986] per una superba trattazione ed esposizione di tale metodologia, di notevole interesse è anche la lettura di G. Hodgson [1986], [1988].

modello di Lancaster siano, in realtà, classi sociali non è, a nostro parere, un aspetto particolarmente qualificante del modello, a differenza di altri approcci allo studio della dinamica di una economia capitalistica<sup>8)</sup>.

Il lavoro di Lancaster è stato ripreso da diversi autori, principalmente con l'intento di generalizzare il modello per saggiare la robustezza del suo risultato principale; queste generalizzazioni hanno, per la maggior parte, considerato assetti istituzionali alternativi dell'economia ovvero strutture informative e/o ipotesi di comportamento diverse per le classi. Lo scopo principale di questo nostro lavoro è di passare in rassegna i contributi che riteniamo più significativi sull'argomento e, al tempo stesso, indicare quali possono essere gli sviluppi ulteriori di questo filone di ricerca.

## **2 IL MODELLO DI LANCASTER: ESPOSIZIONE ED OSSERVAZIONI CRITICHE.**

### **2.1 Il modello.**

Per esporre la sua tesi della inefficienza dinamica di una economia capitalistica in cui distribuzione del reddito ed accumulazione del capitale sono il risultato di decisioni, da parte di lavoratori da un lato e capitalisti dall'altro, non necessariamente coordinate, Lancaster utilizza un modello estremamente semplificato di economia, le cui ipotesi fondamentali sono le seguenti:

- a) l'economia produce un solo bene; tale bene può essere alternativamente usato per il consumo oppure per l'investimento<sup>9)</sup>;
- b) è noto un solo metodo per la produzione di questo bene: lavoro e capitale debbono essere utilizzati in proporzioni fisse nel processo di produzione del bene stesso<sup>10)</sup>.

Il livello del reddito per l'economia considerata nel modello di Lancaster è quindi definito dalla seguente espressione:

$$Y = \min(\mu K, \pi L) \quad [1]$$

---

8) Di questo, d'altra parte, è pienamente consapevole lo stesso Lancaster; cfr. la nota 7 del suo lavoro.

9) Del tutto equivalente è, come ormai ben sappiamo a seguito del dibattito di teoria del capitale che ha contraddistinto gli anni '60 e '70, l'ipotesi di una economia che produce più beni i cui processi di produzione sono caratterizzati, tecnologicamente, dalla medesima composizione organica del capitale (dal medesimo rapporto capitale/prodotto).

10) E' quasi superfluo ricordare che nel modello considerato da Lancaster per capitale è da intendersi la quantità del bene stesso che viene usata come mezzo di produzione.

dove abbiamo indicato con  $(\mu-1)$  il coefficiente (tecnico) di capitale e con  $(\pi-1)$  il coefficiente (tecnico) di lavoro; in particolare Lancaster considera il caso in cui la forza-lavoro non pone mai alcun vincolo all'espansione della produzione e del reddito, in altri termini:

$$\mu K < \pi L \quad [2]$$

e quindi la [1] può essere scritta:

$$Y = \mu K \quad [3]$$

Lancaster introduce, infine, l'ipotesi cruciale del suo modello, vale a dire:

(c) i lavoratori sono in grado di controllare la distribuzione del reddito, i capitalisti controllano il livello degli investimenti, vale a dire il processo di accumulazione.

Possiamo prendere la quota dei salari sul reddito nazionale come misura della distribuzione del reddito:

$$\omega = \frac{wN}{pY} \quad [4]$$

dove con  $w$  abbiamo indicato il saggio monetario di salario, con  $p$  il livello dei prezzi e con  $N$  il livello di occupazione della forza lavoro ( $N < L$ ). Le ipotesi finora introdotte consentono di concludere che i lavoratori sono in grado di controllare la distribuzione del reddito *se e solamente se* riescono a fissare in modo opportuno il saggio di salario reale  $(w/p)^{[11]}$ . Possiamo esprimere la stessa cosa dicendo che i lavoratori sono in grado di fissare il punto della curva salario-profitto:

$$1 = \frac{1}{\mu} + \left( \frac{w}{p} \right) \frac{1}{\pi} \quad [5]$$

In ogni caso l'ipotesi che i lavoratori siano in grado, in quanto classe, di fissare la distribuzione del reddito (fra salari e profitti) non può che fondarsi sull'esistenza di un meccanismo di perfetta indicizzazione del salario nominale<sup>[12]</sup>.

[11] Combinando la [3] e la [4] e osservando che:

$$N = \frac{Y}{\pi} = \frac{\mu}{\pi} K \quad [A1]$$

si ottiene immediatamente che:

$$\omega = \frac{w}{p} \frac{\mu}{\pi} \quad [A2]$$

[12] Alcune osservazioni, al riguardo, sono formulate dallo stesso Lancaster [1973].

Per quanto concerne i capitalisti, l'ipotesi che essi siano in grado di controllare il processo di accumulazione poggia a sua volta sull'esistenza di un qualche meccanismo che fa sì che investimento effettivo ed investimento desiderato vengano a coincidere; in altri termini che i piani di spesa dei capitalisti possano essere sempre realizzati.

La logica sottostante il modello può essere, pertanto, espressa in termini estremamente sintetici nel modo seguente:

*i capitalisti determinano il livello del reddito nazionale (attraverso i profitti che reinvestono nel processo produttivo), mentre i lavoratori determinano il modo in cui il reddito nazionale si ripartisce fra salari e profitti (attraverso la fissazione del saggio di salario reale).*

L'interazione delle decisioni di capitalisti e lavoratori è poi alla base del tipo di evoluzione che seguirà l'economia.

Capitalisti e lavoratori prendono le loro decisioni, nel modello di Lancaster, in modo non cooperativo ed avendo come obiettivo la massimizzazione del proprio benessere<sup>13)</sup>

La dinamica di una economia contraddistinta da queste ipotesi (strutturali e/o di comportamento delle classi sociali) è caratterizzata dalla successione di due fasi distinte:

a) una prima fase di pura accumulazione al ritmo massimo consentito<sup>14)</sup>; i capitalisti reinvestono interamente i loro profitti ed i lavoratori fissano la loro quota di reddito nazionale al suo livello minimo.

b) una seconda fase di puro consumo. I capitalisti spendono interamente i loro profitti in consumi mentre i lavoratori fissano il saggio di salario (reale) al livello massimo e quindi si appropriano della quota massima che i salari possono raggiungere sul reddito nazionale; l'economia viene così a trovarsi in una configurazione di stato stazionario.

E' opportuno soffermarsi, brevemente, sulle condizioni (necessarie e sufficienti) che stanno alla base di questo risultato, in quanto ciò ci consentirà di avanzare alcune considerazioni inerenti il modello nella formulazione di Lancaster, considerazioni che ci torneranno utili nella discussione seguente. Lancaster, come abbiamo già sottolineato nella sezione introduttiva di questo lavoro, formalizza la dinamica dell'economia capitalistica ricorrendo alla nozione di equilibrio noncooperativo (o di Nash) di un gioco differenziale a somma non nulla. Il gioco differenziale che considera Lancaster è così strutturato:

---

13) Lancaster, al riguardo, adotta l'ipotesi più semplice possibile, e cioè che il benessere di ciascuna classe coincida con il livello di consumo che realizza sull'intero orizzonte temporale; abbiamo quindi che le preferenze delle classi sono rappresentate da funzioni intertemporali di utilità additivamente separabili:

$$W_i(C_i, I_i) = \int_0^T C_i(t) dt \quad i=1,2$$

14) La lunghezza di questa fase dipende dai seguenti parametri del modello:

- i) il coefficiente di capitale (quindi la tecnologia);
- ii) la lunghezza dell'orizzonte temporale delle decisioni;
- iii) la quota massima di reddito nazionale di cui possono appropriarsi i lavoratori.

Nel seguito si supponerà sempre che i parametri sopra menzionati assumano sempre valori tali da garantire l'esistenza delle due fasi.

$$\Gamma_T = (N, X, U_1, U_2, L_1, L_2, f)$$

dove:

$$N = \{1, 2\}$$

$$X = \mathbb{R}_+$$

$$U_1 = [c, b]$$

$$U_2 = [0, 1]$$

$$L_1 = g_1(t, K, u_1, u_2) = \mu K u_1$$

$$L_2 = g_2(t, K, u_1, u_2) = \mu K(1 - u_1)(1 - u_2)$$

$$f = f(t, K, u_1, u_2) = \mu K(1 - u_1)u_2$$

rappresenta l'insieme dei giocatori. I giocatori nel modello di Lancaster sono la classe dei lavoratori e quella dei capitalisti.

rappresenta la variabile di stato del modello, cioè lo stock di capitale dell'economia;

rappresenta l'insieme dei valori della variabile di controllo dei lavoratori;

rappresenta l'insieme dei valori della variabile di controllo dei capitalisti;

rappresenta il pay-off istantaneo dei lavoratori.

rappresenta il pay-off istantaneo dei capitalisti.

rappresenta, infine, l'evoluzione della variabile di stato, cioè dello stock di capitale:

$$\dot{K} = \mu K(1 - u_1)u_2$$

Le classi scelgono le loro variabili di controllo in modo tale da massimizzare il flusso intertemporale di consumo sull'orizzonte considerato:

#### LAVORATORI

#### CAPITALISTI

$$\max_{u_1 \in [c, b]} \int_0^T (\mu K u_1) dt$$

subordinatamente a:

$$\begin{cases} \dot{K} = \mu K(1 - u_1)u_2 \\ K(0) = K_0 \\ u_2 = \bar{u}_2 \end{cases}$$

$$\max_{u_2 \in [0, 1]} \int_0^T \mu K(1 - u_1)(1 - u_2) dt$$

subordinatamente a:

$$\begin{cases} \dot{K} = \mu K(1 - u_1)u_2 \\ K(0) = K_0 \\ u_1 = \bar{u}_1 \end{cases}$$

Lancaster assume che capitalisti e lavoratori adottino delle strategie di tipo "open-loop", vale a dire facciano dipendere la scelta della loro variabile di controllo dallo stock di capitale iniziale (cioè dal valore iniziale della variabile di stato) e dall'intervallo di tempo trascorso (rispetto all'istante iniziale<sup>15)</sup>). In termini formali abbiamo:

$$\{u_i | u_i: K_0 \times [0, T] \rightarrow U_i, \text{ continua a tratti} \}$$

Applicando il principio del massimo di Pontriagin<sup>16)</sup> otteniamo il seguente insieme di condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un equilibrio di Nash per il modello in considerazione:

$$\begin{cases} \mu K (\bar{u}_1 - u_1) (1 - \lambda_1 \bar{u}_2) \geq 0 \\ \mu K (1 - \bar{u}_1) (\bar{u}_2 - u_2) (\lambda_2 - 1) \geq 0 \\ \dot{K} = \mu K (1 - \bar{u}_1) \bar{u}_2 \\ \dot{\lambda}_1 = -[\mu \bar{u}_1 + \lambda_1 \mu (1 - \bar{u}_1) \bar{u}_2] \\ \dot{\lambda}_2 = -[\mu (1 - \bar{u}_1) (1 - \bar{u}_2) + \mu (1 - \bar{u}_1) \bar{u}_2 \lambda_2] \\ \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$$

e dove abbiamo indicato con  $\bar{u}_i$  il valore ottimale della variabile di controllo  $i$ -ma ( $i=1,2$ ).

Come si può notare le strategie ottimali per ciascuna classe *non* dipendono dalla variabile di stato; lo stesso dicasi per le variabili  $\lambda_1, \lambda_2$ , che, come noto, rappresentano i prezzi ombra del capitale per lavoratori e capitalisti, rispettivamente. Il modello di Lancaster appartiene alla classe dei giochi differenziali "state-separable"<sup>17)</sup>. L'implicazione, sul piano economico, di questa caratteristica formale del modello di Lancaster è che la soluzione "open-loop" del modello appartiene anche all'insieme delle strategie "closed-loop", cioè di quelle strategie che fanno dipendere la variabile di controllo dei giocatori anche dal valore assunto dalla variabile di stato<sup>18)</sup> e quindi si qualifica anche come soluzione di tipo "closed-loop". La soluzione del modello di

15) Come vedremo più avanti, la caratterizzazione degli spazi di strategie delle due classi è uno degli elementi in base ai quali contrapporre le diverse generalizzazioni del modello di Lancaster che sono state proposte nella letteratura.

16) Il riferimento classico è, naturalmente, L. Pontriagin et al. [1962]. Trattazioni sistematiche del principio del massimo sono contenute in A. Seierstad, K. Sydseter [1987], A. Takayama [1974], e, soprattutto con riferimento a problemi con orizzonte temporale infinito, D. Carlson, A. Haurie [1987].

17) Per una trattazione sistematica di questa classe di giochi differenziali rimandiamo il lettore a Doehner E., Feichinger G., Jørgensen S. [1985].

18) Formalmente l'insieme delle strategie "closed-loop" è così definito:

(s)  $u_i(K) = [0, T] \rightarrow U_i$ , continua e tratti

Per maggiori dettagli si rinvia il lettore al classico testo di T. Basar, G.J. Olsder [1982], oppure al più anello (ma estremamente interessante) lavoro di A. Mehlmann [1988].

Lancaster è quindi "subgame-perfect"<sup>19)</sup>. E' possibile fornire una semplice spiegazione economica di questo fatto. Dalle condizioni (necessarie e sufficienti) si ricava che i valori ottimali delle variabili di controllo per ciascuna classe non dipendono dalla variabile di stato (per cui non è restrittivo limitare l'attenzione, come nel caso di Lancaster, alle sole strategie "open-loop") e constano di due fasi<sup>20)</sup>; infatti:

$$\hat{u}_1 = \begin{cases} b & \text{se } \lambda_1 \mu_2 < 1 \\ c & \text{se } \lambda_1 \mu_2 > 1 \end{cases}$$

$$\hat{u}_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_2 > 1 \\ 0 & \text{se } \lambda_2 < 1 \end{cases}$$

Poichè  $[c, b] \subset \mathbb{R}_+$ ,  $_{[0,1]} \subset \mathbb{R}_+$ , si ricava immediatamente che i prezzi ombra del capitale sono, per entrambe le classi, funzioni decrescenti del tempo:

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \frac{c}{1-c} [e^{-\mu(1-c)(\bar{t}-t)} - 1] + \frac{b}{(1-b)} & \text{se } t \in [0, \bar{t}] \\ \frac{b}{(1-b)} - \mu b(t - \bar{t}) & \text{se } t \in (\bar{t}, T] \end{cases}$$

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} e^{-\mu(1-c)(t-\bar{t})} & \text{se } t \in [0, \bar{t}] \\ 1 - \mu(1-b)(t - \bar{t}) & \text{se } t \in (\bar{t}, T] \end{cases}$$

La situazione è quella descritta nel grafico sottostante:

Figura 1

Come si può notare alla data  $\bar{t} = T - 1/\mu(1-b)$  i lavoratori, pur essendo disposti a fissare il saggio di salario al livello minimo (in quanto la valutazione di una unità addizionale di capitale è per loro superiore, in termini di bene di consumo, alla quantità corrente di bene di consumo cui debbono rinunciare) non lo fanno in quanto il maggior risparmio che essi mettono a disposizione dei capitalisti viene da quest'ultimi utilizzato per incrementare i loro consumi anzichè essere investito nel processo produttivo.

19) La nozione di "subgame-perfectness" è sostanzialmente dovuta a R. Selten [1975]; si veda anche, per una trattazione sistematica, E. van Damme [1988].

20) Questo, come si può facilmente verificare, se  $b \geq 1/2$ .

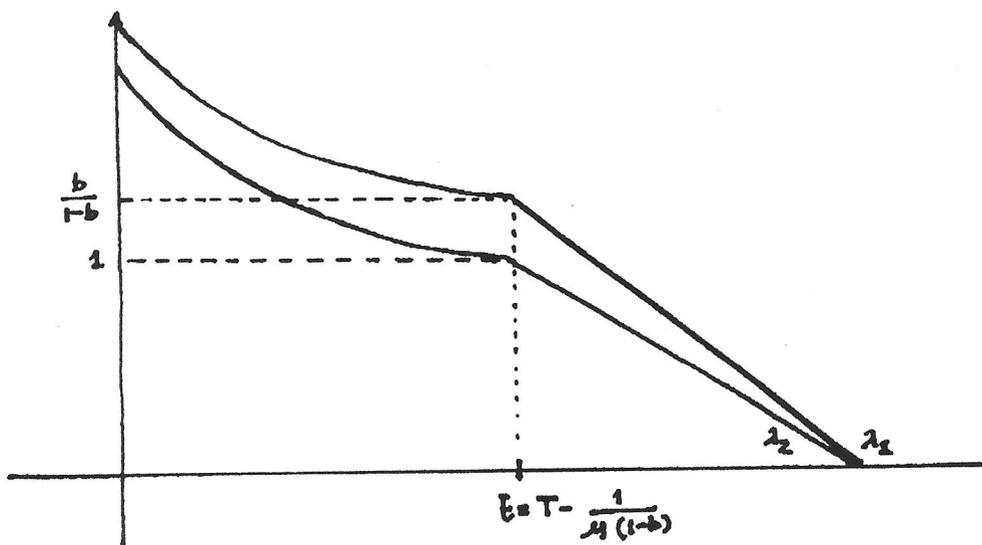


FIGURA 1

Chiudiamo con questa sezione osservando che la soluzione non cooperativa del modello di Lancaster è anche "time-consistent".

## 2.2 L'inefficienza dinamica della soluzione noncooperativa.

Per dimostrare che la configurazione "conflittuale" del modello rappresenta una situazione dinamicamente inefficiente, Lancaster confronta l'equilibrio dinamico che essa implica con quello associato invece alla configurazione che potremmo definire "socialmente ottimale" e che è individuata da Lancaster come quella che massimizza il consumo della collettività<sup>[21]</sup> nel suo complesso (indipendentemente da come questo consumo si distribuisca, poi, fra capitalisti e lavoratori). Il problema che ora deve essere risolto è il seguente<sup>[22]</sup>:

$$\max_{u \in [0, 1-c]} \int_0^T \mu K(1-u) dt \quad [6]$$

subordinatamente a:

$$\begin{cases} \dot{K} = \mu K u \\ K(0) = K_0 \end{cases}$$

da cui otteniamo che la politica ottimale di risparmio che consente di massimizzare il consumo complessivo sull'orizzonte temporale  $[0, T]$  è la seguente:

$$u_1 = \begin{cases} (1-c) & \text{se } t \in [0, t^*] \\ 0 & \text{se } t \in [t^*, T] \end{cases}$$

dove:

$$t^* = T - \frac{1}{\mu}$$

21) Si può facilmente dimostrare che la soluzione socialmente ottimale di Lancaster appartiene all'insieme delle soluzioni "Pareto ottimali", soluzioni che si ottengono nel modo seguente:

$$\max_{\substack{u_1, u_2 \in [0, 1] \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+}} \int_0^T [\alpha \mu K u_1 + (1-\alpha) \mu K (1-u_1)(1-u_2)] dt$$

Si veda A. Mehlmann [1988].

22) Si osservi che:

$$C_1 + C_2 = \mu K u_1 + \mu K (1-u_1)(1-u_2) = \mu K (1 - (1-u_1)u_2)$$

da cui risulta che possiamo ora considerare come variabile di controllo da parte della collettività:

$$u = (1-u_1)u_2$$

cioè a dire la quota di reddito eccedente il consumo della collettività che viene investita.

Come si può agevolmente constatare la soluzione "socialmente ottimale" presenta una prima fase di accumulazione che è più lunga di quella della fase conflittuale; l'inefficienza dinamica del modello di Lancaster quando le classi non coordinano le loro strategie di risparmio ed investimento è quindi dovuta ad una insufficiente accumulazione da parte dei capitalisti. Quale è la spiegazione di questa insufficiente accumulazione? La variabile economica fondamentale che spiega questo fatto è il prezzo ombra del capitale che caratterizza le decisioni della collettività, nel caso di comportamento cooperativo, e le decisioni dei capitalisti nel caso di comportamento non cooperativo o conflittuale. Il prezzo ombra del capitale può essere interpretato, in ciascun istante  $t$ , come la produttività marginale del capitale moltiplicata per  $(T-t)$ ; nel caso della soluzione noncooperativa la produttività marginale  $v_t$ , in realtà, moltiplicata per  $(1-b)$  in quanto i capitalisti possono appropriarsi solamente di una parte del maggior prodotto netto che è possibile ottenere. Questo spiega perchè la fase di accumulazione dura di meno nel caso non cooperativo.

Possiamo chiudere questo paragrafo con alcune brevi osservazioni. Il modello proposto da Lancaster è un modello di crescita in cui il processo stesso di crescita è governato dalle condizioni di offerta; è un modello in cui si pone come fine ultimo del processo economico l'attività di consumo (sia per quanto riguarda i capitalisti sia per i lavoratori); è, infine, un modello strettamente reale (non viene presa in considerazione l'esistenza di un settore finanziario accanto a quello reale e quindi la presenza di attività finanziarie in cui tenere (parte del)la ricchezza). E' inoltre un modello in cui le due classi dispongono di un *eguale* potere per quanto concerne la sfera economica<sup>[23]</sup>.

Il modello, quindi, evidenzia gli aspetti salienti del processo di accumulazione delle ricchezze e di distribuzione del reddito che con essa è possibile produrre quando tale processo sia governato e controllato da centri decisionali diversi e un ruolo fondamentale sia da attribuire, pertanto, in tale processo, a fattori di esternalità. Che ciò avvenga anche in una economia capitalistica non pensiamo possa essere messo in discussione; che avvenga secondo le modalità e con le caratteristiche del modello di Lancaster riteniamo sia più difficilmente sostenibile.

---

[23] Ciò è tradotto, formalmente, nella particolare nozione di equilibrio del gioco differenziale che descrive l'evoluzione dinamica dell'economia, vale a dire l'equilibrio non cooperativo o di Nash.

### 3 GENERALIZZAZIONI DEL MODELLO DI LANCASTER.

#### 3.1 Aspetti riguardanti la struttura del modello.

La letteratura che fa capo al modello di Lancaster ha perseguito l'obiettivo della sua generalizzazione operando su due fronti distinti: quello della struttura del modello, da un lato, quello del comportamento delle classi sociali e quindi del modo più appropriato di modellare i rispettivi spazi di strategie, dall'altro. In questa sezione ci occuperemo del primo di questi aspetti rimandando quello relativo alla definizione degli spazi di strategie alla sezione seguente.

Per quanto concerne la struttura del modello si è cercato di abbandonare alcune delle ipotesi più restrittive che lo contraddistinguono, per saggiare la robustezza, sul piano analitico, del suo risultato principale, vale a dire, come abbiamo abbondantemente discusso nel paragrafo 2, la perdita di benessere (in termini di livelli di consumo) della collettività (e quindi l'inefficienza) in conseguenza della separazione delle decisioni che governano il processo di accumulazione e distribuzione del reddito.

Una prima ipotesi concerne la tecnologia. Il modello di Lancaster non considera il problema di scelta della combinazione dei fattori produttivi (il problema, quindi, della scelta della tecnica di produzione); l'economia in esso considerata dispone di un solo metodo produttivo per produrre l'output. Questa ipotesi è stata parzialmente abbandonata da M. Hoel<sup>[24]</sup> in un suo lavoro. Egli ha, infatti, considerato un modello in cui la tecnologia è caratterizzata da rendimenti decrescenti di scala rispetto al capitale:

$$Y = \phi(K) \quad [7]$$

$$L = \pi Y \quad [8]$$

Lo stock di capitale è quindi fattore limitazionale anche nel modello di Hoel (la seconda delle equazioni precedenti rappresenta la domanda di lavoro; anche nel modello di Hoel, quindi, la forza-lavoro deve essere disponibile in misura sufficiente a consentire la realizzazione del livello di produzione compatibile con la piena utilizzazione dello stock di capitale) ma ora la sua produttività non è più costante bensì decrescente<sup>[25]</sup>.

La esplicita considerazione di rendimenti decrescenti del capitale non modifica la struttura

---

24) M. Hoel (1978).

25) In termini formali abbiamo:

$$\frac{dY}{dK} > 0$$

$$\frac{d^2Y}{dK^2} < 0$$

della soluzione del modello: anche in questo caso il sentiero di equilibrio dinamico dell'economia consta di due fasi, una di pura accumulazione ed una di puro consumo, ed è caratterizzato dalla presenza di inefficienza (per quanto riguarda il livello di benessere che potrebbe, potenzialmente, essere realizzato). I rendimenti decrescenti del capitale influenzano la durata di queste due fasi (vale a dire l'istante  $t$  in corrispondenza del quale l'economia passa dalla pura accumulazione al puro consumo), e non è difficile comprenderne il motivo. Con il procedere dell'accumulazione gli incrementi di reddito (e quindi di potenziale consumo per ciascuna classe) diventano via via più piccoli; questo non potrà che produrre i suoi effetti sulla valutazione dell'investimento da parte di ciascuna classe, in particolare sul momento in cui i capitalisti non trovano più conveniente continuare il processo di accumulazione<sup>[26]</sup>.

E' importante sottolineare che il modello di Hoel non abbandona l'ipotesi di esistenza di un solo metodo di produzione, ma semplicemente quella di rendimenti costanti di scala per entrambi i fattori produttivi; nel modello di Hoel l'economia dispone di un solo metodo di produzione, ma mentre il coefficiente tecnico di lavoro rimane costante (come nel modello di Lancaster), quello di capitale varia con il variare dello stock di capitale<sup>[27]</sup>.

L'abbandono dell'ipotesi di esistenza di un solo metodo di produzione richiede l'esplicita considerazione di una funzione di produzione (di tipo matriciale, se supponiamo che il numero di metodi alternativi di produzione sia finito, o di tipo neoclassico tradizionale se supponiamo che il numero di metodi di produzione sia infinitamente grande); questo è quanto fanno R. Balducci e V. Denicolò in un interessante lavoro<sup>[28]</sup>. La considerazione di una funzione di produzione nel modello di Lancaster introduce il problema della scelta della tecnica; questo problema può essere risolto ipotizzando, p.e., una terza classe, quella degli imprenditori, che domandano capitale e lavoro per organizzare il processo produttivo in modo tale da massimizzare i profitti. I problemi che scaturiscono, soprattutto per quanto concerne la definizione delle strategie di lavoratori e capitalisti, sono analizzati nel citato lavoro di Balducci e Denicolò, ed in parte accennati in M. Pohjola [1986]; fondamentalmente, però, i risultati ottenuti da Lancaster rimangono validi anche con questo tipo di generalizzazione<sup>[29]</sup>.

E', infine, da menzionare l'estensione dell'orizzonte temporale del modello di Lanca-

---

26/ Sul piano formale la considerazione di rendimenti decrescenti del capitale introduce una non-linearità nell'equazione differenziale che descrive la dinamica della variabile di stato (lo stock di capitale, appunto) e quindi rende più complessa la ricerca della soluzione del modello; rimandiamo il lettore interessato a questi aspetti più tecnici all'articolo di Hoel.

27/ La stessa cosa può essere espressa dicendo che nel modello di Lancaster il metodo di produzione rimane immutato nel tempo mentre in quello di Hoel il metodo produttivo cambia di periodo in periodo.

28/ Cfr. R. Balducci, V. Denicolò (1984). E' da sottolineare che l'interesse principale di questi autori non è tanto nella modificazione di ipotesi relative alla tecnologia (come mostrano nel loro lavoro, ciò può tradursi in una restrizione dell'insieme di valori della variabile di controllo per una delle due classi) del modello di Lancaster, quanto in un aspetto che possiamo definire di tipo istituzionale, e relativo alla struttura proprietaria dello stock di capitale. Ritorniamo nella sezione successiva su questi aspetti.

29/ In questo filare si inserisce anche il tentativo fatto soprattutto da M. Pohjola, di considerare il progresso tecnico; si rimanda il lettore, in particolare, a M. Pohjola (1985), dove l'autore considera il caso di progresso tecnico "labour-augmenting", e a M. Pohjola (1986), in cui l'autore prospetta la possibilità di considerare nell'ambito della modellistica alla Lancaster, le frontiere delle possibilità di innovazione (innovation possibility frontier) di Kennedy-Samuelsen, e quindi di analizzare il caso di progresso tecnico endogeno. Cenni sul problema del progresso tecnico sono contenuti anche in M. Hoel (1978).

ster(cfr. M. Pohjola [1985], P. Mehrling [1986]); questa generalizzazione ha però, almeno a parere di chi scrive, una valenza prettamente tecnica, soprattutto per quanto concerne la formulazione delle funzioni obiettivo delle diverse classi<sup>30)</sup>. Riteniamo che la esplicita considerazione di un orizzonte temporale infinito, per questo tipo di modelli, sia particolarmente interessante, sul piano più squisitamente economico, per quanto riguarda la ricerca delle condizioni in base alle quali l'evoluzione dinamica dell'economia abbia natura ciclica, ovvero per saggiare la natura qualitativa della configurazione di equilibrio di steady-state per questa classe di modelli<sup>31)</sup>; questo, tuttavia, è un campo ancora largamente da esplorare.

### 3.2 Le strategie delle classi.

Alcuni autori hanno perseguito una strada diversa per quanto riguarda l'estensione del modello di Lancaster; si sono, cioè, proposti di generalizzare il contesto istituzionale che ne è a fondamento. Sul piano analitico-formale ciò si è tradotto nella opportuna definizione degli spazi di strategie di cui sono dotate le classi.

Il punto di partenza di questi lavori che generalizzano l'assetto istituzionale dell'economia considerata nel modello di Lancaster è il tipo di spiegazione della inefficienza dinamica che, come abbiamo visto, contraddistingue il modello che viene avanzata: tale inefficienza è ricondotta alla presenza di una esternalità di natura dinamica. La decisione da parte di una classe di risparmiare ed investire (per ottenere un beneficio futuro in termini di consumo) è influenzata dal fatto che il frutto di tale accumulazione può beneficiare l'altra classe; ciò si traduce, in presenza di classi sociali che perseguono razionalmente il proprio interesse, in un livello di accumulazione (e di conseguenza di reddito prodotto) inferiore a quello ottimale per la società nel suo complesso (quello, ad esempio, realizzabile nel caso di cooperazione da parte delle classi<sup>32)</sup>). E' possibile, attraverso un opportuno assetto istituzionale dell'economia, ridurre la perdita di efficienza che contraddistingue la situazione "socialmente conflittuale" in cui cioè le classi sociali si comportano razionalmente, ma in modo non cooperativo? Tre direttrici di ricerca ci sembra meritino di essere menzionate a tale riguardo.

Anzitutto quella perseguita da M. Pohjola [1983] con il ricorso alla soluzione di Stac-

---

30) Con orizzonte infinito possono sorgere problemi per quanto riguarda la convergenza delle funzioni obiettivo (e quindi è necessario introdurre le condizioni al contorno in modo opportuno); una alternativa è rappresentata dall'utilizzo, sulla falsariga dei lavori di G. Laitman, A. Haure [1984], W. Brock, A. Haure [1976], H. Halkin [1974] ed altri (si rimanda alla ottima rassegna di D. Carlson, A. Haure [1987] nonché a A. Senerud, K. Sydsater [1986] per maggiori dettagli) del principio di "overtaking" per quanto riguarda il superamento delle difficoltà analitiche legate alle (possibile) non convergenza delle funzioni obiettivo delle classi.

31) Per lo studio delle proprietà qualitative della configurazione di steady-state di questi modelli rimandiamo a M. Pohjola [1985], E. Doctner, H. Takahashi [1988]; in un quadro di riferimento parzialmente diverso il medesimo problema è affrontato da C. Fershtman, E. Muller [1984] [1986].

32) Come abbiamo visto, i lavoratori, nel modello di Lancaster, risparmiano in un modo del tutto particolare, vale a dire "trasferendo" reddito alla classe capitalistica affinché lo investa.

kelberg del gioco differenziale (lungo questa linea si colloca anche il contributo di T. Basar, A. Haurie, G. Ricci [1985]). Degna di nota è anche quella in cui i lavoratori risparmiano parte dei loro redditi e quindi acquisiscono la proprietà di parte dello stock di capitale; in questo caso la propensione *positiva* al risparmio dei lavoratori può costituire una "*minaccia*" per i capitalisti i quali potrebbero, con il passar del tempo, vedere ridursi, in termini relativi, la quota di capitale di loro proprietà, e questo potrebbe impedire all'investimento di scendere al di sotto di un certo livello. Questo problema è stato ampiamente trattato da Balducci, Denicò<sup>33)</sup>. Infine va menzionato il tentativo, operato prevalentemente da M. Pohjola, di utilizzare le strategie di "*minaccia*" sia nel contesto del modello assiomatico di contrattazione di Nash<sup>34)</sup> sia facendo ricorso alle più recenti formulazioni di giochi non-cooperativi in cui gli agenti sono dotati di strategie con "*memoria*"<sup>35)</sup>; in entrambi i casi la soluzione del modello soddisfa il criterio paretiano di efficienza.

#### 4 CONCLUSIONI E PROSPETTIVE DI RICERCA.

L'obiettivo di questo lavoro era quello di fornire una rassegna, in chiave critica, della letteratura originatasi dal modello di Lancaster in cui il processo di accumulazione del capitale e distribuzione del reddito è formalizzato attraverso un gioco differenziale (a somma non nulla). Gli aspetti rilevanti di questa modellistica sono sostanzialmente due:

i) la caratteristica della soluzione del modello. La dinamica dell'economia capitalistica è essenzialmente concepita in termini di successione di due fasi ben distinte, quella della massima accumulazione prima, quella del massimo consumo successivamente.

ii) il problema dell'inefficienza dinamica della soluzione non-cooperativa (conflittuale). Il programma di accumulazione che viene realizzato in una economia capitalistica in cui i centri decisionali prendono decisioni in maniera autonoma ed indipendente non è quello socialmente ottimo; d'altra parte le generalizzazioni del modello mostrano che vi sono possibili contesti istituzionali in cui il problema dell'inefficienza può essere (parzialmente o interamente) risolto.

---

33) Cfr. il loro lavoro già citato. Si veda anche G. Gozzi [1988], il quale elabora un modello di M. Pohjola [1984].

34) Cfr. M. Pohjola [1984].

35) Cfr. A. Haurie, M. Pohjola [1987].

Riteniamo che il problema della struttura della soluzione del modello di Lancaster meriti una maggiore attenzione soprattutto se riferito allo studio di una economia capitalistica nel vero senso del termine, una economia, cioè, in cui il processo di accumulazione è messo in moto dalla classe capitalistica ed in cui, quindi, il potere di cui dispongono capitalisti e lavoratori è diseguale (ed in favore della classe capitalistica). Ci sembra, in particolar modo, che la esplicita considerazione del "circuito del capitale" (di marxiana memoria) e quindi del possibile conflitto fra capitale finanziario e capitale reale rappresenti un interessante tema da prendere in considerazione all'interno di questo approccio.

## 5 BIBLIOGRAFIA

- Balducci R. - Denicolò V., Quando i lavoratori risparmiano: sovraccumulazione del capitale ed eutanasia dei capitalisti, *ECONOMIA POLITICA* 1984
- Basar T. - Haurie A. - Ricci G., On the dominance of capitalists' leadership in a 'feedback-Stackelberg' solution of a differential game model of capitalism, *JOURNAL OF ECON. DYN. AND CONTROL* 1985
- Basar T. - Olsder G.J., *Dynamic non-cooperative game theory*, ACADEMIC PRESS 1982
- Brock W. - Haurie A., On the existence of overtaking optimal trajectories over an infinite time horizon., *MATHEMATICS OF OP. RESEARCH* 1976
- Burmeister E., *Capital theory and dynamics*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1980
- Carlson D. - Haurie A., *Infinite horizon optimal control*, SPRINGER VERLAG 1987
- Dockner E. - Takahashi H., On the saddle-point stability for a class of accumulation games, *mimeo* 1988
- Dockner E. et al., Tractable classes of non-zero sum open-loop Nash differential games: theory and examples, *JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS* 1985
- Donzelli F., *Il concetto di equilibrio nella teoria economica neoclassica*, NIS 1986
- Feichtinger G.(ed), *Optimal control 2*, NORTH HOLLAND 1986
- Fershtman C. - Muller E., Capital accumulation games of infinite duration, *JOURNAL OF ECONOMIC THEORY* 1984
- Fershtman C. - Muller E., Turnpike properties of capital accumulation games, *JOURNAL OF ECONOMIC THEORY* 1986
- Gozzi G., Risparmio dei lavoratori e contrattazione in un modello di capitalismo come gioco differenziale: una generalizzazione del modello di M. Pohjola, *mimeo* 1988
- Halkin H., Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizon, *ECONOMETRICA* 1974
- Haurie A. - Leitmann G., On the global asymptotic stability of equilibrium solutions for open-loop differential games, *LARGE SCALE SYSTEMS* 1984

- Haurie A. - Pohjola M., Efficient equilibria in a differential game of capitalism, *JOURNAL OF ECON. DYN. AND CONTROL* 1987
- Hodgson G., Behind methodological individualism, *CAMBRIDGE JOURNAL OF ECONOMICS* 1986
- Hodgson G., *Economics and institutions*, POLITY PRESS 1988
- Hoel M., Distribution and growth as a differential game between workers and capitalists, *INTERNATIONAL ECONOMIC REVIEW* 1978
- Lancaster K., The dynamic inefficiency of capitalism, *JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY* 1973
- Mehlmann A., *Applied differential games*, PLENUM PRESS 1988
- Pohjola M., Growth, distribution and employment as a differential game, in G. FEICHTINGER (ed) 1986
- Pohjola M., Nash and Stackelberg solutions in a differential game model of capitalism, *JOURNAL OF ECON. DYN. AND CONTROL* 1983
- Pohjola M., Threats and bargaining in capitalism: a differential game view, *JOURNAL OF ECON. DYN. AND CONTROL* 1984
- Pontriagin et al., *The mathematical theory of optimal processes*, INTERSCIENCE 1962
- Roemer J.E., *Free to lose*, HARVARD UNIVERSITY PRESS 1989
- Seierstad A. - Sydsæter K., *Optimal control theory with economic applications*, NORTH HOLLAND 1987
- Selten R., Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *INTERNATIONAL JOURNAL OF GAME THEORY* 1975
- Takayama A., *Mathematical economics*, DRYDEN PRESS 1974
- Van Damme E., *Stability and perfection of Nash equilibria*, SPRINGER VERLAG 1988
- Weizsäcker C.C., Modern capital theory and the concept of exploitation, *KYKLOS* 1973

