

L'ANALISI DELLE INTERDIPENDENZE SETTORIALI  
IN UN CONTESTO INTERTEMPORALE:  
I MODELLI TEORICI E LA VERIFICA ECONOMETRICA

Roberto Violi

Gennaio 1985

N. 12

Desidero ringraziare il Prof. S. Zamagni per aver letto ed efficacemente commentato una precedente stesura di questo lavoro; naturalmente egli non porta la minima responsabilità per gli errori e le omissioni che il testo dovesse eventualmente contenere.

La presente ricerca è stata in parte condotta presso l'Università di Oxford (Linacre College) con il sostegno finanziario della Borsa "G. Compagna" (anno 84-85) della Cassa di Risparmio di Venezia, cui sono profondamente grato.

## 1. INTRODUZIONE

Lo scopo principale di questo lavoro è di delineare un coerente quadro teorico per la verifica econometrica di modelli che descrivono la struttura produttiva dell'economia secondo una prospettiva intertemporale.

L'attenzione sarà in particolare concentrata sul modello di crescita neoclassico, nella sua versione descrittiva ed ottimale, e su di una versione generalizzata del modello neo-austriaco, proposto da Hicks (1973); per entrambi questi modelli si utilizzerà un'appropriata formulazione multisettoriale al fine di tenere in adeguata considerazione le interdipendenze strutturali dell'economia.

Pur condividendo una comune prospettiva intertemporale, i due modelli in questione si differenziano notevolmente per la diversa angolatura di tale prospettiva.

Il modello neoclassico consente infatti di valutare l'ottimalità intertemporale del sentiero di accumulazione del capitale, mentre il modello neo-austriaco permette di studiare la fase di adattamento dell'economia, connessa ai processi di innovazione tecnologica.

In sintesi, il primo si presta alla valutazione, in termini di dinamica comparata, dei sentieri alternativi percorribili dall'economia, mentre il secondo è adatto a studiare il processo di transizione - o traversa, secondo la terminologia hicksiana - tra questi sentieri alternativi.

Ciò detto, la trattazione teorica che esporremo sarà rigidamente finalizzata alla verifica econometrica, nel senso che la preoccupazione principale resterà la ricerca della forma ridotta del modello, in modo tale da consentire la stima dei parametri.

In sostanza, volendo colmare il gap tra la modellizzazione teorica e le esigenze poste dalla verifica econometrica, verrà data sistematicamente la priorità a quest'ultima istanza.

Nella prossima sezione presenteremo il modello neoclassico, mentre nella terza il modello neo-austriaco (generalizzato). La quarta sezione è invece interamente dedicata ai problemi di specificazione econometrica, oltre che all'individuazione delle possibili applicazioni empiriche delle stime.

La sezione conclusiva, infine, delinea le possibili direzioni di marcia per lo approfondimento dei temi trattati nel corso di questo lavoro.

2. IL MODELLO NEOCLASSICO DI CRESCITA E LA VALUTAZIONE DI SENTIERI  
ALTERNATIVI DI ACCUMULAZIONE

2.1

Il modello neoclassico di crescita qui utilizzato è quello standard; siano:

$$Y_i = f^i(K_{i0}, K_{i1}, \dots, K_{in}) \quad \forall i=0,1,\dots,n \quad (1)$$

funzioni neoclassiche di produzione, dove  $Y_0$  indica l'output del bene di consumo, mentre  $Y_i \quad \forall i=1,n$  denota la lista dei restanti outputs. L'input di lavoro per gli  $(n+1)$  processi dell'economia è indicato con  $K_{i0} \quad \forall i=0,n$ , mentre con  $K_{ij}$  sono indicati i capitali veri e propri che partecipano al processo produttivo  $\forall i=0,n$  e  $\forall j=1,n$ . Per ottenere la cosiddetta "funzione sociale di produzione" o frontiera aggregata di trasformazione, si definisce il programma di massimizzazione seguente:

$$C = \text{MAX } f^0(K_{00}, K_{01}, \dots, K_{0n}) \quad (2)$$

sotto il vincolo costituito dalla (1).

La soluzione del programma (2)-(1)<sup>(1)</sup>, espressa in termini pro-capite, è indicata con:

$$c = T(y_1, y_2, \dots, y_n, k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (3)$$

mentre le condizioni statiche di ottimalità, imposte dalla massimizzazione dei profitti, richiedono che:<sup>(2)</sup>

$$\partial c / \partial y_i \equiv \partial T / \partial y_i = - p_i \quad \forall i=1,n \quad (4)$$

$$\partial c / \partial k_i \equiv \partial T / \partial k_i = q_i \quad (5)$$

dove  $p_i$  e  $q_i$  indicano rispettivamente il prezzo del generico output ed il costo dell'uso del servizio del generico bene-capitale, misurati in termini del prezzo del bene di consumo<sup>(3)</sup>.

La condizione di equilibrio dinamico per la parte reale dell'economia è la seguente:

$$\begin{aligned} & (\text{deperimento dello stock di capitale})_{i+1} + (\text{variazione dello stock} \\ & \text{di capitale})_{i+1} = (\text{produzione del bene capitale})_i \quad \forall i=1,n \end{aligned} \quad (6)$$

Tale condizione è soddisfatta purchè tutti i beni-capitale prodotti siano regolarmente installati, ovvero le quantità prodotte  $Y_i$   $\forall i=1, n$  corrispondano alle quantità domandate.

La condizione di equilibrio dinamico per il lato valutativo è invece data da:

$$(\text{guadagni (o perdite) in conto capitale})_{i+} - \frac{q_i}{p_i} = \quad (7)$$

= tasso monetario di interesse

$\forall i=1, n.$

si tratta di una ben nota condizione di arbitraggio per l'equilibrio di portafoglio; il lato sinistro della (7), infatti, rappresenta esattamente il rendimento "spuntato" dal prestatore del bene capitale, per ogni dollaro investito.

La (6) e la (7) possono essere tradotte, nell'ambito del modello in questione, come segue:

$$\dot{K}_i(t) = y_i(K(t), p(t)) - (g + \delta_i) K_i(t) \quad (8)$$

$$\dot{P}_i(t) = P_i(t) [r_0(t) + \delta_i] - q_i(K(t), p(t)) \quad (9)$$

dove il punto sopra le variabili indica l'operazione di derivazione rispetto al tempo,  $g$  il saggio di crescita della forza lavoro (costante ed identico per tutti i settori),  $\delta_i$  il deperimento del generico bene capitale ed  $r_0(t)$  il tasso monetario di interesse. La dipendenza di  $y_i$  e  $q_i$  rispetto a  $(k, p)$  è regolata dalla (3), in vista del teorema delle funzioni implicite, e dalla (4)-(5). Al fine di semplificare l'analisi, conviene supporre che il tasso monetario di interesse, che in questo modello è una variabile esogena, sia costante nel tempo, perciò:

$$r_0(t) = r_0 \quad (10)$$

quest'ultima ipotesi, congiuntamente all'uniforme tasso di crescita della forza lavoro in ogni settore, potrebbe essere rimossa, così da rendere più aderente alla realtà economica l'analisi che segue. Tuttavia, la necessità di mantenere una ragionevole maneggevolezza del modello ci ha indotto ad incorporarle nel modello. Conviene infine rilevare come le condizioni di equilibrio dinamico (6) - (7) siano le medesime del modello dinamico di Leontief<sup>(4)</sup>.

Grazie alla (10) il sistema dinamico (9)-(8) è così completamente "endogeneizzato", ovvero è stato trasformato in un sistema autonomo, in cui <sup>punti di equilibrio</sup> sono indicati con:

$$2.2 \quad (k^*, p^*) \quad (11)$$

Siccome siamo interessati allo studio della natura dinamica dello stato stazionario  $(\dot{k}, \dot{p}) = (0, 0)$ , conviene linearizzare, secondo una procedura standard, il sistema dinamico (9)-(8) in corrispondenza di tale punto:

$$\begin{bmatrix} \dot{k}^*(t) \\ \dot{p}^*(t) \end{bmatrix} = J(\bar{k}, \bar{p}) \begin{bmatrix} k^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} \quad \forall t \in R_+ \quad (12)$$

dove:

$$k^*(t) \equiv k(t) - \bar{k}, \quad p^*(t) \equiv p(t) - \bar{p} \quad \forall t \in R_+ \quad (13)$$

$$J(\bar{k}, \bar{p}) \equiv \begin{bmatrix} (\partial y / \partial k) - (g + r \delta_1) I & \partial y / \partial p \\ - \partial q / \partial k & (z_0 + r \delta_1) I - \partial q / \partial p \end{bmatrix}$$

La matrice  $J(\bar{k}, \bar{p})$  rappresenta lo jacobiano calcolato nel punto di equilibrio (stato stazionario)  $(\bar{k}, \bar{p})$ , il quale, rispetto al vettore dello stock di capitale, definisce il sentiero di crescita bilanciata (al tasso  $g$ ), in vista del fatto che  $\bar{k}$  è espresso in termini pro-capite.

Le matrici di derivate parziali  $(\partial y / \partial k)$  e  $(\partial q / \partial p)$  sono dotate di una interessante proprietà, cioè a dire:

$$[\partial y / \partial k] = [\partial q / \partial p] = [A - (1/a_{00}) a_{0 \cdot} \cdot a_{\cdot 0}]^{-1} \equiv H^{-1} \quad (14)$$

dove:

$$a_{ji} = \bar{k}_{Lj} / y_i(\bar{k}, \bar{p}) \equiv \bar{k}_{Lj} / \bar{y}_i \quad \forall i, j = 1, n$$

che rappresentano i coefficienti di capitale per unità di prodotto, valutati in equilibrio, nei settori che non producono il bene finale di consumo, mentre i restanti coefficienti sono:

$$a_{00} = \frac{\bar{k}_{00}}{y_0(\bar{k}, \bar{p})} \equiv \frac{\bar{k}_{00}}{\bar{y}_0}$$

quantità di lavoro diretto per unità di output del bene finale.

$$Q_{.0} \equiv \left( \frac{\bar{K}_{01}}{y_0(\bar{k}, \bar{p})}, \frac{\bar{K}_{02}}{y_0(\bar{k}, \bar{p})}, \dots, \frac{\bar{K}_{0n}}{y_0(\bar{k}, \bar{p})} \right) \equiv \left( \frac{\bar{K}_{01}}{\bar{Y}_0}, \frac{\bar{K}_{02}}{\bar{Y}_0}, \dots, \frac{\bar{K}_{0n}}{\bar{Y}_0} \right)$$

quantità di capitale per unità di prodotto, impiegata nel settore che produce il bene di consumo, valutata in equilibrio.

$$Q_{0.} \equiv \left( \frac{\bar{K}_{10}}{y_1(\bar{k}, \bar{p})}, \frac{\bar{K}_{20}}{y_2(\bar{k}, \bar{p})}, \dots, \frac{\bar{K}_{n0}}{y_n(\bar{k}, \bar{p})} \right) \equiv \left( \frac{\bar{K}_{10}}{\bar{Y}_1}, \frac{\bar{K}_{20}}{\bar{Y}_2}, \dots, \frac{\bar{K}_{n0}}{\bar{Y}_n} \right)$$

quantità di lavoro diretto per unità di prodotto, valutata in equilibrio, impiegata nei settori diversi da quello finale.

L'aspetto che occorre sottolineare per la matrice  $H \equiv [A - (1/Q_{00}) Q_{.0} \cdot Q_{0.}]$  è che, sebbene sia concettualmente equivalente alla "classica" matrice interindustriale dei flussi di Leontief, essa è derivata sotto un'esplicita ipotesi di massimizzazione dei profitti (minimizzazione dei costi) a livello microeconomico. <sup>(5)</sup> A questo proposito giova notare che, una volta specificata la forma funzionale delle funzioni di produzione definite nella (1), è possibile calcolare esplicitamente la matrice H. In questo modo vi è l'opportunità, stimando per via econometrica le funzioni di produzione della (1) <sup>(6)</sup>, di utilizzare concretamente il modello neoclassico qui esposto a scopo previsivo per la dinamica dei prezzi e dell'accumulazione del capitale. La matrice  $J(\bar{k}, \bar{p})$ , per di più, ammette un'ulteriore semplificazione, dato che si può provare l'annullamento della seguente sottomatrice: <sup>(7)</sup>

$$[\partial q / \partial K]_{(\bar{k}, \bar{p})} = 0 \quad (45)$$

cosicchè si ha:

$$J(\bar{k}, \bar{p}) \equiv \left[ \begin{array}{c|c} H^{-1} - (g + \tau \delta_1) I & \partial y / \partial p \\ \hline 0 & (z_0 + \tau \delta_1) I - H^{-1} \end{array} \right] \quad (46)$$

La natura dinamica del punto di equilibrio  $(\bar{k}, \bar{p})$  è determinata dagli autovalori di  $J(\bar{k}, \bar{p})$ , i quali sono dati da: <sup>(8)</sup>

$$\begin{aligned} \text{DET} \{ I_{2n} \lambda - J(\bar{k}, \bar{p}) \} &= \\ &= \text{DET} \{ I_n \lambda - H^{-1} + (g + \tau \delta_1) I \} \cdot \text{DET} \{ \lambda I_n + \end{aligned} \quad (47)$$

$$+ \{ H^{-1} - (z_0 + r \delta_1) I \} = \text{DET} \{ I_n (\lambda + g) - (H^{-1} - r \delta_1 I) \} \cdot \text{DET} \{ I_n (\lambda - z_0) + (H^{-1} - r \delta_1 I) \} = 0$$

per cui gli autovalori risultano pari a:

$$\begin{aligned} & \lambda_i (H^{-1} - r \delta_1 I) + g \\ & - \lambda_i (H^{-1} - r \delta_1 I) + z_0 \end{aligned} \quad (18)$$

Nel caso particolare in cui si trascuri il deprezzamento dei beni capitali, ossia  $r \delta_1 = 0$ , ed assumendo, in linea con la "tradizione leontieviana e Von Neumanniana", che  $r_0 \geq g$ , cioè che il saggio di crescita della forza lavoro - che in questo modello si identifica con il saggio di crescita bilanciata - non superi il saggio di interesse nominale, gli autovalori di  $J(\bar{k}, \bar{p})$  compaiono a coppie di segno opposto in corrispondenza di autovalori reali per la matrice  $H^{-1}$  (9). Nel qual caso, ed in assenza di autovalori complessi, il punto di equilibrio  $(\bar{k}, \bar{p})$  costituisce un punto di sella regolare. (10)

Graficamente è possibile rappresentare questo

tipo di equilibrio, nel caso monosettoriale, per mezzo di un diagramma di fase:

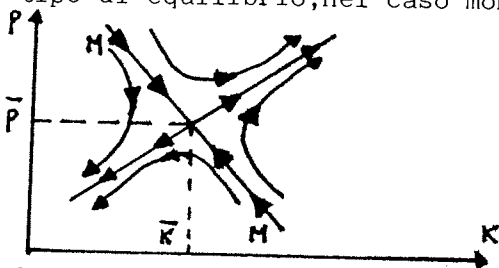


grafico 1

Come si può constatare ispezionando il grafico 1, la convergenza all'equilibrio, muovendosi da un appropriato intorno di  $(\bar{k}, \bar{p})$ , si ha se e solo se la condizione iniziale  $(k_0, p_0)$  appartiene al segmento  $MM$ , che definisce il cosiddetto "braccio" stabile del punto di sella o varietà di convergenza, che, nell'esempio in questione, ha dimensione 1. (11)

Ritornando per un momento alla (8), è chiaro da quanto detto che il punto di sella regolare non è che una delle possibilità, legata all'ipotesi (restrittiva) che la matrice  $H^{-1}$  ammetta esclusivamente autovalori reali. In generale non vi è una ragione economicamente plausibile affinché ciò accada; Benhabib e Nishimura (1979) forniscono un esempio in cui, fissando  $r_0$  e  $g$  opportunamente (e plausibilmente) e specificando una tecnologia del tipo Cobb-Douglas, il punto  $(\bar{k}, \bar{p})$  è un fuoco instabile generante un ciclo limite (stabile) (12).

Graficamente questa situazione è rappresentabile, in due dimensioni, come segue:

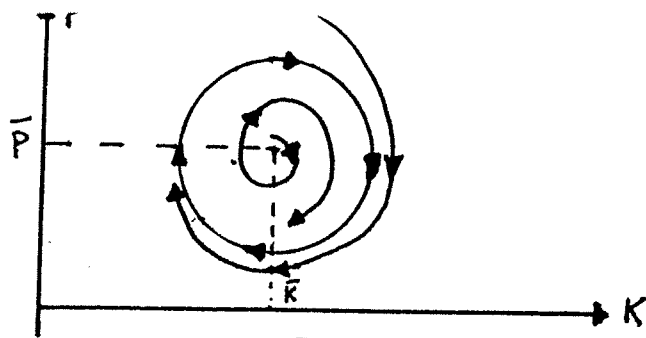


grafico 2

In un intorno di  $(\bar{k}, \bar{p})$  gli stocks di capitale (per addetto) ed i prezzi relativi oscillano persistentemente con un ciclo che si mantiene nel tempo, la cui ampiezza e frequenza si stabilizza solo asintoticamente. Altre dinamiche sono inoltre possibili, tra le quali ci permettiamo di congetturare le cosiddette "dinamiche caotiche" <sup>(13)</sup>, cioè tali per cui vi sono fluttuazioni persistenti e "irregolari" che non si stabilizzano né in ampiezza né in frequenza, nemmeno asintoticamente. Quest'ultimo caso ci sembra rappresenti una miglior descrizione dei cicli economici reali, rispetto a quanto esposto con il grafico 2, in quanto la aperiodicità del sentiero dinamico meglio si adatta alla rappresentazione delle serie storiche, senza peraltro far riferimento in alcun modo a disturbi esogeni, formalizzati con processi stocastici.

Per quel che concerne l'interpretazione più propriamente economica della instabilità del punto di sella, una vasta modellistica, non necessariamente neoclassica, ha posto in evidenza il suo legame con la scelta di portafoglio nella detenzione della ricchezza <sup>(14)</sup>. Ispezionando il grafico 1 si può rilevare che il segmento MM separa le due zone di piano che visualizzano nella parte a destra lo stato di boom, mentre nella parte sinistra lo stato di recessione. Nel primo caso, dopo un eventuale periodo in cui, a seconda della collocazione sul diagramma di fase della condizione iniziale, o il prezzo relativo o lo stock di capitale (per addetto) diminuisce, l'accumulazione del capitale si accompagna all'aumento dei prezzi, in quanto, proprio come nei periodi speculativi di boom <sup>(15)</sup>, i guadagni attesi in conto capitale superano largamente il costo di acquisizione del capitale stesso. Tali guadagni, che in questo modello sono perfettamente previsti, spingono verso l'alto l'investimento lordo, ovvero la domanda di beni capitali, in un processo cumulativo autoalimentantesi. Mutatis mutandis si può descrivere la situazione opposta di recessione, che prende le mosse dalle perdite attese in conto capitale.

Sorge a questo punto naturale la domanda se è possibile classificare le diverse dinamiche in maniera tale da interpretare economicamente le "soglie critiche" che le separano; evidentemente all'interno di questa formulazione del modello



l'operazione non è possibile. Come sottolineato in precedenza, infatti, non vi era nulla che potesse plausibilmente escludere la presenza di autovalori complessi per la matrice  $H^{-1}$ , e dunque per  $J(\bar{k}, \bar{p})$ , cosicchè non si poteva fissare una soglia, economicamente significativa, in grado di discriminare la natura dinamica dell'equilibrio  $(\bar{k}, \bar{p})$ .

La risposta all'interrogativo, dunque, va ricercata superando la fase descrittiva della teoria della crescita per approdare a quella ottimale. <sup>(16)</sup>

Ciò consente inoltre di chiarire una questione precedentemente sollevata, ovvero in che misura le dinamiche di  $(k(t), p(t))$  sopra descritte siano compatibili con l'efficienza intertemporale in senso paretiano e, più in generale, con la massimizzazione intertemporale delle funzioni obiettivo degli agenti economici. <sup>(17)</sup>

Si tratta cioè di accertare se l'efficienza intertemporale sia indipendente dalla convergenza al sentiero di crescita bilanciata al tasso  $g$ ; in effetti era stato stabilito nel paragrafo 2.1 solo che tale sentiero era efficiente rispetto agli altri sentieri di crescita bilanciata <sup>(18)</sup>. Ciò evidentemente non può escludere la presenza di sentieri di crescita non proporzionale, eventualmente a tassi variabili, tali da risultare ugualmente efficienti. Il chiarimento della questione presenta un certo interesse teorico in quanto verrà stabilita la compatibilità tra la crescita disproporzionale, intesa in senso lato - includendo dunque il ciclo e le "dinamiche caotiche" - e l'ottimizzazione intertemporale da parte degli agenti. Tale ottimizzazione includerà come elemento costitutivo l'efficienza (intertemporale). In secondo luogo la versione del modello incorporante l'ipotesi di massimizzazione intertemporale è, in vista del teorema di equivalenza provato da Becker <sup>(19)</sup>, in corrispondenza biunivoca con l'ipotesi di equilibrio competitivo a previsione perfetta della versione descrittiva. Si rompe così definitivamente il legame tra ottimalità (ed efficienza) <sup>e sentiero di crescita bilanciata</sup> che era stato richiamato nel paragrafo 2.1, facendo guadagnare, almeno in parte, terreno, sul piano della aderenza alla realtà empirica, alla modellistica neoclassica. Peraltro la versione "ottimale" presenta anche un interesse applicativo, in quanto, come vedremo nella quarta sezione, verrà messa a punto una procedura per sottoporre a specifico test le ipotesi di massimizzazione intertemporale imposte a priori nel modello.

Al fine di semplificare per quanto possibile l'esposizione, ci limiteremo a prendere in considerazione esclusivamente l'ottimizzazione intertemporale rispetto al consumo e la relativa efficienza del processo di accumulazione del capitale. A tale scopo definiamo una funzione di benessere intertemporale da massimizzare:

$$\text{MAX} \int_0^+ \bar{U}(T(y, k)) e^{-\gamma t} dt \quad (19)$$

dove  $c=T(y, k)$ , definito nella (43), è il consumo pro-capite, mentre  $U(\cdot)$  è una funzione di utilità con le usuali proprietà di continuità e concavità.

La (19) può essere intesa sia come la funzione obiettivo del consumatore rappresentativo, sia come quella di un pianificatore centrale<sup>(20)</sup>, la quale viene massimizzata sotto il vincolo definito dalla (8), cioè:

$$\dot{K}_i(t) = y_i - (g + \delta_i) K_i(t) \quad \forall i=1, n \quad (20)$$

La (20) rappresenta il vincolo costituito dal ritmo di accumulazione del capitale, che a sua volta condiziona la produzione del bene finale. Per risolvere il problema (19) conviene scrivere l'Hamiltoniano relativo ed applicare poi il principio del Massimo di Pontryagin<sup>(21)</sup>:

$$\{U(T(y, k)) + h(y - gk - \delta k)\} e^{-\gamma t} \quad \forall t \in R_+ \quad (21)$$

dove  $h$  è un opportuno vettore di variabili -che poi specificheremo- mentre  $\gamma$  rappresenta il saggio di preferenza intertemporale.

Si può dimostrare che  $T(y, k)$  è concava in  $y$  ed in  $k$  e strettamente concava in  $y$  per  $k$  fissato per valori di equilibrio di stato stazionario  $(\bar{k}, \bar{y})$ .<sup>(22)</sup>

Pertanto il principio del Massimo è non solo necessario ma anche sufficiente per il programma (19)-(20):

$$\begin{aligned} \dot{K}_i(t) &= y_i - (g + \delta_i) K_i(t) \\ \dot{h}_i(t) &= -U' q_i + \gamma h_i(t) \end{aligned} \quad \forall i=1, n \quad (22)$$

$$h_i(t) = U' p_i \quad \forall t \in R_+ \quad (23)$$

Naturalmente i simboli  $p_i$  e  $q_i$  indicano ancora rispettivamente i prezzi del generico output e del generico bene-capitale, misurati in termini del bene di

consumo. Il vettore  $h$  definito nella (23) è interpretabile come un vettore di prezzi relativi, misurati in termini di utilità marginale del bene di consumo. Se si assume che essa sia costante e pari ad uno, almeno in un intorno dello stato stazionario, e che  $\gamma$  sia pari ad  $r_0$ , il sistema dinamico (22) viene a coincidere con il (9)-(8) (23), cosicchè si ha la desiderata equivalenza.

Per quel che concerne la questione della compatibilità con l'ipotesi di ottimizzazione intertemporale dei patterns di  $(k(t), p(t))$ , non necessariamente convergenti allo steady state  $(\bar{k}, \bar{p})$ , è essenziale la seguente condizione di trasversalità: (24)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_i(t) e^{-\gamma t} = 0 \quad \forall i = 1, n \quad (24)$$

la quale è condizione necessaria e sufficiente per l'applicazione del principio del Massimo al problema (19), in vista delle ipotesi introdotte. Quest'ultimo fatto, unitamente alla (24), comporta, come si verifica per semplice ispezione della (24), che vi possono essere dei sentieri  $(k(t), p(t))$  che soddisfano la condizione di trasversalità senza per questo convergere allo stato stazionario  $(\bar{k}, \bar{p})$ ; in particolare si tratta di tutti quei sentieri - anche se non solo questi - che implicano che il vettore dei prezzi sia di ordine esponenziale minore di  $\gamma$  (25).

Per quel che concerne poi l'esistenza della "soglia critica" per il passaggio dall'instabilità del punto di sella alle fluttuazioni persistenti, secondo quanto esposto con i grafici 1 e 2, esponiamo il seguente

TEOREMA 1: se  $J(\bar{k}, \bar{p})$  ammette almeno un valore  $r_0^* \in [g, \bar{r}_0]$  - dove  $\bar{r}_0$  è il limite superiore di  $r_0$  per il quale esiste uno stato stazionario  $(\bar{k}, \bar{p})$  - tale per cui vi è un punto di sella regolare - ovvero gli autovalori di  $J(\bar{k}, \bar{p})$  sono reali e a coppie di segno opposto - allora esiste certamente un  $\hat{r}_0$  tale per cui il sistema dinamico (9)-(8) possiede un ciclo limite (localmente) stabile, con  $\hat{r}_0 \leq r_0^*$ .

DIMOSTRAZIONE: si veda Benhabib e Nishimura (1979), corollario del teorema 2B (pag. 432) e teorema 5.

Poichè, come esposto nel paragrafo precedente, tale  $r_0^*$  esiste certamente se l'intervallo  $[g, \bar{r}_0]$  non è troppo ampio, la "soglia critica" tra instabilità del punto di sella e ciclo è rigorosamente delineata. Assai meno agevole si presenta il problema rispetto alle dinamiche caotiche, in quanto la questione è pressochè inesplorata, salvo il citato contributo di Montrucchio (1984). Da questo lavoro emerge

comunque che, in sintonia con il teorema 1, le dinamiche caotiche si presentano se il saggio di preferenza intertemporale è <sup>sufficientemente</sup> grande (Montrucchio (1984) pag. 21 fig. 1). Quest'ultima condizione sembra dunque sufficiente ad assicurare la "transizione di fase" dall'instabilità del punto di sella, al ciclo limite, fino alle dinamiche caotiche, secondo una successione di biforcazioni.

L'interpretazione economica di tale condizione è agevole, in quanto più è elevato il saggio di preferenza intertemporale, ovvero  $\gamma = r_0$ , maggiore è l'impazienza verso il consumo; tale impazienza è suggestivamente la causa dell'instabilità strutturale del sistema dinamico in questione.

Infine la condizione di trasversalità (24), come vedremo nella quarta sezione, consentirà di sottoporre a test l'ipotesi di ottimalità imposta al modello.

### 3. MUTAMENTO TECNOLOGICO E CRESCITA DISPROPORZIONALE

#### 3.1

La modellistica esaminata nella seconda sezione denuncia una notevole difficoltà esplicativa rispetto alla dinamica economica che caratterizza i processi di crescita nella realtà economica. La difficoltà in questione sorge dal fatto che tali modelli ammettono esclusivamente un impiego in termini di dinamica comparata, ovvero consentono solo lo studio degli effetti di variazioni nei parametri strutturali, quali le condizioni iniziali, le funzioni di produzione (progresso tecnico) e così via. In molti casi - o comunque in prima approssimazione - ciò non è eccessivamente restrittivo, tuttavia, qualora s'intenda analizzare esaurientemente l'impatto del mutamento tecnologico (innovazione), non si possono tacere i limiti dell'approccio fin qui adottato. (25) All'interno di quest'ultimo infatti non è possibile studiare il processo di adattamento a cui l'economia va incontro, quando si introduce una nuova tecnologia, ad esempio sotto forma di un nuovo impianto. Tale adattamento consiste sostanzialmente nel fatto che la installazione del nuovo impianto non significa mai - salvo casi eccezionali e perciò irrilevanti - lo smantellamento istantaneo, cioè alla stessa data in cui l'innovazione viene introdotta, dei vecchi impianti. In realtà, la rappresentazione della tecnologia proveniente dalla "tradizione", cioè a dire i coefficienti

fissi di Leontief oppure la funzione di produzione (neoclassica) nelle sue varie forme più o meno sofisticate, riesce solo a visualizzare la situazione limite sopra descritta, ovvero l' "estinzione" istantanea dei vecchi impianti nel momento in cui viene attivato il nuovo impianto.

Tale rappresentazione non permette di descrivere la "convivenza" all'interno dell'economia del vecchio con il nuovo metodo produttivo, poichè il periodo di produzione è assunto pari all'unità di misura del tempo storico impiegata nel modello, mentre si presume che il pattern di utilizzo degli inputs e di emissione dell'output avvenga ad un regime costante <sup>(27)</sup>. Se ad esempio nel modello in questione si assume che il tempo storico sia una variabile continua, allora il periodo di produzione, ovvero la durata del processo, sarà istantanea, se invece si ipotizza che il tempo storico sia una variabile discreta con intervalli di lunghezza unitaria, allora il periodo di produzione sarà unitario e così via. Ora è chiaro che se alla generica data  $t_0$  si introduce un nuovo processo, il vecchio è "come se" sparisse - salvo il caso, che però esula dalla presente discussione, che continui ad essere attivato congiuntamente al nuovo- dato che non possiede di fatto durata. Esaurisce cioè completamente i suoi effetti. <sup>(28)</sup> Il quadro naturalmente muta se si ammette che i processi produttivi siano temporalmente caratterizzati in modo meno "banale" di quanto accada nell'approccio tradizionale. Per fissare meglio le idee in proposito, introduciamo con un certo dettaglio la rappresentazione "alternativa", nella quale il processo "elementare di produzione" è visualizzato da una sequenza (finita) di inputs e di outputs:

$$\{ [a(0), b(0)], [a(1), b(1)], \dots, [a(\hat{\theta}), b(\hat{\theta})] \}$$

$$[a(\tau), b(\tau)] \in R_+^{2n} \quad \forall \tau \in [0, \hat{\theta}] \quad (25)$$

dove  $\hat{\theta}$  rappresenta la durata tecnica del processo elementare.

Una assunzione di linearità per la tecnologia consente di denotare come segue gli inputs e gli outputs totali in ogni istante del tempo storico, sotto l'ipotesi di organizzazione in linea dei processi elementari: <sup>(29)</sup>

$$B(t) \equiv \sum_{\tau=0}^{\theta} b(\tau) x(t-\tau); \quad A(t) \equiv \sum_{\tau=0}^{\theta} a(\tau) x(t-\tau) \quad (26)$$

$$\forall t \in I_+ \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$$

dove  $\{ x(t-\tau) \}_0^{\theta}$  indica i livelli di attivazione del processo.

L'ipotesi di organizzazione in linea dei processi produttivi, tipica delle moderne economie industriali <sup>(30)</sup>, costituisce il quadro teorico più efficace per la messa a fuoco della questione del pattern di utilizzo dei fattori fondo, cioè di quegli elementi che partecipano al processo produttivo senza essere "implosi" nel prodotto finale, quali il capitale fisso. In particolare ci preme ricordare una delle questioni più avvertite nelle moderne economie industriali, ovvero la minimizzazione dei tempi d'ozio connessi all'impiego di tali fattori <sup>(31)</sup>. Sotto questo profilo la rappresentazione <sup>(32)</sup> (26), assai meglio di quella tradizionale, si presta ad affrontare lo studio dell'efficienza produttiva a livello di impresa, in connessione con i problemi tipici del decentramento produttivo, del learning by doing, della relazione tra scala di produzione ed estensione del mercato, insomma delle tematiche "classiche" dell'economia industriale <sup>(33)</sup>. D'altra parte nella nostra esposizione saremo costretti a tralasciare l'indagine di questi aspetti, per concentrare l'attenzione solo sul mutamento tecnologico, ci preme tuttavia sottolineare che quest'ultima è solo una delle potenzialità cariche di interesse empirico dell'approccio "alternativo".

Consideriamo allora il caso di un'innovazione tecnologica introdotta al tempo  $t=0$  e tale per cui il vecchio processo non è più attivato; si esclude quindi la dicotomia schumpeteriana tra imprenditori innovatori e imitatori e ciò allo scopo di semplificare la trattazione, sebbene non vi siano difficoltà insormontabili nell'incorporare anche questa possibilità <sup>(34)</sup>. Ciò posto, l'evoluzione di input ed output nella fase iniziale del processo di transizione è data da:

$$\begin{aligned}
 A(t) &\equiv \sum_{\tau=0}^t a(\tau) x(t-\tau) + \sum_{\tau=t}^{\theta^*} a^*(\tau) x^*(t-\tau) \\
 B(t) &\equiv \sum_{\tau=0}^t b(\tau) x(t-\tau) + \sum_{\tau=t}^{\theta^*} b^*(\tau) x^*(t-\tau) \quad \forall t \in [0, \theta^*]
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

sotto l'ipotesi che la durata ottima  $\theta$  del nuovo processo sia maggiore di quella del vecchio, cioè di  $\theta^*$ . <sup>(35)</sup> Ispezionando la (27), risulta chiarito il concetto di "convivenza" dei metodi produttivi vecchio e nuovo in precedenza enunciato. Infatti input ed output provengono sia dal vecchio che dal nuovo processo, dato che non viene effettuato alcun troncamento nelle code dei vecchi processi in corso di svolgimento <sup>(36)</sup>, ovvero i vecchi impianti, installati prima dell'introduzione dell'innovazione, continuano a funzionare e quindi ad influenzare l'andamento degli inputs e degli outputs complessivi. L'arco temporale del

del processo di transizione, denominato da Hicks come traversa, <sup>(27)</sup> va completato con la fase successiva in cui tale "convivenza" cessa, a condizione che, beninteso, non intervenga un ulteriore mutamento tecnologico :

$$A(t) \equiv \sum_{\tau=0}^t \bar{a}(\tau) X(t-\tau)$$

$$B(t) \equiv \sum_{\tau=0}^t \bar{b}(\tau) X(t-\tau)$$

$$\forall t \in (\theta^*, +\infty] \quad (28)$$

con:

$$\bar{a}(\tau) \equiv \begin{cases} a(\tau) & \forall \tau \in [0, \theta] \\ 0 & \forall \tau \in (\theta, +\infty] \end{cases}$$

$$\bar{b}(\tau) \equiv \begin{cases} b(\tau) & \forall \tau \in [0, \theta] \\ 0 & \forall \tau \in (\theta, +\infty] \end{cases}$$

Va da sè che in realtà la (28) non si estende all'infinito, poichè è assai probabile l'intervento di un nuovo cambiamento tecnologico, il quale sarà descritto, mutatis mutandis, ancora dalla (27).

Non vi è spazio qui per passare in rassegna dettagliatamente tutti i nuovi risultati, rispetto alla tradizionale dinamica comparata, che lo studio del processo di adattamento comporta attraverso l'impiego delle relazioni (27) e (28). Ci limiteremo qui a riassumerne brevemente le linee principali, rinviando alla letteratura specifica per gli opportuni approfondimenti <sup>(30)</sup>.

In primo luogo la fase dell'adattamento diventa una delle ragioni endogene che allontanano il sistema economico dalla crescita bilanciata; si può infatti dimostrare che, salvo casi speciali - e perciò irrilevanti - se il sistema economico al tempo zero, cioè nel momento in cui compare l'innovazione, si trova sul sentiero di crescita bilanciata, necessariamente durante la fase iniziale della traversa percorrerà un sentiero di crescita disproporzionale. Un secondo risultato di notevole importanza teorica e pratica è l'esistenza durante l'adattamento del cosiddetto "Effetto Ricardo", quale che sia la forma del progresso tecnico inerente l'innovazione. Tale effetto fa sì che l'occupazione che si registra sul sentiero di traversa risulti inferiore, per un certo arco di tempo, a quella che si registra sul sentiero di riferimento, definito come quel sentiero che l'economia avrebbe percorso in assenza di mutamento tecnologico. Infine un terzo non meno rilevante risultato è costituito dal cosiddetto "Effetto Hayek", ovvero la possibilità che durante la transizione emerga un'incompatibilità tra il consumo e l'investimento nell'economia, tale da "bloccare" l'accumulazione <sup>zione</sup> in assenza di opportuni aggiustamenti tra queste due grandezze.

Il notevole interesse di questi risultati si scontra però con il fatto che l'analisi di traversa,

almeno per come si è fin qui sviluppata, non si presta agevolmente alla applicazione empirica in forma, per così dire, pura. Per superare queste difficoltà dovremmo per forza di cose accettare una serie di ipotesi restrittive, che, almeno riteniamo, non rendono giustizia della fecondità di tale approccio: (39)

$H_1$ : esistono nell'economia  $n$  settori, denotati con  $I = (1, 2, \dots, n)$ , che producono, ciascuno, un solo tipo di output.

Grazie all'ipotesi  $H_1$ , che sostanzialmente esclude il caso di produzione congiunta in senso stretto, definiamo, analogamente alla (26), gli inputs e gli outputs complessivi al tempo  $t$ :

$$A(t) \equiv \sum_{i \in I} \sum_{\tau=0}^{\theta_i} a^i(\tau) x_i(t-\tau) \quad [a^i(\tau), b^i(\tau)] \in R_+^{2n}$$

$$B(t) \equiv \sum_{i \in I} \sum_{\tau=0}^{\theta_i} b^i(\tau) x_i(t-\tau) \quad \{x_i(t-\tau)\}_0^{\theta_i} \in R_+ \quad (29)$$

$$\forall i \in I, \forall t \in I_+$$

Assumiamo poi che la struttura temporale dei processi produttivi - e la relativa durata - sia indipendente dal particolare settore di attività, ovvero formalmente:

$$H_2: a^i(\tau) \equiv K(\tau) a^i, \quad b^i(\tau) \equiv H(\tau) b^i \quad \forall i \in I$$

$$H_3: \theta_i = \theta \quad \forall i \in I$$

$$K(\tau), H(\tau) \in R_+^{\tau^2}, \quad \forall \tau \in [0, \theta]; \quad a^i, b^i \in R_+^n, \quad \forall i \in I$$

In vista della  $H_2$  e della  $H_3$ , la (39) si può riscrivere come segue:

$$A(t) = \sum_{\tau=0}^{\theta} K(\tau) \sum_{i \in I} a^i x_i(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{\theta} K(\tau) y(t-\tau) \quad (30)$$

$$B(t) = \sum_{\tau=0}^{\theta} H(\tau) \sum_{i \in I} b^i x_i(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{\theta} H(\tau) z(t-\tau)$$

con:

$$z(t-\tau) \equiv \sum_{i \in I} b^i x_i(t-\tau); \quad y(t-\tau) \equiv \sum_{i \in I} a^i x_i(t-\tau)$$

La (30), oltre ad offrire notevoli vantaggi nel trattamento pratico, ammette anche uno squisito interesse teorico, poichè consente di "sganciare" il modello neo-austriaco, proposto da Hicks (1973) per l'analisi di traversa (40), dalla restrittiva ipotesi di integrazione verticale completa dei processi produttivi dai fattori primari al consumo finale. In effetti tale modello è ottenibile direttamente dalla (30), purchè si ipotizzi la presenza di un solo settore (bene finale) economico.

E' cioè possibile attribuire un "tradizionale" significato macroeconomico al modello neo-austriaco integrato, verso cui erano state indirizzate diverse critiche



di mancanza di generalità<sup>(4)</sup>.

Per comodità di trattamento, conviene compattare la (30) come segue:

$$A(t) = L_y [y(\tau)]; B(t) = L_z [z(\tau)] \quad \forall t \in I_+ \quad (31)$$

dove  $L_z(\cdot)$  e  $L_y(\cdot)$  sono operatori di ritardi distribuiti, secondo le matrici  $H(\tau)$  e  $K(\tau) \quad \forall \tau \in [0, \theta]$ . Assumendo che tali operatori siano invertibili<sup>(4)</sup>, possiamo esprimere  $z$  ed  $y$ , ovvero i vettori base di attività, in funzione dell'output e dell'input complessivi in ogni periodo:

$$z(t) = L_z^{-1} [B(\tau)], \quad y(t) = L_y^{-1} [A(\tau)] \quad \forall t \in I_+ \quad (32)$$

La rappresentazione (31) può agevolmente incorporare il caso di traversa indotta dal mutamento tecnologico. A tale scopo occorre definire la sequenza di operatori  $L_z^t(\cdot)$  e  $L_y^t(\cdot) \quad \forall t \in [0, \theta]$ , analogamente a quanto esposto nella (27)-(28):

$$\begin{aligned} L_z^{(0)}(\cdot) &= \{ H(0), H^*(1), H^*(2), \dots, H^*(\theta^*) \} \\ L_z^{(1)}(\cdot) &= \{ H(0), H(1), H^*(2), \dots, H^*(\theta^*) \} \\ &\vdots \\ L_z^{(\theta)}(\cdot) &= \{ H(0), H(1), H(2), \dots, H(\theta) \} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} L_y^{(0)}(\cdot) &= \{ K(0), K^*(1), K^*(2), \dots, K^*(\theta^*) \} \\ L_y^{(1)}(\cdot) &= \{ K(0), K(1), K^*(2), \dots, K^*(\theta^*) \} \\ &\vdots \\ L_y^{(\theta)}(\cdot) &= \{ K(0), K(1), K(2), \dots, K(\theta) \} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\theta > \theta^*$$

dove l'asterisco si riferisce alla vecchia tecnologia, mentre le matrici non asterisate si riferiscono alla nuova. Nel caso quindi di un mutamento tecnologico che

che allunghi la durata ottima <sup>(43)</sup>, la (2) deve essere così riscritta:

$$z(t) = L_z^{(t)-1} [B(z)], \quad y(t) = L_y^{(t)-1} [A(z)] \quad (35)$$

$\forall t \in [0, \theta]$

con riferimento al caso in cui non intervengono ulteriori innovazioni nell'arco temporale  $t \in [0, \theta]$ , situazione che per altro potrebbe essere agevolmente visualizzata con opportune modifiche nella (33)-(34). Il dato che ci preme evidenziare è che gli operatori definiti nella (33)-(34), contrariamente a quelli definiti nella (1), dipendono dal tempo storico a causa del mutamento tecnologico.

Tale dipendenza non è certo semplice ed è determinata, oltre che dalla natura del progresso tecnico, dal ritmo e dalla successione temporale seguita dall'introduzione delle innovazioni. Ciò detto, proseguiamo nella esposizione delle ipotesi definendo l'insieme  $T(t)$  delle attività  $(z(t), y(t))$  fattibili al tempo  $t$ , ovvero l'insieme delle possibilità produttive, che supponiamo godere delle seguenti (standard) proprietà <sup>(44)</sup>:

$H_4$ :  $T(t)$  è un cono chiuso e convesso  $\forall t \in I$

$H_5$ : se  $(z'(t), y'(t)) \in T(t)$ ,  $[z''(t), y''(t)] \leq [z'(t), y'(t)] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow [z''(t), y''(t)] \in T(t) \quad \forall t \in I_+$

$H_6$ : se  $[z'(t), 0] \in T(t) \Rightarrow z'(t) = 0 \quad \forall t \in I_+$

$H_7$ : se  $[z'(t), y'(t)] \in T(t)$  e  $y''(t) \geq y'(t)$ ,  $z''(t) \leq z'(t) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow [z''(t), y''(t)] \in T(t) \quad \forall t \in I_+$

La  $H_4$  assicura la linearità della tecnologia rispetto ai livelli di attività dei processi <sup>(45)</sup>, equivalente, sostanzialmente, all'addittività e alla divisibilità dei processi produttivi. La  $H_5$  è un'assunzione di free disposal, la  $H_6$  di non "avviabilità" degli outputs in assenza di avviamento degli inputs e, infine, la  $H_7$  è una condizione di monotonicità. Date queste ipotesi, è possibile definire una funzione di trasformazione in forma implicita:

$$S(z(t), y(t), t) = 0 \quad \forall t \in I_+ \quad (36)$$

ovvero:

$$S \left\{ L_z^{(t)-1} [B(z)], L_y^{(t)-1} [A(z)], t \right\} = 0 \quad \forall t \in I_+ \quad (37)$$

La (37) gode di un notevole vantaggio comparato rispetto alla (35), in quanto contiene come argomenti delle variabili  $B(t)$  e  $A(t)$  osservabili - si tratta di inputs e outputs complessivi di ogni periodo - le cui serie storiche sono normalmente disponibili.

Si noti che il passaggio dalla (36) alla (37) è consentito dall'operazione di inversione definita nella (32), il cui ruolo è essenziale ai fini dell'applicazione empirica. Tuttavia essa non basta ancora, in quanto occorrono anche specifiche ipotesi sulle Matrici  $K(\tau)$  e  $H(\tau)$ , ovvero sulla forma dei relativi operatori  $L_z^t(\cdot)$  e  $L_y^t(\cdot)$ . Al fine di mantenere un grado ragionevole di maneggevolezza del modello assumeremo che:

$$H_8: \quad K(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0, 1 \quad H(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 1$$

$$K^i(0), K^i(1) \gg 0 \quad \forall i \in I \quad h^i(1) \gg 0 \quad \forall i \in I$$

La  $H_8$  costituisce una generalizzazione dell'ipotesi hicksiana di profilo semplice nel caso di un modello multisettoriale con scelta tra tecnologie alternative (46). Il significato economico della  $H_8$  non crea particolari difficoltà: gli inputs sono indispensabili all'avviamento del processo, mentre il tempo è essenziale nella produzione, in quanto gli outputs non compaiono che dopo un periodo dall'avviamento del processo elementare. Infine la durata, tecnica ed ottima, è fissata in due periodi (47). E' appena il caso di sottolineare la restrittività dell'ipotesi di profilo semplice (48), resta però la consolazione, come vedremo, della possibilità di sottoporre a test la ipotesi suddetta e, più in generale, qualsiasi ipotesi concernente la struttura temporale dei processi. Si tratta indubbiamente di un pregio che rafforza la valenza applicativa del modello, in quanto è possibile verificare la bontà di una ipotesi a priori così cruciale come quella della struttura temporale dei processi. Esplicitiamo ora la (37), in forza della  $H_8$ , secondo una procedura standard (49):

$$\Delta [\hat{B}(t), B(t-1), A(t-1), t] \gg B_i(t) \quad (38)$$

$$\forall t \in I_+$$

dove il circonflesso  $\hat{\phantom{B}}$  sta ad indicare che al vettore  $B(t)$  è stata tolta la generica  $i$ -esima componente. La funzione  $s(\cdot)$ , implicita nella (7), definisce la massima quantità di output della generica  $i$ -esima merce, dato l'insieme delle possibilità produttive  $T(t)$ , che può essere prodotta. La (38) definisce in sostanza la tecnologia efficiente, sotto il cui vincolo l'impresa, supposta qui price-taker, massimizza il profitto in ogni periodo; formalmente:

$$\text{MAX} \quad p(t) \{ B(t) - A(t) \} \quad (39)$$

$$[B(t), A(t)] \quad \text{sotto il vincolo costituito}$$

$$\text{dalla (38)}$$

dove  $p(t)$  è il vettore dei prezzi nel periodo  $t$  assunto dalla impresa rappresentativa di ogni settore <sup>(50)</sup>.

Il programma di massimizzazione definito nella (39), assicura l'esistenza di una funzione di profitto:

$$R[p(t), B(t-1), A(t-1), t] \equiv \text{MAX}_{[B(t), A(t)]} \{ p(t) Q(t) : \} \quad (40)$$

$$: \exists (\hat{B}(t), B(t-1), A(t-1), t) \geq B_i(t) \}; Q(t) \equiv B(t) - A(t); \forall t \in I_+$$

la quale, in vista delle assunzioni  $H_4-H_7$  per l'insieme  $T(t)$ , si può dimostrare essere:

- i) Crescente e convessa, lineare e omogenea rispetto a  $p$  per  $B(t-1)$  e  $A(t-1)$  fissati, concava e crescente rispetto a  $(B(t-1), -A(t-1))$  per  $p$  e  $t$  fissati.
- ii) Se  $s(\cdot)$  è omogenea di grado uno, allora anche  $R(\cdot)$  lo è rispetto a  $(B(t-1), -A(t-1))$  per  $p$  e  $t$  fissati.
- iii)  $R(\cdot)$  soddisfa un'importante condizione nota sotto il nome di lemma di Hotelling: <sup>(51)</sup>

$$\frac{\partial R}{\partial p_i(t)} = \bar{Q}_i [p(t), B(t-1), A(t-1), t] \quad \forall t \in I_+$$

$$\bar{Q}_i \equiv \bar{B}_i - \bar{A}_i \quad \forall i \in I \quad (41)$$

dove  $\bar{Q}_i$  rappresenta l'output netto della generica merce  $i$ -esima, il quale, al tempo  $t$ , massimizza il profitto, dato  $p(t)$ ,  $B(t-1)$  e  $A(t-1)$ .

La (41) è infatti la soluzione del programma (39), cosicchè vale la seguente relazione:

$$R(\cdot) = \sum_{i \in I} p_i(t) \bar{Q}_i(\cdot) \quad \forall t \in I_+ \quad (42)$$

L'ipotesi di massimizzazione richiesta dalla (39), implica una funzione obiettivo imprenditoriale solo in parte accettabile, giacchè comporta una totale "miopia" da parte delle imprese. Più corretto sarebbe considerare la massimizzazione, subordinatamente ad un dato insieme di informazione, del valore attuale (atteso) dei profitti futuri; in simboli:

$$\text{MAX}_{Q(s), \forall s \in [t, +\infty]} E \left\{ \sum_{s=t}^{+\infty} \left( \prod_{u=t}^{\infty} (1+r(u)) \right)^{-1} R[p(s), B(s-1), A(s-1), s] \mid \mu_{t-1} \right\} \quad (43)$$

sotto il vincolo costituito dalla (28).

dove  $\bigcup_{u=t}^{t+s}$   $I_{t-1}$  è l'insieme di informazione, noto all'inizio del periodo  $t$ , mentre  $\left[ \prod_{u=t}^{t+s} (1+z(u)) \right]^{-1}$  è il fattore di sconto appropriato dell'impresa rappresentativa. Le difficoltà tecniche di risoluzione insite nel programma (43) ne sconsigliano l'impiego (52), per limitarsi al caso particolare - in cui è peraltro implicita un'ipotesi di previsione perfetta - costituito dalla (39). Questa scelta, del resto, può essere economicamente giustificata sulla base del "principio di Simon" (53) della razionalità limitata, secondo cui un decisore, di fronte a scelte in condizioni di grande incertezza e di elevata complessità delle situazioni, tende a seguire regole semplici (54). Nel nostro caso l'impresa (il decisore) utilizza nel processo di scelta esclusivamente il profitto corrente come variabile rilevante, trascurando completamente la redditività futura, in quanto ritiene inattendibili previsioni sull'andamento futuro dei prezzi, del saggio di interesse e della tecnologia. Ciò posto, affronteremo nella prossima sezione i problemi di specificazione econometrica per la funzione  $R(\cdot)$ . Ci preme tuttavia mettere subito in luce che le ipotesi semplificatrici, in forza delle quali questa funzione è stata ottenuta, hanno il non indifferente merito di consentire il confronto tra specificazioni alternative per la struttura temporale dei processi. Tra di esse è contemplabile il caso di "istantaneità" della durata del processo, ovvero il caso neoclassico tradizionale. Pertanto siamo in condizione di stabilire se sia ancora accettabile, sul piano pratico, l'idea di istantaneità della durata, oppure se la presa in considerazione della dimensione temporale per il processo produttivo arricchisca o meno il quadro dei risultati empirici noti.

### 3.2

Il presente paragrafo è dedicato pressochè interamente alla generalizzazione del modello esposto nel precedente; esso era stato infatti opportunamente semplificato, grazie alle ipotesi  $H_2$  e  $H_3$ , "eliminando" in qualche modo le interrelazioni (orizzontali) tra i settori economici. Tale eliminazione consentiva la definizione dell'insieme delle possibilità produttive  $T(t)$  in termini di vettori di input e di output per l'economia nel suo complesso. I vantaggi di questa semplificazione saranno meglio apprezzati, nella prossima sezione, sotto il profilo econometrico. Non vi sono tuttavia difficoltà di natura teorica nell'incorporare esplicitamente le relazioni orizzontali tra i settori. In assenza della  $H_2$ - $H_3$ , la (29) non consente più l'aggregazione tra i settori ottenuta nella (30), perciò ogni settore avrà un suo proprio insieme di possibilità produttive:

$$T_i(t) \quad \forall i \in I, \forall t \in I_+ \quad (44)$$

il quale, date le ipotesi  $H_4-H_7$ , valide  $\forall i \in I$ , consente di scrivere in forma implicita la funzione di trasformazione per ogni settore:

$$S_i [L_{z_i}^{(t)-1}(B^i(\tau)), L_{y_i}^{(t)-1}(A^i(\tau)), t] \quad \forall i \in I \quad (45)$$

$$\forall t \in I_+$$

dove  $A^i(\tau)$  e  $B^i(\tau)$  sono i vettori rispettivamente di input e di output totale del generico settore  $i$ -esimo, mentre  $L_{z_i}^t$  e  $L_{y_i}^t$  sono i rispettivi operatori di lag, ovvero: <sup>(55)</sup>

$$A^i(t) = \sum_{\tau=0}^{\theta_i} a^i(\tau) x_i(t-\tau) \equiv L_{y_i} [x_i(\tau)] \quad (46)$$

$$B^i(t) = \sum_{\tau=0}^{\theta_i} b^i(\tau) x_i(t-\tau) \equiv L_{z_i} [x_i(\tau)] \quad , \forall i \in I, \forall t \in I_+$$

Al fine di ottenere una funzione di produzione analoga alla (38), è necessario introdurre un'ipotesi equivalente, sotto il profilo economico, alla  $H_8$ :

$$H_9: \quad a^i(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0, 1 \quad b^i(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 1$$

$$a^i(0), a^i(1) \geq 0 \quad b^i(1) \geq 0$$

$$\forall i \in I, \forall \tau \in [0, \theta_i]$$

La  $H_9$  è sostanzialmente un'ipotesi di profilo semplice generalizzato per ogni settore <sup>(56)</sup> e consente di ottenere la desiderata funzione di produzione settoriale:

$$S_i [B_i(t-1), A^i(t-1), t] \geq B_i(t) \quad \forall i \in I \quad (47)$$

$$\forall t \in I_+$$

dove  $B_i$  è lo scalare che indica la quantità dell'unico tipo di prodotto del generico settore  $i$ -esimo <sup>(57)</sup>. La (47) gode delle stesse proprietà della (33) e consente di ottenere le funzioni di profitto massimo per ogni settore in analogia con la (40):

$$R_i [p(t), B_i(t-1), A^i(t-1), t] \equiv \text{MAX}_{Q^i(t)} \left\{ p(t) Q^i(t) : S_i [B_i(t-1), A^i(t-1), t] \geq B_i(t) \right\} \quad (48)$$

$$, \forall i \in I, \forall t \in I_+$$

dove:

$$Q^i(t) \equiv B^i(t) - A^i(t) \quad , \forall i \in I, \forall t \in I_+ \quad (49)$$

Il lemma di Hotelling, secondo quanto ottenuto nella (41) vale anche a livello settoriale:

$$\frac{\partial R_i}{\partial p_j} = \bar{q}_j^{-i} [ p(t), B_i(t-1), A^i(t-1), t ], \quad \forall i, j \in I, \forall t \in I_+ \quad (50)$$

dove:

$$\left[ \bar{q}_j^{-i} \right]_{j \in I}^{\forall i \in I} \equiv \bar{Q} \equiv [ \bar{Q}^1, \bar{Q}^2, \dots, \bar{Q}^n ] \quad (50')$$

con  $\bar{q}_j^{-i}$  che indica l'output netto della merce  $j$  nel settore  $i$ , massimizzante il profitto del settore  $i$ . La (49) può essere riscritta nell'usuale notazione matriciale leontieviana come segue:

$$\bar{Q} = \left[ \bar{B}_{i,j} \right] \left( I - \left[ \bar{B}_{i,j} \right]^{-1} \bar{A} \right) \quad (51)$$

essendo  $\left[ \bar{B}_{i,j} \right]$  la matrice diagonale dell'output, la quale, normalizzando la produzione a livello unitario, ossia ponendo  $\left( \left[ \bar{B}_{i,j} \right] \right)^{-1} = I$ , consente di trasformare la (51) nella ben nota forma:

$$\bar{Q} = I - \bar{A} \quad (52)$$

dove i coefficienti  $\bar{a}_j^{-i}$  hanno l'usuale significato di **ammontare** di impiego della generica merce  $j$ -esima per produrre un'unità della merce  $i$ -esima.

Non bisogna però dimenticare che questi coefficienti, contrariamente ai coefficienti fissi leontieviani, dipendono dalle variabili  $p(t), B_i(t-1), A^i(t-1)$  e  $t$ . La dipendenza da  $B_i(t-1)$  e  $A^i(t-1)$ , tuttavia, differenzia il modello qui esposto dal caso neoclassico, per il quale la dipendenza, in vista dell' "istantaneità" del processo produttivo, si avrebbe solo rispetto a  $p(t)$  e  $t$ . Quale che sia comunque la dipendenza in questione, la (52) consente, una volta effettuate le necessarie stime econometriche - secondo la procedura che esporremo nella prossima sezione - di ricostruire la matrice  $H$  - definita nella (24). Tale matrice, come evidenziato nel paragrafo 2.2, è essenziale per la valutazione dell'ottimalità del sentiero di accumulazione (crescita). Affronteremo la questione analiticamente nel paragrafo 4.2, per ora ci preme sottolineare come la (52), almeno in linea di principio, potrebbe identificare ugualmente la matrice  $H$ , purchè, beninteso, le funzioni di produzione neoclassiche, definite nella (1), siano sostituite,

mutatis mutandis, con quelle definite (implicitamente) nella (47).

Naturalmente prescindiamo qui dalle difficoltà tecniche che sorgerebbero innestando nel sistema dinamico (9)-(8) le nuove ipotesi sulla tecnologia; ci riferiamo in particolare al fatto che tale sistema diventerebbe di tipo misto, cioè differenziale e alle differenze, costringendo alla riformulazione dell'analisi di stabilità effettuata nel paragrafo 2.3, così come andrebbe rivista la metodologia prescelta per la soluzione del problema di controllo ottimale impostata con la (12)-(23)<sup>(58)</sup>. Sebbene non possiamo esplorare in questa sede tali questioni, rimane comunque il fatto che, sotto il profilo tecnologico, il caso neoclassico è inquadrabile come caso particolare dell'approccio "alternativo" qui seguito.

#### 4. LA SPECIFICAZIONE ECONOMETRICA

##### 4.1

Prima di entrare nel merito dei problemi di specificazione, conviene mettere a fuoco un ultimo aspetto teorico rilevante in merito alla relazione tra la funzione di profitto massimo impiegata usualmente nelle applicazioni, allorchè si supponga l' "istantaneità" del processo produttivo, e la (40). Sotto tale ipotesi la funzione in questione assume la seguente (generica) veste<sup>(59)</sup>:

$$R [ p(t), -v, t ] \quad \forall t \in I_+ \quad (53)$$

~~dove il vettore  $v$  rappresenta gli inputs fissi.~~

L'analogia tra la (53) e la (40) risiede nel legame concettuale tra  $v$  e  $(A(t-1), B(t-1))$ ; si tratta cioè di variabili che, al tempo  $t$ , non possono essere per definizione modificate dalle scelte compiute in tale data. Sebbene  $(A(t-1), B(t-1))$  non abbia alcun legame tecnologico diretto con le scelte del tempo  $t$ , la natura intertemporale del processo produttiva, allorchè si tenga conto della durata, tende a vincolare le decisioni del presente agli accadimenti del passato. Ciò chiarito, specifichiamo ora la forma funzionale di  $R(\cdot)$ , che scegliamo nella classe delle forme cosiddette "flessibili" e precisamente del tipo logaritmico-trascendente (trans-log):<sup>(60)</sup>



$$\begin{aligned}
\log R(t) = & \alpha_0 + \sum_{l \in I} \alpha_l^P \log p_l(t) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l \in I} \sum_{h \in I} \gamma_{l,h}^P \log p_l(t) \cdot \log p_h(t) + \sum_{l \in I} \sum_{h \in I} \delta_{l,h}^{B,P} \log p_l(t) \cdot \log B_h(t-1) + \\
& + \sum_{l \in I} \sum_{j \in J} \delta_{l,j}^{A,P} \log p_l(t) \cdot \log A_j(t-1) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l \in I} \sum_{h \in I} \gamma_{l,h}^B \log B_l(t-1) \log B_h(t-1) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l \in I} \sum_{j \in J} \gamma_{j,h}^A \log A_j(t-1) \log A_h(t-1) + \sum_{l \in I} \alpha_l^B \log B_l(t-1) + \\
& + \sum_{j \in J} \alpha_j^A \log A_j(t-1) + \sum_{l \in I} \delta_l^{P,G} (\log p_l(t)) G + \\
& + \frac{1}{2} \gamma^G G^2 + \alpha^G G \quad \forall t \in I_+
\end{aligned} \tag{54}$$

Per quel che concerne le variabili che compaiono nella (54), resta solo da definire  $G$ , che è un indice della tecnologia <sup>(61)</sup> e l'insieme  $J$ . Quest'ultimo rappresenta l'insieme ordinato degli inputs, il quale, oltre ad includere l'insieme delle merci riproducibili, cioè  $I$ , incorpora anche i fattori primari, quali ad esempio il lavoro, i beni importati e così via <sup>(62)</sup>. La (54) non è necessariamente monotona rispetto a  $p$ , per  $G, A_j(t-1)$  e  $B_i(t-1) \forall i \in I, \forall j \in J$ ; lo è se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni sui parametri da stimare:

$$\sum_{l \in I} \alpha_l^P = 1, \quad \sum_{l \in I} \gamma_{l,h}^P = 0 \quad \forall h \in I, \quad \sum_{h \in I} \gamma_{l,h}^P = 0 \quad \forall l \in I \tag{55}$$

$$\sum_{l \in I} \delta_{l,h}^{B,P} = 0 \quad \forall h \in I, \quad \sum_{l \in I} \delta_{l,j}^{A,P} = 0 \quad \forall j \in J; \quad \sum_{l \in I} \delta_l^{P,G} = 0$$

queste restrizioni possono essere imposte a priori come vincolo alle stime oppure essere sottoposte a specifico test <sup>(63)</sup>.

Applicando alla (54) il lemma di Hotelling esposto nella (41), si ottengono le quote di profitto sul totale, derivante da ogni merce prodotta:

$$\gamma_l = \alpha_l^P + \sum_{h \in I} \gamma_{l,h}^P \log p_h(t) + \sum_{j \in J} \delta_{l,j}^{A,P} \log A_j(t-1) + \tag{56}$$

$$+ \sum_{h \in I} \delta_{L,h}^{B,P} \log B_h(t-1) + \delta_L^{P,G} G \quad \forall L \in I, \forall t \in I_t$$

dove:

$$Y_L \equiv P_i \bar{Q}_i / R \quad \forall i \in I \quad (57)$$

con:

$$\bar{Q}_L = \partial R / \partial P_i \quad \forall L \in I$$

secondo quanto esposto nella (41). (54)

La (56), essendo lineare nei parametri (e nelle variabili definite in termini logaritmici) non presenta particolari difficoltà di stima, in quanto contiene solo variabili osservabili di cui sono normalmente disponibili le serie storiche.

In proposito occorre però notare che solo (n-1) delle n equazioni definite nella (56) sono linearmente indipendenti, pertanto nella stima occorre lasciare cadere una equazione (ad esempio l'ultima), considerandone quindi solo (n-1).

L'identificazione può allora avvenire, imponendo che sia verificata la "restrizione" data dall'uguaglianza a uno della somma delle quote; formalmente:

$$\sum_{L \in I} Y_L = 1 \quad (58)$$

La (58) delimita come segue il campo di variazione dei parametri della (56):

$$\sum_{L \in I} \alpha_L^P = 1, \quad \sum_{L \in I} Y_{L,h}^P = 0 \quad \forall h \in I; \quad \sum_{L \in I} \delta_{L,J}^{A,P} = 0 \quad \forall J \in J \quad (59)$$

$$\sum_{L \in I} \delta_{L,h}^{B,P} = 0 \quad \forall h \in I, \quad \sum_{L \in I} \delta_L^{P,G} = 0$$

Inoltre è necessario rendere stocastica la (56), per effettuare le stime.

A tale scopo introduciamo un termine di errore  $e_i(t)$   $\forall i=1, (n-1), \forall t=1, h$  - dove  $h$  è l'ampiezza del campione di osservazioni - che "spiega" gli scostamenti dalla massimizzazione del profitto. Conviene ovviamente imporre al vettore  $e(t)$   $\forall t=1, h$  le seguenti (ed usuali) restrizioni: che sia una variabile casuale normalmente distribuita identicamente e indipendentemente dal tempo, con media nulla e matrice  $\Omega$  delle covarianze non singolare. Per quel che concerne il metodo di stima, occorre tener presente che, aggregando i settori, sia i prezzi che le quantità potrebbero essere considerate endogene,

per cui sembra appropriato tener conto di questa possibile simultaneità nella scelta del metodo di stima. Analogamente a Christensen, Jorgenson e Lau (1973) e Berndt e Christensen (1974), si potrebbe utilizzare il metodo iterativo dei minimi quadrati a tre stadi con l'impiego, mutatis mutandis, delle medesime variabili strumentali scelte da questi autori <sup>(65)</sup>.

Veniamo ora all'interpretazione e all'uso che si può fare delle stime dei parametri che compaiono nella (56). Innanzitutto è bene sottolineare che la scelta di una funzione "flessibile", quale la trans-log, ha il non trascurabile pregio di poter essere pensata come un'approssimazione del secondo ordine di una arbitraria (e due volte differenziabile) funzione (di profitto massimo).

In secondo luogo, per quel che concerne le serie storiche da impiegare, non vi dovrebbero essere particolari difficoltà di reperimento. Sugeriremmo come proxy del profitto settoriale  $p_i \cdot \bar{Q}_i$  il "risultato lordo di gestione", da cui si ottiene poi  $R(.) = \sum_{i \in I} p_i \cdot \bar{Q}_i$ , mentre per quel che concerne la produzione settoriale  $B_i$   $\forall i \in I$  gli indici della produzione industriale settoriali ci sembrano soddisfacenti. Per quel che concerne invece gli inputs complessivi  $A_j$   $\forall j \in J$ , è necessario fare riferimento alle tavole Input-Output, analogamente alla costruzione dei dati operata da Himler e Milana (1982a) <sup>(66)</sup>.

Ciò chiarito, discuteremo ora due proprietà essenziali di  $R(.)$ : la convessità e la monotonicità rispetto al vettore  $p(t)$  dei prezzi delle merci prodotte.

La prima di queste due proprietà - che, come ricordato nella nota (63), può essere sottoposta a test - è soddisfatta se e solo se la matrice hessiana  $\left\{ \nabla_p^2 R(.) \right\}_{n \times n}$  è semi-definita positiva <sup>(67)</sup>. Quest'ultima matrice non è necessariamente sim-

~~metrica, ovvero le derivate miste che vi compaiono non sono necessariamente coinci-~~  
denti permutando gli indici. Comunque sia, basterà accertare che gli autovalori siano semi-positivi, oppure che lo siano i minori principali di Nord-Ovest <sup>(68)</sup>.

Per quel che concerne invece la monotonicità, basta controllare il segno di:

$$\partial R / \partial p_i = \bar{Q}_i \quad \forall i \in I \quad (69)$$

in proposito, siccome ci si aspetta che  $R(.)$ , profitto massimo complessivo, abbia segno positivo, è sufficiente calcolare i valori teorici di  $Y_i$   $\forall i \in I$ , ottenibili una volta stimata la (56). Il loro segno corrisponderà a quello della (69), in vista della definizione (57). L'interpretazione economica di tale segno è già stata anticipata nella nota (64), sotto l'ipotesi di

"chiusura" del sistema economica ai rapporti con l'estero. nel caso infatti in cui la (60) fosse negativa, significherebbe che la massimizzazione del profitto - che, rammentiamo, si ha se e solo se è soddisfatta la menzionata condizione di convessità di  $R(\cdot)$  rispetto a  $p$  - è in conflitto con la "vitalità" del sistema economico (chiuso), poichè sono richiesti più inputs (riproducibili) di quanto il sistema economico nel suo complesso sia in grado di produrre. La differenza, s'intende, dovrebbe essere importata dal resto del mondo.

Un secondo importante aspetto è costituito dalla possibilità di sottoporre a test l'ipotesi di profilo semplice assunta per i processi produttivi; essa è legata alla significatività statistica delle matrici di coefficienti  $\left\{ \delta_{L,J}^{A,P} \right\}_{J \in J}$  e  $\left\{ \delta_{L,h}^{B,P} \right\}_{h \in I}$  che compaiono nella (56). L'ipotesi nulla da verificare è:

$$H_0: \left\{ \delta_{L,J}^{A,P} \right\}_{J \in J} = 0 \quad \left\{ \delta_{L,h}^{B,P} \right\}_{h \in I} = 0$$

ovvero il profilo semplice - ed in generale l'assunto di non-istantaneità del processo produttivo - viene respinto, contro l'ipotesi alternativa:

$$H_a: \left\{ \delta_{L,J}^{A,P} \right\} \neq 0 \quad , \quad \left\{ \delta_{L,h}^{B,P} \right\}_{h \in I} \neq 0$$

Fissando un opportuno livello di significatività, la distribuzione di probabilità  $\chi^2$ , con  $(n-1)$  gradi di libertà, dei parametri in questione permetterà di respingere o meno  $H_0$ . Qualora si dovesse accettare  $H_0$ , nulla vieta di sottoporre a test altre ipotesi, diverse dal profilo semplice, concernenti la struttura temporale dei processi. Sotto questo aspetto il modello qui proposto consente una notevole flessibilità, che ne rafforza la valenza empirica.

Passiamo ora ad esaminare due utili indici calcolabili dalla (56), una volta effettuata la necessaria stima dei parametri. Il primo che passiamo in rassegna è l'elasticità rispetto ai prezzi dell'output netto (ottimale) di ogni merce; formalmente essa è data da:

$$\eta_{L,h} \equiv \left( \partial \bar{Q}_i / \partial P_h \right) \left( P_h / \bar{Q}_i \right) \quad \forall L, h \in I \quad (61)$$

il segno di tale elasticità misura sostanzialmente il grado di sostituibilità e di complementarità tra inputs. A questo scopo, peraltro, risponde forse meglio la versione normalizzata della (61), nota anche come elasticità di trasformazione (69), la quale è data da:

$$b_{L,h} \equiv \eta_{L,h} / Y_i \quad \forall L,h \in I \quad (62)$$

la normalizzazione per la percentuale di profitto relativa ad ogni merce (settore), consente di scrivere la (62) nella sua più comune veste:

$$b_{L,h} = (\partial^2 R / \partial P_L \cdot \partial P_h) R / (\partial R / \partial P_L) \cdot (\partial R / \partial P_h) \quad \forall L,h \in I \quad (63)$$

Come anticipato, è possibile esprimere la (61) - e quindi la (62) (e dunque anche la (63)) in funzione della (56), cioè dei risultati delle stime (70):

$$\eta_{L,h} = Y_h + (Y_{L,h}^P / Y_i) - \delta_{L,h} P_h \quad \forall L,h \in I \quad (64)$$

dove  $\delta_{L,h}$  è l'usuale delta di Kronecker.

#### 4.2

In questo paragrafo esporremo rapidamente l'estensione multisettoriale, che tiene conto cioè dell'interrelazione tra i settori, della specificazione econometrica del paragrafo precedente. Naturalmente, sfruttando la presentazione teorica del paragrafo 3.2, potremo procedere speditamente nell'illustrare il modello in questione.

Sostanzialmente è sufficiente definire, in stretta analogia con la (54),  $n$  funzioni di profitto massimo, una per ogni settore, con argomenti, oltre ai prezzi ed al tempo, i vettori "ritardati" di input e di output di settore  $A^i(t-1), B^i(t-1)$ :

$$\log R_i (p(t), A^i(t-1), B^i(t-1), t, \gamma_R^i) \quad \forall i \in I \quad (65)$$

dove  $\gamma_R^i$  indica il vettore di parametri da stimare per ogni equazione settoriale. Poiché supponiamo che la (65) continui ad essere del tipo trans-log, è indispensabile la <sup>sva</sup>trasformazione, in analogia con la (56), per la stima:

$$Y_{L,J} (p(t), A^J(t-1), B^J(t-1), t, \gamma_Y^{L,J}) \quad \forall L,J \in I \quad (66)$$

dove:

$$Y_{L,J} \equiv P_L \bar{q}_L^J / R_J \quad \forall L,J \in I \quad (67)$$

e con:

$$\partial R_J / \partial P_L = \bar{q}_L^J \quad \forall L, J \in I \quad (68)$$

mentre  $\gamma_{L,J}^J \forall L, J \in I$  sono i parametri da stimare.

E' appena il caso di sottolineare che, lavorando con questa versione del modello, è assai probabile incorrere in non poche difficoltà di stima, poichè le interdipendenze tra i settori comportano facilmente la presenza di correlazione tra blocchi di equazioni. Non bisogna inoltre dimenticare che le equazioni da stimare da, (n-1) che erano nel modello precedente, diventano ora n.(n-1). L'identificazione infatti impone la restrizione:

$$\sum_{L \in I} Y_{L,J} = 1 \quad \forall J \in I \quad (69)$$

giacchè in ogni settore vi è un'equazione che dipende linearmente dalle restanti (n-1). L'elevato numero di equazioni e di variabili, inoltre, può generare anche problemi di bontà delle stime rispetto alla mole di osservazioni eventualmente disponibile.

Naturalmente la (66) non presenta solo svantaggi rispetto alla (56), a differenza della quale ammette uno stretto collegamento con le matrici input-output disponibili (osservate). In vista della (52), infatti, possiamo scrivere la (66) come segue:

$$Y_{L,J} = \frac{P_i (\delta_{iJ} - \bar{a}_{iJ})}{\sum_{L \in I} P_L (\delta_{iJ} - \bar{a}_{iJ})} \quad \forall L, J \in I \quad (70)$$

dove  $\delta_{iJ}$  è l'usuale delta di Kronecker e  $\bar{a}_{iJ}$  rappresenta la quantità di merce i-esima consumata nella produzione di un'unità della merce j-esima.

La relativa matrice  $\{ Y_{ij} \}_{i \in I}^{j \in I}$  equivale in pratica ad una matrice input-output misurata in valore invece che in termini fisici. Gli elementi di tale

matrice, esterni alla diagonale principale, sono interpretabili come costi settoriali di produzione, normalizzati, relativi ad ogni input di settore, mentre quelli interni sono sostanzialmente i ricavi, normalizzati, di settore (al netto dei reimpieghi).

Giova sottolineare che tali coefficienti differiranno da quelli effettivi, innanzi-

zitutto per l'ipotesi di ottimalità - almeno del 1° ordine- sotto cui sono stati determinati, in secondo luogo per la particolare ipotesi di profilo semplice imposta alla struttura temporale dei processi produttivi. Un'ulteriore fonte di divergenza, poi, è legata alla difficoltà, presente nella realtà economica, di aggiustare istantaneamente i coefficienti effettivi verso quelli ottimali. Parimenti alle altre ipotesi, tale divergenza può essere sottoposta a test, una volta ipotizzata una dinamica del processo di aggiustamento. Per non complicare troppo il modello, si potrebbe imporre la seguente "legge":

$$\tilde{Y}_{LJ}(t) - \tilde{Y}_{LJ}(t-1) = \mu_J (Y_{LJ}(t) - \tilde{Y}_{LJ}(t-1)) \quad (7.1)$$

$$\forall L, J \in I$$

dove  $\tilde{Y}_{ij}(t)$  sono i coefficienti osservati della matrice input-output, misurati in valore, mentre  $\mu_J$  sono i parametri del processo di aggiustamento.

Stimando la (7.1) congiuntamente alla (6.6), è possibile verificare la significatività dei parametri del processo di aggiustamento. Inoltre, introducendo gli opportuni indici sulla falsariga del (6.2), si possono valutare le elasticità di sostituzione e verificare l'ipotesi di coefficienti fissi, secondo una metodologia ormai consolidata nella letteratura (7.2). Sotto questo profilo, vale la pena di sottolineare la possibilità di confrontare i risultati delle stime di questo modello con quelle della più recente letteratura, che "trascura" l'aspetto legato alla durata dei processi produttivi; ad esempio <sup>con</sup> i peraltro interessanti risultati di Heimler e Milana (1982b), ottenuti con un modello multisettoriale con funzioni di costo leontieviane generalizzate.

Un'ulteriore possibile applicazione della (7.0) concerne il modello multisettoriale di crescita ottimale esposto nel paragrafo 2.2; ci riferiamo in particolare al sistema (7.2), che costituisce la linearizzazione del sistema originale (9)-(8). In proposito occorre però richiamare le considerazioni finali del paragrafo 3.2, con riferimento alle ipotesi tecnologiche in tema di struttura temporale dei

processi produttivi. Avevamo constatato che, prendendo in esplicita considerazione la dimensione durata, la matrice H, ovvero la sua corrispondente  $\left\{ Y_{ij} \right\}_{L \in I}^{J \in I}$ , dipende dai valori ritardati di input ed output. In altre parole avremmo a che fare con un sistema non più differenziale ma misto, cosicché la linearizzazione (7.2) del sistema (9)-(8) non sarebbe più, a rigore, accettabile.

Ciò chiarito, è evidente che la correttezza formale per la trattazione che segue imporrebbe di eliminare la dipendenza della matrice  $\left\{ Y_{ij} \right\}_{L \in I}^{J \in I}$  dai valori ritardati di input e di output. Fatta questa avvertenza, procediamo richiamando per como-

dità il sistema (42):

$$\begin{bmatrix} \dot{K}^*(t) \\ \dot{P}^*(t) \end{bmatrix} = J(\bar{K}, \bar{P}) \begin{bmatrix} K^*(t) \\ P^*(t) \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} K^*(t) &\equiv K(t) - \bar{K} \\ P^*(t) &\equiv P(t) - \bar{P} \end{aligned} \quad (72)$$

$\forall t \in R_+$

con:

$$J(\bar{K}, \bar{P}) = \begin{bmatrix} H^{-1} - (g + r \delta_1)I & \partial y / \partial P \\ 0 & (z_0 + r \delta_1)I - H^{-1} \end{bmatrix}$$

tale sistema, come sappiamo, può essere interpretato come la soluzione del programma di massimizzazione (19)-(20), a condizione che si ponga:

$$z_0 = \gamma, \quad U' = 1, \quad U'' = 0 \quad (73)$$

cioè che il saggio  $\gamma$  di preferenza intertemporale sia uguagliato al tasso monetario di interesse  $r_0$  e che l'utilità marginale della funzione del benessere sociale sia costante e pari ad uno, almeno nell'intorno dello stato stazionario  $(\bar{k}, \bar{p})$ .

La condizione di trasversalità (24) da soddisfare, al fine di garantire la ottimalità del sentiero di crescita, è data, in vista della (73), da: (73)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P^*(t) e^{-z_0 t} = 0 \quad (74)$$

Il pattern di  $p^*(t)$  lo si ottiene risolvendo la (72), ovvero da:

$$Z^*(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i u^i e^{\lambda_i t}, \quad Z^*(t) \equiv \begin{bmatrix} K^*(t) \\ P^*(t) \end{bmatrix} \quad (75)$$

$\forall t \in R_+$

dove  $\lambda_i$  e  $u^i$   $\forall i=1, 2n$  sono rispettivamente gli autovalori, supposti per semplicità distinti (74), e gli autovettori di  $J(\bar{k}, \bar{p})$ , mentre  $c_i$   $\forall i=1, 2n$  sono delle costanti

che dipendono dalle condizioni iniziali. Affinchè la (74) sia soddisfatta è

necessario e sufficiente che gli autovalori  $\lambda_i$   $\forall i=1, 2n$  siano "dominati" da  $r_0$ , ovvero  $RE \lambda_i < r_0$ ,  $\forall i=1, 2n$ , come si constata

facilmente ispezionando la (75). Quest'ultima condizione, in forza della (18),

produce il seguente vincolo rispetto agli autovalori della matrice  $(H^{-1} - r \delta_1)$ :



$$\operatorname{RE} \lambda_i [H^{-1} - \Gamma \delta_1] > 0 \quad \forall i = 1, m$$

(76)

$$\operatorname{RE} \lambda_i [H^{-1} - \Gamma \delta_1] < r_0 - g \quad \forall i = 1, m$$

Come si può constatare immediatamente nella (76), la condizione che il saggio di crescita (bilanciata e/o della forza lavoro) non superi il saggio di interesse, tipica nella "tradizione" leontieviana e Von Neumanniana, è necessaria affinché le restrizioni imposte nella (76) non siano incompatibili. Dunque, all'interno del modello qui proposto, il fatto che il saggio di interesse monetario sia un limite superiore per il saggio di crescita bilanciata diventa una vera e propria condizione necessaria di efficienza (e ottimalità) intertemporale. In questo senso, quale che sia il sentiero che percorrerà l'economia, il saggio di crescita bilanciata  $g$  (e relativo sentiero) continua a preservare un notevole interesse teorico e pratico, nella misura in cui il modello in questione ammette delle applicazioni empiriche. Una volta stabilita la compatibilità delle disuguaglianze che compaiono nella (76), si tratta ora di verificare se:

$$\operatorname{RE} \lambda_i [H^{-1} - \Gamma \delta_1] \in (0, r_0 - g) \quad \forall i = 1, m$$

$$r_0 - g > 0$$

(77)

Sebbene sia possibile stabilire qualche relazione tra gli autovalori della matrice  $H$  ed  $r_0$  (75), non è possibile garantire a priori che la (77) sia soddisfatta. Ciò apre la strada alla verifica empirica, una volta esclusi, beninteso, casi banali (76). Conviene in proposito procedere come segue: ad una certa data, fissata per comodità in  $t=0$ , siano noti i prezzi  $p(0)$  e gli stocks (pro-capite) di capitale  $k(0)$ , ossia la condizione iniziale  $\bar{z}(0)$ . Sia poi nota la matrice  $\Gamma \delta_1$  dei saggi istantanei di deprezzamento del capitale fisso e si proceda alla "ricostruzione" della matrice  $H^{-1}$  attraverso le stime  $\left\{ \begin{matrix} y_{ij} \\ i \in I \\ j \in I \end{matrix} \right\}$ . Ciò posto, si verificherà innanzitutto se è soddisfatta la prima delle due condizioni che compaiono nella (76); se soddisfatta si procederà al controllo della seconda, fissati i parametri  $g$  ed  $r_0$ . Essa sarà soddisfatta se la massima parte reale degli autovalori di  $(H^{-1} - \Gamma \delta_1)$  è inferiore a  $(r_0 - g)$ . In questo caso si concluderà che l'efficienza e l'ottimalità intertemporali del sentiero di accumulazione, che l'economia è "destinata" a percorrere, sarebbero assicurate. (77) Qualora solo la seconda condizione richiesta dalla (76) non fosse soddisfatta, si potrebbe pensare di "manovrare" il tasso di interesse monetario  $r_0$ , al fine di controllare se valori "realistici" di tale tasso possano ripristinare il risultato "desiderato".

In questi esercizi simulativi, coinvolgenti sia il tasso di interesse monetario  $r_0$  che il tasso  $g$  di crescita della forza-lavoro, occorre, tuttavia, prestare molta attenzione al fatto che lo stato stazionario  $\bar{z}=(\bar{k},\bar{p})$  dipende da  $r_0$  e da  $g$ , come si constata facilmente dalla (9)-(8) annullandone il lato sinistro. Di conseguenza anche la matrice  $H$  viene a dipendere dai suddetti parametri; d'altro canto le stime  $\left\{ y_{ij} \right\}_{\substack{j \in I \\ i \in I}}$  sono basate sui valori passati di  $r_0$  e  $g$  e non contengono alcuna informazione concernente <sup>loro</sup> la sensitività rispetto a variazioni di tali parametri. A rigore, dunque, essi saranno leciti solo se si assume (implicitamente) che le scelte tecnologiche non siano "troppo" influenzate da  $r_0$  e da  $g$ ; un'ipotesi la cui accettabilità sembra problematica.

Vi sono poi due ordini più generali di difficoltà connessi all'impiego pratico del modello; in primo luogo, avendo a che fare con un sistema dinamico linearizzato, vi è la ben nota impossibilità a priori di fissare una regola che consenta di ritenere accettabile, o inaccettabile, la "distanza" tra la condizione iniziale  $z(0)$  e lo stato stazionario  $\bar{z}$ . Non si è, in altre parole, mai certi in assoluto dell'accettabilità dell'approssimazione lineare rispetto alla condizione iniziale di riferimento. In secondo luogo, anche ammettendo di superare la prima difficoltà, grazie ad una qualche "regola pratica" che individui l'appropriata soglia di distanza <sup>tra</sup>  $z(0)$  e  $\bar{z}$  entro la quale la linearizzazione è ritenuta valida, rimane ancora aperto il problema del calcolo di  $\bar{z}$ . Esso comporta la conoscenza delle funzioni  $y_i(k,p)$  e  $q_i(k,p)$   $\forall i=1,n$ , le cui caratteristiche sono in stretto collegamento con la funzione di trasformazione  $T(y,k)$ , secondo quanto indicato nella (3) e nella

(4). Tale funzione, però, non è univocamente determinabile attraverso l'"integrazione" delle funzioni trans-log di profitto  $R_i$   $\forall i=1,n$  e quindi dalle stime  $\left\{ y_{ij} \right\}_{\substack{j \in I \\ i \in I}}$ , salvo il caso in cui tali funzioni soddisfino (almeno) le condizioni di omogeneità di grado uno nei prezzi, di convessità e monotonicità, sempre rispetto ai prezzi. (48). Condizioni che, come sottolineato nel precedente paragrafo, non sono necessariamente rispettate, a meno che non siano imposte a priori come vincolo nella stima.

Sebbene non manchino le difficoltà, non ci sembra priva di interesse l'implementazione di questo test, poichè consente di valutare la "desiderabilità" del sentiero di crescita che l'economia è "destinata" a seguire, ovvero di predisporre un primo quadro di valutazione per misurare l'impatto di interventi settoriali di politica industriale, una volta fissata la funzione obiettivo del policy-maker, secondo le ipotesi di questo modello.

In questa sezione conclusiva più che sulla sintesi dei risultati raggiunti, concentreremo l'attenzione sulle diverse direzioni di marcia aperte ; in particolare ci preme mettere in evidenza quelle lacune più vistose che necessitano di essere quanto prima colmate.

Come largamente sottolineato nella terza sezione, la presa in considerazione della dimensione durata apre interessanti prospettive nello studio degli effetti della innovazione tecnologica sull'evoluzione dell'accumulazione del capitale, della occupazione, dei prezzi relativi, ed, in generale, consente un inquadramento teorico più robusto per quel che concerne la crescita disproporzionale.

D'altro canto, permangono ancora non poche difficoltà tecniche nell'implementazione empirica ed econometrica di questo approccio, in particolare con riferimento alle ipotesi sulla struttura temporale dei processi produttivi.

Infatti, l'ipotesi di profilo semplice adottata, sebbene possa essere ritenuta accettabile in primissima approssimazione, è sicuramente troppo schematica.

Una seconda difficoltà, di fatto non superata nella specificazione econometrica proposta, è data dall'adattamento connesso alla transizione tecnologica, i cui effetti sono stati discussi nel paragrafo 3.1. In effetti la trans-log proposta nella (54) non incorpora, se non in una forma assai rozza, costituita dal termine di trend, il processo di adattamento. Questa considerazione vale soprattutto nel caso in

cui si ipotizzassero strutture temporali dei processi meno elementari del profilo semplice. Dal punto di vista tecnico, l'incorporazione dell'adattamento imporrebbe, in vista della (33) e della (34), di rendere i coefficienti che moltiplicano le variabili ritardate di input e di output dipendenti dal tempo, secondo un pattern influenzato dalla forma del progresso tecnico, dal ritmo di introduzione dell'innovazione e dalla sua velocità di diffusione. Si tratta di aspetti, questi ultimi, che stanno ricevendo una degna attenzione teorica (79), ma il cui ponte con l'applicazione è ben lungi dall'essere gettato. Sotto il profilo squisitamente econometrico, poi, la dipendenza dal tempo dei coefficienti in questione comporterebbe l'impiego del filtro di Kalman (80) nella stima della (54), la cui difficoltà si sommerebbe ai problemi di specificazione dell'andamento temporale di tali coefficienti.

In sostanza il mutamento di prospettiva teorica avrebbe non poche conseguenze anche

sul piano econometrico, costringendo all'abbandono di parte della strumentazione tradizionalmente impiegata.

Un secondo aspetto, che ci sembra degno di approfondimento teorico per le sue implicazioni pratiche, è costituito dalla sostituzione delle ipotesi tecnologiche, definite nella (1), per il modello neoclassico multisetoriale di crescita, con quelle fissate nella (25), le quali introducono la dimensione temporale dei processi produttivi. Esplorare questa strada servirebbe a migliorare non solo il "realismo" del modello in questione, ma soprattutto a vagliare gli effetti dell'adattamento nello ambito del modello neoclassico, al cui interno sarebbero (per la prima volta) affrontate le questioni inerenti la transizione tecnologica (traversa). E' logico attendersi cambiamenti non marginali in questo sviluppo e tali probabilmente da costringere ad una riformulazione dell'applicazione proposta del modello neoclassico nella parte finale del paragrafo 4.2.

Un'ultima direzione di marcia, che meriterebbe di essere perseguita, concerne la riformulazione in termini più generali del programma vincolato di massimizzazione intertemporale, definito nella (19)-(20). Per esporre più precisamente cosa s'intende modificare rispetto al programma originario, formalizziamo direttamente quello che dovrebbe essere il "nuovo" programma:

$$\text{MAX}_{[v^1(t), v^2(t)]} \int_0^{+\infty} U [T(y, k, v^1(t))] e^{-\rho t} dt \quad (78)$$

sotto il vincolo:

$$\dot{K}_i(t) = y_i - (q + \delta_i) K_i(t) + v_i^2(t) \quad \forall i=1, n \quad (79)$$

dove i vettori  $v^1(t)$  e  $v^2(t)$  rappresentano, rispettivamente, le variabili di controllo influenzanti la tecnologia, e le variabili di controllo che definiscono la "posizione netta" del settore pubblico verso i restanti settori dell'economia. Entrambi questi vettori sono variabili di manovra del policy-maker;  $v^1(t)$  può essere identificata con tutti quegli interventi, quali la costruzione di infrastrutture, le spese per la Ricerca e Sviluppo ecc. in grado di influenzare la tecnologia effettivamente disponibile per le imprese. In sintesi, questo vettore di variabili racchiude in sé tutti gli interventi per così dire "dal lato dell'offerta".

Al contrario  $v^2(t)$ , che rappresenta <sup>tra l'altro</sup> tutti i saldi netti tra imposte e sussidi che la pubblica amministrazione ha verso i settori industriali, rappresenta l'impatto

"dal lato della domanda" del settore pubblico. Più in generale si tratta della domanda netta autonoma, sotto il controllo del policy-maker, indirizzata verso i settori industriali. Il vantaggio della formulazione del programma (178)-(179), rispetto all'originale, consiste nella possibilità di valutare la coerenza degli interventi di politica industriale dal lato della domanda, come dal lato dell'offerta, con l'efficienza e l'ottimalità intertemporale del sentiero di accumulazione.

E' appena il caso di sottolineare che tale valutazione richiede più complesse condizioni rispetto a quella definita nella (176). Recenti risultati nella teoria del controllo ottimale <sup>(181)</sup> assicurano, comunque, la possibilità di affrontare la questione in maniera soddisfacente.

Ulteriori direzioni di marcia potrebbero essere individuate, tuttavia ci pare che la "carne messa al fuoco" sia più che sufficiente per prolungare la ricerca volta ad avvicinare l'<sup>ne</sup>elaborazione teorica all'applicazione empirica. Sotto questo profilo, ci pare esca rafforzata l'idea formulata nell'introduzione, secondo cui il contatto tra teoria e applicazione è estremamente fecondo per entrambe; le numerose direzioni per ulteriori ricerche qui proposte stanno a testimoniarlo.

## 6. APPENDICE MATEMATICA

### 6.1

Questa appendice è dedicata alla dimostrazione di alcuni risultati esposti nel testo, del quale seguiremo l'ordine nella presentazione.

In questo paragrafo ci occuperemo dell'operazione di inversione degli operatori  $L_z(.)$  e  $L_y(.)$ , la quale giustifica il passaggio dalla (31) alla (32).

Tali operatori sono rappresentabili come delle matrici, i cui elementi sono dei ritardi distribuiti di ordine finito; formalmente si ha quindi che:

$$L_z [B(\tau)] \equiv [h^1(L), h^2(L), \dots, h^n(L)] \equiv H(L) \quad (80)$$

$$L_y [A(\tau)] \equiv [K^1(L), K^2(L), \dots, K^n(L)] \equiv K(L)$$

dove:

$$h^i(L) \equiv \sum_{s=0}^{\theta_i} h^i L^s, \quad K^i(L) \equiv \sum_{s=0}^{\theta_i} K^i L^s \quad \forall i \in I \quad (81)$$

e con:

$$L^{\pm s} X_i(t) = X_i(t \mp s) \quad \forall s \in [0, \theta_i] \quad \forall i \in I$$

La linearità degli operatori  $L_z(\cdot)$  e  $L_y(\cdot)$  (82) consente di trattare la loro inversione in stretta analogia con l'inversione di matrici. In primo luogo

occorre definire la cosiddetta trasformata Z di H(L) e K(L), ovvero:

$$H(z) \equiv \left[ \sum_{s=0}^{\theta_1} h^1 z^s, \sum_{s=0}^{\theta_2} h^2 z^s, \dots, \sum_{s=0}^{\theta_n} h^n z^s \right] \quad (82)$$

$$K(z) \equiv \left[ \sum_{s=0}^{\theta_1} K^1 z^s, \sum_{s=0}^{\theta_2} K^2 z^s, \dots, \sum_{s=0}^{\theta_n} K^n z^s \right]$$

dove z è una variabile complessa.

Per effettuare l'inversione occorre valutare H(z) e K(z) per  $z = e^{-i\omega}$ , dove i è la usuale unità immaginaria e  $\omega$  una variabile reale, ed invertire poi  $H(e^{-i\omega})$  e  $K(e^{-i\omega})$ . Ciò posto, si tratta ora di vedere come effettivamente si costruiscono i coefficienti delle matrici  $H^{-1}(L)$  e  $K^{-1}(L)$ , che danno luogo agli operatori inversi  $L_z^{-1}(\cdot)$  e  $L_y^{-1}(\cdot)$ . Indicheremo con  $\bar{h}_{ij}^s$  e  $\bar{k}_{ij}^s$  i generici coefficienti di posto i, j e moltiplicanti il generico ritardo di ordine s,  $L^s$ , delle matrici  $H^{-1}(L)$  e  $K^{-1}(L)$ ; tali coefficienti si ottengono nella maniera seguente:

$$\bar{h}_{ij}^s \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}_{ij}(e^{-i\omega}) e^{i\omega s} d\omega \quad (83)$$

$$\bar{k}_{ij}^s \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{k}_{ij}(e^{-i\omega}) e^{i\omega s} d\omega \quad \forall s=0,1,2,\dots$$

dove  $\bar{h}_{ij}(e^{-i\omega})$  e  $\bar{k}_{ij}(e^{-i\omega})$  sono i generici elementi delle matrici  $H^{-1}(e^{-i\omega})$  e  $K^{-1}(e^{-i\omega})$ . Si può dimostrare che la (83) è tale per cui:

$$H(L) \cdot H^{-1}(L) = I_{(n \times n)}; \quad K(L) \cdot K^{-1}(L) = I_{(n \times n)} \quad (84)$$

dove  $I_{(n \times n)}$  indica la matrice unita. Pertanto l'inversione è dimostrata.

Q.E.D.

6.2

Veniamo ora alla determinazione della matrice hessiana  $\left\{ \nabla_p^2 R(\cdot) \right\}_{(n \times n)}$  in funzione dei valori stimati della (56)<sup>(83)</sup>. Rammentiamo che il generico elemento di tale matrice è la derivata parziale seconda  $\partial^2 R / \partial p_i \cdot \partial p_h, \forall i, h \in I$  e che siamo in primo luogo interessati a stabilire il segno degli autovalori della matrice simmetrica:

$$\frac{1}{2} \left( \left\{ \nabla_p^2 R(\cdot) \right\}' + \left\{ \nabla_p^2 R(\cdot) \right\} \right) \quad (85)$$

dove il simbolo ' sta ad indicare l'operazione di trasposizione.

Procediamo richiamando la (57) e la (58), da cui si trae che:

$$Y_i = p_i (\partial R / \partial p_i) / R = \partial \log R / \partial \log p_i \quad \forall i \in I \quad (86)$$

La (86), in forza dell'ultimo membro, evidenzia come si è calcolato la (56) e la seguente uguaglianza:

$$Y_i R = p_i (\partial R / \partial p_i) \quad \forall i \in I \quad (87)$$

la quale, differenziata rispetto alla generica variabile  $p_h$ , fornisce:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial p_h} \cdot R + \frac{\partial R}{\partial p_h} Y_i = \delta_{ih} \frac{\partial R}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial^2 R}{\partial p_i \partial p_h} \quad \forall i, h \in I \quad (88)$$

dove  $\delta_{ih}$  è l'usuale delta di Kronecker.

Riordiniamo ora opportunamente i termini della (88), per mettere in evidenza le derivate parziali seconde che ci interessano:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_i \partial p_h} = \frac{R}{p_i} \frac{\partial Y_i}{\partial p_h} + \frac{\partial R}{\partial p_h} \cdot \frac{Y_i}{p_i} - \frac{\delta_{ih}}{p_i} \frac{\partial R}{\partial p_i} \quad \forall i, h \in I \quad (89)$$

Raccogliamo quindi  $R$  a fattor comune nella (89) e, in forza della (87), abbiamo:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_i \partial p_h} = R \left\{ \frac{1}{p_i} \frac{\partial Y_i}{\partial p_h} + \frac{Y_i}{p_i} \cdot \frac{Y_h}{p_h} - \frac{\delta_{ih}}{p_i^2} Y_i \right\} \quad \forall i, h \in I \quad (90)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial P_L \partial P_h} = \left\{ \frac{1}{P_L} \frac{\partial Y_i}{\partial P_h} + \frac{Y_L \cdot Y_h}{P_L \cdot P_h} - \frac{\delta_{Lh}}{P_L^2} Y_i \right\} \quad \forall L, h \in I \quad (91)$$

tenendo poi presente che dalla (56) si ottiene:

$$\partial Y_i / \partial P_h = Y_{Lh}^P / P_h \quad \forall L, h \in I \quad (92)$$

possiamo allora concludere che tutti i termini che compaiono entro parentesi graffa nella (91) sono noti, per la (56). Rimane dunque solo escluso R, che però, essendo definito nella (54) il suo logaritmo, non può che essere positivo.

Se denotiamo con F la matrice ottenuta con i termini che compaiono nella (91) entro parentesi graffa, possiamo scrivere: con la notazione matriciale:

$$\left( \left\{ \nabla_P^2 R(\cdot) \right\}' + \left\{ \nabla_P^2 R(\cdot) \right\} \right) \frac{1}{2} = \frac{R}{2} (F' + F) \quad (93)$$

la (93) ci consente di stabilire che il segno degli autovalori della matrice definita nella (93) è identico a quello della matrice  $(1/2)(F'+F)$ , in quanto tali matrici sono identiche a meno della moltiplicazione per lo scalare positivo  $R^{-1}$ ; tale moltiplicazione non altera il segno degli autovalori, pertanto la desiderata convessità si avrà se e solo se la matrice  $1/2(F'+F)$ , che è composta di termini noti, ha gli autovalori - oppure i minori principali - semi-definiti positivi.

Q.E.D.

### 6.3

In conclusione effettuiamo i passaggi che dalle definizioni (61) e (63) consentono di giungere alla (62) e alla (64).

In vista della (93), possiamo così riscrivere la (61):

$$\pi_{Lh} = \frac{\partial^2 R}{\partial P_L \partial P_h} \cdot \frac{P_L}{(\partial R / \partial P_h)} \quad \forall L, h \in I \quad (94)$$

Moltiplichiamo e dividiamo poi il lato destro della (94) per R, cosicchè, in forza della (90) e della (92), si ottiene:

$$\pi_{Lh} = \left[ (Y_L / P_L) (Y_L - 1) + (1/P_L) (\partial Y_L / \partial P_L) \right] (P_L^2 / Y_L) \quad \forall L \in I \quad (95)$$

$$\pi_{Lh} = \left[ (Y_L \cdot Y_h / P_L \cdot P_h) + (1/P_L) (\partial Y_L / \partial P_h) \right] (P_h \cdot P_L / Y_L) \quad \forall L, h \in I \quad (96)$$



La (85) e la (86) possono essere riscritte compattamente come segue:

$$\pi_{L,h} = Y_h - \delta_{L,h} P_h + (P_h / Y_i) (\partial Y_L / \partial P_h) \quad \forall L, h \in I \quad (87)$$

dove  $\delta_{ih}$  è il delta di Kronecker

e, in vista della (82), si conclude che:

$$\pi_{L,h} = Y_h - \delta_{L,h} P_h + (Y_{L,h}^P / Y_i) \quad \forall L, h \in I \quad (88)$$

che è appunto la (64).

Q.E.D.

Per quel che concerne la (62) invece, basta notare che la (63) può essere facilmente collegata con la (84) come segue:

$$b_{L,h} = \frac{\pi_{L,h}}{P_h} \cdot \frac{R}{(\partial R / \partial P_h)} \quad \forall L, h \in I \quad (89)$$

in vista della (87), la (89) diventa quindi:

$$b_{L,h} = \pi_{L,h} / Y_h \quad \forall L, h \in I \quad (90)$$

che è proprio la (62).

Q.E.D.

## Note

- (1) Si può vedere in proposito Benhabib e Nishimura (1979), Appendice, per le condizioni che ne assicurano l'esistenza ed unicità: omogeneità di grado uno per  $f^i$   $\forall i=0, n$ , stretta quasi-concavità e doppia differenziabilità.
- (2) In proposito Burmeister e Dobell (1970) pag.301.
- (3) E' bene precisare che  $y_0$ , cioè l'output pro-capite di bene di consumo, non necessariamente è uno scalare, ma può essere pensato anche come <sup>un</sup> vettore, in proporzioni fisse, di beni finali.
- (4) Burmeister e Dobell (1970) pag.304. Si noti che la positività di  $r_0$  richiede che la produzione del bene di consumo (pro-capite) superi il saggio di salario che, per ipotesi, è interamente consumato; si tratta evidentemente di una condizione di vitalità perfettamente identica a quella che compare nei modelli leontieviani e Von Neumanniani.
- (5) Per la dimostrazione della (4) si veda Burmeister e Dobell (1970) pag.299-300, oppure le argomentazioni esposte da Benhabib e Nishimura (1979), pag.425.
- (6) Vedremo nella quarta sezione più dettagliatamente questi problemi, per il momento ci limitiamo a rinviare all'esaustiva presentazione di Fuss e McFadden (1978).
- (7) Questo risultato è una conseguenza del teorema di Samuelson del pareggiamento dei prezzi dei fattori; per questo teorema si veda McKenzie (1955) e per una sintesi recente dei teoremi ivi implicati, Woods (1978), pag.238-240.
- (8) Il calcolo degli autovalori di  $J(\bar{k}, \bar{p})$  richiede l'impiego di un ben noto teorema per il calcolo dei determinanti delle matrici a blocchi, ovvero:
- $$\text{DET} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{DET} (AD-BC)$$
- purchè sia  $CD=DC$ , dove  $A, B, C, D$  sono matrici quadrate del medesimo ordine (Bellman (1970) pag.84, esercizio 1).
- (9) Per la dimostrazione completa si rinvia a Benhabib e Nishimura (1979) pag.428, proposizione 3. Dalla (18), comunque, si intuisce che il predetto risultato vale, purchè la differenza  $(r_0 - g)$  sia sufficientemente piccola.

- (10) Si veda Burmeister (1980) pag.224 per un'accurata presentazione della questione.
- (11) Nel caso generale essa avrà dimensione  $n$ , sempre che si tratti di punto di sella regolare.
- (12) Pag.429 e seguenti. Il risultato trovato da questi autori è legato alla teoria della biforcazione di Hopf.
- (13) Ci riferiamo a Montrucchio (1984), in cui si dimostra la possibilità di dinamiche caotiche per sistemi (discreti) generati da un programma di massimizzazione intertemporale, un caso a cui può essere ricondotto il modello qui studiato. Per quel che concerne invece le dinamiche caotiche per sistemi dinamici continui si rinvia a Ruelle e Tackens (1971), in cui si dimostra che, a parte casi degeneri, biforcazioni "successive" a quella di Hopf possono trasformare il ciclo limite in toro invariante e quindi comportare la presenza delle menzionate dinamiche.
- (14) Si veda, ad esempio, Burmeister e Döbell (1970) cap. 6, oppure, più recentemente, Burmeister, Flood e Turnovsky (1980).
- (15) Secondo l'evocativa definizione di Samuelson (1957) che ha battezzato questi fenomeni con il termine tulipmania, richiamando un evento storico dell'Olanda del 1630.
- (16) Per un vaglio delle relazioni tra i modelli di crescita descrittivi ed ottimali, si rinvia a Cass e Shell (1976).
- (17) L'argomento è affrontato con il dovuto respiro da Becker (1981), al quale rinviamo; noi ci limiteremo qui all'ottimizzazione intertemporale del risparmio, ovvero alla massimizzazione di una funzione intertemporale di utilità.
- (18) Si veda Turnovsky (1970) pag.315, lemma 2.
- (19) Si veda Becker (1977) e (1979).
- (20) È evidente che in questo modo sono eliminate le difficoltà connesse alle differenze nella struttura preferenziale dei consumatori. Per un tentativo di superamento di questa ipotesi restrittiva si veda il recente lavoro di Lucas e Stokey (1984). Infine dalla (19) è implicito che si è fissata, arbitrariamente, al tempo zero la data in cui viene affrontato il problema di massimizzazione intertemporale vincolata.
- (21) Per questo principio si può vedere qualsiasi testo di teoria del controllo ottimo, ad esempio Pontryagin (1962) pag.60-61.
- (22) In proposito Lancaster (1968) cap.8 ed il commento successivo di Kelly (1969).
- (23) Si tratta indubbiamente di assunzioni restrittive; del resto non poteva accadere diversamente, dato che si voleva ottenere la "coincidenza" tra la versione descrittiva e quella ottimale del modello. In questo modo, tuttavia, si semplifica non

poco lo studio della versione ottimale.

(24) Per la dimostrazione si veda Benveniste e Sheinkman (1982).

(25) Cioè se esiste una costante  $c \in \mathbb{R}_+^m$  tale per cui  $p(t) \leq c \cdot e^{-\rho t}$ , con  $\rho < \gamma$  e  $p(t) \geq 0$ .

(26) Ciò non significa che non vi siano stati rilevanti contributi in materia, soprattutto negli anni '60; per una rassegna in proposito si veda Burmeister e Dobell (1970) cap.3. Per un recente (ed impegnativo) contributo si veda Sato (1981), il cui lavoro costituisce un pò il punto di arrivo della letteratura neoclassica in tema di progresso tecnico.

(27) Queste critiche all'approccio (neoclassico) tradizionale sono dovute a Georgescu-Roegen (1971) pag.224-234.

(28) Farebbero parziale eccezione, nel panorama neoclassico, a queste obiezioni i cosiddetti modelli ad "annate", se non fossero ancora così vincolati ai concetti tradizionali nello studio del mutamento tecnologico; si veda comunque Solow (1960) per una presentazione di questi modelli.

(29) Si assume nella (26) che il problema della scelta della durata ottima del processo sia già stato risolto; per questo è stato tolto il circonflesso alla variabile  $\hat{\theta}$ .

(30) Per le caratteristiche di questa modalità di attivazione dei processi si rinvia al pregevole lavoro di Tani (1984) e all'articolo, del medesimo autore, del (1978).

(31) Per una conferma di quanto qui asserito si veda l'interessante ricerca empirica guidata da Talamona (1982); tuttavia non si può nascondere il fatto che, avendo questo contributo ignorato il modello a Fondi-Flussi di Georgescu-Roegen, in cui il problema della minimizzazione dei tempi d'ozio dei fattori fondo trova una rigorosa sistemazione teorica, il quadro teorico <sup>all'interno del quale si muove</sup> è insufficiente, cosicché anche la valenza interpretativa risente, in sede di commento dei risultati, in modo decisivo di questa lacuna.

(32) In proposito rinviamo a Zamagni (1984) pag.334 a sostegno di questa tesi.

(33) Per una delucidazione su questi aspetti si veda Scazzieri (1983b).

(34) Ci sia consentito in proposito il rinvio a Violi (1983).

(35) D'ora in poi le grandezze asteriscate si riferiscono sempre, in presenza di innovazione, al vecchio processo, mentre quelle senza al nuovo.; ciò in conformità con la notazione hicksiana (si veda Hicks (1973)).

(36) La sostanza della (27) non muterebbe in presenza di troncamento di parte delle "code" dei vecchi processi, ad esempio di quelle code il cui valore capitale divenne tasse negativo.

(37) Si veda Hicks (1973) parte seconda.

(38) Si rinvia a Belloc (1980), Gozzi e Zamagni (1982) e Violi (1983) per questi

- risultati; un altro interessante modello di crescita sviluppato lungo le direttrici qui indicate è quello proposto da Chipman (1977).
- (39) Queste ipotesi rifletteranno in parte quelle assunte da Appelbaum e Harris (1977) nel loro interessante contributo.
- (40) Si veda, in particolare, il capitolo 1.
- (41) Tali critiche sono state formulate da Burmeister (1974).
- (42) Rinviamo all'appendice per la dimostrazione dell'operazione di inversione per gli operatori in questione.
- (43) Non vi sono peraltro difficoltà nel visualizzare il caso opposto di accorciamento della durata ottima.
- (44) Si veda Diewert (1974) pag.134-135 per i dettagli tecnici relativi a queste ipotesi; giova peraltro rilevare che la loro interpretazione, visto il differente quadro concettuale in cui sono inserite, non può coincidere con quella di Diewert, la quale fa riferimento alla teoria neoclassica, sebbene nei suoi più recenti sviluppi. Per un'interpretazione alternativa più consona al modello qui proposto si veda Winston (1982) cap.3.
- (45) L'estensione di tale proprietà agli inputs e agli outputs totali di ogni periodo, ovvero al vettore  $(A(t), B(t))$  non può avvenire senza qualificazioni.
- (46) Per la definizione di tale profilo in un'ottica neo-austriaca si veda Hicks (1973) cap.7.
- (47) Per semplicità si assume nell'analisi che segue che tale durata non muti; inutile sottolineare la restrittività di questa ipotesi.
- (48) Ci sembra, tuttavia, che essa sia comunque più plausibile di quella proposta da Appelbaum e Harris (1977):
- (49) Si veda in proposito Diewert (1974) oppure <sup>Fuss e</sup> McFadden (1978) sezione 13. I flags che compaiono nella funzione  $s(\cdot)$  sono legati all'operazione di inversione effettuata nel passaggio dalla (36) alla (37).
- (50) Si assume implicitamente che le imprese non controllino il prezzo di vendita del proprio output.
- (51) Si veda Gorman (1968) per le dimostrazioni qui implicate, mentre in Diewert (1974), pag. 36 e seguenti, sono espone dettagliatamente le proprietà della funzione  $R(\cdot)$ . Va da sé che la (41) presuppone la differenziabilità di  $R(\cdot)$ .

- (52) Per uno studio di un caso particolare della (43), in un quadro però neoclassico, si rinvia a Sargent (1979) pag.333 e seguenti.
- (53) Si veda Simon (1974).
- (54) Si rinvia alla raccolta di saggi curata da Radner e McGuire (1974) per una ampia discussione su questi temi.
- (55) Trascuriamo nella (46) gli aspetti legati al mutamento tecnologico; peraltro non vi sarebbero difficoltà di sorta nell'incorporarli. Segnaliamo infine per completezza che gli operatori di lag  $L_{z_i}(\cdot)$  e  $L_{y_i}(\cdot)$   $\forall i=1, n$  sono "impostati" rispettivamente secondo le sequenze di vettori  $\left\{ a^i(\tau) \right\}_{\tau=0}^{\tau=\theta_i}$  e  $\left\{ b^i(\tau) \right\}_{\tau=0}^{\tau=\theta_i}$   $\forall i=1, n$ .
- (56) La  $H_9$  reintroduce, surrettiziamente, la  $H_3$ , ma non, si badi bene, la  $H_2$ .
- (57) Con  $B_i$  si indica un elemento, ed in quanto tale, quindi, si tratta di uno scalare, del vettore  $B^i \quad \forall i \in I$ .
- (58) Si veda Hale (1983) per gli aspetti analitici concernenti i sistemi misti.
- (59) Rinviamo a Diewert (1974) pag.137; il vettore  $v$  compare nella (53) col segno cambiato secondo l'usuale convenzione notazionale per gli inputs.
- (60) Tale forma funzionale, applicata alla teoria della produzione, si deve sostanzialmente a Diewert (1974) (pag.139), mentre diverse applicazioni sono contenute nella raccolta di saggi curata da Fuss e McFadden (1978). Per un'applicazione della trans-log alla domanda di energia in Italia si veda Schianchi (1981).
- (61) Tipicamente  $G$  è un termine di trend, assunto, di solito, lineare.
- (62) Nella terza sezione è stata omessa questa specificazione, peraltro strettamente necessaria solo in sede applicativa, al fine di non appesantire il già complesso quadro.
- (63) Si veda il metodo apposito elaborato da Lau (1978) a tale scopo.
- (64) L'output netto  $\bar{Q}_i \quad \forall i \in I$  si riferisce, per costruzione, solo alle merci prodotte all'interno del sistema economico preso in considerazione. Pertanto il segno delle componenti di tale vettore discrimina in merito all'efficienza del sistema economico (chiuso) in questione. Se negativo, ad esempio, significa che la produzione totale di quella merce non copre gli impieghi intermedi, per cui la differenza va importata dal resto del mondo.
- (65) Per ulteriori dettagli sui problemi di stima si può vedere Appelbaum e Harris (1977), che impiegano un modello (in parte) simile al nostro; per un quadro più esaustivo in merito agli aspetti più squisitamente econometrici si rinvia a Dhrymes (1973).

- (66) Le serie storiche costruite nel lavoro citato nel testo sono state impiegate per la stima di un modello (Heimler e Milana (1982b)) che, almeno in parte, può essere utilmente messo a confronto con il nostro; un ulteriore fonte di dati sono Rosa (1979) e Milana (1980).
- (67) La matrice in questione, come dimostrato nell'appendice, può essere esplicitamente calcolata, una volta stimato il modello.
- (68) Tale condizione va verificata sulla matrice  $(1/2)(\{V_p^2 R(\cdot)\}' + \{V_p^2 R(\cdot)\})$ , secondo ben noti risultati in tema di forme quadratiche.
- (69) Si veda Diewert (1974) pag.144, per le proprietà di questo indice, che non va confuso, in linea di principio, con le elasticità parziali di sostituzione di Allen per una funzione di produzione.
- (70) Si veda l'appendice per la dimostrazione.
- (71) Si tratta di un ritardo distribuito del tipo Koyck; altre specificazioni sono ovviamente possibili.
- (72) Si veda, per un'applicazione al caso italiano, Heimler e Milana (1982b), oppure, con riguardo alla letteratura straniera, Berndt e Khaled (1979); inoltre, ci sembrano interessanti, sebbene ottenuti lavorando con un modello macroeconomico, i risultati ottenuti da Kydland e Prescott (1982). Ciò in quanto il loro modello incorpora la dimensione temporale dei processi produttivi.
- (73) La (74) costituisce semplicemente la versione "locale" della (24).
- (74) L'ipotesi non è affatto restrittiva, almeno sul piano pratico, poiché qualora gli autovalori di  $J(\bar{k}, \bar{p})$  non fossero distinti un teorema - si veda Bellman (1970) pag.206 teorema 7- assicura che una piccola (infinitesima) perturbazione dei coefficienti di  $J(\bar{k}, \bar{p})$  può ripristinare la desiderata distinzione. Siccome  $J(\bar{k}, \bar{p})$  viene "ricostruita" attraverso delle stime, la perturbazione non ne altererebbe di fatto il significato.
- (75) Si veda in proposito Benhabib e Nishimura (1979) proposizione 2, facendo attenzione al fatto che ivi la matrice  $H$  è denotata con  $B$ .
- (76) Alludiamo alla possibilità che l'autovalore violante la (78) abbia associato un autovettore i cui elementi dall' $(n+1)$ -esimo fino al  $2n$ -esimo siano nulli, oppure che sia pari a zero la relativa costante.
- (77) Rammentiamo che la condizione di trasversalità è, in forza delle ipotesi del modello, necessaria e sufficiente, affinché il sistema dinamico (8)-(9) definisca la soluzione del programma (19)-(20) sotto le ipotesi fissate nella (73).

- (78) Per l'elenco completo delle condizioni che assicurano la dualità tra la funzione del profitto (massimo) e la relativa funzione di trasformazione si veda *Fuss e McFadden* (1978) pag.66 e seguenti.
- (79) Si veda, ad esempio, il pregevole lavoro di Nelson e Winter (1982).
- (80) Per un'esposizione di questa tecnica finalizzata all'impiego econometrico si può vedere, ad esempio, Jazwinski (1970) capitoli 7 e 8.
- (81) Si rinvia in particolare all'ormai classico libro di Arrow e Kurz (1970) (soprattutto il capitolo 2) ed ai più recenti Brock e Scheinkman (1974) e (1975) e Brock (1977); in questi ultimi contributi vengono anche trattate approfonditamente le questioni connesse alla stabilità asintotica locale e globale delle variabili endogene implicate nella (1.8) e nella (1.9).
- (82) In proposito si può vedere Sargent (1979) pag.229, oppure Dhrymes (1971) cap.2. L'operazione di inversione, qui solo illustrata, riposa sostanzialmente sul teorema di Riesz-Fischer (per la dimostrazione si veda, ad esempio, Apostol (1977) pag.297, teorema 10.57 e pag.311, teorema 11.5).
- (83) Per alleggerire la notazione nell'esposizione che segue ometteremo il simbolo  $t$ ; ricordiamo però che tutte le relazioni che verranno definite valgono per tutti i periodi dell'arco temporale di stima  $[0, h]$  preso in considerazione. In particolare ciò vale per l'hessiano qui sotto osservazione.



BIBLIOGRAFIA (')

- T.M. Apostol (1977) "Mathematical analysis", 2° edizione, Addison-Wesley, Massachusetts.
- E. Appelbaum e R. Harris (1977) "Estimating technology in an intertemporal framework: a neo-austrian approach", Review of Economics and Statistics, pag.161-171.
- K.J. Arrow, S. Karlin e P. Suppes (à cura di) (1960) "Mathematical method in the social sciences", Stanford University Press, Stanford (California)
- K.J. Arrow e M. Kurz (1970) "Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy", The Johns Hopkins Press, Baltimore.
- R.A. Becker (1977) "A simple dynamic model of equilibrium with heterogeneous capital goods", Discussion Paper, Indiana University, Bloomington.
- R.A. Becker (1979) "The equivalence of a Fisher competitive equilibrium and perfect foresight competitive equilibrium in a multi-sectoral model of capital accumulation", Working Paper, Indiana University, Bloomington.
- R.A. Becker (1981) "The duality of a dynamic model of equilibrium and an optimal growth model: the heterogeneous capital goods case", Quarterly Journal of Economics, pag.271-290.
- B. Belloc (1980) "Croissance économique et adaptation du capital productif", Economica, Parigi.
- R. Bellman (1970) "Introduction to matrix analysis", 2° edizione, McGraw-Hill, New York.
- J. Benhabib e K. Nishimura (1979) "The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisector models of optimal economic growth", Journal of Economic Theory, pag.421-444.
- L.M. Benveniste e J.A. Scheinkman (1982) "Duality theory for dynamic optimization models of economics: the continuous time case", Journal of Economic Theory, pag 1-22.
- E.R. Berndt e M.S. Khaled (1979) "Parametric productivity measurement and choice among flexible functional forms", Journal of Political Economy, pag.1220-1245.

(') Ove citata la traduzione italiana significa che è da quest'ultima che sono tratte le citazioni richiamate nelle note.

- W.A. Brock (1977) "The global asymptotic stability of optimal control: a survey of recent results" in M.D. Intriligator (a cura di) (1977), citato.
- W.A. Brock e J.A. Scheinkman (1974) "Global asymptotic stability of optimal control with application to dynamic economics", in J.D. Pitchford e S.J. Turnovsky (1974), citato.
- W.A. Brock e J.A. Scheinkman (1975) "Global asymptotic stability of optimal control with applications to the theory of economic growth", *Journal of Economic Theory*, pag. 164-190.
- E. Burmeister (1974) "Synthesizing the neo-austrian and alternative approaches to capital theory: a survey", *Journal of Economic Literature*.
- E. Burmeister (1980) "Capital theory and dynamics", Cambridge University Press, Cambridge (U.K.).
- E. Burmeister e R.A. Dobell (1970) "Mathematical theories of economic growth", Macmillan, New York (trad. it. "Teorie matematiche dello sviluppo economico" (1975), Etas, Milano).
- E. Burmeister, R.P. Flood e S.J. Turnovsky (1980) "Dynamic macroeconomic stability with or without equilibrium in money and labour markets", Discussion paper, University of Virginia, Charlottesville.
- A.P. Carter e A. Brody (a cura di) (1970) "Contributions to input-output analysis", North-Holland, Amsterdam.
- D. Cass e K. Shell (1976) "The structure and stability of competitive dynamical systems", *Journal of Economic Theory*, pag. 31-70.
- J.S. Chipman (1977) "A renewal model of economic growth: the continuous case", *Econometrica*, pag. 295-316.
- F. Cugno e L. Montrucchio (1982) "Dinamiche caotiche: alcuni semplici aspetti", Working paper, Laboratorio di Economia politica, Università di Torino, Torino.
- F. Cugno e L. Montrucchio (1983) "Some new techniques for modeling non-linear economic fluctuations: a brief survey" in R. Goodwin, M. Kruger e A. Vercelli (1984), citato.
- W.E. Diewert (1974) "Applications of duality theory", in M.D. Intriligator e D.A. Kendrick (1974), citato.

- P.J. Dhrymes (1971) "Distributed lags: problems of estimation and formulation", Holden-Day, S. Francisco.
- P.J. Dhrymes (1973) "Small sample and asymptotic relations between maximum likelihood and three stage least squares estimators", *Econometrica*, pag. 357-364.
- M. Fuss e D. McFadden (1978) (a cura di) "Production economics: a dual approach to theory and application", North-Holland, Amsterdam.
- D. Gale (1960) "Theory of linear economic models", McGraw-Hill, New-York.
- G. Gandolfo (1979) "Specificazione, analisi qualitativa e stima econometrica di modelli continui", ISPE-Quaderni, Roma.
- G. Gandolfo e P. Padoan (1982) "Policy simulation with a continuous time macrodynamic model of the italian economy: a preliminary analysis", *Journal of Dynamics and Control*, pag. 205-224.
- N. Georgescu-Roegen (1951) "Relaxation phenomena in linear dynamic models", in T.C. Koopmans (1951), (a cura di), citato.
- N. Georgescu-Roegen (1971) "The entropy law and the economic process", Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
- R. Goodwin, M. Kruger e A. Vercelli (1984) (a cura di) "Non-linear models of fluctuating growth", Springer-Verlag, Berlino (in corso di pubblicazione).
- G. Gozzi e S. Zamagni (1982) "Crescita non uniforme e struttura produttiva: un modello di traversa a salario fisso", *Giornale degli Economisti*, pag. 305-345
- W.M. Gorman (1968) "Measuring the quantities of fixed factors", in J. Wolfe (a cura di) (1968), citato.
- F.H. Hahn (1966) "Equilibrium dynamics with heterogeneous capital goods", *Quarterly Journal of Economics*, pag. 633-646.
- F.H. Hahn (1968) "On warranted growth paths", *Review of Economic Studies*, pag. 175-184.
- F.H. Hahn (1970) "Some adjustment problems", *Econometrica*, pag. 1-17.
- J. Hale (1983) "Functional differential equations", Springer-Verlag, Berlino.
- A. Heimler e C. Milana (1982a) "Factor demands and input substitution in an interindustry model for the italian economy", Confederazione Generale dell'Industria Italiana, Centro Studi, Roma.
- A. Heimler e C. Milana (1982b) "Prezzi e quantità nelle industrie manifatturiere italiane", Confederazione Generale dell'Industria Italiana, Centro Studi, Roma.

- J. Hicks (1973) "Capital and time", Oxford University Press, Londra (trad. it. "Capitale e tempo", Etas, Milano (1973)).
- M.D. Intriligator (1977) (a cura di) "Frontiers of quantitative economics", Vol. A, North-Holland, Amsterdam.
- M.D. Intriligator e D.A. Kendrick (1974) (a cura di) "Frontiers of quantitative economics" Vol. 2°, North-Holland, Amsterdam.
- A.H. Jazwinski (1970) "Stochastic processes and filtering theory", Academic Press, New-York.
- D. Jorgenson (1960) "A dual stability theorem", *Econometrica*, pag. 892-899.
- W. Kaplan (1974) "Advanced Calculus" 2° edizione, Addison-Wesley, Massachusetts.
- J. S. Kelly (1969) "Lancaster versus Samuelson on the shape of the neoclassical transformation surface", *Journal of Economic Theory*, pag. 347-351.
- F.E. Kydland e E.C. Prescott (1982) "Time to build and aggregate fluctuations", *Econometrica*, pag. 1345-1370.
- K. Lancaster (1968) "Mathematical Economics", Macmillan, Londra.
- T.C. Koopmans (a cura di) (1951) "Activity analysis: production and allocation", John Wiley & Sons, New York.
- L.J. Lau (1978) "Testing and imposing monotonicity, convexity and quasi-convexity constraints", in M. Fuss e D. McFadden (1978), vol. 1°, citato.
- W. Leontief (1970) "The inverse matrix of a dynamic system" in A.P. Carter e A. Brody (a cura di) (1970), citato.
- R.E. Lucas e N.L. Stokey (1984) "Optimal growth with many consumers", *Journal of Economic Theory*, pag. 139-171.
- P. Mariti (1979) "Sui rapporti tra imprese in un'economia industriale moderna", Franco Angeli, Milano.
- G. Marzi e P. Varri (1977) "Variazioni di produttività nell'economia italiana: 1959-1967", Il Mulino, Bologna.
- L.W. McKenzie (1955) "Equality of factor prices in world trade", *Econometrica*, pag. 239-257.
- L.W. McKenzie (1963a) "Turnpike theorems for a generalized Leontief model", *Econometrica*, pag. 165-180.
- L.W. McKenzie (1963b) "Turnpike theorem of Morishima", *Review of Economic Studies*, pag. 169-176.
- L.W. McKenzie (1963c) "The Dorfman-Solow turnpike theorem", *International Economic Review*, pag. 29-43.
- L.W. McKenzie (1976) "Turnpike theory", *Econometrica*, pag. 841-865.
- A. Medio (1983) "Synergetics and dynamic economic models", in R. Goodwin, M. Kruger e A. Vercelli (1984), citato.

- C. Milana (1980) "Petrolio e inflazione" ISPE-Quaderni, Roma.
- L. Montrucchio (1984) "Optimal decisions over time and strange attractors", Rapporto Inter= no. n.9, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino, Torino.
- M. Morishima (1964) "Equilibrium, stability and growth: a multisectoral analysis", Oxford University Press, Londra.
- M. Morishima (1969) "Theory of economic growth", Oxford University Press, Londra.
- R.R. Nelson e S.G. Winter (1982) "An evolutionary theory of economic growth", Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
- J. Von Neumann (1946) "A model of general economic equilibrium", Review of Economic Studies, pag.1-9.
- H. Nikaido (1968) "Convex structures and economic theory", Academic Press, New York.
- L. Pasinetti (1973) "The notion of vertical integration in economic analysis", Metroeconomica, pag.1-29.
- L. Pasinetti (1981) "Structural change and economic growth", Cambridge University Press, Cambridge (U.K.).
- J.D. Pitchford e S.J. Turnovsky (1974) (a cura di) "Application of control theory to economic analysis", North-Holland, Amsterdam
- R. Radner (1961) "Path of economic growth that are optimal with regard only to final states: a turnpike theorem", Review of Economic Studies, pag.98-104.
- L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze e E.F. Mischenko (1962) "The mathematical theory of optimal processes", Interscience, New York.
- R. Radner e C.B. McGuire (a cura di) (1974) "Decision and organization", North-Holland, Amsterdam.
- J. Roemer (1980) "Innovation, rate of profit and uniqueness of the Von Neumann prices", Journal of Economic Theory.
- G. Rosa (1979) "Lo stock di capitale nell'industria italiana", Sipi, Roma.
- D. Ruelle e F. Takens (1971) "On the nature of turbulence", Communications in Mathematical Physics, pag.167-192.
- P. A. Samuelson (1957) "Intertemporal price equilibrium: a prologue to a theory of price speculation", Weltwirtschaftliches Archiv. 79, Hamburg: Hoffman & Campe Verlag (Ristampato in "The collected scientific papers of P.A. Samuelson", Vol.2°, a cura di J.E. Stiglitz (1966), MIT Press, Cambridge (Mass.).
- R. Sato (1981) "Theory of technical change and economic invariance", Academic Press, New York.

- T.J. Sargent (1979) "Macroeconomic theory", Academic Press, New York.
- R. Scazzieri (1983a) "Economic dynamics and structural change: a comment on Pasinetti", *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*, pag. 73-90.
- R. Scazzieri (1983b) "The production process: general characteristics and taxonomy", *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*, pag. 597-611.
- A. Schianchi (1981) "La domanda di energia per usi privati in Italia dal 1970 al 1980", *Energia*, pag. 82-86.
- H. Simon (1974) "Bounded rationality", in R. Radner e C.B. McGuire (1974) (a cura di), citato.
- R.M. Solow (1960) "Investment and technical progress", in K.J. Arrow, S. Karlin e P. Suppes (a cura di) (1974), citato.
- A. Takayama (1974) "Mathematical economics", Dryden Press, Hinsdale (Illinois).
- M. Talamona (1982) "Utilizzazione degli impianti e forza lavoro", Associazione Industriale Lombarda, Centro Studi, Milano.
- P. Tani (1978) "Troncabilità dei processi in un modello multisetoriale con capitale fisso intrasferibile", *Rivista Internazionale di Scienze Sociali*.
- P. Tani (1984) "Lezioni di teoria della produzione", *La Nuova Italia Scientifica*, Roma (in corso di pubblicazione).
- S.J. Turnovsky (1970) "Turnpike theorems and efficient economic growth", in E. Burmeister e R. Dobell (1970), cap. X, citato.
- R. Violi (1983) "Equilibrio e disequilibrio nell'analisi di traversa", Dipartimento di Scienze Economiche dell'Università di Bologna, Bologna (in corso di pubblicazione presso "Gli Annali della Fondazione Einaudi" (1984), Einaudi, Torino).
- R. Violi (1984) "Modelli economici sequenziali e subottimalità predittiva per le aspettative razionali", Dipartimento di Scienze Economiche dell'Università di Bologna, Bologna (in corso di pubblicazione presso la *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Sociali*).
- S. Zamagni (1977) "Consumi e salari nel modello generalizzato di Von Neumann", *Studi Economici*, pag. 5-78.
- S. Zamagni (1984) "Economia politica: teoria dei prezzi, dei mercati e della distribuzione", *La Nuova Italia Scientifica*, Roma.

- G.C. Winston (1982) "The timing of economic activity", Cambridge University Press,  
Cambridge (U.K.).
- J.N. Wolfe (a cura di) (1968) "Value, Capital and growth: papers in honour of sir John  
Hicks", Aldine, Chicago.
- J.E. Woods (1978) "Mathematical economics", Longman, Londra.