



DIN
GMA

Quaderni di ricerca

Undicesima giornata di studio Ettore Funaioli

21 luglio 2017

A cura di
Umberto Meneghetti e Vincenzo Parenti Castelli



SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO



AlmaDL

University of Bologna Digital Library

Quaderni del **DIN – GMA**

Atti di giornate di studio – 11

A cura di:

Umberto Meneghetti e Vincenzo Parenti Castelli

Coordinatore di redazione: Nicola Sancisi

DIN

Dipartimento di Ingegneria Industriale

<http://www.ingegneriaindustriale.unibo.it>

GMA

Gruppo di Meccanica Applicata

http://wpage.unina.it/dellaval/GMA/GMA_homeold.htm

Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

<http://www.accademiascienzebologna.it/it>

Undicesima giornata di studio Ettore Funaioli

21 luglio 2017

*A cura di:
Umberto Meneghetti e Vincenzo Parenti Castelli*

Proprietà letteraria riservata
© Copyright 2017 degli autori Tutti i diritti riservati

Undicesima giornata di studio Ettore Funaioli – 21 luglio 2017
A cura di Umberto Meneghetti e Vincenzo Parenti Castelli
Bologna: 2018

ISBN 978-88-9385-077-3

"

KUP '4754/9268"

Versione elettronica disponibile alla pagina

<http://amsacta.unibo.it/id/eprint/5963>

Stampa a richiesta eseg



SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO

40131 Bologna – Via U. Terracini 30 – Tel. 051- 6340113 – Fax 051- 6341136
www.editrice-esculapio.com

INDICE

LAVORI ESTESI	1
<hr/>	
<i>Giuseppe Catania, Alessandro Zanarini</i> On the effects of flexibility in a quick return planar mechanism.....	3
<i>Alessandro Zanarini</i> About the modelling of teeth mesh flexibility in planetary gears	19
<i>Maria Luisa Ruspi, Marco Palanca, Cesare Faldini, Luca Cristofolini</i> The use of digital image correlation to analyze segments of spine.....	35
<i>Andrea Spaggiari, Alberto Bellelli, Nicola Golinelli</i> Caratterizzazione magneto-meccanica di elastomeri magnetoreologici	39
<i>Alessandro Rivola</i> Caso limite di grashof del quadrilatero articolato piano e terne pitagoriche.....	53
<i>Alessandro Munari, Davide Castagnetti, Riccardo Rubini, Marco Cocconcelli</i> Progettazione e validazione sperimentale di un dispositivo per il recupero di energia da vibrazioni	61
SOMMARI	75
<hr/>	
<i>Stefano Cattabriga, Luca Leonelli, Silvio Sorrentino</i> Driveline instability of racing motorcycles in straight braking manoeuvre.....	77
<i>Alessandro De Felice, Silvio Sorrentino</i> Dynamic behaviour of continuous rotating shafts under combined axial and torsional loads	79
<i>Anna Bertazzini, Mattia Battarra, Emiliano Mucchi, Giorgio Dalpiaz</i> Rilevazioni sperimentali e modellazione numerica dei fenomeni dinamici dovuti alla cavitazione in pompe ad ingranaggi esterni	81
<i>Giacomo D'Elia, Umberto Musella, Emiliano Mucchi, Giorgio Dalpiaz</i> Definizione della matrice di riferimento per test multiassiali controllati ad eccitazione stocastica	83
<i>Marco Troncossi</i> Algoritmi di <i>mission synthesis</i> per test di qualifica a vibrazione.....	85

<i>Marco Palanca, Andrew J. Bodey, Mario Giorgi, Marco Viceconti, Damien Lacroix, Luca Cristofolini, Enrico Dall'Ara</i> The effect of voxel size and signal-to-noise ratio on the measurement uncertainties of a global digital volume correlation approach	87
<i>Kavin Morellato, Enrico Guerra, Renzo Soffiatti, Luca Cristofolini</i> Biomechanical test of reconstruction techniques for humeral fractures	89
<i>Nicola Sancisi, Michele Conconi, Alessandro Fortunato, Erica Liverani, Vincenzo Parenti Castelli</i> Personalized knee prostheses based on articular models to replicate the joint functionality of a patient.....	91
<i>Eugenio Dragoni</i> Optimal design of hollow tetrahedral truss cores for sandwich constructions.....	93
<i>Marcello Botti, Antonio Strozzi, Enrico Bertocchi, Sara Mantovani</i> Un paradosso nelle travi curve.....	95
<i>Barbara Reggiani, Lorenzo Donati, Luca Tomesani</i> Analisi e previsione di difetti nei profili estrusi.....	97
<i>Edoardo Idà, Alessandro Berti, Marco Carricato, Tobias Bruckmann</i> Rest-to-rest trajectory planning for planar underactuated cable-driven parallel robots	99
<i>Giovanni Mottola, Marco Carricato</i> Dynamically feasible periodic trajectories for spatial 3-dof cable-suspended parallel robots: preliminary results	101
<i>Jacopo Cavalaglio Camargo Molano, Marco Cocconcelli, Riccardo Rubini</i> Study, design and realization of a real-time interfacing system between programmable controllers	103
<i>Angelo Oreste Andrisano, Giovanni Berselli, Michele Gadaleta, Marcello Pellicciari, Margherita Peruzzini</i> Il progetto AREUS – robotica industriale eco-efficiente e sostenibile	105

PREFAZIONE

Questo volume raccoglie le 21 memorie presentate all'undicesima "Giornata di studio Ettore Funaioli", svoltasi il 21 luglio 2017. A discrezione degli autori, alcune memorie sono riportate in esteso mentre di altre ne viene riportato semplicemente il sommario. Ai partecipanti, e in particolare agli autori delle memorie qui raccolte, va il sentito ringraziamento degli organizzatori della Giornata: a loro si deve il continuo successo della manifestazione, chiaramente legato anche al ricordo del Prof. Ettore Funaioli, che ricordiamo sempre con grande stima e gratitudine per l'appassionato insegnamento scientifico e la profonda umanità.

La folta adesione a queste Giornate di Studio conferma anche l'apprezzamento dei partecipanti per l'occasione che esse offrono di ritrovarsi amichevolmente fra colleghi, per scambiarsi idee e opinioni sulle ricerche in corso e sui problemi generali della nostra comunità scientifica.

È motivo di grande soddisfazione per tutti, e sicuramente ragione di orgoglio per i nostri Maestri, constatare l'elevata qualità scientifica dei lavori presentati e il costante impegno dei Ricercatori di Meccanica che hanno partecipato alla manifestazione.

Questa Giornata di studio si è svolta con il patrocinio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del GMA – Gruppo di Meccanica Applicata. Di ciò ringraziamo vivamente il Presidente dell'Accademia delle Scienze, Prof. Ferruccio Trifirò e il Presidente del GMA, Prof. Terenziano Raparelli.

La Giornata ha potuto svolgersi anche grazie alla collaborazione della Scuola di Ingegneria e Architettura e del DIN – Dipartimento di Ingegneria Industriale dell'Alma Mater Studiorum – Università di Bologna. Ringraziamo il Presidente della Scuola di Ingegneria e Architettura, Prof. Ezio Mesini, e il Direttore del DIN, Prof. Antonio Peretto, che hanno consentito queste collaborazioni e hanno voluto aprire la Giornata porgendo il loro saluto ai partecipanti.

Bologna, 20 giugno 2018

Umberto Meneghetti – Vincenzo Parenti Castelli

LAVORI ESTESI

ON THE EFFECTS OF FLEXIBILITY IN A QUICK RETURN PLANAR MECHANISM

Giuseppe Catania, Alessandro Zanmarini

Department of Industrial Engineering, University of Bologna, Italy

E-mail: giuseppe.catania@unibo.it, a.zanmarini@unibo.it

Abstract. *Flexible multibody dynamics is often approached in case of small flexible deformations by means of the finite-element modelling method in component mode synthesis techniques to reduce the size of the computations.*

In this work, by means of proper shape functions bases, the elastic behaviour of slender beams is approximated in its local axial and transversal displacement components. Attention is paid to the inertial contributions to enhance the driving function. An ideal quick return mechanism is here modelled with the meshless approach. The results of different modelling choices are collected, to show how this shape functions based formulation can handle the added flexibility by means of a small set of degrees of freedom and motion equations. Some aspects are detailed and discussed.

Keywords: *flexible multibody, meshless flexible components, shape functions, parameter study.*

1. INTRODUCTION

As the operating speed of machinery or general mechanism increases, many vibration related issues start to be revealed and a rigid body based description of the motion of the parts is no longer sufficient to model the real behaviour of the machine. In the past tentative models might deal with flexibility by lumped parameters, but, while certainly better than rigid body approaches, they were not really adherent with the behaviour of realistic components with distributed flexibility. The distributed flexible multibody dynamics is often approached in case of small flexible deformations by means of the finite-element modelling method in component mode synthesis techniques [1, 2], which can deal with very detailed and computationally expensive models, though reduced of size by keeping the contributions of their lower frequency structural dynamics only. In these approaches the size of the motion equations can be high to include the distributed flexibility, otherwise the general description can be poor as the speeds are raised, when the structural dynamics of lightweight components is excited. The computational costs can be so high that FEM based approaches are more useful for the analyses in specific critical configurations, rather than a whole simulation of the complete transient dynamics or control problems. Therefore physics based, but more efficient, approaches are sought after for general flexible mechanisms.

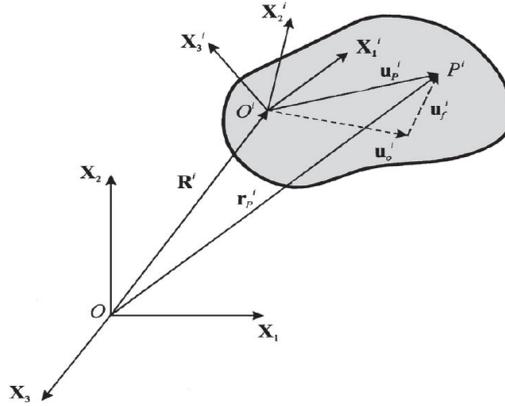


Figure 1. References and transforms for a generic point P^i on a flexible body

While the authors have already worked on kinematics dependant models of mechanisms [3–8], where the elasticity was lumped mainly in between the rigid parts, the approach here used is focused on modelling the elasticity of each moving parts, giving a relevant contribution on the whole system behaviour in the time domain. In [9, 10] a linearly independent set of shape functions was introduced to continuously model the flexible components of local reference displacements as a superposition of shape functions; a novel formulation of the flexible properties of beam-like components then followed, with a reduced size motion equation set and no restriction in the geometrical model.

In this work, this general approach is recalled from [9, 10] to introduce the modelling of the flexibility by means of shape functions bases, compatible with the constraint conditions. The elastic behaviour of slender beams is approximated in its local axial and transversal displacement components, then superposed to the non linear rigid body motion of a general mechanism.

An ideal quick return mechanism is here modelled with the meshless multibody system formulation recently introduced [9, 10]. Proper attention is also paid to the inertial contributions to enhance the driving function and obtain constant rotational speed of the actuated body. The results of different modelling choices, in terms of elastic degrees of freedom (dofs), are collected, to show how this shape functions based formulation can handle the added flexibility by means of a small set of dofs and motion equations.

The obtained parameter study can be used to automate the selection of a minimal approximation basis of the flexibility, with advances for computational costs and general modelling.

2. FLEXIBLE MBS - LITERATURE

The formulation to retain the flexibility of bodies adds the description inside a known formulation, expanding therefore the knowledge of the mechanism with the dofs related to elastic behaviour.

Typical formulation

In this paper, as well as in [9, 10], the Floating Frame of Reference [11] approach was followed, here depicted in Figure 1. In it, a point P^i on the i -th body can be referenced to the ground inertial system as:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}_O^i + \mathbf{A}^i (\mathbf{u}_0^i + \mathbf{u}_f^i(t)) = \mathbf{R}_O^i + \mathbf{A}^i (\mathbf{u}_0^i + \mathbf{S}^i \mathbf{q}_f^i(t)) \quad (1)$$

where:

- \mathbf{R}_O^i is the FFR origin location
- \mathbf{A}^i is the 2×2 FFR rotation matrix, defined by means of the rotation angle ϕ_i
- \mathbf{u}_0^i is the constant position vector in FFR
- $\mathbf{u}_f^i(t)$ is the vector of flexible contributions in FFR
- \mathbf{S}^i is the shape matrix in FFR
- $\mathbf{q}_f^i(t)$ is the vector of elastic coordinates in FFR

3. A MESHLESS DECOMPOSITION OF THE CONTINUUM

Within the assumptions of small deflections and structural linearity, it is possible to approximate the distributed elasticity of a component by means of a set of shape functions, properly selected as compatible with the boundary conditions. Recalling the procedure of assembling many free bodies with kinematical constraint equations and Lagrange multipliers, the flexible bodies are considered as free-free and the flexibility dofs are added over the rigid body description, thus an expansion of the multibody system description is obtained. More details can be found in [9, 10].

Basic concepts of continuous shape functions

The evaluation of the properties of the flexible bodies is based on:

- small flexible displacements in regards to the size of the body
- deformation in the elastic region, according to Hooke's law
- separation of variables by using orthogonal infinite basis functions, evaluated from the vibrational response of a known standard problem:

$$v(x, t) = \psi(x)p(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(x)p_r(t) \quad (2)$$

- the truncated base is already a good approximation of the displacement with n functions:

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^n \psi_r(x)p_r(t) \quad (3)$$

e.g. for **free-free** boundaries, the r -th ($r = 1, \dots, n$) bending basis function is:

$$\begin{cases} \alpha_r = \frac{\cosh(\gamma_r L) - \cos(\gamma_r L)}{\sinh(\gamma_r L) - \sin(\gamma_r L)} \\ \psi_r(x) = \cosh(\gamma_r x) + \cos(\gamma_r x) - \alpha_r (\sinh(\gamma_r x) + \sin(\gamma_r x)) \end{cases} \quad (4)$$

Advantages of continuous shape functions vs FEM

Continuous shape functions can offer:

- C^∞ continuity of the displacement solution along the whole domain, e.g. axial & traversal deflections of a beam:

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^m \psi_r^a(x) p_r^a(t) \quad v(x, t) = \sum_{k=1}^n \psi_k^b(x) p_k^b(t) \quad (5)$$

- easy selection of a minimal set of flexible basis functions for faster calculations
- no need of interface modes like in Craig-Bampton condensation
- no need of any mesh or mating grid requirements and re-meshing strategies

4. IMPLEMENTATION IN THE PLANE

As a proof of concept the modeling strategy is organised for planar motion, where each free rigid body has only 3 dofs (x_i, y_i, ϕ_i). The elastic dofs are thus added to described specific deflections, being axial (a) or bending (b) related.

Generalised coordinates for a flexible body

As in Equation (5) the elastic motion $\mathbf{w}_{O,i}^P(x, t) = \mathbf{w}_{O,i}^P(t)$ can be expressed as $\mathbf{N}_i^P \mathbf{p}_i$, where:

$$\mathbf{N}_i^P = [(\psi_1^a(x_P))_i \quad \dots \quad (\psi_m^a(x_P))_i \quad (\psi_1^b(x_P))_i \quad \dots \quad (\psi_n^b(x_P))_i] \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_i^T = [p_{1i}^a(t) \quad \dots \quad p_{mi}^a(t) \quad p_{1i}^b(t) \quad \dots \quad p_{ni}^b(t)]^T \quad (7)$$

and the position of a point P in global coordinates of Equation (1) becomes:

$$\mathbf{r}_{G,i}^P = \mathbf{r}_{O,i} + \mathbf{A}_i (\mathbf{s}_{O,i}^P + \mathbf{N}_i^P \mathbf{p}_i) \quad (8)$$

written using the set of generalised coordinates for the i -th flexible body:

$$\mathbf{q}_i^f = [x_i \quad y_i \quad \phi_i \quad p_{1i}^a \quad \dots \quad p_{mi}^a \quad p_{1i}^b \quad \dots \quad p_{ni}^b]^T \quad (9)$$

Constraints: an example for the revolute joint

The *revolute joint* constraints in the plane is realised by imposing single point coincidence between two points P_i & Q_j belonging to different bodies, now modelled with the set of flexible modeshapes:

$$\Phi_{revf} = \mathbf{r}_{G,i}^P - \mathbf{r}_{G,j}^Q = \mathbf{r}_{O,i} + \mathbf{A}_i (\mathbf{s}_{O,i}^P + \mathbf{N}_i^P \mathbf{p}_i) - \mathbf{r}_{O,j} - \mathbf{A}_j (\mathbf{s}_{O,j}^Q + \mathbf{N}_j^Q \mathbf{p}_j) \quad (10)$$

According to the generalised coordinates for elastic bodies, the Jacobian of the revolute joint constraint can be expressed as:

$$\frac{\partial \Phi_{revf}}{\partial \mathbf{q}_i} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{B}_i (\mathbf{s}_{O,i}^P + \mathbf{N}_i^P \mathbf{p}_i) \quad \mathbf{A}_i \mathbf{N}_i^P] \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi_{revf}}{\partial \mathbf{q}_j} = \left[-\mathbf{I} \quad -\mathbf{B}_j \left(\mathbf{s}_{O,j}^Q + \mathbf{N}_j^Q \mathbf{p}_j \right) \quad -\mathbf{A}_j \mathbf{N}_j^Q \right] \quad (12)$$

where the matrix \mathbf{B}_i can be defined as:

$$\mathbf{B}_i = \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \phi_i} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi_i) & -\cos(\phi_i) \\ \cos(\phi_i) & -\sin(\phi_i) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Motion equations

To obtain the equations of motion the Lagrangian approach was followed, which means that the Lagrangian function $L = T - U$ of the kinetic and elastic potential energy of the free bodies is properly derived to obtain generalised forces, coupled, by means of Lagrangian multipliers, with the set of constraint forces coming from the kinematical joints and the array of external generalised forces.

Kinetic energy. For the i -th flexible body, the kinetic energy can be expressed as follows:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i (\dot{\mathbf{r}}_{G,i}^*)^T \dot{\mathbf{r}}_{G,i}^* dV_i \quad (14)$$

with integration over the volume V_i at locations of every point $*$ of the velocities $\dot{\mathbf{r}}_{G,i}^*$. The previous expression can be rewritten as:

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^{fT} \left(\int_0^{L_i} \rho_i S_i \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{B}}_i^{*T} \\ \mathbf{N}_i^{*T} \mathbf{A}_i^T \end{bmatrix} \left[\mathbf{I} \quad \hat{\mathbf{B}}_i^* \quad \mathbf{A}_i \mathbf{N}_i^* \right] dx_i \right) \dot{\mathbf{q}}_i^f \quad (15)$$

where the terms inside the parenthesis can be expanded into the symmetric mass matrix \mathbf{M}_i^f of the i -th flexible body:

$$\mathbf{M}_i^f = \int_0^{L_i} \rho_i S_i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \hat{\mathbf{B}}_i^* & \mathbf{A}_i \mathbf{N}_i^* \\ \hat{\mathbf{B}}_i^{*T} & \hat{\mathbf{B}}_i^{*T} \hat{\mathbf{B}}_i^* & \hat{\mathbf{B}}_i^{*T} \mathbf{A}_i \mathbf{N}_i^* \\ \mathbf{N}_i^{*T} \mathbf{A}_i^T & \mathbf{N}_i^{*T} \mathbf{A}_i^T \hat{\mathbf{B}}_i^* & \mathbf{N}_i^{*T} \mathbf{N}_i^* \end{bmatrix} dx_i \quad (16)$$

Elastic potential. Each body has a contribution to the potential energy with their axial and bending deformations:

$$U_i^{ef} = \frac{1}{2} \int_{V_i} (\sigma_a^T \epsilon_a + \sigma_b^T \epsilon_b) dV_i = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} (E_i S_i \epsilon_i^2 + E_i I_i \mathcal{C}_i^2) dx_i \quad (17)$$

$$U_i^{ef} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \begin{bmatrix} u_i'(x_i, t) & v_i''(x_i, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i S_i & 0 \\ 0 & E_i I_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i'(x_i, t) \\ v_i''(x_i, t) \end{bmatrix} dx_i \quad (18)$$

Introducing the following matrix notations,

$$\mathbf{D}_i^P = [(\Psi'_a(x))_i^T \quad (\Psi''_b(x))_i^T], \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} E_i S_i & 0 \\ 0 & E_i I_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_i'(x_i, t) \\ v_i''(x_i, t) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_i^P \mathbf{p}_i, \quad (19)$$

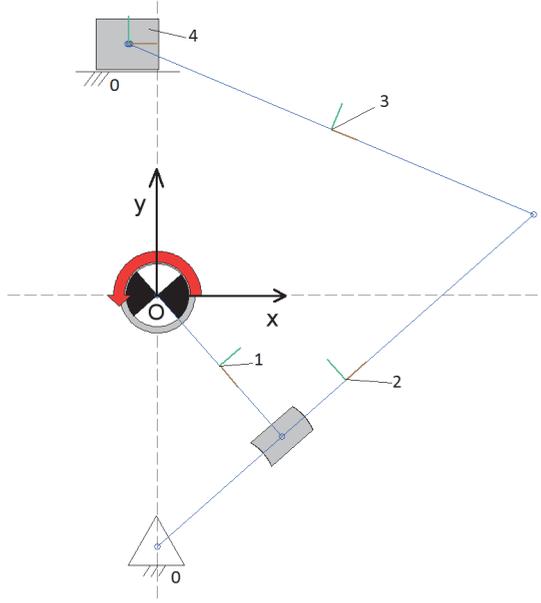


Figure 2. Quick return mechanism at initial position: a scheme

the elastic potential can be compacted in this form:

$$U_i^{ef} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \mathbf{p}_i^T \mathbf{D}_i^{*T} \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^* \mathbf{p}_i dx_i = \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T \left(\int_0^{L_i} \mathbf{D}_i^{*T} \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^* dx_i \right) \mathbf{p}_i \quad (20)$$

where $\hat{\mathbf{K}}_i = \int_0^{L_i} \mathbf{D}_i^{*T} \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^* dx_i$ is the stiffness matrix of the i -th flexible member.

Constrained motion equations. Some assumptions need to be outlined:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^f} \right) = \mathbf{M}^f \ddot{\mathbf{q}}^f, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}^f} = \frac{\partial \left(\dot{\mathbf{q}}^f \mathbf{M}^f \dot{\mathbf{q}}^f \right)}{\partial \mathbf{q}^f} = \mathbf{Q}^v, \quad \frac{\partial U^{ef}}{\partial \mathbf{q}^f} = \mathbf{K}^f \mathbf{q}^f = -\mathbf{Q}^e. \quad (21)$$

A differential equation system for the constrained motion of a flexible multibody system is obtained:

$$\begin{cases} \mathbf{M}^f \ddot{\mathbf{q}}^f + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^f} \right)^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{Q}^a + \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^e \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^f} \ddot{\mathbf{q}}^f = \boldsymbol{\Gamma} \end{cases} \quad (22)$$

or in matrix assembly:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^f & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^f} \right)^T \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}^f} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^f \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\Gamma} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

where $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^a + \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^e$.

Table 1. Properties of the mechanism moving parts.

#	Type	Length	Section Area	Section Area Moment	Mass	Inertia Moment
1	beam + flywheel	150 <i>mm</i>	3.142E-04 <i>m</i> ²	7.854E-09 <i>m</i> ⁴	0.368 <i>kg</i>	1.26069 <i>kgm</i> ²
2	beam	400 <i>mm</i>	1.767E-04 <i>m</i> ²	2.485E-09 <i>m</i> ⁴	0.551 <i>kg</i>	0.00735 <i>kgm</i> ²
3	slender beam	350 <i>mm</i>	3.848E-05 <i>m</i> ²	1.179E-10 <i>m</i> ⁴	0.105 <i>kg</i>	0.00107 <i>kgm</i> ²
4	lumped mass	-	-	-	2.206 <i>kg</i>	0.00184 <i>kgm</i> ²

Table 2. Initial displacement and angular positions of the local reference frame in the mechanism moving parts.

#	x_0	y_0	ϕ_0
1	0.049608 <i>m</i>	-0.056250 <i>m</i>	5.435123 <i>rad</i>
2	0.150000 <i>m</i>	-0.067712 <i>m</i>	0.722734 <i>rad</i>
3	0.138631 <i>m</i>	0.132288 <i>m</i>	-0.397298 <i>rad</i>
4	-0.022738 <i>m</i>	0.200000 <i>m</i>	0 <i>rad</i>

Table 3. Natural frequencies of the flexible component 3 in free-free condition.

Mode num.	Flexural frequency	Axial frequency
1	262.037 <i>Hz</i>	7358.885 <i>Hz</i>
2	722.314 <i>Hz</i>	14717.769 <i>Hz</i>
3	1416.024 <i>Hz</i>	22076.654 <i>Hz</i>

5. TEST CASE: A QUICK RETURN MECHANISM

The quick return mechanism selected to prove the approach is shown in Fig.2: it is composed of a rotating crankshaft (part 1), an oscillating beam guide (part 2), a connecting slender beam (part 3), a sliding mass (part 4) and the ground (part 0). All parts are considered to be made of steel, modelled by means of 7800 kg/m³ for the density and of 2.07e+11 Pa for the Young modulus. Revolute joint constraints connect part 1 and part 2 to the ground 0, part 2 to part 3 and part 3 to part 4. The moving tip of part 1 is connected with a revolute joint in a prismatic constraint to part 2, leaving free the relative rotation and translation along the oscillating guide of part 2, without added inertia. The slider (part 4) is then linked to the ground by means of a prismatic joint. A massive flywheel is rigidly attached to part 1. Inertial properties can be seen in Tab.1 for steel material, while the initial configuration of Fig.2 can be achieved with the positions listed in Tab.2.

The slender beam (part 3) can be modelled as being rigid or flexible. To outline the effectiveness of the approach, part 3 was simply modelled by means of a very slender, homogeneous, uniform beam shape functions, so that the flexible behaviour is evident even from within the displacement simulation plots. The displacement field was modelled by means of a truncated set of the axial and bending related shape functions. The first three flexible body modes are highlighted in Tab.3.

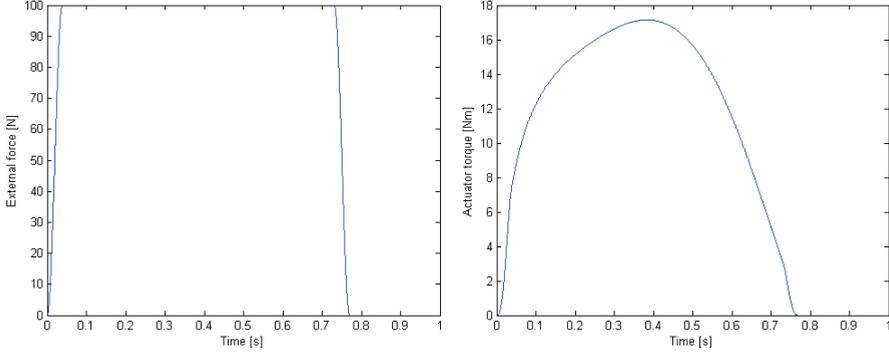


Figure 3. External force $f_4(t)$ of Eq.(24) acting on the slider - part 4, and driving torque $M_1(t)$ of Eq.(25) acting on the crankshaft - part 1, with $\omega_1 = 2\pi$ [rad/s], 1 stroke

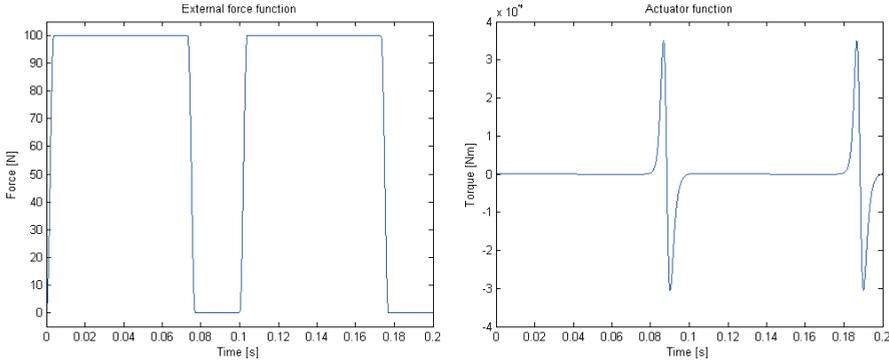


Figure 4. External force $f_4(t)$ of Eq.(24) acting on the slider - part 4, and driving torque $M_1(t)$ of Eq.(26) acting on the crankshaft - part 1, with $\omega_1 = 20\pi$ [rad/s], 2 strokes

Input shaping

An external force acting on the slider (part 4) can be defined in Eq.(24) as constant in the forward (active) direction and nearly null in the quick return phase, with smooth and fast cosinusoidal steps at the beginning and at the end, as can be seen on the left of Fig.3 (1 stroke, 1 Hz or $\omega_1 = 2\pi$ [rad/s]) and Fig.4 (2 strokes, 10 Hz or $\omega_1 = 20\pi$ [rad/s]), with $f_{4_m} = f_{4_{min}} = 0.1$ N, $f_{4_M} = f_{4_{max}} = 100$ N, $t_r = 0.15 * t_{active} = t_{rise}$ as the active time fraction for the rising step, $t_f = 0.25 * t_{active} = t_{fall}$ as the active time fraction for the falling step, both based on the forward slider motion.

Table 4. External force and actuator functions on the mechanism parts.

#	Type	Start time	End time	Characterization	Part
1	specific force mapping	0.000 s	$4\pi/\omega_1$ s	Eq.(24)	4
2	specific torque mapping	0.000 s	$4\pi/\omega_1$ s	Eq.(25) or Eq.(26)	1

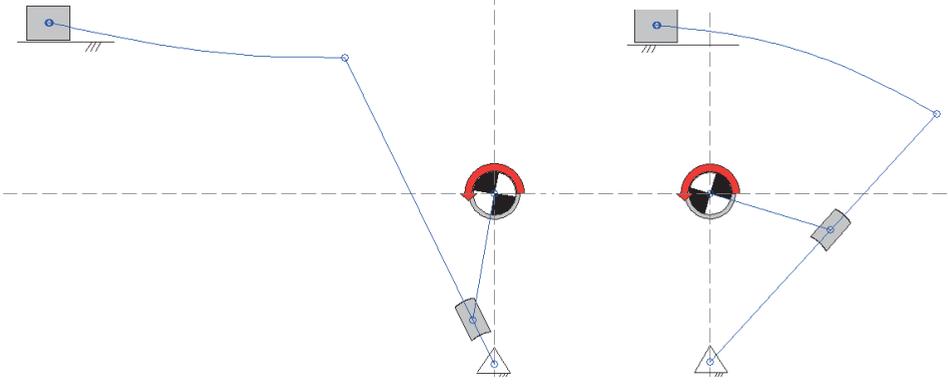


Figure 5. Quick return flexible mechanism at time 0.08577 s and 0.10902 s. The operative deflection shape is shown with a 3 bending basis functions for the flexible body 3, $\omega_1 = 20\pi$ [rad/s]

$$f_4(t) = \begin{cases} t_{x_m} \leq t \leq t_{x_m} + t_r : f_{4_m} + \frac{f_{4_M} - f_{4_m}}{2} (1 - \cos(\frac{(t - t_{x_m})\pi}{t_r})); \\ t_{x_M} - t_f \leq t \leq t_{x_M} : f_{4_m} + \frac{f_{4_M} - f_{4_m}}{2} (1 + \cos(\frac{(t - t_{x_M} + t_f)\pi}{t_f})); \\ t_{x_M} < t < t_{x_m} : f_{4_m}; \\ t > (t_{x_m} + t_r) : f_{4_M}; \\ t < (t_{x_M} - t_f) : f_{4_M}. \end{cases} \quad (24)$$

By means of the virtual power method [12], a proper torque was shaped to obtain the crankshaft constant angular velocity ω_1 , without the inertial contributions:

$$M_1(t) = -\mathbf{f}_4^T(t) \mathbf{r}_{G,4}^G(t) / \omega_1. \quad (25)$$

The driving torque, of Eq.(25) and Fig.3, is applied on part 1 with $\omega_1 = 2\pi$ [rad/s]. No other external force is applied, as summarised in Tab.4. While Eq.(25) can be roughly adequate for the constant angular velocity target of the crankshaft in the forward direction of the slider, it is not sufficient to equilibrate the inertial forces in the quick return phase, especially when the crankshaft velocity increases. Therefore a newly shaped torque is needed:

$$M_1(t) = [-\mathbf{f}_4^T(t) \mathbf{r}_{G,4}^G(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{G,1}^G(t)^T \mathbf{m}_1 \dot{\mathbf{r}}_{G,1}^G(t) + \ddot{\mathbf{r}}_{G,2}^G(t)^T \mathbf{m}_2 \dot{\mathbf{r}}_{G,2}^G(t) + \ddot{\phi}_2 J_2 \dot{\phi}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_{G,3}^G(t)^T \mathbf{m}_3 \dot{\mathbf{r}}_{G,3}^G(t) + \ddot{\phi}_3 J_3 \dot{\phi}_3 + \ddot{\mathbf{r}}_{G,4}^G(t)^T \mathbf{m}_4 \dot{\mathbf{r}}_{G,4}^G(t)] / \omega_1, \quad (26)$$

by means of the virtual power of the inertial generalised forces of the rigid bodies with the assumption of crankshaft constant velocity and kinematic accelerations and velocities.

Simulation results

With the external force of Eq.24 and the actuator torque of Eq.26, the whole system dynamics was simulated in the time domain with 500 divisions for the 2 strokes (duration of $4\pi/\omega_1$

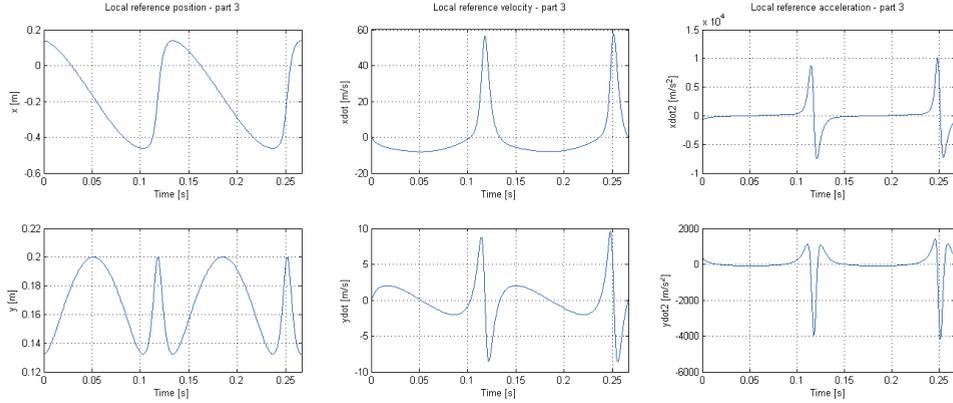


Figure 6. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with rigid bodies for all parts, inertial torque compensation, $\omega_1 = 15\pi$ [rad/s]

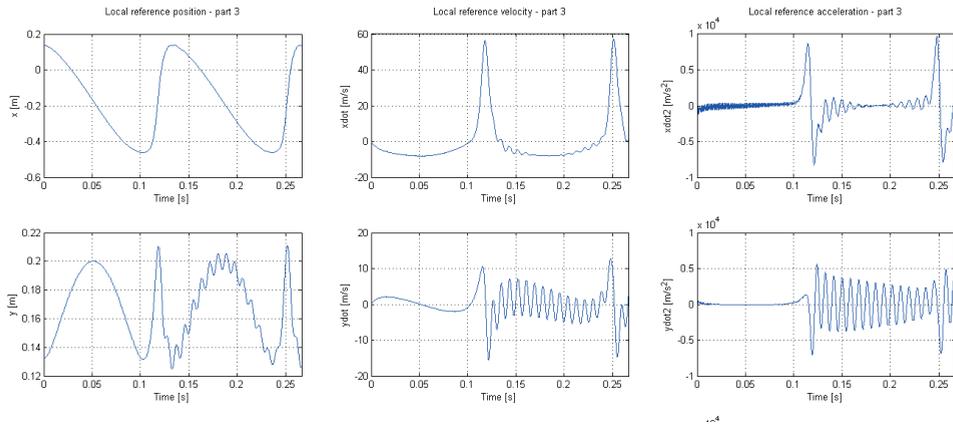


Figure 7. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with a flexible body for part 3 (2 axial and 5 bending basis functions), inertial torque compensation, $\omega_1 = 15\pi$ [rad/s]

s) and 4 different crankshaft speeds, which should be constant during the entire motion: $\omega_1 = 15\pi$, $\omega_1 = 20\pi$, $\omega_1 = 25\pi$ and $\omega_1 = 30\pi$ [rad/s]. The discussion is focused on the behaviour of the flexible body 3. For each of these speeds, the time histories of the rigid dynamics are compared against those of the flexible dynamics, by means of grouped charts of positions, velocities and acceleration in the two axes of the plane. The flexible dofs are highlighted in the related figure captions.

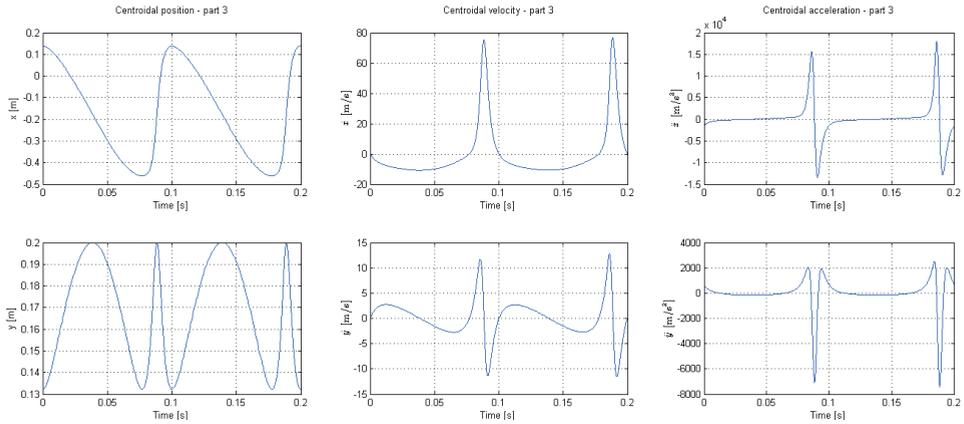


Figure 8. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with rigid bodies for all parts, inertial torque compensation, $\omega_1 = 20\pi$ [rad/s]

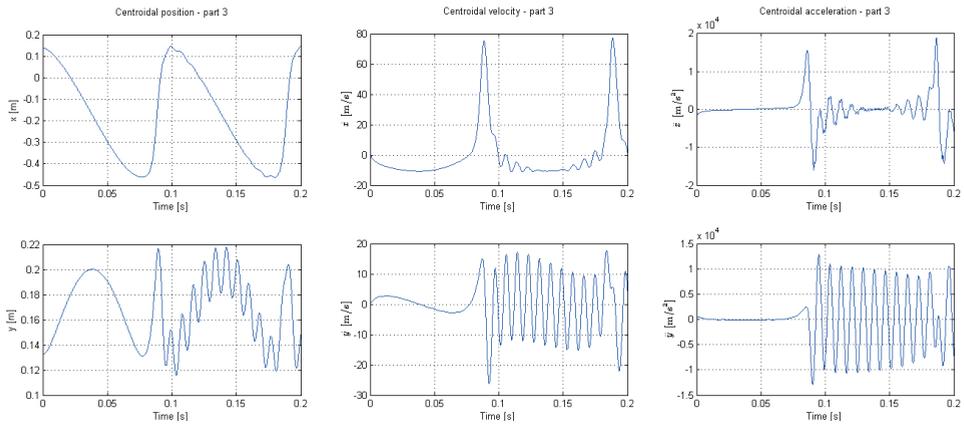


Figure 9. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with a flexible body for part 3 (3 bending basis functions), inertial torque compensation, $\omega_1 = 20\pi$ [rad/s]

In Fig.5 two simulation frames of the whole mechanism are shown, sketching the part 3 with a bended shape, which is evolving during the simulation. Especially in the returning phase of the mechanism, the vibrations of the slender beam of part 3 appear to be consistently described by means of the limited set of shape functions, retained in the truncated orthogonal basis.

In Figure 6 the dynamics with all rigid bodies is faced at the lowest speed considered, $\omega_1 = 15\pi$ [rad/s] for the crankshaft. This is the reference to map the differences when the flexibility is added by means of 2 axial and 5 bending basis functions for body 3, as

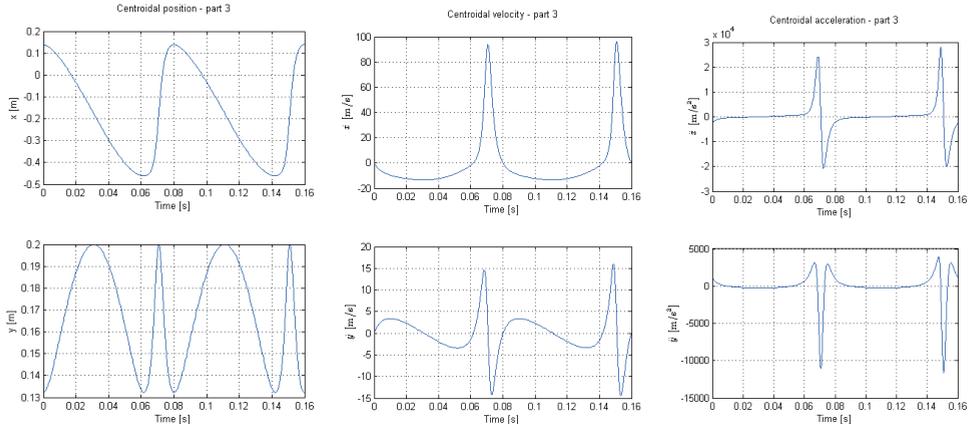


Figure 10. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with rigid bodies for all parts, inertial torque compensation, $\omega_1 = 25\pi$ [rad/s]

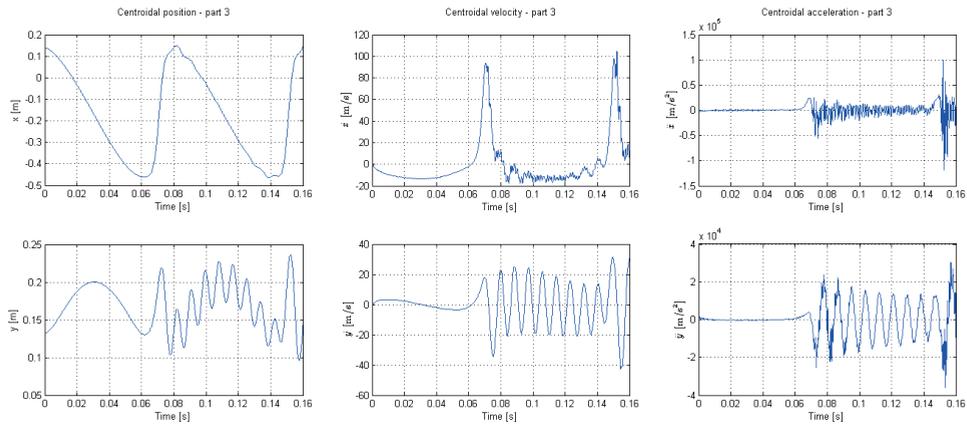


Figure 11. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with a flexible body for part 3 (2 axial and 3 bending basis functions), inertial torque compensation, $\omega_1 = 25\pi$ [rad/s]

depicted instead in Figure 7. From the latter it can be appreciated how the flexible dofs appear excessive at this modest speed of the mechanism, since only one mode (first bending) seems to be participating.

Figure 8 is the new reference when the crankshaft speed is raised to $\omega_1 = 20\pi$ [rad/s], always for 2 strokes of the quick return mechanism. The first 3 bending related basis functions are left to model the flexibility of body 3, which appears quite excited in the dynamics shown in Figure 9, especially for the first bending shape, with lower frequency contribution (recall Tab.3 for references).

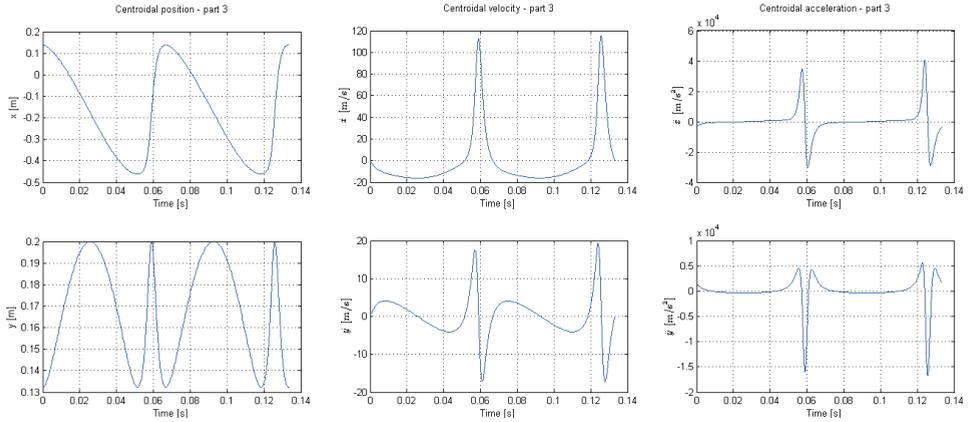


Figure 12. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with rigid bodies for all parts, inertial torque compensation, $\omega_1 = 30\pi$ [rad/s]

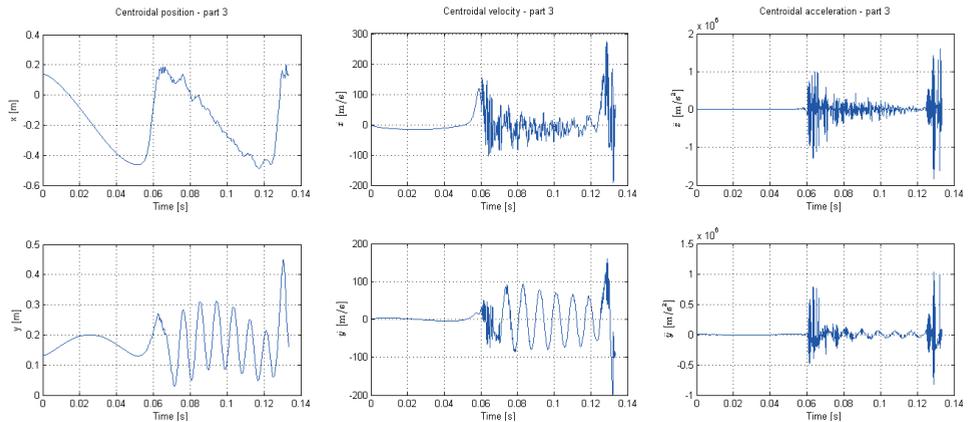


Figure 13. Simulated positions, velocities and accelerations of the part 3 centroid in the integration interval with a flexible body for part 3 (2 axial and 3 bending basis functions), inertial torque compensation, $\omega_1 = 30\pi$ [rad/s]

When the crankshaft speed is further raised to $\omega_1 = 25\pi$ [rad/s], it was felt necessary to add also 2 axial flexible dofs, beside the 3 bending related ones. The comparison between the charts in Figures 10 and 11 indeed manifests an added high frequency behaviour, especially on the velocities and accelerations.

The same set of flexible dofs (2 axial and 3 bending related) was used at the highest crankshaft speed simulated, $\omega_1 = 30\pi$ [rad/s]. While in the slow forward motion ([0-0.06]s range) the flexible mechanism behaves as the rigid one of Figure 12, from the fast returning phase of the first stroke it is evident that the modelled flexibility in Figure 13 describes much different phenomena, where the behaviour is dominated by oscillations as a mix of bending

and axial deflections. This clearly shows how the speed of a mechanism can change its dynamic behaviour and how the proper modeling of the flexibility plays a crucial role in the right understanding of the reality and simulation limits.

6. CONCLUSIONS

The simulations added in this work proved the concept for the meshless formulation of slender beams for axial and bending deflections, specifically giving evidence of how the raising speed can be a relevant change on the behaviour of the same mechanism, which requires therefore the proper modeling to retain flexible phenomena.

The proposed formulation give a lighter model than that from standard FEM and Craig-Bampton reductions, though enhancements are needed for the sake of computational economy.

This work has shown examples of different selections of basis function contributions, mixing bending- with axial- related structural dynamics. The best choice of the flexible dofs is surely feasible for an automated process, for the minimal and most efficient selection. The different modelling choices were tested on a quick return mechanism at different crankshaft speeds.

Among the future developments, the validation of the procedure against other technologies, experiments and examples is felt as a priority. To develop further the methodology, efforts are needed to extend the constraint library, to augment the internal and external generalised forces library and to improve the efficiency of the calculations. To further prove the effectiveness of the meshless approach, applications to a wider set of real industrial mechanisms, 3D and anisotropic problems are awaited.

REFERENCES

- [1] Shabana, A. A., 1997. "Flexible multibody dynamics: Review of past and recent developments". *Multibody System Dynamics*, **1**(2), pp. 189–222. doi:10.1023/A:1009773505418.
- [2] Craig, R. R., 1981. *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons Inc., New York, US.
- [3] Catania, G., and Zanarini, A., 2003. "Dynamic contribution of tires in vehicle suspension modeling: An experimental approach". In Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Washington, DC, USA, November 15-21, 2003, Design Engineering, Volumes 1 and 2, ASME, pp. 1–8. doi:10.1115/IMECE2003-41255.
- [4] Zanarini, A., and Catania, G., 2004. "Evaluation of spatial mechanism eigenproperties with respect to kinematical configuration". In Proceedings of the 5^{ème} Conférence Internationale Méthodes de Surveillance et Techniques de Diagnostic Acoustiques et Vibratoires, October 11-13 2004, Senlis (France), CETIM, pp. 1–10.
- [5] Zanarini, A., 2008. "Kinematics-based variability of the dynamic behaviour in spatial mechanisms". In Proceedings of the ISMA2008 Conference, September 15-17, Leuven (Belgium), P. Sas, ed., KUL, pp. 2175–2190. Multi-body dynamics and control, Paper 327, doi:10.13140/RG.2.1.2666.5048.
- [6] Zanarini, A., and Brugnoli, E., 2012. "Frequency analysis of a motorbike under motion conditions". In Proceedings of the ISMA2012-USD2012 Conferences, Leuven, Belgium, 2012 September, Sas and Moens, eds., Vol. Multy-body dynamics and control, KUL, pp. 2291–2306. doi:10.13140/RG.2.1.2404.3608, https://www.isma-isaac.be/past/conf/isma2012/proceedings/papers/isma2012_0456.pdf.

- [7] Zanmarini, A., 2012. *Analisi cinetostatica grafica di meccanismi piani. Applicazioni per la Meccanica delle Macchine*. Società Editrice Esculapio, Bologna, Italy. ISBN - 978-88-7488-545-9.
- [8] Zanmarini, A., and Brugnoli, E., 2013. “A time-varying dynamic problem for the frequency analysis of an off-road motorcycle”. In Proceedings of the Sesta giornata di studio Ettore Funaioli, July 2012, Bologna (Italy), pp. 351–376. doi:10.6092/unibo/amsacta/3715.
- [9] Catania, G., and Zanmarini, A., 2017. “A meshless approach in flexible multibody system modelling”. In Proceedings of the Decima giornata di studio Ettore Funaioli, July 15th 2016, Bologna (Italy), pp. 175–196. doi:10.6092/unibo/amsacta/5600.
- [10] Catania, G., and Zanmarini, A., 2018. “Flexible multibody system dynamics by means of a spectral based meshless approach”. pp. 1–30. Submitted for journal publishing.
- [11] Shabana, A. A., 2013. *Dynamics of Multibody Systems*, 4 ed. Cambridge University Press, Cambridge, 009. doi:10.1017/CBO9781107337213.
- [12] de Jalon, J. G., and Bayo, E., 1994. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real Time Challenge*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.

ABOUT THE MODELLING OF TEETH MESH FLEXIBILITY IN PLANETARY GEARS

Alessandro Zanmarini

Department of Industrial Engineering, University of Bologna, Italy

E-mail: a.zanmarini@unibo.it

Abstract. *Gear mesh flexibility is a varying and periodic quantity, which depends on several geometric, motion and material parameters; in NVH and structural analyses of systems with transmission problems this stiffness variability can play an important role on the design targets, such as sound quality and fatigue life estimation. Many times the tooth mesh flexibility in gears is modelled by means of lumped parameters formulas obtained from literature or by means of complex finite element models of the contact.*

In this work the roots of lumped parameters formulas were investigated, as a preliminary and feasibility study for a potential research path in gear condition monitoring, noise source & structural dynamics excitation modelling and transmission errors. Starting from the kinematics of mating rigid teeth in planetary gears with a single stage, the time-varying flexibility contribution of each deflected pair is added with simple assumptions, resulting in the parametric modelling of the torsional stiffness as a kinematics based periodic quantity. Parameters were extracted from this approach, to explore a viable and computationally cost effective geometry based method to model the torsional vibrations and transmission error in planetary gears.

Keywords: *teeth mesh flexibility, planetary gears, torsional vibrations, transmission error, gear mesh kinematics.*

1. INTRODUCTION

Once the friction surfaces are substituted by means of geared wheels it becomes manifest that the contact kinematics assumes a relevant role on the structural dynamics of the mated gears. During the contact point motion on the tooth profile, it is clear that the part of the cantilever beam, supporting the contact forces, varies. Plus, when two geared wheels are in contact, the number of tooth pairs exchanging forces are also function of the evolution of the contacts. There results that the gear mesh flexibility is a varying and periodic quantity, depending on several parameters of different nature: geometric, motion and material related. This stiffness variability can play an important role on the design targets, such as sound quality and fatigue life estimation, in NVH and structural analyses of systems with transmission problems, especially where many gears are gathered on the same transmission line, thus crowding the dynamic signature of the whole system with time- or -kinematic dependent phenomena.

In the recent past the tooth mesh flexibility in gears was modelled by means of lumped parameter models, better known as formulas to fit the problem [1–5], but loosing the direct

connection with gear mesh design, on the path to optimise the gear profile for vibro-acoustic and life prediction targets. Complex finite element models have been built to investigate the teeth contact [6, 7] in detail, but they need a huge number of degrees of freedom (dofs), re-meshing strategies and are generally computationally intensive.

The idea behind this work is to regain the connection to gear mesh design by means of a kinematics based approach that describes the mesh stiffness variability, to be later fitted by means of any functional series or polynomial, without the need of costly FEMs. Therefore in this work the roots of lumped parameters formulas were investigated starting from the teeth profile, the pairs in contacts and the structural contribution of each teeth. The output of this basic work has to be seen as a preliminary and feasibility study for a potential research path in gear condition monitoring, noise source & structural dynamics excitation modelling and transmission errors [8, 9]. In details, the study is performed over a simple planetary gear stage from the kinematics of mating rigid teeth; by means of simple assumptions, the time- or kinematics- varying flexibility contribution of each deflected pair is added, resulting in the parametric modelling of the torsional stiffness of the whole stage as a kinematics based periodic quantity. Parameters were extracted from this approach such as the eigenvalues, to explore a viable and computationally cost effective geometry based method to model the torsional vibrations and transmission error in planetary gears. The assumptions, the formulation and results for the simple single stage planetary gearbox are discussed in detail, together with expected future developments.

2. LITERATURE

In the technical literature two main streams are pursued. The first tries, with a typical formulation, to reproduce, or curve-fit, the effects found on the stiffness, as function of angular position [1–5]. The second approach is based on FEM, with a great care of the contact areas [6, 7].

Typical formulation

Among what can be found, below are summarised the main trends in typical formulation for gear stiffness:

- empirical formulas, e.g. Kuang & Yang [1], can model the stiffness of the tooth as the contact is located at r radius:

$$K(r) = C[(A_0 + A_1x) + (A_2 + A_3x)\frac{r-R}{m(1+x)}]$$

where:

$$A_0 = a_{00} + a_{01}Z + a_{02}Z^2 + a_{03}Z^3$$

$$A_1 = a_{10} + a_{11}Z + a_{12}Z^2 + a_{13}Z^3$$

$$A_2 = a_{20} + a_{21}Z + a_{22}Z^2 + a_{23}Z^3$$

$$A_3 = a_{30} + a_{31}Z + a_{32}Z^2 + a_{33}Z^3$$

C and a_{ij} are constants to be determined for each gear mesh (thus the question on how with specific variations), x is the correction ratio, m is the module of the wheel, Z is the teeth number, R is the pitch or primitive radius.

- simple formulas, to represent the stiffness variability as a rectangular or trapezoidal wave with mesh period $T_m = 2\pi/\Omega$, Ω as mesh frequency.

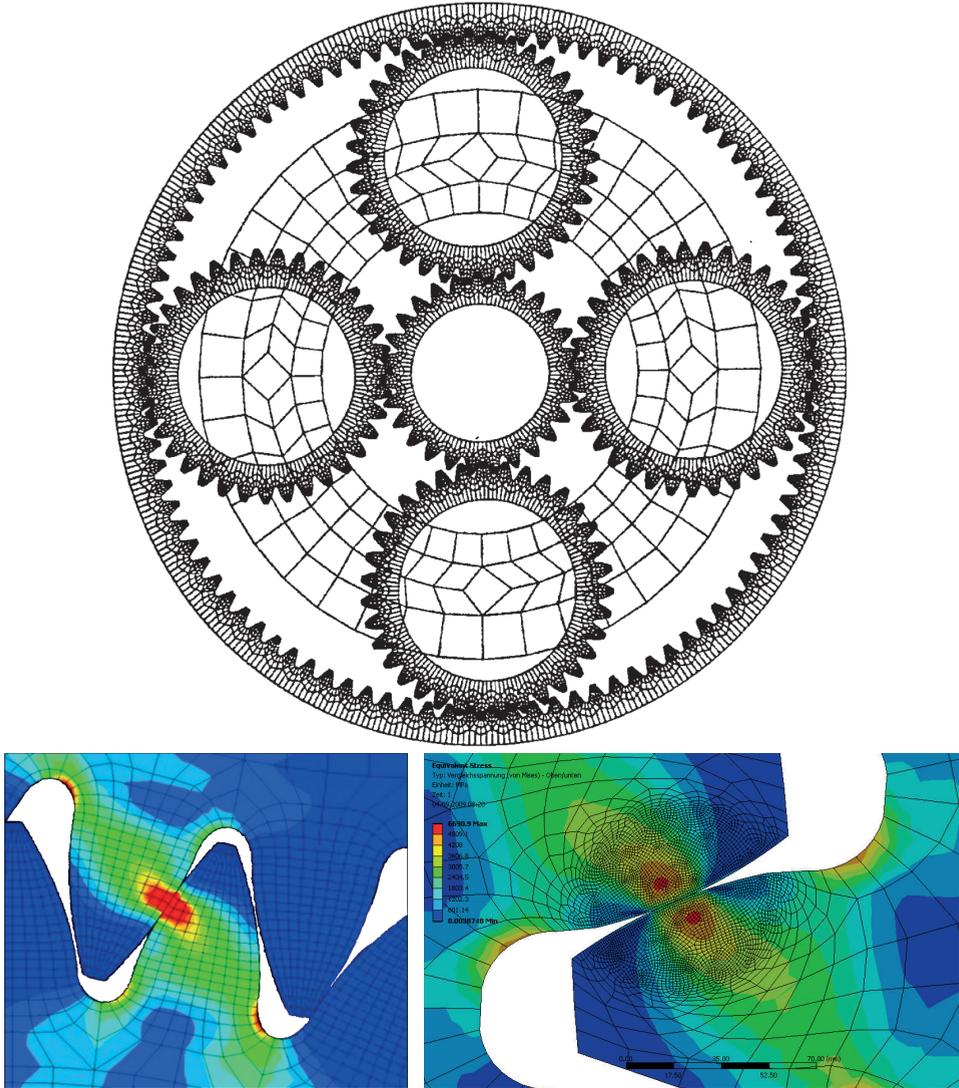


Figure 1. Meshes of paired teeth for contact analysis by means of FEM.

Sources: [10], metsindia.com, ww3.cad.de

- Fourier series formulas (e.g. [10–13]), to model the stiffness of the tooth pair as a periodic function, by means of a sum of the constant term k_g with variable contributions $k_v(t)$, later expanded in series, with t as evolutionary variable and l the domain span:

$$k(t) = k_g + k_v(t) = k_g + \sum_{s=1}^{\infty} k_a^s \sin\left(\frac{2s\pi}{l}t\right) + k_b^s \cos\left(\frac{2s\pi}{l}t\right)$$
where $k_g = \frac{2}{l} \int_0^l k(t)dt$, $k_a^s = \frac{2}{l} \int_0^l k(t)\sin\left(\frac{2s\pi}{l}t\right)dt$, $k_b^s = \frac{2}{l} \int_0^l k(t)\cos\left(\frac{2s\pi}{l}t\right)dt$ are Fourier coefficients, or:

$$k(t) = k_g + \sum_{s=1}^{\infty} d^s e^{js\Omega t} + c.c.o.n.j.$$
 when complex exponential are used instead.

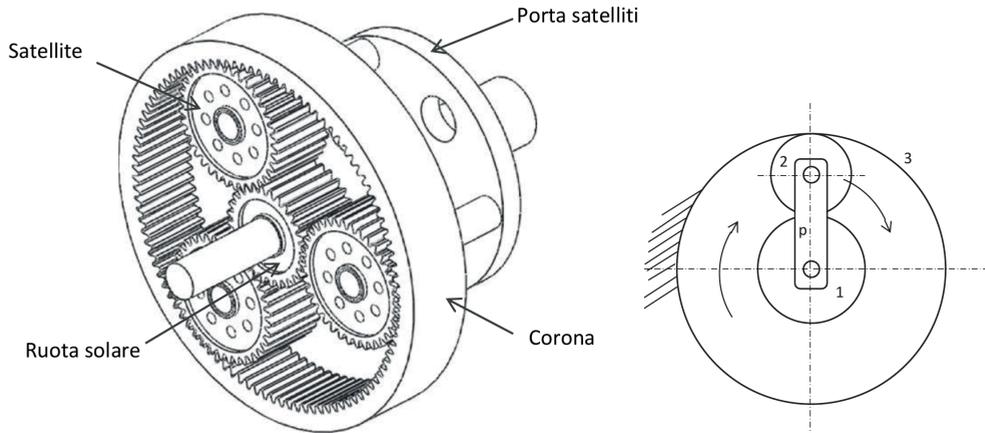


Figure 2. Example of a single stage planetary gear and its scheme

The latter seems suitable for any stiffness model, therefore can be taken as a reference for the task of this work, where, instead, efforts are focused to build a simple gear mesh stiffness model.

FE contact modelling

The precise geometry of the teeth mesh has been analysed by computing intensive finite element models, as those shown in Figure 1. Critical aspects are manifest that prevent the easy usage of FEM:

- size of the FE models: each wheel needs its proper fine mesh, with thousands of nodes, especially on the contact surfaces;
- pairing of moving meshes: during the contact evolution, the point-area on the deflected profile where the teeth mate themselves is moving, therefore any constraint equation need complex parametrisation to take care of the exact boundary conditions and nodes in the peculiar position;
- re-meshing issues: a means to limit the boundary condition parametrisation might be the regeneration of the FE mesh in each gear position, to be sure that nodes are facing each other on the mating tooth pairs, but this requires a great managing of the results in the different meshes;
- reduction issues: to overcome the size of the models, reduction strategies can be adopted by means of finding a dynamically equivalent truncated modeshape base as in [14], but again with attention paid to the moving contact;
- easily non-linear: to better model the deformation of each tooth it might be useful to evolve the FEM into the non-linear approaches, though even more expensive;
- costs: following the contact evolution with accurate and highly detailed FE models appears to be computationally expensive.

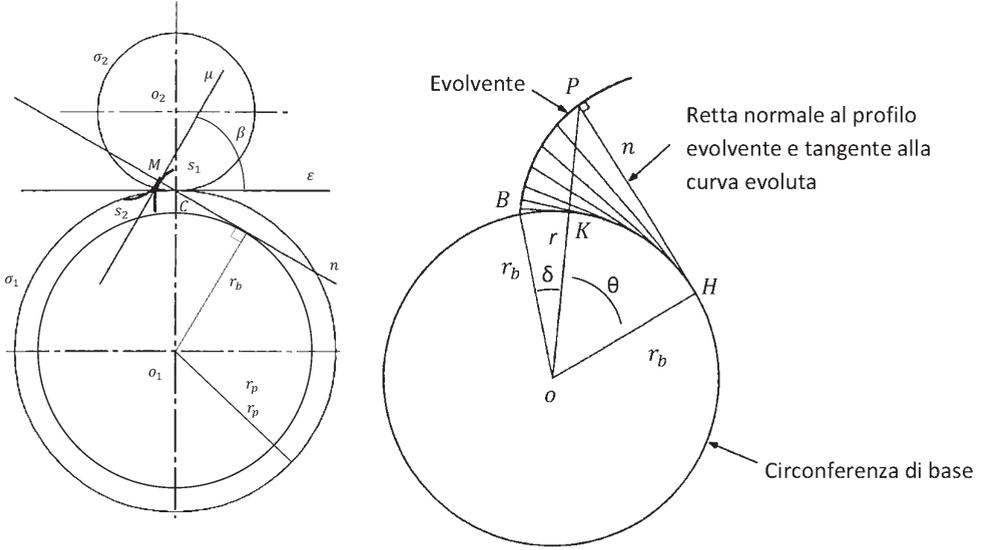


Figure 3. Basic concepts of teeth profile construction

While FE models can find their place in designing the teeth for challenging transmissions, it appears to the author infeasible to adopt such formulation for the study of resonances in planetary gears.

3. STARTING FROM A KINEMATICS BASED APPROACH

The basic idea here proposed is to find a simple model of varying stiffness given by the tooth pairs, as function of the kinematic position when the wheels are supposed to be rigid. Therefore the elasticity introduced will not change the exact solution of the rigid body motion, but will be instead used to map the variability of the problem around the defined locations.

Recall of basic concepts in involute gear tooth contacts

When approaching the modeling of the single stage planetary gear of Figure 2, a rule for the generation of the teeth profile has to be chosen. There follows the selection of the transmission ratio τ , of the pressure angle α and of the tooth modulus m to generate the gear mesh. In the example of Figure 2 the crown wheel is fixed ($\omega_3 = 0$) and no correction ($x = 0$) has to be considered.

With the quantities highlighted in Figure 3, the location of the point P on the tangent to the base circle of radius r_b (also normal to the profile) can be defined by the following relations for standard involute gears:

$$\begin{cases} r = r(\theta) = r_b / \cos(\theta) \\ \delta = \delta(\theta) = \tan(\theta) - \theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \delta = \delta(r) = \tan(\alpha \cos(r_b/r)) - (\alpha \cos(r_b/r)) \quad (1)$$

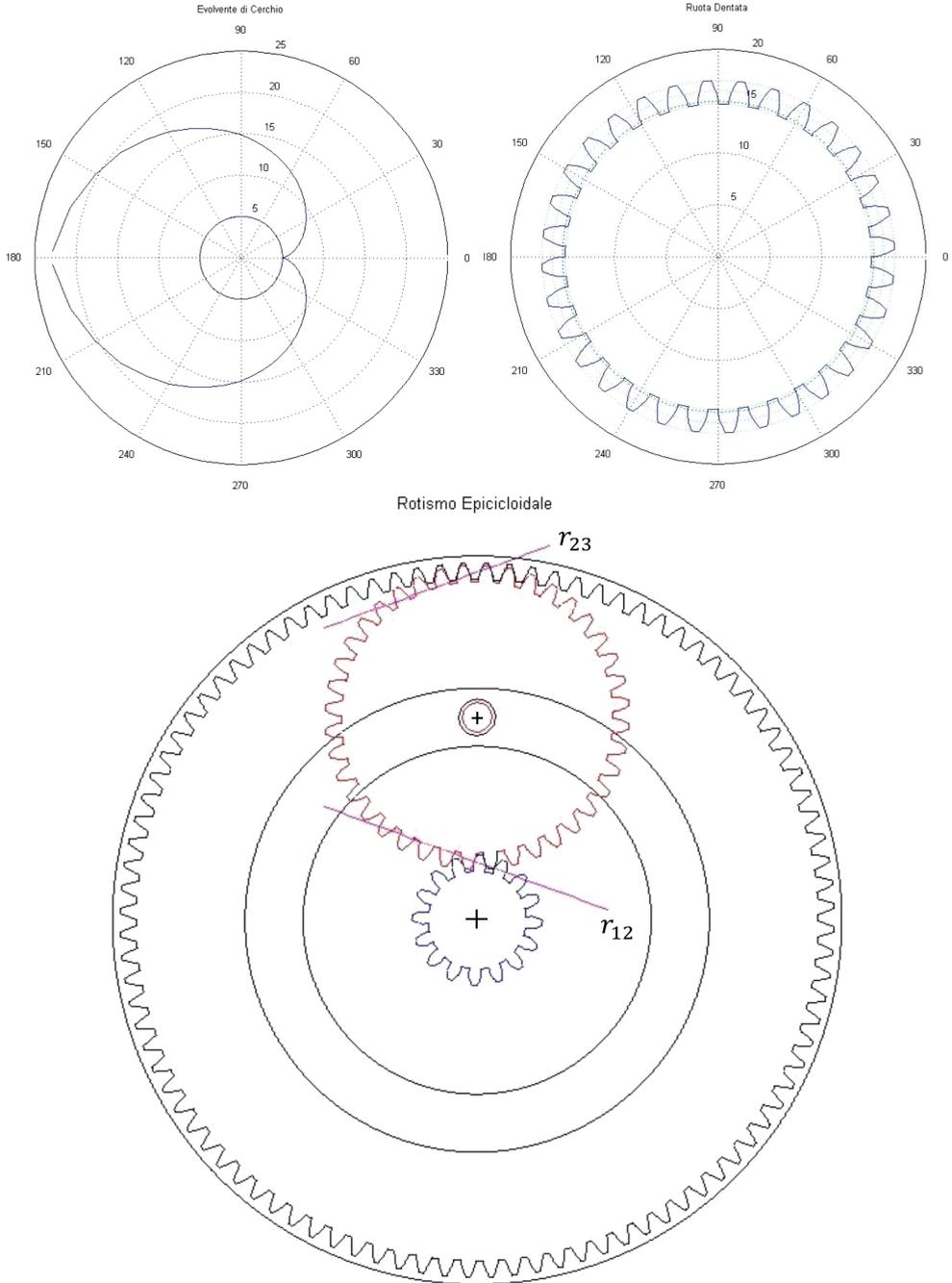


Figure 4. Teeth involute profile, single geared wheel and 1 stage gearbox assembly

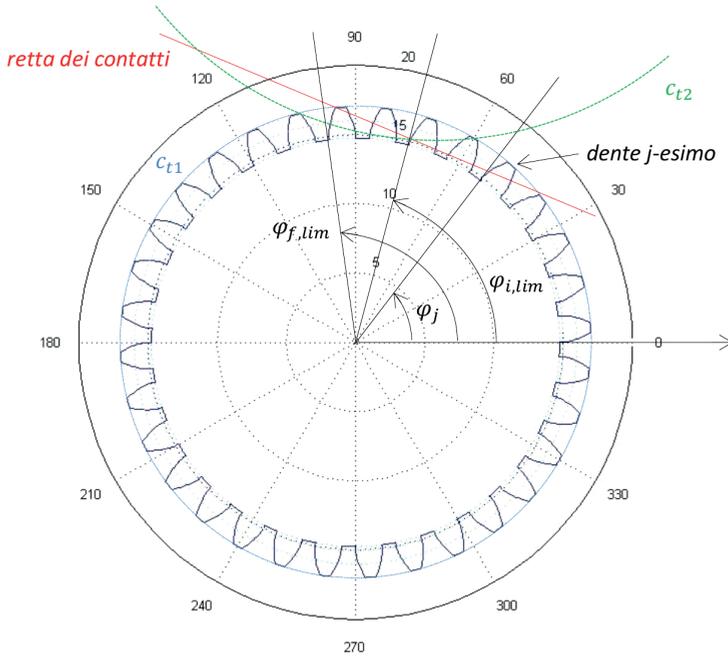


Figure 5. Limits of the angular location of the contacts

This parametric relation is for an infinite growing involute curve, as in in Figure 4, top left picture. The outer radius r_t imposes a constraint on the geometry of the tooth profile:

$$\text{Limits: } \begin{cases} \theta_{max} = \arccos(r_b/r_t) \\ \delta_{max} = \tan(\theta_{max}) - \theta_{max} \end{cases} \quad (2)$$

The tooth profile is therefore just a small portion of the involute curve, but respecting the rolling primitive kinematics: the primitive wheel can be built with the teeth having this profile, as in in Figure 4 top right picture, with added rounding at the foot of the tooth, inside the base circle. Based on the kinematics described by Eqs.1-2, all the teeth of the planetary gears find the proper design and right assembly as in Figure 4 bottom picture, where the contact lines (r_{12} and r_{23}) between the gears have been drawn in this geared wheel configuration.

The contact line becomes useful to define the angular positions where the mating tooth pair meets and leaves the contact on the pushing side, as can be seen in Figure 5. The top circles of each geared wheel intersect with the contact line: the green circle of wheel 2 meets the red contact line where the teeth start the mating, while the blue circle of wheel 1 crosses the red contact line where the teeth leave the pairing, showing the limit phases that are active for the transmission of a single tooth pair. But from the geometry of Figure 5 it is possible to appreciate also the presence of more than one mating pair along the wheel rotations.

4. CONTACT STIFFNESS: IMPLEMENTATION WITH SIMPLE ASSUMPTIONS

In order to model the tooth contribution to the torsional stiffness of the whole geared wheel, some simplifying assumption were introduced. The Eqs.1-2 have described the tooth with

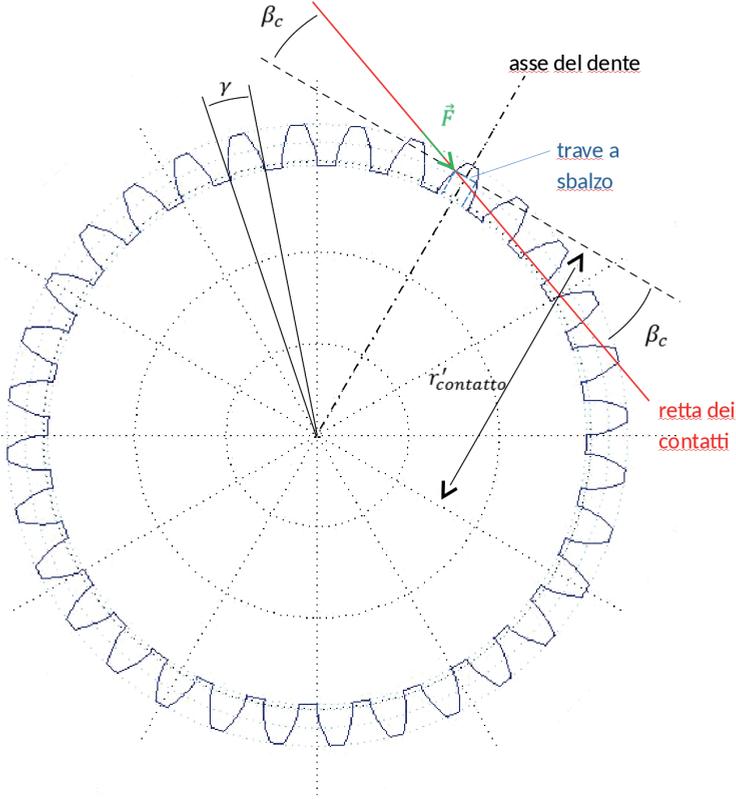


Figure 6. Scheme for the strong approximation of the tooth profile in stiffness estimation

a varying profile; taking advantage of the notations in Figure 6, the height of the section orthogonal to the tooth axis can be simply evaluated:

$$s_A = 2r_{contact} \sin[(\gamma - 2\delta_{contact})/2] \quad (3)$$

while the distance from the rigid hub of the wheel, where the cantilever beam can be considered constrained, is:

$$h_{contact} = r_{contact} \cos[(\gamma - 2\delta_{contact})/2] - r_{foot} \quad (4)$$

The basic assumption consists in considering only the contribution of a beam with constant section from the contact point to the foot of the tooth, therefore of $w \times s_A$ dimension, where w is the width of the wheel. The section inertia becomes:

$$J_A = ws_A^3/12 \quad (5)$$

With this simple assumption the mass over the contact point is not considered, as well as the material that is shaved from the real profile when taking a beam with constant section that is enveloped by the real profile. The compromise taken should not alter boldly the influences on the natural frequencies of the entire system. Future enhancements might take care of better assumptions, e.g. considering the functionally tapered section.

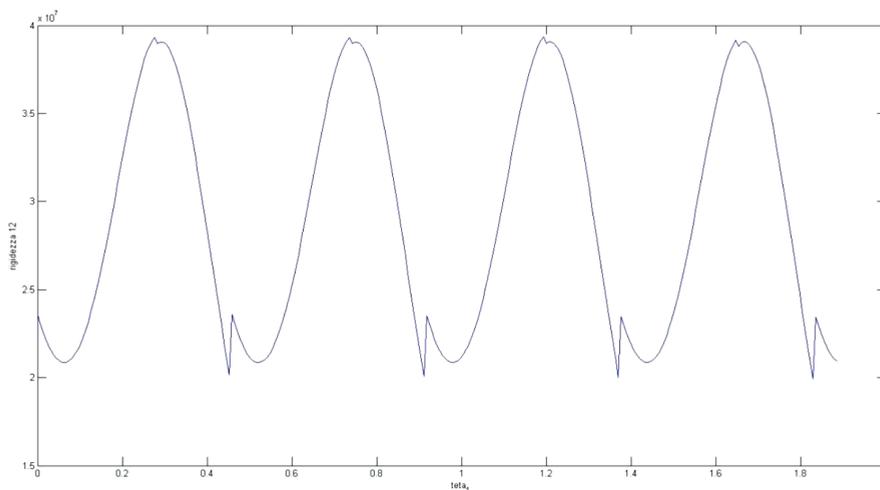


Figure 7. Equivalent stiffness for the contacts between wheels 1 & 2 as function of the sun wheel rotation

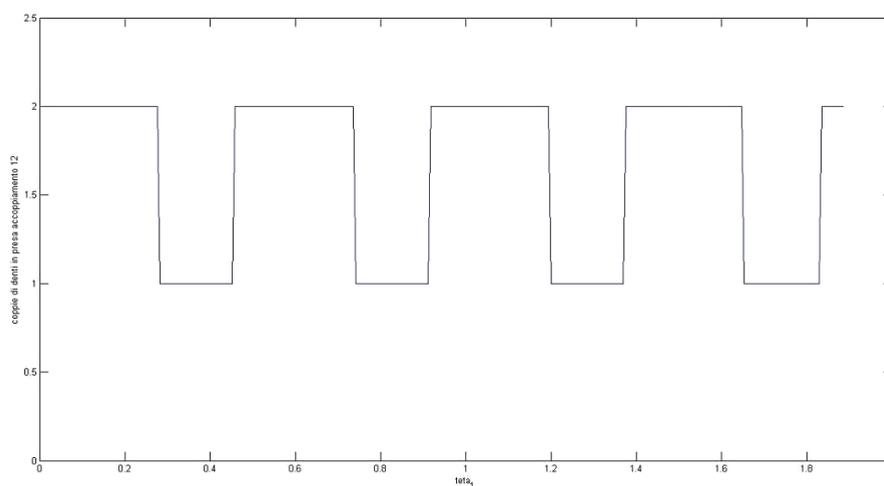


Figure 8. Number of mating pairs for the contacts between wheels 1 & 2 as function of the sun wheel rotation

Cantilever beam stiffness

Once the real tooth has been substituted by the cantilever beam with the constant section & length in the contact point, the bending stiffness of each tooth can be easily managed:

$$k_{b,c} = \frac{3EJ_A}{h_{contact}^3 \cos^2(\beta_{contact})} \quad (6)$$

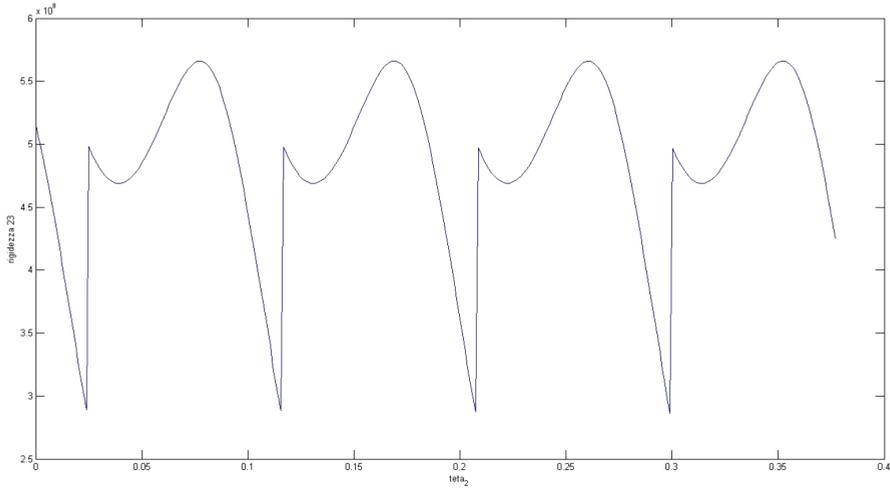


Figure 9. Equivalent stiffness for the contacts between wheels 2 & 3 as function of the planet wheel rotation

where $h_{contact}$ is the length of the cantilever beam assumed and E is the Young's modulus of the material.

By transforming the tangential deflection, due to the tooth bending, into a torsional or angular deflection of the wheel by means of energy criteria, the torsional stiffness contribution of a single tooth is evaluated:

$$k_{\theta,b,c} = k_{b,c} r_b^2 \quad (7)$$

Mating pairs

The teeth in a mating pair belong to two different geared wheels, but can be considered as springs in series, therefore the overall contribution of a single mating pair to the torsional stiffness can be easily evaluated:

$$k_{serie}^{eq}(i,j) = \frac{k_{\theta,b,c_i} k_{\theta,b,c_j}}{k_{\theta,b,c_i} + k_{\theta,b,c_j}} \quad (8)$$

Instead, when n pairs are involved in the transmission, their contribution is that of springs in parallel layout, which yields:

$$k_{parallel}^{eq}(i,j) = \sum_{t=1}^n k_{serie}^{eq}(i,j,t) \quad (9)$$

Overview of some results

In order to prove the output of the simple model above obtained, an example was built with the following parameters for a planetary gear single stage: total transmission ratio $\tau = 1/7$, tooth module $m = 1[mm]$, $w = 5m$ as the width of the tooth, pressure angle $\alpha = 20[deg]$,

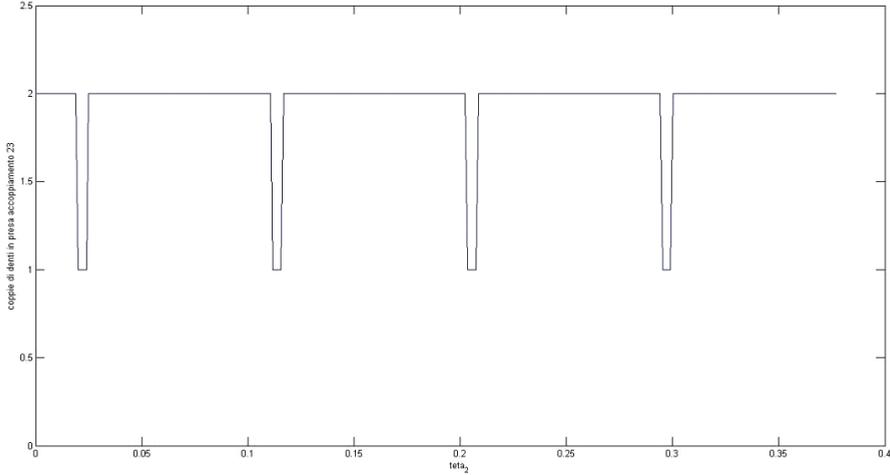


Figure 10. Number of mating pairs for the contacts between wheels 2 & 3 as function of the planet wheel rotation

elasticity modulus $E = 2.1e^{11}[N/m^2]$. In Figure 7 and 9 the torsional stiffness resulting from Equation 9 has been sketched along the rotation, showing a marked variability during the contact; also, the variability has some difference in the shapes, depending on which mated wheels are considered in the planetary stage, linked to the number of mated teeth. In Figure 8 and 10 the number of mated pairs are thus shown: while they both have a number of pairs between 1 and 2, the mean value is markedly different, being the first close to 1.4, while the second close to 1.9, which means a better sharing of the load among the teeth, with a strong drop when only one pair is in contact; besides, the smooth shape on the top of Figure 9 is quite similar to that of Figure 7, except for the drastic drop quoted above.

5. DYNAMICS OF A PLANETARY GEARBOX

The above mentioned variability of the torsional stiffness of the contacts has effects on the dynamic signature of the planetary gear single stage. As in [15–17], a kinematics based variability of the eigenproblem can be addressed. A lumped model of the planetary gear (one planet only be considered) can be set up following the scheme in Figure 11, and the motion equations for small torsional oscillation around the kinematic position of interest can be drawn by means of Lagrangian approach, one planet only being considered.

System equations

The system in Figure 11 can be modelled with 5 dofs following [18], since the input shaft, the sun wheel, the planets, the planet carrier and the output shaft need to be considered as connected by torsional springs.

The kinetic energy of the system can be evaluated by:

$$T = \frac{1}{2} \left[J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + (J_p + m_2 r_p^2) \dot{\theta}_p^2 + J_{in} \dot{\theta}_{in}^2 + J_{out} \dot{\theta}_{out}^2 \right] \quad (10)$$

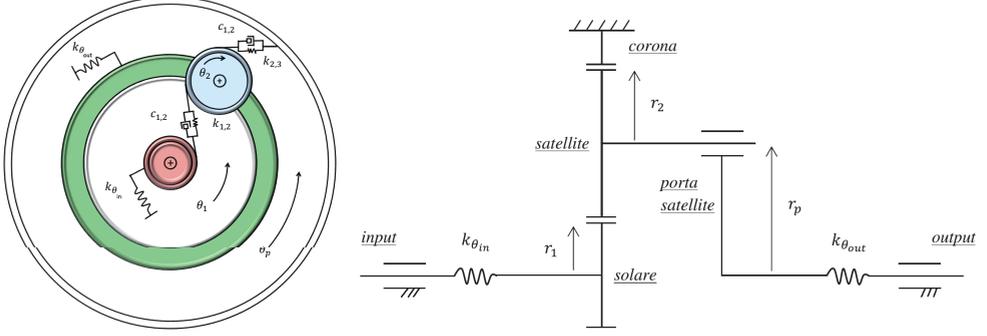


Figure 11. Lumped model of the planetary single stage gearbox: top and side views

The elastic potential can be evaluated by:

$$U = \frac{1}{2} [k_{\theta_{1,2}}(\theta_1 - \theta_2 - \theta_p \cos \alpha)^2 + k_{\theta_{2,3}}(\theta_2 - \theta_p \cos \alpha)^2 + k_{\theta_{in}}(\theta_{in} - \theta_1)^2 + k_{\theta_{out}}(\theta_{out} - \theta_p)^2] \quad (11)$$

The work of the external generalised forces is:

$$W = M_{in}\theta_{in} + M_{out}\theta_{out} \quad (12)$$

The motion equations from Lagrange function $L = T - U$ follow:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \frac{\partial W}{\partial \Theta} \quad (13)$$

where:

$$\Theta = [\theta_p, \theta_1, \theta_2, \theta_{in}, \theta_{out}]^T \quad (14)$$

is the vector of the rotational dofs.

Disregarding any damping it yields [18]:

$$\mathbf{J}\ddot{\Theta}(t) + \mathbf{K}_\theta(\Theta, t)\Theta(t) = \mathbf{M}(t) \quad (15)$$

where:

$$\mathbf{J} = \text{diag}[J_p + m_2 r_p^2, J_1, J_2, J_{in}, J_{out}] \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_\theta(\Theta, t) = \begin{bmatrix} k_{\theta_{out}} + (\tilde{k}_{\theta_{1,2}} + \tilde{k}_{\theta_{2,3}})\cos\alpha & -\tilde{k}_{\theta_{1,2}} & \tilde{k}_{\theta_{1,2}} - \tilde{k}_{\theta_{2,3}} & 0 & -k_{\theta_{out}} \\ & k_{\theta_{1,2}} + k_{\theta_{in}} & -k_{\theta_{1,2}} & -k_{\theta_{in}} & 0 \\ & & k_{\theta_{1,2}} + k_{\theta_{2,3}} & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & k_{\theta_{in}} & 0 \\ & & & & k_{\theta_{out}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\tilde{k}_{\theta_{i,j}} = k_{\theta_{i,j}} \cos \alpha \quad (18)$$

$$\mathbf{M}(t) = [0, 0, 0, M_{in}, M_{out}]^T \quad (19)$$

Eigenvalue analysis

To focus the attention on the gear mesh flexibility and variability during the contact evolution a simplified system without torsional contribution of external shafts has been considered, dropping the torsional contribution of the external shafts, thus reducing the system to 3 dofs.

The eigenvalue analysis is therefore based on the following equations:

$$\mathbf{J}\ddot{\Theta}(t) + \mathbf{K}_\theta(\Theta, t)\Theta(t) = \mathbf{0} \quad (20)$$

where:

$$\mathbf{J} = \text{diag}[J_p + m_2 r_p^2, J_1, J_2] \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_\theta(\Theta, t) = \begin{bmatrix} (\bar{k}_{\theta_{1,2}} + \bar{k}_{\theta_{2,3}})\cos\alpha & -\bar{k}_{\theta_{1,2}} & \bar{k}_{\theta_{1,2}} - \bar{k}_{\theta_{2,3}} \\ \text{symm.} & k_{\theta_{1,2}} & -k_{\theta_{1,2}} \\ & & k_{\theta_{1,2}} + k_{\theta_{2,3}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\lambda = \text{eig}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_\theta(\Theta, t)) \quad (23)$$

In Figure 12 the example is built with the following parameters: $\tau = 1/7$, $m = 1[\text{mm}]$, $w = 5m$, $\alpha = 20[\text{deg}]$, $E = 2.1e^{11} \text{N}/\text{m}^2$. Thanks to the variability of the stiffness as in Eq.(22), the eigenvalues of Eq.(23) undergo a pronounced oscillation in the calculated ranges, proving the stiffness dependence on the contact evolution, therefore as a source of parametric excitation and torsional oscillations.

6. CONCLUSIONS

What here proposed has served as a proof of concept. In the present work, by means of simple assumptions, an elastic model of a planetary gear stage has been drawn, with a special focus on the kinematics based quantities that affect the variability of the overall stiffness properties. The obtained variable stiffness charts become feasible for the fitting by means of Fourier series based formulas found in literature. In the proposed procedure it will be easy to monitor the effect of evolutionary implementations for finer hypotheses and model refinements. The shown results are transferable to other investigations: design, monitoring & diagnostics, for a clear understanding of gear mesh stiffness phenomena.

Future developments will take care of the variations in the teeth profile for proper gear correction practice. Improvements in the tooth elasticity modelling are also expected, by means of enhancements in the modelling assumptions and finer calculations. Developments are awaited on the side of proper lubricant film modelling among the teeth in contact. A spectral approach might be used to enhance the modelling of tooth flexibility as function of its dynamics by means of proper shape functions [19–21]. Nonetheless, the efficiency of the calculations is crucial to include all these enhancements in the modelling to extend the applications to a wider set of real industrial problems.

Acknowledgements

This contribution saw its beginning with the precious aid of M.Sc. Matteo Cenni, who followed my directions and suggestions in implementing the code to obtain the shown results during his bachelor thesis works. His support was greatly appreciated.

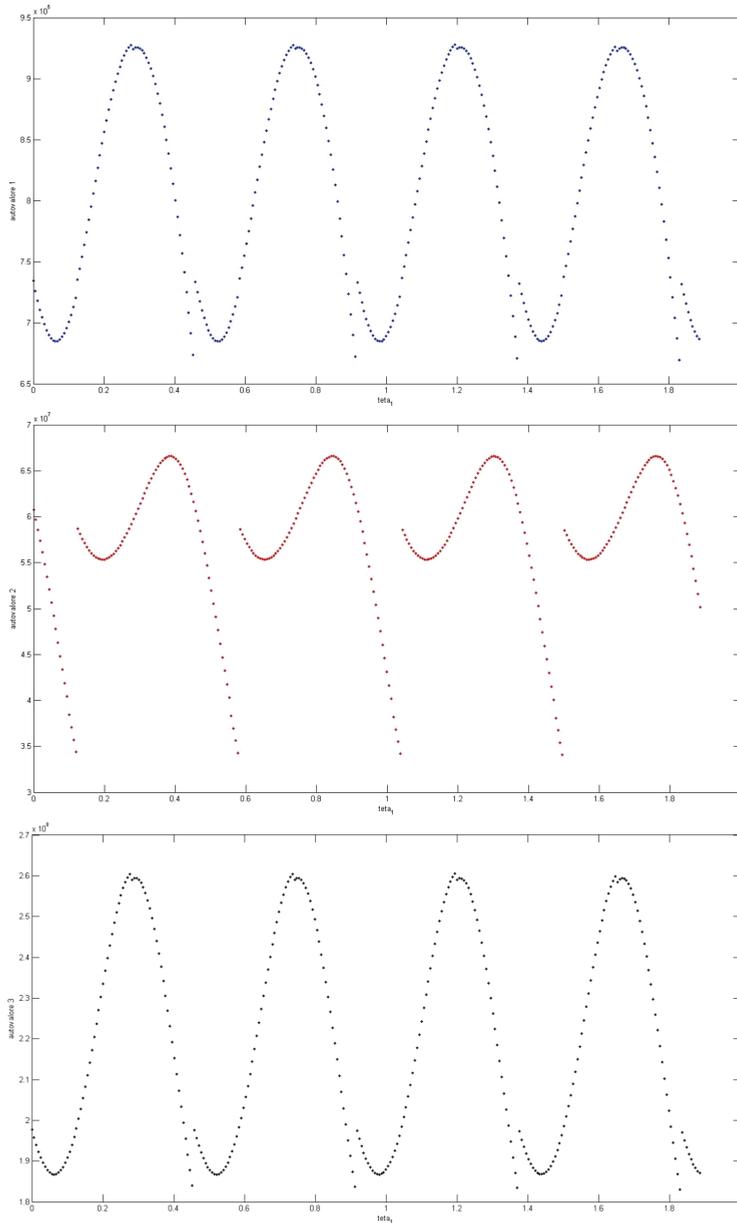


Figure 12. Eigenvalue analysis as function of the sun wheel rotation. First eigenvalue in the range of $[6.5 - 9.5] \times 10^5$, second in $[3.0 - 7.0] \times 10^7$ and third in $[1.8 - 2.7] \times 10^8$.

REFERENCES

- [1] Kuang, J., and Yang, Y., 1992. "An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair". In Proceedings of the Intl. Power Transmission and Gearing Conf., ASME. DE-Vol.43-1.

- [2] Atanasiu, V., and Doroftei, I., 2008. “Dynamic contact loads of spur gear pairs with addendum modifications”. *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, **2**, pp. 21–26.
- [3] Meagher, J., Wu, X., Kong, D., and Lee, C. H., 2011. *A Comparison of Gear Mesh Stiffness Modeling Strategies*. Springer New York, New York, NY, pp. 255–263. doi:10.1007/978-1-4419-9834-7_23.
- [4] Sachidananda, H. K., Raghunandana, K., and Shivamurthy, B., 2016. “Comparison of meshing stiffness of altered tooth sum spur gear tooth with different pressure angles”. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, **10**(2), pp. 334 – 340.
- [5] Sánchez, M. B., Pleguezuelos, M., and Pedrero, J. I., 2017. “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects”. *Mechanism and Machine Theory*, **109**, pp. 231 – 249. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2016.11.014.
- [6] Cooley, C. G., Liu, C., Dai, X., and Parker, R. G., 2016. “Gear tooth mesh stiffness: A comparison of calculation approaches”. *Mechanism and Machine Theory*, **105**, pp. 540 – 553. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.021.
- [7] Kiekbusch, T., Sappok, D., Sauer, B., and Howard, I., 2011. “Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical fe models”. *Strojnikovski vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, **57**(11), pp. 810–818. doi:10.5545/sv-jme.2010.248.
- [8] Diehl, E. J., and Tang, J., 2016. “Predictive modeling of a two-stage gearbox towards fault detection”. *Shock and Vibration*, **2016**, p. 13. Article ID 9638325, doi:10.1155/2016/9638325.
- [9] Elisaus, V., Mohammadpour, M., Theodossiades, S., and Rahnejat, H., 2017. “Effect of teeth micro-geometrical form modification on contact kinematics and efficiency of high performance transmissions”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, **0**(0), p. 18. doi:10.1177/1464419317710157.
- [10] Parker, R., Lin, J., and L. Krantz, T., 2001. “Modeling, modal properties, and mesh stiffness variation instabilities of planetary gears”. pp. 1–126.
- [11] Lin, J., and Parker, R., 1999. “Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration”. *J. Vib. Acoust.*, **121**(3), pp. 316–321. doi:10.1115/1.2893982.
- [12] LIN, J., and PARKER, R., 2002. “Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation”. *Journal of Sound and Vibration*, **249**(1), pp. 129 – 145. doi:https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3848.
- [13] Guo, Y., and Parker, R. G., 2010. “Dynamic modeling and analysis of a spur planetary gear involving tooth wedging and bearing clearance nonlinearity”. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **29**(6), pp. 1022 – 1033. doi:https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.05.001.
- [14] Craig, R. R., 1981. *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons Inc., New York, US.
- [15] Zanarini, A., 2008. “Kinematics-based variability of the dynamic behaviour in spatial mechanisms”. In Proceedings of the ISMA2008 Conference, September 15-17, Leuven (Belgium), P. Sas, ed., KUL, pp. 2175–2190. Multi-body dynamics and control, Paper 327, doi:10.13140/RG.2.1.2666.5048.
- [16] Zanarini, A., and Brugnoli, E., 2012. “Frequency analysis of a motorbike under motion conditions”. In Proceedings of the ISMA2012-USD2012 Conferences, Leuven, Belgium, 2012 September, Sas and Moens, eds., Vol. Multy-body dynamics and control, KUL, pp. 2291–2306. doi:10.13140/RG.2.1.2404.3608, https://www.isma-isaac.be/past/conf/isma2012/proceedings/papers/isma2012_0456.pdf.

- [17] Zanarini, A., and Brugnoli, E., 2013. "A time-varying dynamic problem for the frequency analysis of an off-road motorcycle". In Proceedings of the Sesta giornata di studio Ettore Funaioli, July 2012, Bologna (Italy), pp. 351–376. doi:10.6092/unibo/amsacta/3715.
- [18] Ambarisha, V. K., and Parker, R. G., 2007. "Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models". *Journal of Sound and Vibration*, **302**(3), pp. 577 – 595. doi:10.1016/j.jsv.2006.11.028.
- [19] Meirovitch, L., 1967. *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company; 1st edition, New York, US, Mar.
- [20] Catania, G., and Zanarini, A., 2017. "A meshless approach in flexible multibody system modelling". In Proceedings of the Decima giornata di studio Ettore Funaioli, July 15th 2016, Bologna (Italy), pp. 175–196. doi:10.6092/unibo/amsacta/5600.
- [21] Catania, G., and Zanarini, A., 2018. "Flexible multibody system dynamics by means of a spectral based meshless approach". pp. 1–30. Submitted for journal publishing.

THE USE OF DIGITAL IMAGE CORRELATION TO ANALYZE SEGMENTS OF SPINE

Maria Luisa Ruspi

*Department of Industrial Engineering, Alma Mater Studiorum
Università di Bologna, Italy
E-mail: marialuisa.ruspi2@unibo.it*

Marco Palanca

*Department of Industrial Engineering, Alma Mater Studiorum
Università di Bologna, Italy
E-mail: marco.palanca2@unibo.it*

Cesare Faldini

*2nd Orthopaedic and Traumatologic Clinic, Rizzoli Orthopaedic Institute, Bologna, Italy
E-mail: cesare.faldini@ior.it*

Luca Cristofolini

*Department of Industrial Engineering, Alma Mater Studiorum
Università di Bologna, Italy
E-mail: luca.cristofolini@unibo.it*

Abstract. *The aim of this study was to examine the applicability of digital image correlation (DIC) for the analysis of multi-vertebrae spine segments. The focus was on the strain distribution in the hard tissues (vertebrae) and soft tissues (intervertebral discs). In fact, to date either the overall range of motion and stiffness is measured, or the local strain distribution is measured, but only on the bone surface. DIC allowed to investigate simultaneously both rigid and deformable parts of the spine, providing a full field view of the examined surface.*

Keywords: *spine, biomechanics, Digital Image Correlation, intervertebral disc*

1. INTRODUCTION

Spine is the most complex structure in the human skeletal apparatus with the task of sustaining the body, permitting the movements and protecting the spinal cord. This structure is made of with several vertebrae which allow the movement in flexion-extension, lateral bending and axial rotation [1]. Accidents, pathologies and stresses can injury the spine with a series of complications that reduces the life quality. In order to re-establish spine functionality and to correct deformities (such as hyper-kyphosis and scoliosis), various types of surgeries are performed with the implantation of screws and bars. Unfortunately, in a significant number of cases, the operation fails and a new surgery is needed [2].

Therefore, it is important to study the properties and the biomechanics of the spine under different conditions of load.

Traditional techniques limit the measurement of the displacements to specific points on the rigid bone (vertebrae) and do not consider the distribution of deformation of the soft tissues (intervertebral discs).

Since the spine is composed of soft tissues (intervertebral discs and ligaments [3]) and hard tissues (vertebrae), it is impossible to evaluate the displacements and strains under physiological loading conditions with traditional strain measurement techniques (e.g. strain gauges) [4], [5].

In the last years Digital Image Correlation (DIC) helped to investigate the biomechanics measuring the displacements and strains in a contact-less way and providing a full-field view of the examined surface [6], [7].

The aim of this work was to explore the applicability of DIC to study multi-vertebrae segments analysing both rigid and deformable parts, simultaneously on vertebral bone and intervertebral disc, in a full field view of the examined surface. Moreover, DIC allowed obtaining some information about the direction of the strain both on hard and soft tissue.

2. MATERIALS AND METHODS

Non-destructive tests were performed with a testing machine while the deformation was evaluated with the DIC system.

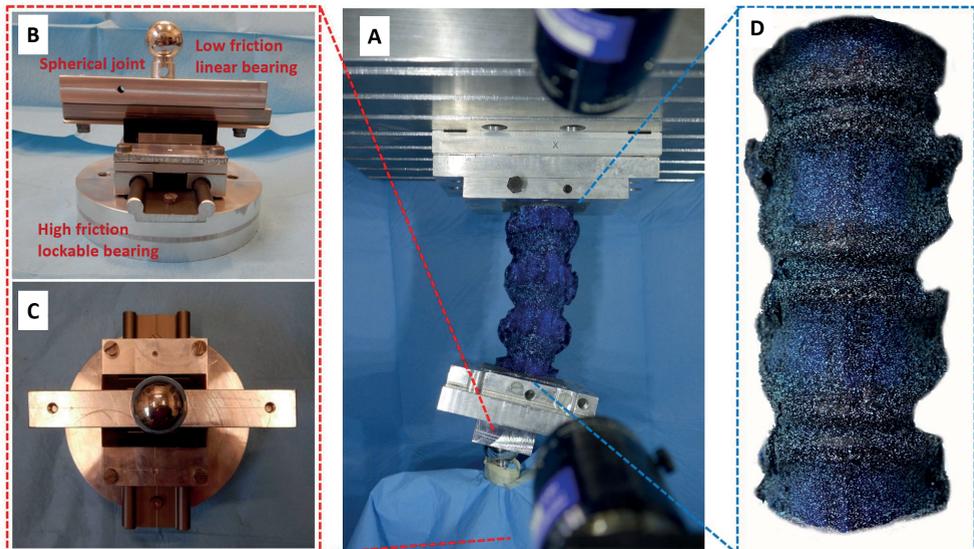


Figure 1. A: configuration of the test. View of the specimen in the load machine. The upper pot was fixed to the top of testing machine while the lower pot was placed on a spherical joint and this junction could move on a rail. In this test the rail was set first in anterior-posterior direction and in latero-lateral direction. B, C: view of the lower setup (B-front view, C-upper view). D: four vertebrae segment of spine with white-on-black pattern

Preparation of specimens

Three segments of four vertebrae were extracted from porcine lumbar spines. Soft tissues were removed from the frontal side (with the resection of the anterior ligament) to explore the anterior part of the vertebral body and intervertebral discs. With the help of surgeons, in the posterior side all soft tissues (ligaments and parts of muscles) were left intact to keep as much as possible the functionality of the spine segments.

Extremities of the specimens were potted in poly-methyl-methacrylate plate aligning the central disc horizontally.

To use the DIC system, the specimens were painted with a methylene-blue solution for five times for vertebral body and only three times for intervertebral discs (minimizing as much as possible the increase of stiffness in this soft tissue). The white speckle pattern was created using an airbrush airgun with a water-based paint [8].

In vitro tests

Spine segments were subjected to an eccentric compression simulating flexion-extension and lateral bending (fig. 1). The load was applied in steps using an uniaxial testing machine in displacement control.

The deformation of the specimens were evaluated using the DIC system (3D-DIC system, Q400, Dantec Dynamics, Denmark with two 5Mpix cameras and 35mm lens) to understand the behaviour of the soft tissue (intervertebral discs) and the hard tissue (vertebrae).

3. RESULTS

In all the tests, DIC system permitted to evaluate successfully the deformations of the entire segments of spine from a frontal view.

The tests showed how the deformation of the spine was due to a deformation of the intervertebral discs (the vertebrae was rigid compared to the intervertebral disc).

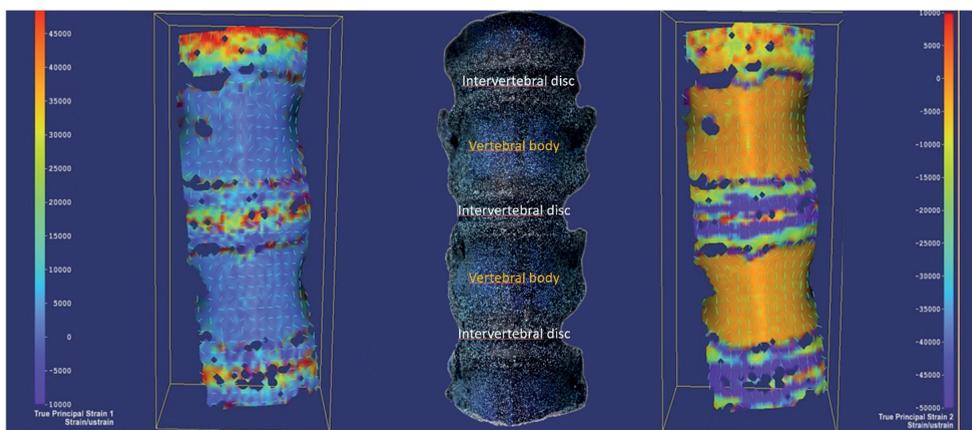


Figure 2. Different deformations of vertebral bones, growth cartilages and intervertebral discs during a flexion test. Left image shows the principal strain 1, the central image shows the specimen as seen in real light, the right image shows the principal strain 2

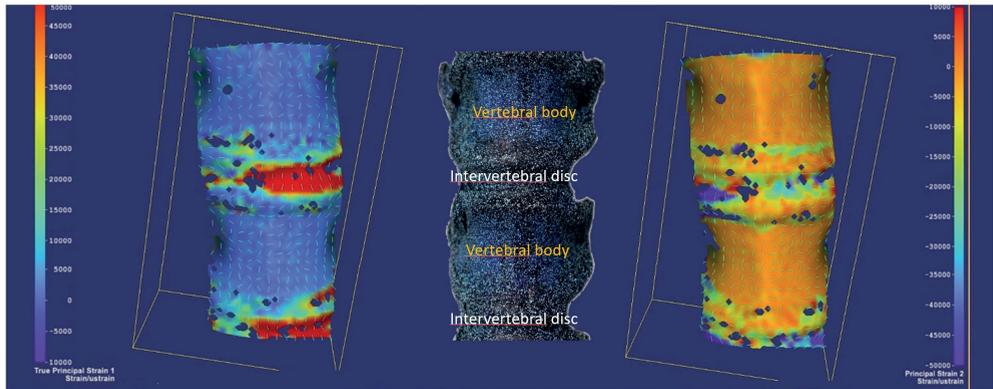


Figure 3. Different deformations of vertebral bones, growth cartilages and intervertebral discs during a lateral bending. Left image shows the principal strain 1, the central image shows the specimen as seen in real light, the right image shows the principal strain 2

Both in flexion and lateral bending, the tests showed the deformation of the disc: one side worked in compression while the other side worked in traction.

During the flexion, the frontal part of the intervertebral disc was compressed but the mid part showed a little region with tensile hoop strain. In fact, when the disc is in compression, it swells and so the central part of the surface expands.

Since the specimens belonged to young animals, DIC showed also the deformation of the cartilage part of the vertebral bone (growth plate).

4. CONCLUSION

This study showed the applicability of DIC system on complex specimens, to examine in detail the biomechanics of spine in terms of displacement and strain of vertebral body and intervertebral disc. These potentialities could open the way to further application of DIC in studying the biomechanical behaviour of human spines.

REFERENCES

1. Kowalski, R.J., L.A. Ferrara, and E.C. Benzel, *Biomechanics of the Spine*. 2005. **15**.
2. Lau, D., et al., *Proximal junctional kyphosis and failure after spinal deformity surgery*. *SPINE*, 2014. **39**.
3. Behrsin, J. and C. Briggs, *Ligaments of the lumbar spine: a review*. *Surgical - Radiologic Anatomy*, 1988. **10**: p. 211 - 219.
4. Brandolini, N., L. Cristofolini, and M. Viceconti, *Experimental Methods for the Biomechanical Investigation of the Human Spine: A Review*. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2014. **14**(01): p. 1430002.
5. Grassi, L. and H. Isaksson, *Extracting accurate strain measurements in bone mechanics: a critical review of current methods*. *ScienceDirect*, 2015.
6. Palanca, M., G. Tozzi, and L. Cristofolini, *The use of digital image correlation in the biomechanical area: a review*. *International Biomechanics*, 2015.
7. Freddi, A., G. Olmi, and L. Cristofolini, *Experimental Stress Analysis for Materials and Structures*.
8. Lionello, G., C. Sirieix, and M. Baleani, *An effective procedure to create a speckle pattern on biological soft tissue for digital image correlation measurements*. *J Mech Behav Biomed Mater*, 2014. **39**: p. 1-8.

CARATTERIZZAZIONE MAGNETO-MECCANICA DI ELASTOMERI MAGNETOREOLOGICI

Andrea Spaggiari

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia
E-mail: andrea.spaggiari@unimore.it*

Alberto Bellelli

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia
E-mail: 180490@studenti.unimore.it*

Nicola Golinelli

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia
E-mail: nicola.golinelli@unimore.it*

Abstract. *This work analyses the properties and the magneto-mechanical characteristics of magnetorheological elastomers, smart materials not yet broadly known. The first part of the research was the manufacturing of several samples, each containing a different percentage of ferromagnetic material inside its viscoelastic matrix. The purpose was to create isotropic and anisotropic samples, respectively with random or aligned distribution of ferromagnetic particles. The next step was the study of the mechanical behaviour of each sample, by conducting a compression test (in presence and in absence of an external magnetic field) and a 3-point bending test. From the experimental data, the value of stiffness, deformation at maximum stress and dissipated specific energy were calculated. The results were analysed using both charts and ANOVA results. A systematic description of the obtained results highlighted a strong correlation between the percentage of ferromagnetic material in each sample and its mechanical response. The alignment of ferromagnetic particles in columnar structures also affected the stiffness values during the compression test. It was also shown that having an external magnetic field reduces the samples deformation. Using ANOVA results as guidelines, it is possible to generate reliable predictions regarding the mechanical response of the MRE.*

Keywords: *elastomer, magnetorheological, MRE, smart materials, viscoelasticity*

1. INTRODUZIONE

Lo studio degli elastomeri magnetoreologici, materiali di cui si conoscono solo parzialmente le proprietà e oggetto finora solo di speciali applicazioni di nicchia, nasce dalla curiosità verso un materiale viscoelastico venduto come giocattolo, il Silly Putty [1].

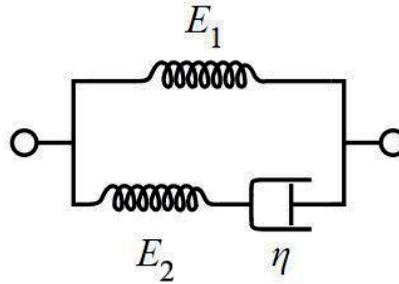


Figura 1. Modello solido lineare standard (o modello di Zener)

Il Silly Putty è probabilmente l'esempio più efficace di materiale viscoelastico, poiché è incredibilmente rigido per rapide deformazioni, mentre è molto deformabile e malleabile se sollecitato lentamente [2].

Il Silly Putty è un polimero a base siliconica composto principalmente da polydimethylsiloxane (PDMS), silice, acido borico ed altri additivi secondari. Le sue caratteristiche viscoelastiche sono principalmente dovute alla presenza di PDMS [1].

Nella maggior parte delle situazioni il comportamento del Silly Putty può essere rappresentato con un modello di Maxwell (una serie di molla e smorzatore), poiché ha un comportamento quasi fluido, anche se un lavoro di Cross [2] utilizza un modello di Zener per la sua descrizione. Questo modello, anche chiamato modello solido lineare standard, è leggermente più evoluto del modello di Maxwell ed è il modello tipicamente considerato per la descrizione degli elastomeri magnetoreologici.

Il modello solido lineare standard permette di descrivere, oltre al fenomeno dello scorrimento viscoelastico tipico dei fluidi viscoelastici, anche i fenomeni di recovery e di creep.

2. MATERIALI MAGNETOREOLOGICI

Tipicamente, i materiali magnetoreologici consistono di particelle ferromagnetiche micrometriche sospese in una matrice non magnetica. Le interazioni magnetiche tra le particelle in questi materiali compositi dipendono dall'orientamento magnetico di ogni particella e dalla relazione spaziale tra esse. Questo dà luogo ad un interessante numero di fenomeni magneto-meccanici. Tra questo tipo di materiali ricordiamo fluidi, schiume, gel ed elastomeri magnetoreologici.

Fluidi magnetoreologici

I fluidi magnetoreologici (MRF) sono sospensioni di particelle ferromagnetiche micrometriche in un liquido, che può essere un olio o acqua. Questa miscela crea un liquido le cui proprietà reologiche sono influenzate da un campo magnetico.

Tipicamente i fluidi magnetoreologici presentano un'elevata concentrazione in volume di particelle ferromagnetiche, la quale oscilla dal 10% al 50%.

In un fluido magnetoreologico le particelle ferromagnetiche restano casualmente distribuite nel liquido in assenza di campo magnetico, ma acquisiscono una polarizzazione magnetica formando catene in presenza di un campo magnetico opportuno [3].

Queste catene possono anche essere interconnesse e ramificarsi formando fibrille. Per riuscire a rompere questi cluster di catene/fibrille è necessario esercitare una extra forza che rende il comportamento non newtoniano.

Sin dalla loro scoperta, i fluidi magnetoreologici si sono rivelati adatti a molte applicazioni, ma accanto a questi vantaggi vi sono però ancora incertezze riguardanti il raggiungimento di elevate prestazioni, la stabilità, la durata nel tempo e la sedimentazione.

Nonostante non siano adattabili a tutte le applicazioni dei fluidi magnetoreologici, gli elastomeri magnetoreologici (Magneto-Rheological Elastomers, MRE) possono superare alcuni dei problemi dei fluidi MR grazie alla loro matrice solida.

Elastomeri magnetoreologici

Gli MRE comprendono una grande varietà di materiali compositi, tipicamente consistenti di particelle ferromagnetiche, immerse in una matrice elastomerica non magnetica [4].

La selezione dei componenti per elastomeri magnetoreologici, le tecnologie per la loro fabbricazione e i modelli matematici che meglio si adattano alle loro proprietà meccaniche sono problemi scientifici recenti che trovano solo parziali trattazioni nella letteratura scientifica [5].

Il fluido magnetoreologico può essere in prima approssimazione immaginato come un fluido che a campo magnetico esterno nullo può scorrere e a campo magnetico elevato ha un comportamento tipo solido. L'elastomero magnetoreologico ha invece un comportamento sempre solido, non cambia la sua natura, ma le sue caratteristiche meccaniche in termini di rigidità e smorzamento sono funzione del campo magnetico esterno applicato.

Il fluido magnetoreologico ha quindi un apparente cambiamento di fase. L'elastomero ha invece solo un cambiamento di proprietà. L'elastomero magnetoreologico è quindi più limitato, ma molto meglio gestibile rispetto alla sua controparte fluida, che soprattutto ha problemi di confinamento e di compatibilità con le normali guarnizioni.

MRE isotropi ed anisotropi. Le particelle ferromagnetiche all'interno della matrice elastomerica possono essere distribuite in modo omogeneo (MRE isotropi) oppure possono essere raggruppate a formare strutture colonnari simili a catene (anisotropi o "allineati").

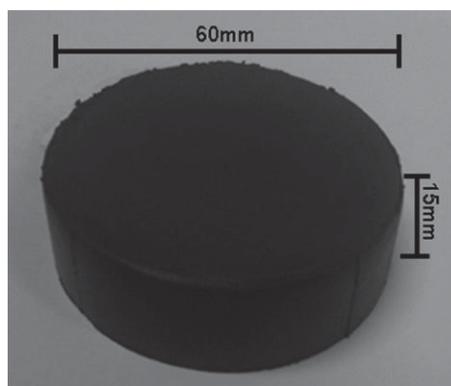


Figura 2. Elastomero magnetoreologico [6]

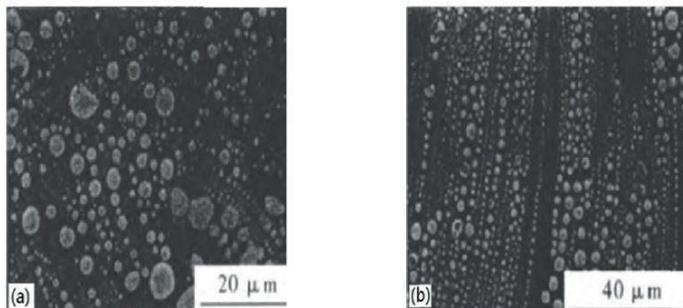


Figura 3. Struttura microscopica di un MRE: (a) MRE isotropo, (b) MRE allineato [7]

Al fine di ottenere elastomeri magnetoreologici allineati deve essere applicato un campo magnetico esterno che induca momenti dipolari nelle particelle ferromagnetiche prima della completa polimerizzazione dell'elastomero, in modo che le strutture colonnari di particelle rimangano bloccate al loro posto fino al termine della cura e che restino intrappolate nella matrice.

Applicazioni degli MRE. Gli MRE hanno un potenziale utilizzo soprattutto nella progettazione di semplici dispositivi a rigidità variabile e facilmente controllabile [4].

La compagnia automobilistica Ford Motor Company ha brevettato un cuscinetto per applicazioni automotive comprendente l'utilizzo di un elastomero MR. La rigidità di questo cuscinetto è regolata in base allo stato in cui si trova il gruppo motopropulsore per ottimizzare le sospensioni migliorando così il comfort dei passeggeri.

Nei laboratori di ricerca di Ford sono nate diverse applicazioni utilizzando elastomeri MR, non solo cuscinetti, ma ad esempio anche supporti per motori in cui gli MRE sono utilizzati per le loro caratteristiche di variabilità di rigidità e smorzamento [4] in modo da poter controllare le vibrazioni.

Si può notare che ad oggi sono state brevettate principalmente applicazioni che prevedono l'uso di MRE anisotropi.

3. MATERIALI E METODI

Obiettivo del lavoro

L'obiettivo di questo lavoro è lo studio e la caratterizzazione magneto-meccanica di elastomeri magnetoreologici.

In primo luogo, si è proceduto alla realizzazione di una famiglia di provini di elastomero magnetoreologico contenenti diverse percentuali in peso di particelle di materiale ferromagnetico. Sono stati creati provini sia isotropi che anisotropi (allineati) per 5 livelli di percentuale in peso e due ripetizioni, per un totale di 18 provini.

Successivamente sono state effettuate delle prove di compressione (in assenza e presenza di campo magnetico esterno) e di flessione a tre punti (in assenza di campo magnetico esterno).

Apparato sperimentale

Fabbricazione provini MRE. L'elastomero ferromagnetico è realizzato a partire da una base siliconica commerciale, il Sylgard 184, che utilizzato assieme al suo agente di cura permette di ottenere la matrice elastomerica del provino. La base elastomerica è poi mescolata con particelle di ferro puro di forma sferica e dimensione media di $45\mu\text{m}$. Per la realizzazione dei provini allineati (anisotropi) sono stati utilizzati due magneti permanenti in ferrite, scelti sulla base dello stampo adottato.

Gli stessi magneti saranno poi utilizzati anche per l'applicazione di un campo magnetico esterno durante le prove di compressione.

I tre ingredienti (agente di cura, base siliconica e polvere di ferro), dopo essere stati pesati, vengono posti e miscelati nello stampo, creato in modo da essere facilmente installato sul sistema di miscelazione.

Le dimensioni dello stampo sono di 60 mm di lunghezza, 30 mm di larghezza e 10 mm di profondità, con un leggero sforno per permettere una migliore estrazione dell'elastomero polimerizzato. Lo stampo, realizzato in ABS tramite stampa 3D, è dotato di un coperchio, dello stesso materiale, sul quale sono presenti dei fori atti alla fuoriuscita dell'aria in fase di chiusura dello stesso.

La miscelazione introduce aria all'interno dello stampo, che viene eliminata ponendo sottovuoto (-0.8 bar) il sistema di miscelazione.

Il sistema, con i reagenti ancora in fase liquida, è lasciato 15 minuti in depressione e poi passa alla fase di cura in temperatura.

Lo stampo, posto in lenta rotazione da un motore passo è posizionato per 360° in una camera climatica a 45°C per garantire la perfetta polimerizzazione della matrice.

Piano sperimentale. Si sono realizzati 18 provini secondo il procedimento precedentemente descritto: 8 provini isotropi con differenti percentuali in peso di materiale ferromagnetico (20%, 40%, 60%, 80%), 8 provini anisotropi (allineati) con le stesse percentuali in peso di polvere di ferro e 2 provini di elastomero puro, senza quindi polvere di ferro.

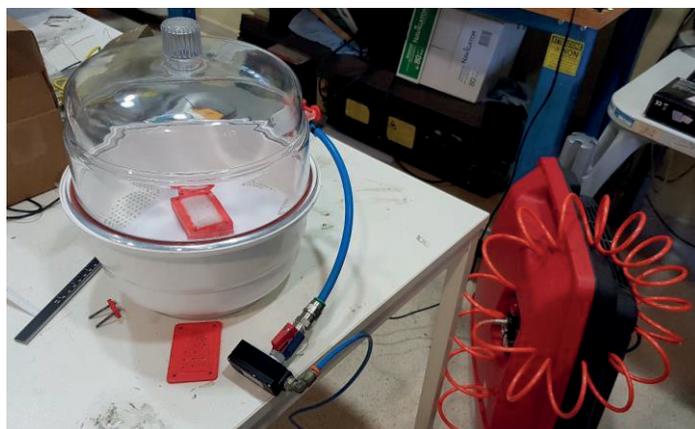


Figura 4. Degasatore e compressore in funzione (provino in elastomero puro)

Si è deciso di testare i provini a compressione e flessione a tre punti. La prova di trazione non è stata presa in considerazione sia per le difficoltà che si sarebbero riscontrate nell'afferraggio dei provini, sia poiché gli elastomeri sono raramente chiamati a lavorare a trazione. Sia la prova di compressione che quella di flessione non sono prove a rottura, si è scelto infatti di testare le proprietà elastiche dei provini limitando la forza massima a 400N nella compressione e limitando la freccia in mezzeria a 2mm nella flessione a tre punti. Le prove sono quasi-statiche e prevedono un unico ciclo di carico/scarico alla velocità di 1 mm/min. Il piano sperimentale comprende l'esecuzione dei test di compressione e flessione a tre punti per tutti e 18 i provini presenti.

Variabile	Livelli	Provini fisici								
		0	20		40		60		80	
% mat. ferromagnetico	5 livelli	0	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
Allineamento	Booleano	-	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
Subtotale provini		1	2		2		2		2	
Ripetizioni	2	2	2		2		2		2	
Totale provini	18	2	4		4		4		4	

Figura 5. Tabella riepilogativa del numero di provini analizzati

Prova di compressione

Per questa prova vengono utilizzati due piatti montati sulla base e sulla traversa della macchina di prova, una Galdabini Sun 500 con cella da 5000N. Le prove eseguite sono 36: ognuno dei 18 provini è testato sia in assenza che in presenza di campo magnetico esterno. Dalle curve forza-corsa si ricavano le risposte del sistema:

- Rigidezza (in MPa), pendenza del tratto elastico delle curve tensione-deformazione
- Deformazione percentuale a tensione massima
- Energia specifica dissipata (espressa in mJ/mm^3), ossia l'area racchiusa dalle curve di carico e scarico nel diagramma σ - ϵ .

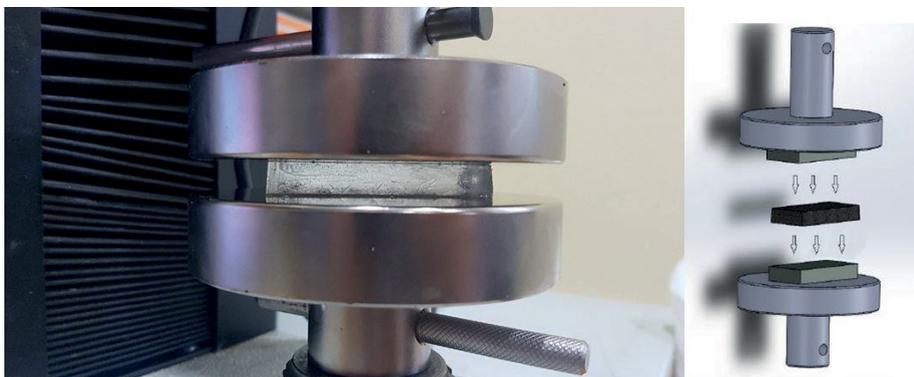


Figure 6a e 6b. Prova di compressione senza magneti su provino in elastomero puro (sinistra) e schema della prova di compressione con magneti (destra)

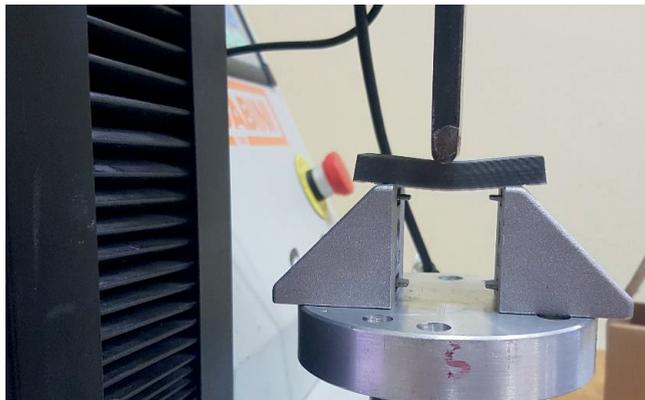


Figura 7. Prova di flessione a tre punti

La prova in presenza di campo magnetico è eseguita utilizzando gli stessi magneti permanenti utilizzati per la fabbricazione dei provini allineati. Questi vengono posti sui due piatti in modo da esercitare una forza di attrazione tra loro, ed il provino è posto esattamente sul magnete del piatto inferiore. Utilizzando un gaussmetro in aria tra i magneti posti sui piatti si può misurare un campo che va da 190mT a 210mT per le corse che interessano la prova. Eseguendo una prova senza provino viene misurata una forza massima di circa 3N, ben distante dai 400N sviluppati durante la prova.

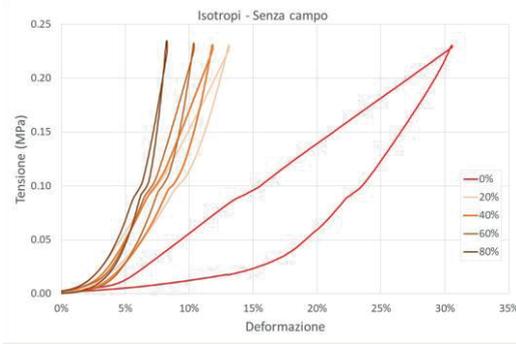
Prove di flessione a tre punti

Per questa prova non è stato possibile eseguire i test con applicazione di campo magnetico esterno, vista la difficoltà di mantenere il campo perpendicolare al provino durante la prova. I provini sono i medesimi utilizzati nelle prove di compressione, così come le risposte analizzate. La prova prevede l'utilizzo di due appoggi fissi ed un punzone per caricare il provino prismatico. Si utilizza una cella da 250N. Anche in questo caso la prova non è a rottura. Si impone una corsa massima da raggiungere di 2mm ad una velocità di traversa di 1mm/min.

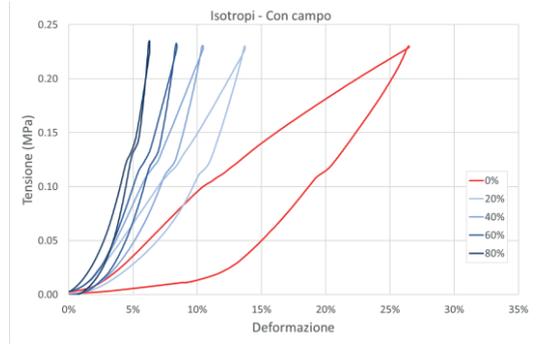
4. RISULTATI PROVE SPERIMENTALI E ANOVA

Risultati prove di compressione

In Figura 8 si riportano le curve σ - ϵ per i provini isotropi senza campo applicato (a) e con campo applicato durante la prova (b). In Figura 9 si riportano le curve per i provini allineati senza campo applicato (a) e con campo applicato durante la prova (b), mentre in Figura 10 sono riportate le curve per i provini a flessione a tre punti, allineati e non, sempre in assenza di campo magnetico.

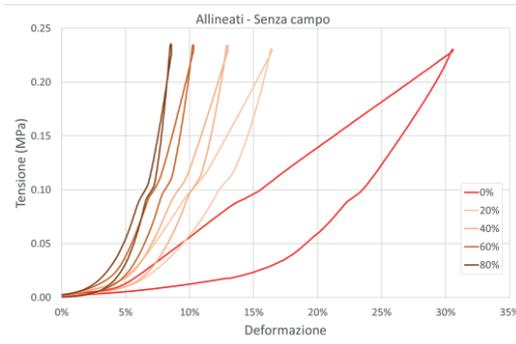


(a)

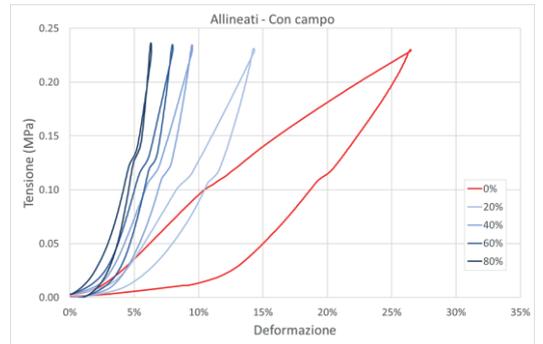


(b)

Figura 8. Prova di compressione su provini isotropi, senza applicazione di campo magnetico (a) e con campo applicato (b)

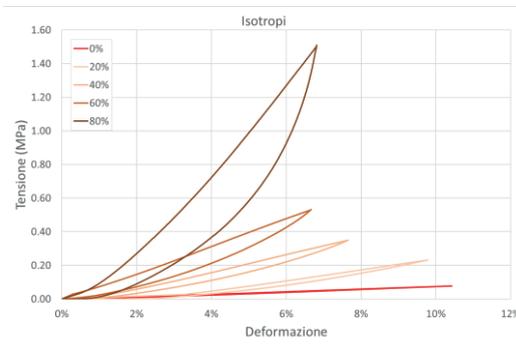


(a)

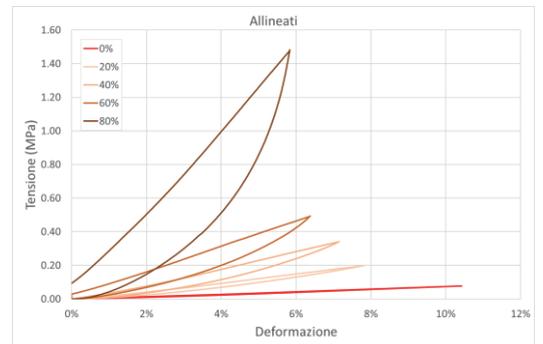


(b)

Figura 9. Prova di compressione su provini allineati, senza applicazione di campo magnetico (a) e con campo applicato (b)



(a)



(b)

Figura 10. Prova di flessione a tre punti su provini isotropi (a) e allineati (b)

5. DISCUSSIONE

ANOVA

Si analizzano le prove sperimentali valutando la risposta del materiale in termini di rigidezza, deformazione a tensione massima ed energia dissipata. Si è utilizzato un software di analisi della varianza (Design-Expert) per verificare l'influenza e le interazioni delle variabili considerate (percentuale in peso di particelle ferromagnetiche, disposizione spaziale delle particelle all'interno della matrice elastomerica, applicazione o non applicazione di un campo magnetico esterno durante l'esecuzione delle prove).

ANOVA prove di compressione

Il piano delle variabili è riportato in Figura 5, dove si mostrano variabili e livelli. Si riportano in Figura 11 i diagrammi semi-normali delle tre risposte considerate, utili a stimare quali siano le variabili che hanno un'influenza sulla risposta a colpo d'occhio, espresse dai punti che si discostano dalla retta degli errori, rappresentata dai triangoli verdi.

In questi diagrammi si mostrano le sole variabili che hanno una influenza statisticamente significativa sulla risposta del provino, tale influenza è tanto maggiore quanto si discostano dalla retta degli errori e tanto più probabile che non sia frutto del caso quanto il punto è spostato nella parte alta del diagramma. È possibile vedere graficamente come le variabili considerate modificano sensibilmente il comportamento della risposta considerata, in particolare la percentuale di particelle di ferro. In particolare, in Figura 12 si nota che la rigidezza aumenta all'aumentare della concentrazione di ferro, mentre l'allineamento causa un più lieve incremento della rigidezza, soprattutto ad alta percentuale di ferro. In Figura 13 si riporta invece l'effetto del tenore di rinforzo sulla deformazione massima e anche il debole effetto del campo applicato, che riduce la deformazione massima del materiale, in virtù del fatto che le particelle risentono del campo applicato e sono meno libere di spostarsi sotto l'effetto della compressione.

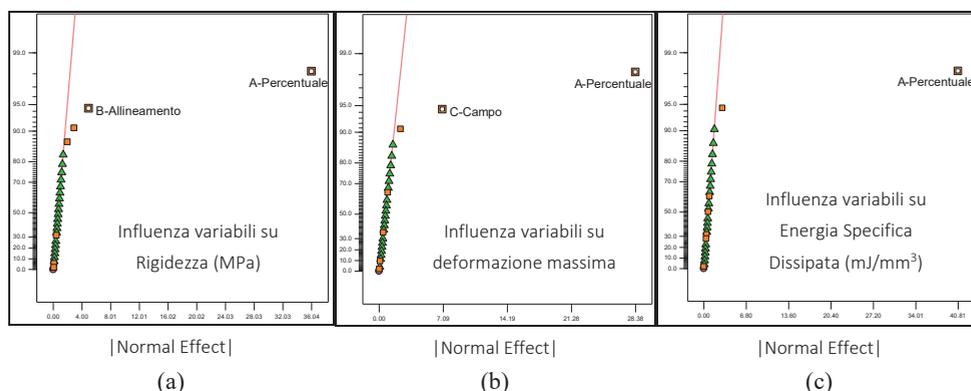


Figura 11. Diagramma semi-normale riguardante l'analisi della rigidezza (a), della deformazione massima (b) e dell'energia specifica dissipata (c) nelle prove a compressione

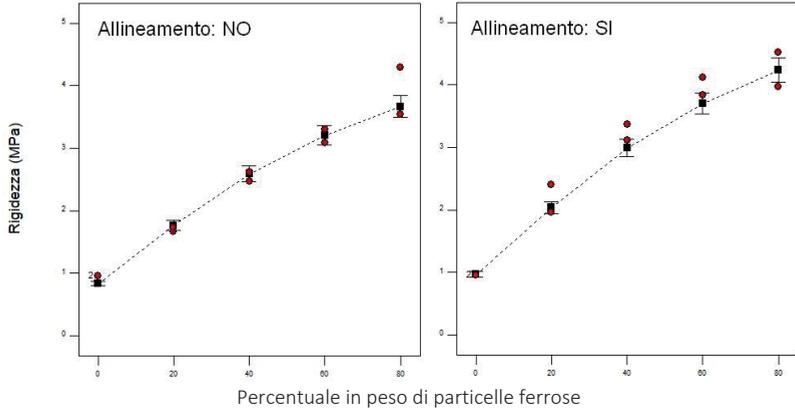


Figura 12. Rigidezza in funzione di allineamento e percentuale di particelle

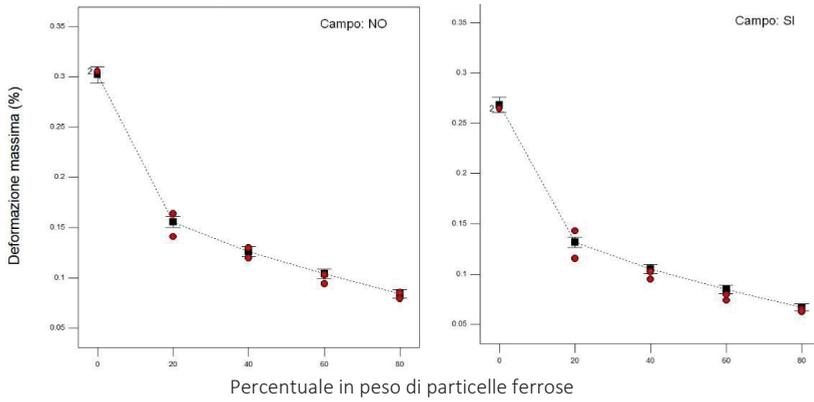


Figura 13. Deformazione percentuale massima in funzione di campo applicato e percentuale di particelle

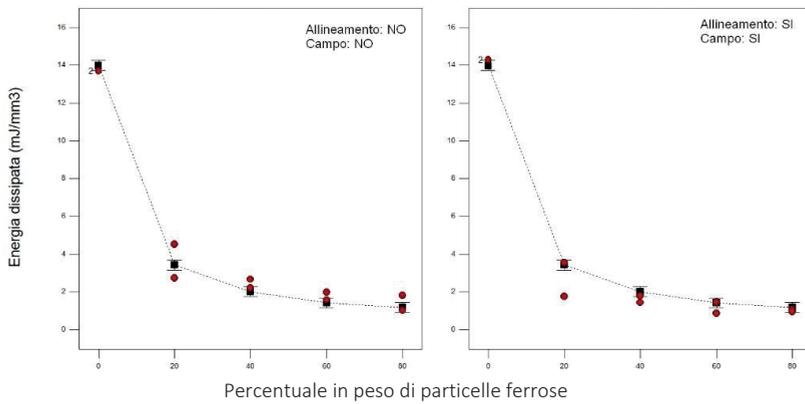


Figura 14. Energia dissipata, effetto delle variabili considerate

In Figura 14 si riporta invece l'effetto del tenore di rinforzo sulla energia dissipata, che, come evidenziato dalla ANOVA è influenzata solamente dalla quantità di ferro presente nell'elastomero. Apparentemente non si nota un'influenza del campo per quanto riguarda questa grandezza, per cui non si può controllare lo smorzamento di questo materiale in funzione di una grandezza esterna.

Dalla ANOVA si ricava quindi che il comportamento in compressione di questo elastomero magnetoreologico, per i valori di campo provati, è solo debolmente magnetoreologico, per cui si intende investigare in futuro cosa accada in presenza di campi sensibilmente più elevati, per esempio ottenuti con specifici avvolgimenti elettrici.

ANOVA prove di flessione a tre punti

L'ANOVA è stata effettuata in accordo con il piano sperimentale descritto nei paragrafi precedenti, considerando le stesse risposte delle prove di compressione.

Si riportano in Figura 15 i diagrammi semi-normali delle tre risposte considerate.

Nel caso delle prove a flessione è possibile vedere graficamente come soltanto la percentuale di particelle di ferro modifichi sensibilmente il comportamento della risposta considerata. In particolare, in Figura 16 si nota che la rigidità aumenta all'aumentare della concentrazione di ferro, soprattutto si assiste ad un lieve aumento fino al 60% e ad un aumento molto elevato all'80%. In Figura 17 si riporta invece l'effetto del tenore di rinforzo sulla deformazione massima, che riduce la deformazione massima del materiale.

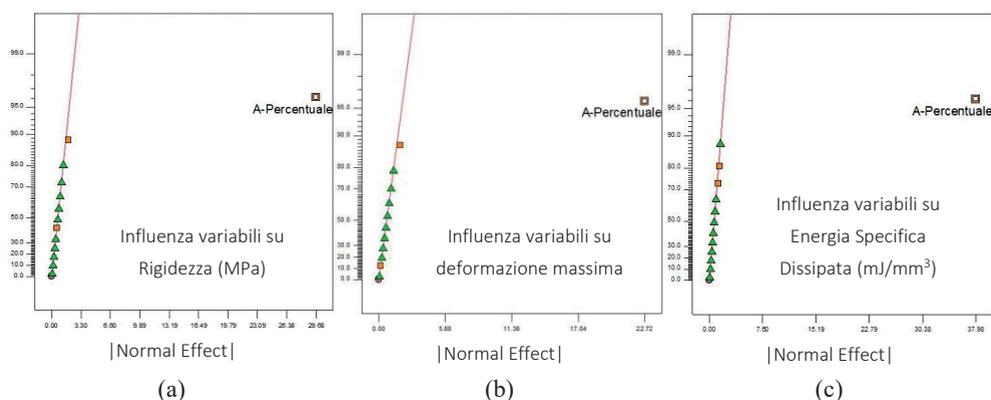


Figura 15. Diagramma semi-normale riguardante l'analisi della rigidezza (a), della deformazione massima (b) e dell'energia specifica dissipata (c) nelle prove a flessione

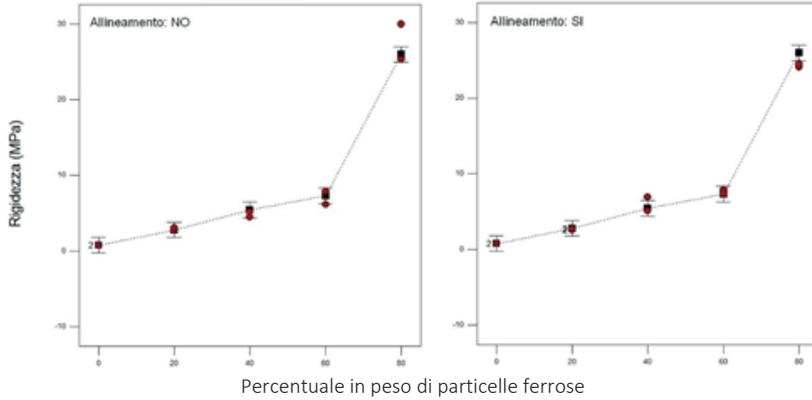


Figura 16. Rigidezza in funzione di allineamento e percentuale di particelle

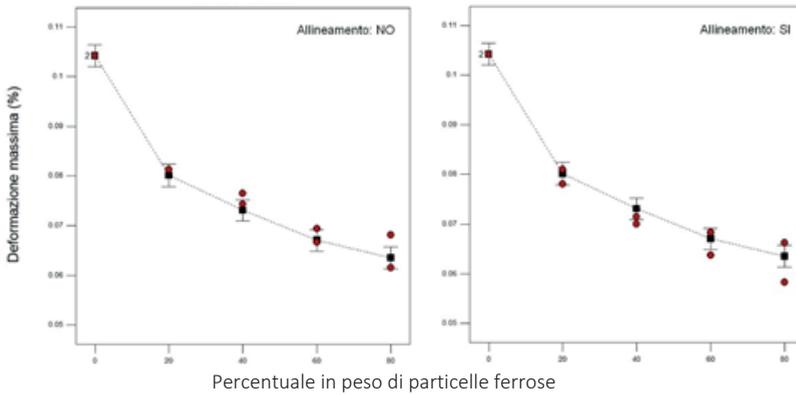


Figura 17. Deformazione percentuale massima in funzione di campo applicato e percentuale di particelle

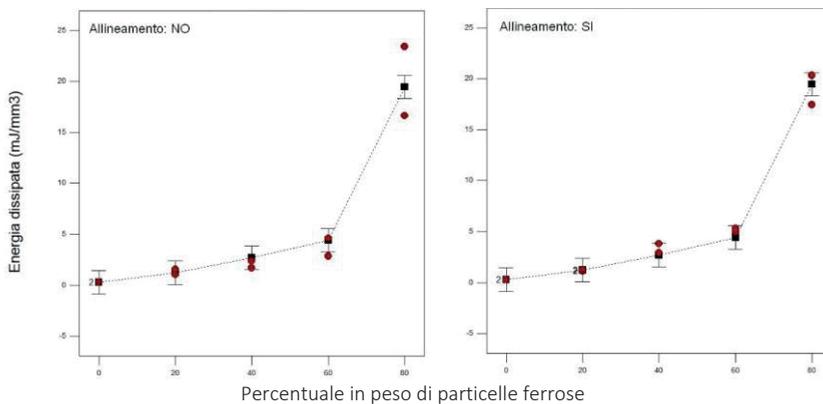


Figura 18. Energia dissipata, effetto delle variabili considerate

	Compressione			Flessione a tre punti	
	Incremento % Fe	Allineamento provino	Presenza Campo	Incremento % Fe	Allineamento provino
Rigidezza (MPa)	+++	++	+	++	X
Deformazione massima (%)	---	X	--	--	X
Energia Dissipata (mJ/mm ³)	--	X	X	++	X

Figura 19. Tabella riassuntiva ANOVA

In Figura 18 si riporta invece l'effetto del tenore di rinforzo sulla energia dissipata, che, come evidenziato dalla ANOVA è influenzata solamente dalla quantità di ferro presente nell'elastomero. La percentuale di ferro aumenta l'energia dissipata in maniera molto forte tra il 60% e l'80%.

L'allineamento in strutture colonnari delle particelle ferromagnetiche non influisce sulla risposta del sistema. Nelle prove di compressione un'influenza dell'allineamento dei provini era comprensibile visto che venivano sollecitati nella stessa direzione delle strutture colonnari, mentre nella sollecitazione flessionale si può immaginare che questo tipo di allineamento sia pressoché ininfluente.

Tabella riassuntiva ANOVA

Per concludere l'ANOVA si riporta in Figura 19 una tabella riassuntiva che mostra l'influenza di ogni singolo fattore sulle risposte del sistema analizzate.

6. CONCLUSIONI

Questo lavoro analizza il comportamento magnetomeccanico di un elastomero magnetoreologico in compressione e flessione. Le prove sperimentali hanno evidenziato che il fattore più influente in tutte le prove effettuate è la percentuale in peso di materiale ferromagnetico presente all'interno della matrice viscoelastica.

Per quanto riguarda le prove di compressione, la rigidezza dei provini, a parità di altri fattori, aumenta decisamente con l'aumentare della percentuale di ferro. Nelle prove di flessione, fino al 60% di materiale ferromagnetico si assiste ad un leggero aumento della rigidezza, mentre i provini all'80% mostrano una rigidezza estremamente più elevata. La deformazione percentuale a tensione massima, invece, diminuisce all'aumentare della percentuale di materiale ferromagnetico. Questo vale sia per le prove di compressione che per le prove di flessione.

L'energia specifica dissipata all'aumentare della percentuale di materiale ferromagnetico dà invece risposte diverse nel caso della compressione, dove diminuisce, e della flessione, dove invece aumenta (soprattutto per il provino all'80% di ferro). Questa discrepanza sarà oggetto di studi futuri sullo stesso materiale. L'influenza dell'allineamento

(anisotropia del materiale creata ad hoc durante la polimerizzazione), non è elevata per la prova di flessione, mentre in compressione i provini allineati registrano valori di rigidità più elevati rispetto ai provini isotropi. L'allineamento invece non influenza né la deformazione a tensione massima né l'energia specifica dissipata.

La deformazione percentuale a tensione massima è la risposta maggiormente influenzata dal campo magnetico esterno, per quanto non in misura paragonabile al tenore di particelle ferrose. L'applicazione del campo fa registrare un abbassamento di qualche punto percentuale della deformazione, a parità delle altre variabili. Non è stata rilevata un'influenza del campo sull'energia dissipata, forse a causa della bassa intensità di campo applicata. In futuro si intende, tramite l'utilizzo di avvolgimenti elettromagnetici a più alta intensità, investigare più in profondità l'effetto del campo magnetico applicato, che è la variabile più interessante da valutare per applicazioni ingegneristiche, in quanto renderebbe controllabile il materiale in maniera semplice e veloce.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Golinelli, N., Spaggiari, A., & Dragoni, E. (2015). Mechanical behaviour of magnetic Silly Putty: viscoelastic and magnetorheological properties. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*.
- [2] Cross, R. (2012). Elastic and viscous properties of Silly Putty. *American Journal of Physics*.
- [3] Ruddy, C., Ahearne, E., & Byrne, G. (n.d.). A review of magnetorheological elastomers: properties and applications. *Advanced Manufacturing Science (AMS) Research Centre, Mechanical Engineering, University College Dublin, Belfield, Dublin 4, Ireland*.
- [4] Kallio, M. (2005). The elastic and damping properties of magnetorheological elastomers. *VTT Publications 565*.
- [5] Kaleta, J., Lewandowski, D., Mech, R., & Zajac, P. (n.d.). *Smart Magnetic Composites*. Institute of Materials Science and Applied Mechanics, Wrocław University of Technology - Poland.
- [6] C. Lian, K. Lee, C. Lee (2015). Friction and wear characteristics of magneto-rheological elastomers based on silicone/polyurethane hybrid. Department of Mechanical Engineering, Inha University, 253 Yonghyeon-dong, Nam-gu, Incheon 402-751, South Korea.
- [7] R. Li, Z. Zhang, S. W. Chen, and X. J. Wang (2015). Micromechanical analysis on anisotropy of structured magneto-rheological elastomer. Chongqing univ of Posts & Telecommunications, Chongqing 400065, China. Chongqing univ of Sci & Technol, Academy Math & Phys, Chongqing 400030, China.

CASO LIMITE DI GRASHOF DEL QUADRILATERO ARTICOLATO PIANO E TERNE PITAGORICHE

Alessandro Rivola

Dipartimento di Ingegneria Industriale,
Università di Bologna,
via Fontanelle 40, Forlì, Italia
E-mail: alessandro.rivola@unibo.it

Abstract. Nel presente lavoro si studia un semplice problema di sintesi cinematica di un quadrilatero articolato piano. Dopo aver classificato il quadrilatero in base ai tradizionali approcci presenti in letteratura, se ne opera la sintesi cinematica e, successivamente, si trovano le soluzioni del problema di sintesi nel caso in cui le lunghezze dei membri del quadrilatero siano numeri interi (positivi), mostrando che sono correlate con le terne pitagoriche primitive. Avere a disposizione delle soluzioni con lunghezze intere consente un vantaggio non trascurabile quando si vuole procedere ad una prima sintesi di massima del meccanismo imponendo alcune proporzioni desiderate tra le lunghezze dei membri. Ciò è di un certo rilievo laddove le proporzioni e le forme costituiscono un aspetto rilevante, come ad esempio nel campo dell'interior design o del design in generale.

Keywords: quadrilatero articolato, sintesi cinematica, Grashof, terne pitagoriche

1. INTRODUZIONE

Si consideri un quadrilatero in grado di assumere le due posizioni *aperta* e *chiusa* mostrate rispettivamente in Fig. (1a) e in Fig. (1c). Tale meccanismo è in grado di far compiere alla biella (il membro opposto al telaio) una rotazione di 90 gradi in senso orario nel passaggio dalla configurazione *aperta* a quella *chiusa* e può essere utile, ad esempio, per movimentare oggetti come panche o ribaltine che, rese solidali alla biella, nella posizione *chiusa* verrebbero ad adagiarsi lungo la parete verticale (lato A_0B_0). In posizione *chiusa* l'oggetto così movimentato rivolgerebbe verso l'esterno la superficie che in posizione *aperta* è rivolta verso l'alto, aspetto di un certo interesse in determinati campi applicativi come ad esempio l'*interior design*, dove il lato estetico riveste un ruolo rilevante.

Le lunghezze dei membri sono indicate con l_k ($k = 1, \dots, 4$). In particolare: l_4 è la lunghezza A_0B_0 del telaio, l_1 è la lunghezza A_0A dell'asta superiore, l_2 è la lunghezza AB della biella (il membro opposto al telaio) ed, infine, l_3 è la lunghezza B_0B dell'asta inferiore.

La presente memoria è così articolata: nella Sezione 2 si classifica il quadrilatero secondo i tradizionali approcci presenti in letteratura; la Sezione 3 è dedicata alla sintesi cinematica del meccanismo condotta in alcuni casi in cui il problema ha un numero di soluzioni finito; la

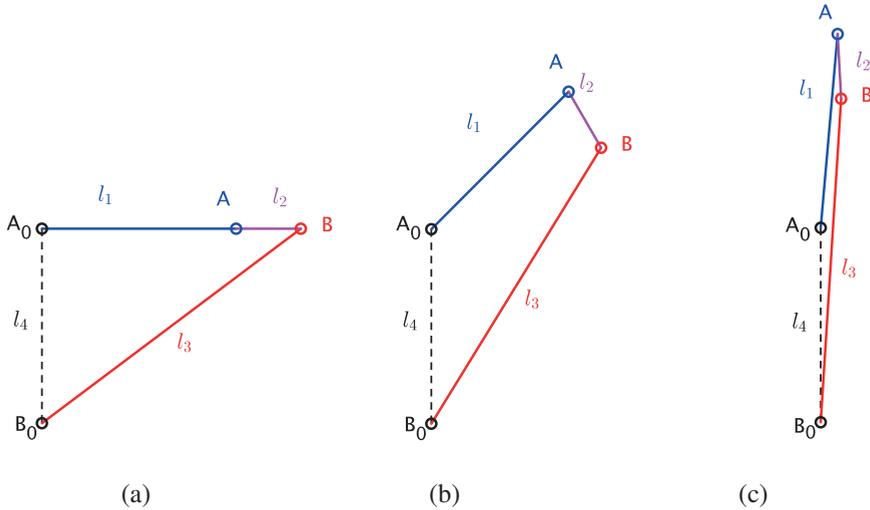


Figura 1. Quadrilatero articolato:
 a) posizione *aperta*; b) posizione *intermedia*; c) posizione *chiusa*.

Sezione 4 considera il caso particolare in cui le lunghezze dei membri del quadrilatero siano numeri interi (positivi). Infine, si tracciano le conclusioni.

2. CLASSIFICAZIONE DEL MECCANISMO

Volendo classificare il quadrilatero, poiché nella disposizione *aperta* (Fig. (1a)) il membro B_0B si presenta come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, è sicuramente quello di lunghezza maggiore (lunghezza l_3). Di conseguenza, la *biella* AB , la cui lunghezza l_2 viene a sommarsi ad l_3 nella disposizione *chiusa* (Fig. (1c)), è sicuramente il membro di lunghezza minore. Risulta naturalmente soddisfatta l'uguaglianza:

$$l_3 + l_2 = l_4 + l_1 \quad (1)$$

che, se si indica con l la lunghezza del membro più lungo, con s quella del membro più corto e con p e q le lunghezze intermedie, viene a coincidere con la:

$$l + s = p + q \quad (2)$$

nota come *caso limite di Grashof* [1].

Si tratta di una categoria limite tra i quadrilateri di *Grashof* e quelli *non-Grashof*, che vede tutti i membri raggiungere una posizione in cui sono allineati.

Tale configurazione è nota come *change point* ed il quadrilatero viene così ad appartenere alla categoria dei *change-point mechanisms* [1–4]. Al *change point* il moto è cinematicamente indeterminato. In [5] la stessa categoria è definita come *special-case Grashof kinematic chains*, in accordo con [6] in cui è definita *transition linkages or Grashof neutral linkages*. La medesima tipologia di meccanismi è inoltre definita come *folding linkages* (meccanismi “pieghevoli” o “richiudibili”) da [7, 8].

Oltre a ricadere nel *caso limite di Grashof*, il quadrilatero in esame ha la *biella* come lato più corto, come sopra evidenziato. Secondo [9], dal momento che si tratta di un *change-point mechanism* avente la *biella* come lato più corto, il quadrilatero risulta appartenere alla categoria no. 11 (tra le 14 individuate in [9]) denominata *change point rocker-crank-rocker (CPRCR)*, ossia si tratta di un quadrilatero con due *bilancieri* (le aste di lunghezza l_1 e l_3), in cui la *biella* è in grado di compiere una rotazione completa.

Tornando alla classificazione dei quadrilateri articolati piani, in [7, 8] è presentata una alternativa alla formulazione di *Grashof* che non richiede di identificare chi, tra i membri del quadrilatero, sia il più lungo e il più corto. La classificazione introduce tre parametri (T_1, T_2, T_3), la cui combinazione di segni identifica otto tipologie di quadrilateri: quattro sono di *Grashof* ($T_1 T_2 T_3 > 0$) e quattro *non-Grashof* ($T_1 T_2 T_3 < 0$). Se uno qualunque dei parametri T_1, T_2 o T_3 si annulla, allora si cade nel *caso limite di Grashof* e il meccanismo può assumere una configurazione in cui tutti i membri sono tra loro allineati, cioè risulta “pieghevole” o “richiudibile” (*folding linkage*).

Considerando tutte le possibili combinazioni di segno o di valore nullo di T_1, T_2 e T_3 , risultano 27 tipologie di quadrilateri, di cui 19 sono *folding linkages*.

Inoltre, il numero di parametri T_i nulli definisce il numero di configurazioni con cui si può “richiudere” il meccanismo. Nel caso in esame, la definizione dei parametri T_i conduce a (si veda [7, 8]):

$$\begin{aligned} T_1 &= l_4 - l_1 + l_2 - l_3 \\ T_2 &= l_4 - l_1 - l_2 + l_3 \\ T_3 &= l_2 + l_3 - l_4 - l_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Poiché, come già evidenziato, l’asta inferiore B_0B (di lunghezza l_3) è quella più lunga e vale la Eq. (1), è facile rendersi conto che:

$$T_1 < 0 \quad T_2 > 0 \quad T_3 = 0 \quad (4)$$

cioè, il meccanismo in esame si può richiudere solo nella configurazione di Fig. (1c), in cui il membro più lungo e quello più corto sono adiacenti e distesi.

3. SINTESI DEL MECCANISMO

Per la sintesi di un quadrilatero in grado di assumere le due posizioni estreme (a e c) di Fig. (1), occorre soddisfare le seguenti:

$$\begin{cases} l_4^2 + (l_1 + l_2)^2 = l_3^2 \\ l_2 + l_3 = l_1 + l_4 \end{cases} \quad (5)$$

che risultano determinate una volta note due delle quattro lunghezze.

La coppia di dati può variare a seconda delle esigenze progettuali. Per fissare le idee, si supponga che sia imposta la lunghezza l_4 del telaio A_0B_0 .

Se si assumono come parametri di progetto le lunghezze l_2 e l_4 (che devono ovviamente essere positive), l_1 e l_3 si ricavano dalle Eqn. (5) e risulta:

$$l_1 = \frac{l_2 l_4}{l_4 - 2l_2} \quad l_3 = \frac{l_4^2 - 2l_2 l_4 + 2l_2^2}{l_4 - 2l_2} \quad (6)$$

Le Eqn. (6) forniscono valori di l_1 e l_3 positivi a patto che sia:

$$l_4 > 2l_2 \quad (l_2 > 0, l_4 > 0) \quad (7)$$

Infatti, essendo $l_2 > 0$ e $l_4 > 0$, lo è anche il loro prodotto, cioè il numeratore di l_1 . Dovendo essere $l_1 > 0$ deve quindi esserlo anche il suo denominatore, ossia deve valere la Eqn. (7). Analogamente, valendo la Eqn. (7), affinché l_3 sia positivo deve esserlo anche il suo numeratore, il quale lo è sempre poiché per qualunque valore reale di l_2 si tratta di un trinomio di secondo grado irriducibile¹. In definitiva, la Eqn. (7) è condizione sufficiente per assicurare un valore positivo alle lunghezze l_1 e l_3 .

Se invece si assumono le lunghezze l_3 e l_4 come parametri di progetto, dalle Eqn. (5) si ricavano l_1 e l_2 . Ponendo $L = l_1 + l_2$ (L è la lunghezza del cateto A_0B del triangolo rettangolo di Fig. (1a)), risulta:

$$L = \sqrt{l_3^2 - l_4^2} \quad (8)$$

e:

$$l_1 = \frac{L + l_3 - l_4}{2} \quad l_2 = \frac{L - l_3 + l_4}{2} \quad (9)$$

Le lunghezze L , l_1 e l_2 risultano tutte positive, a patto che sia:

$$l_3 > l_4 \quad (l_3 > 0, l_4 > 0) \quad (10)$$

D'altra parte, come più volte evidenziato, il membro più lungo del quadrilatero è quello di lunghezza l_3 e pertanto si avrà cura di assicurare la Eqn. (10) nella definizione dei dati di progetto. La Eqn. (10) assicura che sia $L > 0$. Inoltre, poiché $L > 0$ e $l_3 - l_4 > 0$, certamente $l_1 > 0$. Infine, l_2 è senza dubbio positivo dal momento che vale certamente la *disuguaglianza triangolare* $l_3 < L + l_4$ poiché L , l_4 e l_3 sono le lunghezze dei tre lati di un triangolo (con l_3 maggiore di L e l_4).

Infine, se si assumono le lunghezze l_1 e l_4 come parametri di progetto, dalle Eqn. (5) si ricavano le lunghezze l_2 e l_3 :

$$l_2 = \frac{l_1 l_4}{2l_1 + l_4} \quad l_3 = \frac{(l_1 + l_4)^2 + l_1^2}{2l_1 + l_4} \quad (11)$$

le quali sono senz'altro positive per $l_1 > 0$ e $l_4 > 0$.

4. TERNE PITAGORICHE

Si consideri ora il caso in cui la lunghezza l_k ($k = 1, \dots, 4$) delle aste sia un numero intero (ovviamente positivo). Ottenere delle soluzioni con lunghezze intere consente di poter operare una prima sintesi di massima del meccanismo imponendo alcune proporzioni desiderate tra le lunghezze dei membri, cosa piuttosto utile in determinati campi applicativi, quando le proporzioni e le forme costituiscono un aspetto rilevante, come ad esempio nell'*interior design* o nel *design* in generale.

¹Per qualunque valore di l_2 (o di l_4) l'equazione di secondo grado $l_4^2 - 2l_2 l_4 + 2l_2^2 = 0$ ha discriminante negativo e pertanto il trinomio ha il segno del coefficiente del termine di secondo grado, vale a dire è positivo.

l_2	l_4	L	l_3	l_1
1	3	4	5	3
1	4	3	5	2
2	5	12	13	10
2	6	8	10	6
2	8	6	10	4
2	12	5	13	3
3	7	24	25	21
3	8	15	17	12
3	9	12	15	9
3	12	9	15	6
3	15	8	17	5
3	24	7	25	4
4	9	40	41	36
4	10	24	26	20
4	12	16	20	12
4	16	12	20	8
4	24	10	26	6
4	40	9	41	5

Tabella 1. Soluzioni delle Eqn. (5) per valori interi positivi delle lunghezze l_k ($k = 1, \dots, 4$): valori della lunghezza del lato più corto (la *biella*) pari a $l_2 = 1, \dots, 4$. I valori delle tre colonne $\{l_4, L, l_3\}$ costituiscono *terne pitagoriche*.

Avendo posto $L = l_1 + l_2$, i tre valori $\{l_4, L, l_3\}$ costituiscono certamente una *terna pitagorica*, dal momento che la prima delle Eqn. (5) diventa *diofantea*² ed assume la forma *pitagorica* [10, 11]:

$$l_4^2 + L^2 = l_3^2 \quad (12)$$

La Tab. (1) riporta le soluzioni del problema definito dalle Eqn. (5) impiegando le Eqn. (6), per valori della lunghezza del lato più corto (la *biella*) pari a $l_2 = 1, \dots, 4$. I valori $\{l_4, L, l_3\}$ delle tre colonne centrali costituiscono *terne pitagoriche*.

La Tab. (2) riporta le soluzioni limitando la lunghezza del membro più lungo a valori $l_3 < 100$ e considerando solo le *terne pitagoriche primitive* [10], ossia quelle in cui non esiste un divisore comune di $\{l_4, L, l_3\}$. Inoltre, ad ulteriore compattazione, nella Tab. (2) si sono escluse le soluzioni in cui i valori delle colonne l_4 ed L risultano interscambiabili (cosa del tutto lecita in quanto si tratta dei due cateti del triangolo pitagorico).

Le soluzioni riportate in Tab. (2) sono 16, cioè proprio pari al numero di *terne pitagoriche primitive* esistenti in cui il terzo valore (l'ipotenusa) è < 100 [12]. In altre parole, si è giunti alla conclusione che tutte le *terne pitagoriche primitive* esistenti in cui il terzo valore è < 100 consentono di soddisfare il problema definito dalle (5), nel caso in cui la lunghezza l_k ($k = 1, \dots, 4$) delle aste sia un numero intero positivo.

Tale conclusione è valida per tutte le *terne pitagoriche primitive* esistenti. Per dimostrarlo, occorre provare che, data una qualunque *terna pitagorica primitiva* $\{l_4, L, l_3\}$ in cui $L =$

²Una equazione si dice *diofantea* se deve essere risolta mediante numeri interi [10].

l_2	l_4	L	l_3	l_1
1	3	4	5	3
2	5	12	13	10
3	7	24	25	21
3	8	15	17	12
4	9	40	41	36
5	11	60	61	55
5	12	35	37	30
6	13	84	85	78
6	20	21	29	15
7	16	63	65	56
10	28	45	53	35
12	33	56	65	44
14	36	77	85	63
15	39	80	89	65
15	48	55	73	40
20	65	72	97	52

Tabella 2. Soluzioni delle Eqn. (5) per valori interi positivi delle lunghezze l_k ($k = 1, \dots, 4$) con $l_3 < 100$. I valori di $\{l_4, L, l_3\}$ costituiscono tutte le 16 *terne pitagoriche primitive* in cui $l_3 < 100$.

$l_1 + l_2$, vale a dire una terna che soddisfa la prima delle Eqn. (5), esistono sempre due interi positivi l_1 e l_2 che soddisfano anche la seconda delle Eqn. (5).

La dimostrazione risiede nel fatto che tutte le *terne pitagoriche primitive* si possono ottenere da una qualunque coppia di interi positivi *coprimi*³, $m > n$, e di diversa parità, tali per cui (secondo le formule di Euclide) [10]:

$$l_4 = m^2 - n^2; \quad L = 2mn; \quad l_3 = m^2 + n^2 \quad (13)$$

Infatti, introducendo le:

$$l_2 = L - l_1 \quad l_1 = L - l_2 \quad (14)$$

nella seconda delle Eqn. (5) si ottengono nuovamente le Eqn. (9) che, in base alle Eqn. (13) conducono alle:

$$l_1 = n(m + n) \quad l_2 = n(m - n) \quad (15)$$

Dalle Eqn. (15), essendo m e n interi positivi con $m > n$, si vede chiaramente che l_1 e l_2 sono a loro volta numeri interi positivi. Si è quindi dimostrato che tutte le *terne pitagoriche primitive* esistenti consentono di soddisfare il problema definito dalle Eqn. (5) nel caso in cui la lunghezza l_k ($k = 1, \dots, 4$) delle aste sia un numero intero positivo.

³Due numeri m e n si dicono *coprimi* (o primi tra loro o relativamente primi) se e solo se essi non hanno nessun divisore comune eccetto 1 e -1 o, in modo equivalente, se il loro massimo comune divisore è 1.

5. CONCLUSIONI

Si è partiti da un semplice problema di sintesi cinematica di un quadrilatero articolato piano che deve assumere le due posizioni *aperta* e *chiusa* mostrate rispettivamente in Fig. (1a) e in Fig. (1c).

Dopo aver classificato il quadrilatero in base ai tradizionali approcci presenti in letteratura, se ne è operata la sintesi cinematica in alcuni casi in cui il problema risulta determinato, ossia quando sono note due delle quattro lunghezze dei membri.

Successivamente, si sono trovate le soluzioni del problema di sintesi nel caso in cui le lunghezze dei membri del quadrilatero siano numeri interi (positivi), mostrando che le soluzioni sono fornite da tutte le *terne pitagoriche primitive* $\{l_4, L, l_3\}$ (con $L = l_1 + l_2$).

In definitiva, come ausilio per la sintesi di quadrilateri che debbano compiere il movimento illustrato in Fig. (1), si può impiegare la Tab. 2, tenendo conto che è possibile scambiare i valori l_4 ed L . Ovviamente, scambiando i valori di l_4 e L , si modifica di conseguenza il valore di l_1 , essendo $l_1 = L - l_2$. Più in generale, data una qualunque *terna pitagorica primitiva* $\{l_4, L, l_3\}$, anche tra quelle in cui $l_3 > 100$ (non comprese in Tab. 2), i valori dei lati l_1 e l_2 si trovano rispettivamente impiegando le Eqn. (9) e $l_2 = L - l_1$.

Naturalmente, il movimento tra le posizioni estreme (*a* e *c*) di Fig. (1) può essere realizzato anche applicando un fattore di scala alla lunghezza di ogni lato del quadrilatero così ottenuto.

Avere a disposizione delle soluzioni con lunghezze intere consente un vantaggio non trascurabile dal momento che si può procedere ad una prima sintesi di massima del meccanismo imponendo alcune proporzioni desiderate tra le lunghezze dei membri. Ciò è rilevante laddove le proporzioni e le forme costituiscono un aspetto rilevante, come ad esempio nel campo dell'*interior design* o del *design* in generale.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'architetto Nicola Golfari per aver stimolato lo studio del problema e per le interessanti discussioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Grashof, F., 1890. *Theoretische maschinenlehre*, Vol. 3. L. Voss.
- [2] Hartenberg, R. S., and Denavit, J., 1964. *Kinematic synthesis of linkages*. McGraw-Hill.
- [3] Paul, B., 1979. "A reassessment of Grashof's criterion". *Journal of Mechanical Design*, **101**(3), pp. 515–518.
- [4] Erdman, A. G., Sandor, G. N., and Kota, S., 1984. *Mechanism design: analysis and synthesis*. Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- [5] Norton, R. L., and Wang, S. S.-L., 2004. *Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines*. McGraw-Hill Higher Education.
- [6] Waldron, K. J., Kinzel, G. L., and Agrawal, S. K., 2016. *Kinematics, dynamics, and design of machinery*. John Wiley & Sons, New York.
- [7] Murray, A., and Larochelle, P., 1998. "A classification scheme for planar 4R, spherical 4R, and spatial RCCC linkages to facilitate computer animation". *ASME Paper No. DETC98/MECH-5887*.
- [8] McCarthy, J. M., and Soh, G. S., 2010. *Geometric design of linkages*, 2nd ed., Vol. 11. Springer Science & Business Media.

- [9] Barker, C. R., 1985. "A complete classification of planar four-bar linkages". *Mechanism and Machine Theory*, **20**(6), pp. 535–554.
- [10] Sierpinski, W., 1988. *Elementary Theory of Numbers: Second English Edition (edited by A. Schinzel)*, Vol. 31. Elsevier.
- [11] Sierpinski, W., 1962. *Pythagorean triangles*, Vol. 9 of *The Scripta Mathematica Studies*. Yeshiva Univ., New York.
- [12] Lehmer, D. N., 1900. *Asymptotic evaluation of certain totient sums*. University of Chicago.

PROGETTAZIONE E VALIDAZIONE SPERIMENTALE DI UN DISPOSITIVO PER IL RECUPERO DI ENERGIA DA VIBRAZIONI

Alessandro Munari

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia, Italy
E-mail: 202428@studenti.unimore.it*

Davide Castagnetti

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia, Italy
E-mail: davide.castagnetti@unimore.it*

Riccardo Rubini

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia, Italy
E-mail: riccardo.rubini@unimore.it*

Marco Cocconcelli

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria,
Università di Modena e Reggio Emilia, Italy
E-mail: marco.cocconcelli@unimore.it*

Abstract. *I consumi sempre più bassi degli attuali dispositivi elettronici permettono lo sviluppo di reti di sensori energeticamente autonome, che si autoalimentano recuperando l'energia dispersa nell'ambiente. Una via particolarmente promettente è quella del recupero dell'energia da vibrazioni meccaniche ambientali convertendole in energia elettrica tramite, ad esempio, trasduttori piezoelettrici o elettromagnetici. Questo lavoro presenta la progettazione e la convalida sperimentale di un innovativo ed efficiente convertitore elettromagnetico di energia da vibrazioni ambientali, basato su un sistema di molle elicoidali contrapposte rispetto ad un magnete permanente di massa variabile, capace di essere sintonizzato sulla frequenza desiderata.*

Keywords: *electromagnetic energy harvesting, ambient vibrations, multifrequency response, experimental*

1. INTRODUZIONE

La conversione dell'energia cinetica associata alle vibrazioni ambientali, in energia elettrica mediante trasduzione elettromagnetica, è una via particolarmente efficiente per autoal-

imentare dispositivi e sensori elettronici autonomi. In tal modo è, infatti, possibile rendere energeticamente autonomi i sensori, evitando tra l'altro le costose operazioni di sostituzione delle batterie o il cablaggio elettrico delle reti. In letteratura sono proposte numerose soluzioni per la conversione dell'energia cinetica ambientale in energia elettrica, sia basata su trasduzione piezoelettrica sia su trasduzione elettromagnetica. In particolare, è possibile distinguere tra sistemi con risposta lineare [1–11] e sistemi con risposta non lineare [12–19]. Tra i sistemi elettromagnetici con risposta non lineare, di particolare interesse quelli basati su molle magnetiche, particolarmente efficienti per il recupero di energia da vibrazioni. Nico et al [18] propongono un convertitore di energia, da vibrazioni ambientali a due gradi di libertà con amplificazione di velocità e trasduzione elettromagnetica, che ha la peculiarità di lavorare a frequenza inferiore ai 20 Hz. La caratteristica di questo convertitore sono le dimensioni ridotte (equivalente ad una batteria di tipo C), e l'impiego di molle elettromagnetiche, che permettono il movimento di un magnete rispetto ad una bobina. Molti altri sono gli esempi di convertitori che impiegano molle magnetiche, sia con conversione elettromagnetica [19], sia ibridi [19]. Caratteristica comune a queste soluzioni è l'ingombro ridotto e la compattezza, per rendere possibile la loro applicazione in sistemi di piccole dimensioni. Questo lavoro presenta la progettazione concettuale, lo sviluppo e la convalida sperimentale di un innovativo convertitore elettromagnetico di energia nell'ambito delle basse frequenze (minori di 50 Hz), orientato a sistemi di elevate dimensioni. Il sistema è costituito da una bobina che trasla rispetto ad un magnete ad essa coassiale, fisso a telaio; grazie ad una sospensione basata su molle elicoidali contrapposte, si ottiene un'elevata corsa della bobina, a favore dell'efficienza di conversione. L'articolo è strutturato in tre sezioni. Nella prima sono descritti gli aspetti teorici alla base del convertitore e la sua progettazione; nella seconda si riporta la convalida sperimentale e nella terza si discutono i risultati. In particolare, la convalida sperimentale ha confermato la capacità del sistema di lavorare a basse frequenze di risonanza, nell'intorno dei 10 Hz, con una significativa generazione di potenza. La soluzione proposta appare quindi promettente per il recupero di energia da vibrazioni ambientali in ambiti sia civili, sia industriali caratterizzati da basse frequenze.

2. METODO

La progettazione del convertitore elettromagnetico di energia ha seguito la metodologia strutturata del Quality Function Deployment [20], partendo dai bisogni cliente, fino alla progettazione concettuale, di sistema e di dettaglio. Le sezioni seguenti presentano i passi principali di questo percorso. In particolare, si è puntato all'efficienza di conversione, alla facilità di sintonizzazione su differenti frequenze di esercizio e ad un ingombro ridotto.

Concetto di Convertitore

Figura 1 mostra il concetto di convertitore proposto in questo lavoro, evidenziando i blocchi rappresentanti le sue funzioni principali. Si tratta di un sistema ad un grado di libertà, costituito da una bobina di rame (2) che scorre su delle guide con accoppiamento prismatico (6). La bobina (2) è collegata al telaio (1) tramite delle molle elicoidali (3). Quando il sistema va in risonanza meccanica, la bobina è eccitata dinamicamente e compie un moto traslatorio alternativo rispetto ad un magnete permanente (5), fisso a telaio tramite dei supporti (4). Per induzione elettromagnetica si origina una forza elettromotrice ai capi della bobina, che può essere utilizzata per fare funzionare un dispositivo oppure ricaricare una batteria.

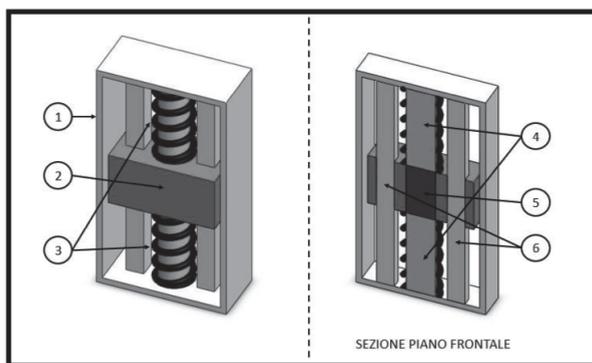


Figure 1. Schema concettuale della soluzione proposta per il convertitore elettromagnetico

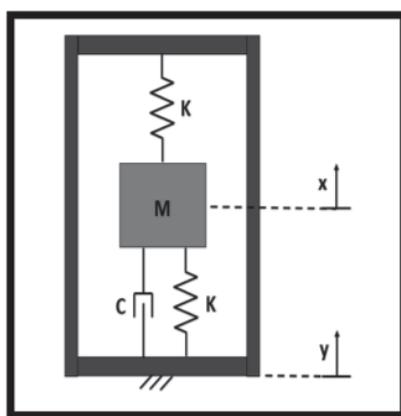


Figure 2. Schema del sistema meccanico equivalente al convertitore in Figura 1

Analisi Dinamica del Convertitore

Figura 2 mostra lo schema del sistema meccanico equivalente al concetto di convertitore di Figura 1. Trattandosi di un sistema ad un grado di libertà, riconducibile al classico schema massa, molla e smorzamento, la risposta dinamica del convertitore è descritta dalla seguente equazione di equilibrio dinamico:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

dove con m si intende la massa del sistema vibrante, con c la costante di smorzamento, con k la rigidità complessiva delle molle in serie, con F_0 e con ω , rispettivamente, il modulo e la frequenza della forzante. Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene l'ampiezza di oscillazione X_0 . Esprimendola in funzione sia del rapporto tra la pulsazione della forzante ω e della pulsazione naturale del sistema non smorzato ω_n , sia del fattore di smorzamento $\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ si ottiene:

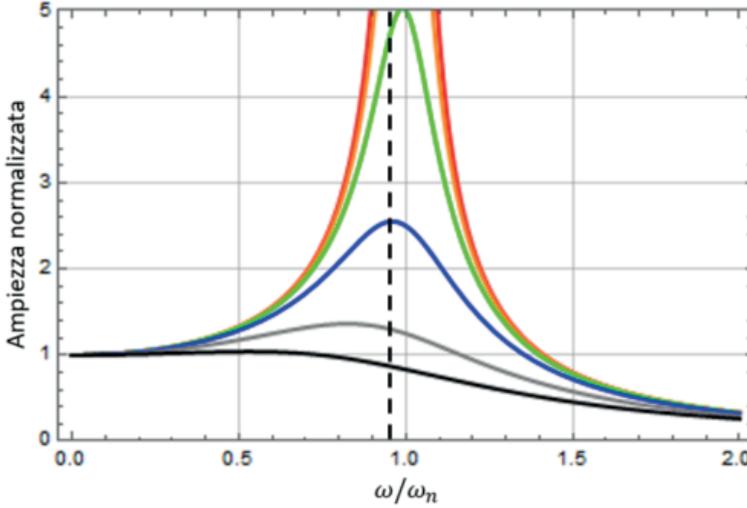


Figure 3. Ampiezza della risposta in frequenza di un sistema ad un grado di libertà

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad (2)$$

Con riferimento all'equazione 2, Figura 3 mostra nel dettaglio il classico andamento dell'ampiezza della risposta di un sistema lineare in funzione della frequenza della forzante in ingresso e dello smorzamento intrinseco al sistema. Ipotizzando uno smorzamento del 5% [21], ragionevole per un sistema di questo tipo soggetto principalmente allo smorzamento dovuto all'attrito nelle coppie prismatiche ed all'attrito viscoso con l'aria, ne deriva la frequenza naturale alla quale il sistema reale va in risonanza, in particolare:

$$\omega_s = 0.95\omega_n \quad (3)$$

dove ω_s rappresenta la pulsazione propria del sistema smorzato. Per n molle disposte in parallelo, la pulsazione naturale del sistema sarà:

$$\omega_s = 0.95\sqrt{\frac{nk}{m}} \quad (4)$$

Esplicitando rispetto alla rigidezza k , si ottiene il valore che devono avere le molle in funzione della pulsazione della forzante desiderata:

$$k = (\frac{\omega_s}{0.95})^2 \frac{m}{n} \quad (5)$$

A titolo di esempio, ipotizzando una massa della bobina pari a 0.25 kg (massa sospesa), quattro molle in parallelo, imponendo una frequenza naturale del sistema pari a 14 Hz, dalla 5 si trova che la rigidezza della singola molla deve essere pari a 535 N/mm. Incrementando la massa sospesa a 0.35 kg o 0.45 kg, la frequenza naturale del sistema smorzato, ω_s , prevista

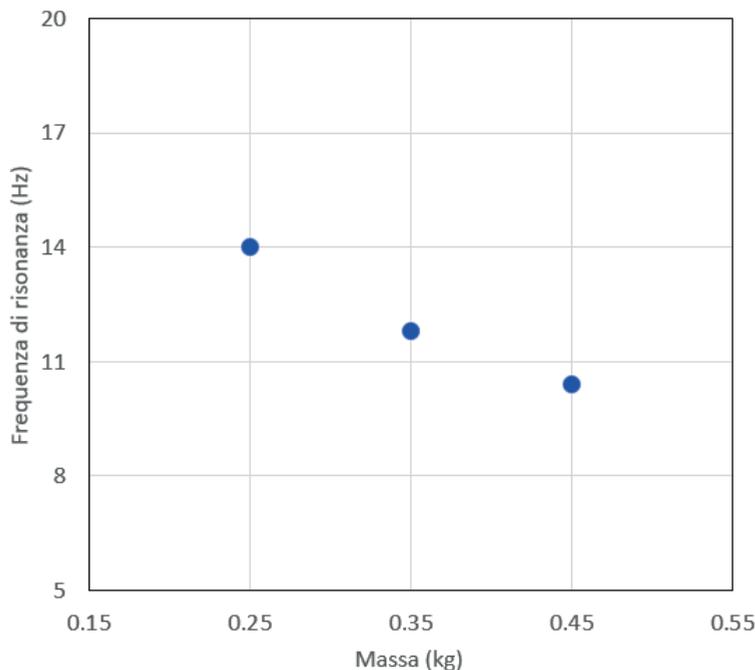


Figure 4. Ampiezza della risposta in frequenza di un sistema ad un grado di libertà

dal modello si riduce a 11.8 Hz e 10.4 Hz rispettivamente. Con riferimento al grafico in figura Figura 4, è possibile intravedere il tipico andamento di un inverso del quadrato, come suggerito dall'equazione 4.

Analisi della Conversione Elettromagnetica

Dal punto di vista della conversione elettromagnetica, il sistema proposto segue la legge di Faraday-Lenz, ossia la forza elettromotrice ai capi della bobina è direttamente proporzionale alla velocità di variazione del flusso del campo magnetico attraverso la bobina.

Figura 5 mostra il modello computazionale magnetostatico sviluppato al fine di prevedere in dettaglio il comportamento del sistema impiegando il software commerciale FEMM. Il modello è assialsimmetrico e descrive i magneti permanenti impiegati, il telaio che li sostiene ed una regione di ambiente sufficiente a contenere il campo magnetico ad essi associato. Figura 6 mostra l'andamento del campo magnetico nel sistema per due differenti configurazioni. Il caso A descrive il flusso magnetico all'interno di una generica spira quando la bobina si trova nel punto pi distante dal magnete (la scelta della distanza per lo studio è stata presa in base a considerazioni sulla dinamica attesa della bobina). Il caso B, invece, è funzionale ad ottenere il flusso magnetico nel punto in cui il flusso sarà massimo. Misurando la variazione di flusso magnetico che la singola spira incontra tra la posizione di Figura 6 B (posizione di massima escursione) e di Figura 6 A (piano di simmetria orizzontale), considerando la frequenza di risonanza del sistema e quindi la velocità di variazione del flusso entro la spira, nell'ipotesi di andamento lineare del flusso magnetico, è possibile stimare la

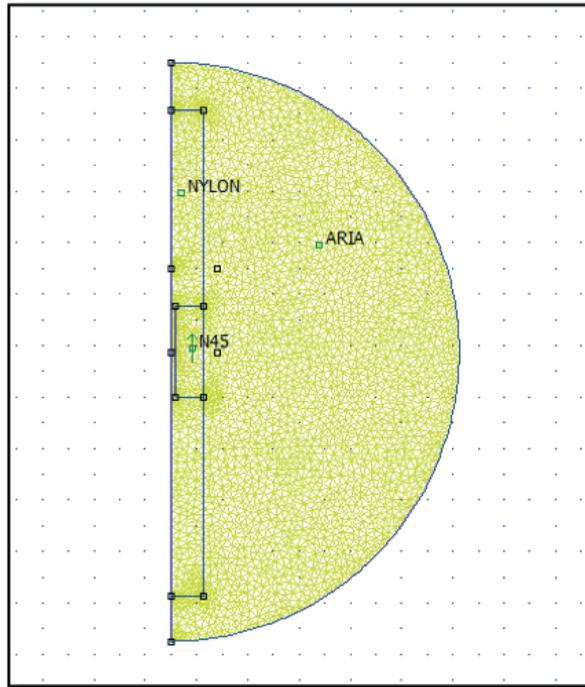


Figure 5. Modello del magnete, dei supporti e dell'aria circostante sul software FEMM

forza elettromotrice indotta che si genera ai suoi capi, secondo la seguente relazione approssimata:

$$|\xi| = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = 0.018[V] \quad (6)$$

Ipotizzando, infine, un totale di 1000 spire, e considerando un coefficiente di riduzione $\delta = 0.5$ che tenga conto che non tutte le spire sono soggette alla stessa variazione di flusso, la tensione prevista ai capi della bobina risulta di circa 9 V. Questo modello permette di stimare l'ordine di grandezza delle tensioni attese in uscita dal convertitore.

3. PROGETTO DI DETTAGLIO E COSTRUZIONE DEL CONVERTITORE

Figura 7 mostra un complessivo del prototipo del convertitore, sviluppato in base all'analisi descritta nelle sezioni precedenti. Il cuore del dispositivo è il magnete permanente cilindrico al neodimio (1): il convertitore impiega un anello magnetico avente diametro ϕ 25 mm, spessore radiale 10 mm, altezza 35 mm [22], fissato a telaio (5) mediante i supporti di nylon (4). Il supporto (2) dell'avvolgimento di rame (4) è collegato al telaio in acciaio, mediante quattro molle (6) disposte in parallelo, e su di esso possono essere aggiunte delle masse (come su un bilanciere), in modo da permettere di cambiare facilmente la frequenza naturale del sistema. Tale supporto può scorrere parallelamente all'asse del magnete mediante le guide in Teflon (7). Come visibile dallo schema in Figura 7, le dimensioni del convertitore sono

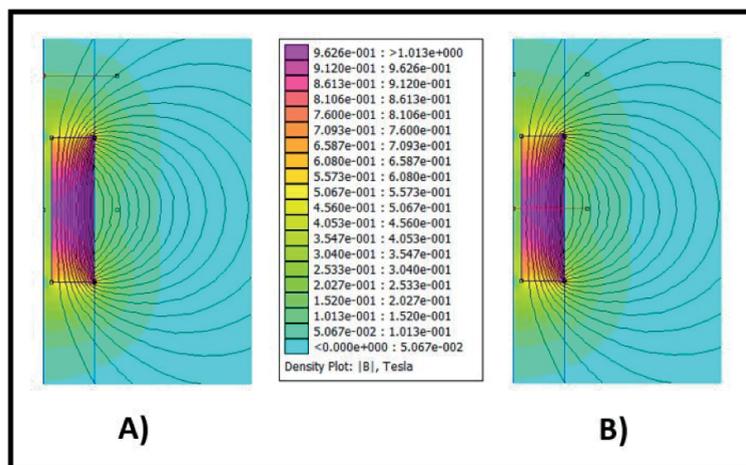


Figure 6. Distribuzione del campo magnetico in accordo all'analisi magnetostatica agli elementi finiti effettuata sul modello del sistema

state fissate a 200 mm di altezza, 110 mm di larghezza e 80 mm di lunghezza, in accordo all'obiettivo di sviluppare un convertitore di taglia elevata per sistemi di dimensioni grandi.

Per la costruzione del prototipo, si è fabbricato il telaio in acciaio tramite taglio laser, il supporto della bobina mediante stampa 3D e i supporti in Teflon lavorati al tornio. Le molle e i bulloni sono stati scelti, invece, tra componenti commerciali. La bobina realizzata sul convertitore ha un filo di diametro 0.3 mm ed un totale di 1000 spire, che producono una resistenza di 33 Ohm. Figura 8a mostra il rendering del modello tridimensionale e la Figura 8b mostra il corrispondente prototipo di convertitore.

4. CONVALIDA SPERIMENTALE

L'obiettivo del piano di prove sperimentali svolto è stato duplice. Primo, misurare la frequenza di risonanza del convertitore in funzione in particolare della massa oscillante del sistema. Secondo, misurare la potenza elettrica che il convertitore è in grado di erogare in funzione della frequenza di eccitazione e dei parametri di esercizio del sistema. Le prove di eccitazione dinamica sono state svolte impiegando uno shaker elettromagnetico Data Physics BV400 [23], controllato in retroazione da pc mediante un software proprietario. A tal fine si è fissato alla tavola vibrante dello shaker un accelerometro triassiale (356 A01 PCB Piezotronic) [24]. Per monitorare la risposta del sistema, si è inoltre fissato un accelerometro (356B21 PCB Piezotronic) [24] sul supporto della bobina del convertitore (massa sismica). La tensione elettrica ai capi del convertitore è stata misurata mediante la scheda di acquisizione National Instruments, NI 9229/9239. Le prove sperimentali svolte sono state organizzate in due fasi. Al fine di determinare la frequenza propria del sistema al variare della massa sismica, nella prima fase si è svolto uno sweep in frequenza da 5 a 20 Hz, imponendo una legge di moto con ampiezza di spostamento pari a 3 mm. In particolare, si sono considerati tre livelli di massa: 0.250 kg, pari al peso proprio della sola bobina, 0.350 kg e 0.450 kg ottenute, invece, aggiungendo alla bobina masse addizionali. La seconda fase ha riguardato

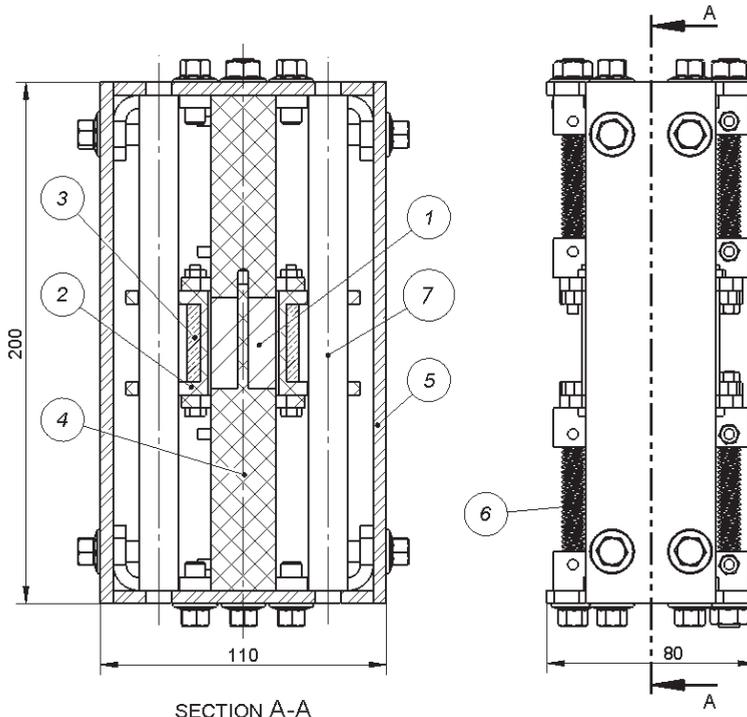


Figure 7. Disegno tecnico del convertitore

lo studio della risposta del convertitore alla frequenza di risonanza specifica di ciascuno dei tre livelli di massa sismica. In questo caso, si è applicato al convertitore un carico resistivo che massimizza il trasferimento di potenza, coincidente quindi con la resistenza interna dell'avvolgimento e si sono misurate la tensione elettrica e la potenza erogate.

5. RISULTATI SPERIMENTALI

Figura 9 mostra l'andamento della risposta in frequenza del sistema, per i tre livelli di massa sismica considerati. Con riferimento alla configurazione di massa sismica pari a 0.250 kg, Figura 10 mostra l'andamento della tensione elettrica in uscita dal convertitore in funzione del tempo. Le Figure 11 e 12 mostrano rispettivamente l'andamento della tensione e della potenza root mean square, misurate sul convertitore in funzione della massa sismica applicata.

6. DISCUSSIONE

L'andamento della funzione di trasferimento in Figura 9 evidenzia che il convertitore proposto ha fornito una frequenza di risonanza pari a 10 Hz in corrispondenza della massa sismica da 0.450 kg, che poi aumenta a 11.5 Hz e 13.5 Hz al diminuire della massa sismica a 0.350 kg e 0.250 kg. Altra peculiarità della risposta del sistema è che la funzione di trasferimento assume un valore nettamente superiore all'unit in un elevato intervallo di frequenza:

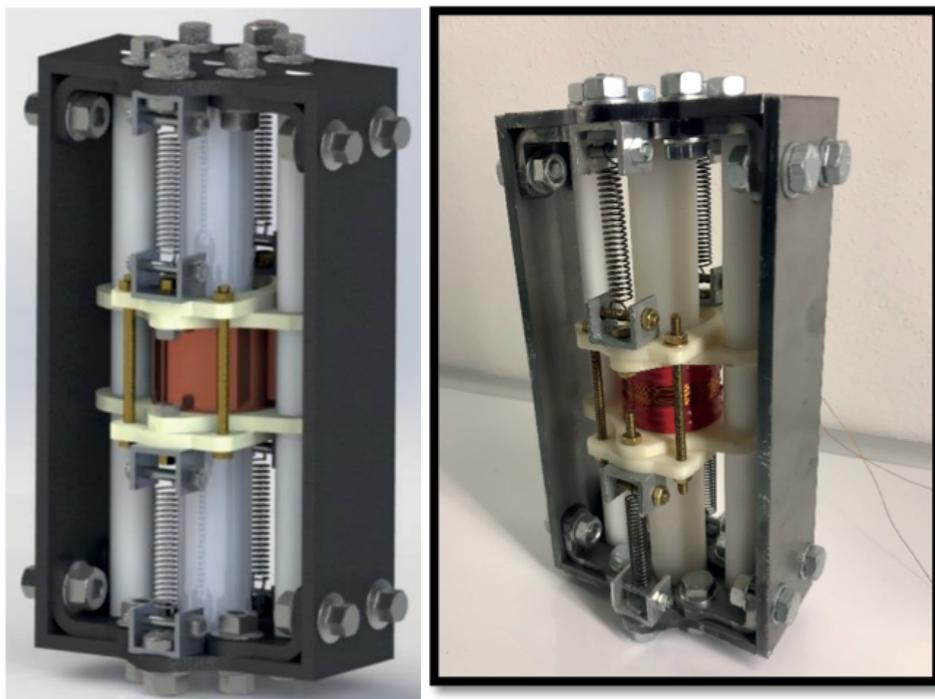


Figure 8. A sinistra il rendering del modello (A) e a destra il modello reale (B)

questo significa che il sistema converte energia cinetica in elettrica, in misura significativa, gi prima del raggiungimento della frequenza di risonanza.

Il profilo dell'andamento della tensione misurata in uscita dal convertitore (Figura 10) si caratterizza per il tipico andamento alterno ed abbastanza regolare, con picchi di intensità fino a 10 V.

Dall'istogramma della tensione RMS (Figura 11) si vede poi che il valore della tensione media misurata in uscita dal convertitore diminuisce all'aumentare della massa sismica sul convertitore, in quanto all'aumentare della frequenza di risonanza diminuisce la corsa della bobina rispetto al magnete permanente.

Lo stesso andamento si osserva nell'istogramma della potenza media misurata in uscita al convertitore (Figura 12). Questo istogramma evidenzia tra l'altro che il convertitore ha erogato un'elevata potenza rispetto ai sistemi di letteratura [18]: in particolare, la densità di potenza raggiunta, pari a $631 \mu W/cm^3$ e con un'accelerazione inferiore ad 1g, rappresenta un risultato di particolare rilevanza nel contesto di quanto già proposto in letteratura [19].

In conclusione, il dispositivo proposto è particolarmente adatto per strutture di grandi dimensioni (strutture civili, macchine utensili, treni), si caratterizza per una bassa frequenza di esercizio, sintonizzabile sul valore desiderato in relazione alla massa sismica scelta ed alla rigidità delle molle che sostengono la massa sismica, ed ha un'elevata potenza specifica.

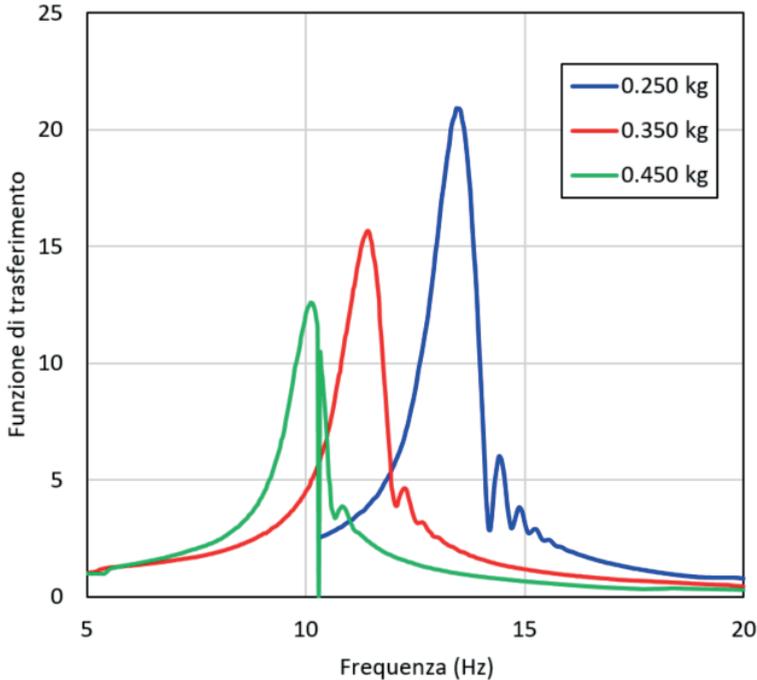


Figure 9. Funzione di trasferimento del convertitore in funzione della frequenza, per tre livelli di massa sismica: 0.250 kg (a), 0.350 kg (b) e 0.450 kg (c).

7. CONCLUSIONI

Il lavoro presenta un convertitore elettromagnetico per il recupero di energia dalle vibrazioni ambientali, con dimensioni dell'ordine di due decimetri cubi. Si è descritto lo sviluppo concettuale, il dimensionamento dello stadio di conversione elettromagnetica, la progettazione strutturale e la convalida prototipale. I risultati sperimentali mostrano una bassa frequenza di risonanza per il sistema, nell'intervallo da 10 Hz a 15 Hz, ed un'elevata tensione e potenza generate. In particolare, si evidenzia l'elevata potenza specifica se confrontata con i convertitori presenti in letteratura. Il dispositivo è applicabile a strutture civili, industriali o mezzi di trasporto di grandi dimensioni, ed è facilmente sintonizzabile alla frequenza desiderata.

REFERENCES

- [1] Glynn-Jones, P., Beeby, S., and White, N., 2001. "Towards a piezoelectric vibration-powered microgenerator". *IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology*, **148**, pp. 68–72.
- [2] Zurn, S., Hsieh, M., Smith, G., Markus, D., Zang, M., Hughes, G., Nam, Y., Arik, M., and Polla, D., 2001. "Fabrication and structural characterization of a resonant frequency pzt microcantilever". *Smart Materials and Structures*, **10**(2), p. 252.
- [3] Roundy, S., Wright, P. K., and Rabaey, J., 2003. "A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes". *Computer Communications*, **26**(11), pp. 1131 – 1144.
- [4] Shen, D., Choe, S.-Y., and Kim, D.-J., 2007. "Analysis of piezoelectric materials for energy

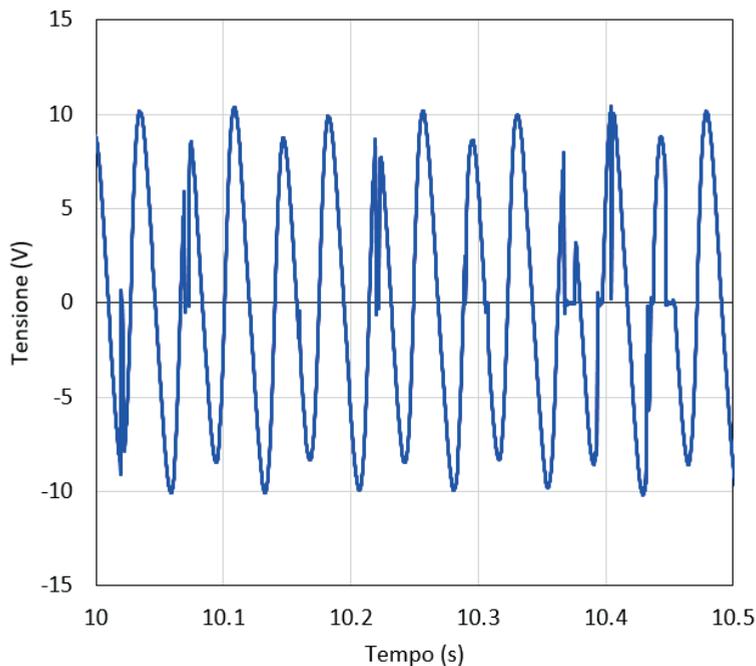


Figure 10. Andamento della tensione elettrica in uscita in funzione del tempo per una massa sismica pari a 0.250 kg

- harvesting devices under high- g vibrations”. *Japanese Journal of Applied Physics*, **46**(10R), p. 6755.
- [5] Benasciutti, D., Moro, L., and Gallina, M., 2013. “On the optimal bending deflection of piezoelectric scavengers”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **24**(5), pp. 627–639.
- [6] Castagnetti, D., 2011. “Fractal-inspired multifrequency structures for piezoelectric harvesting of ambient kinetic energy”. *Journal of Mechanical Design*, **133**(11), November, pp. 111005–111005–8.
- [7] Castagnetti, D., 2012. “Experimental modal analysis of fractal-inspired multi-frequency structures for piezoelectric energy converters”. *Smart Materials and Structures*, **21**(9), p. 094009.
- [8] Castagnetti, D., 2013. “A Wideband fractal-inspired piezoelectric energy converter: design, simulation and experimental characterization”. *Smart Materials and Structures*, **22**(9), pp. 094024–094024–11.
- [9] Castagnetti, D., 2015. “Comparison Between a Wideband Fractal-Inspired and a Traditional Multicantilever Piezoelectric Energy Converter”. *Journal of Vibration and Acoustics*, **137**(1), February, pp. 011001–011001–7.
- [10] Castagnetti, D., 2015. “A belleville-spring-based electromagnetic energy harvester”. *Smart Materials and Structures*, **24**, August, pp. 94009–1–94009–15.
- [11] Daqaq, M., 2010. “Response of uni-modal duffing-type harvesters to random forced excitations”. *Journal of Sound and Vibration*, **329**(18), August, pp. 3621–3631.

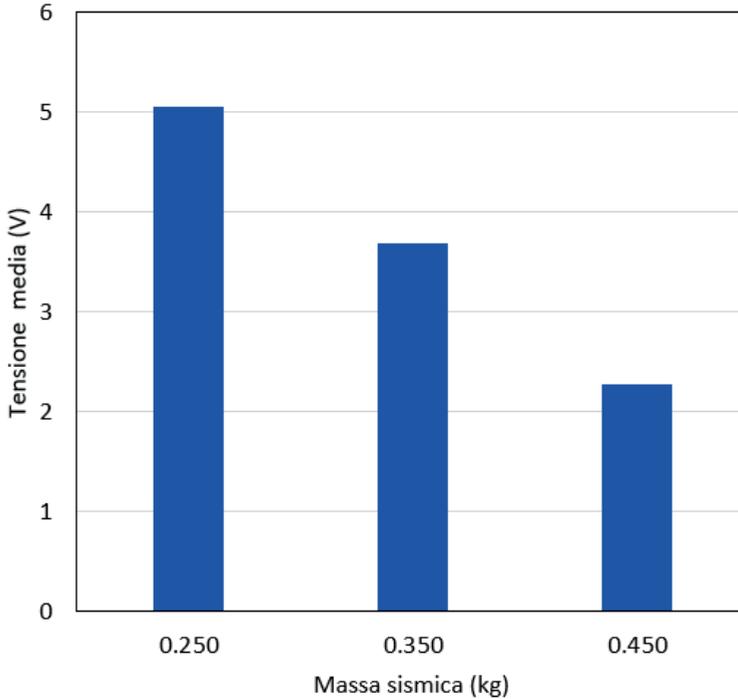


Figure 11. Istogramma della tensione RMS in uscita, per una massa sismica pari a 0.250 kg, 0.350 kg e 0.450 kg

- [12] Bibo, A., Li, G., and Daqaq, M., 2011. “Electromechanical modeling and normal form analysis of an aeroelastic micro-power generator”. *Journal Intelligent Material Systems and Structures*, **22**(6), April, pp. 577–592.
- [13] Bryant, M., and Garcia, E., 2011. “Modeling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester”. *Journal of Vibration and Acoustics*, **133**, pp. 11010–1–11010–11.
- [14] Singh, K., Michelin, S., and de Langre, E., 2012. “Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder”. *Journal of Fluids and Structures*, **30**, pp. 159 – 172.
- [15] Burrow, S. G., Clare, L. R., Carrella, A., and Barton, D., 2008. “Vibration energy harvesters with non-linear compliance”. *Proc.SPIE*, **6928**, pp. 6928 – 6928 – 10.
- [16] Mann, B., and Sims, N., 2009. “Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation”. *Journal of Sound and Vibration*, **319**(1), pp. 515 – 530.
- [17] Ramlan, R., Brennan, M., Mace, B., and Kovacic, I., 2010. “Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device”. *Nonlinear Dynamics*, **59**(4), Mar, pp. 545–558.
- [18] Ashraf, K., Khir, M. M., Dennis, J., and Baharudin, Z., 2013. “Improved energy harvesting from low frequency vibrations by resonance amplification at multiple frequencies”. *Sensors and Actuators A: Physical*, **195**, pp. 123–132.
- [19] Nico, V., Boco, E., Frizzell, R., and Punch, J., 2016. “A high figure of merit vibrational energy harvester for low frequency applications”. *Applied Physics Letters*, **108**, pp. 013902–1–013902–6.

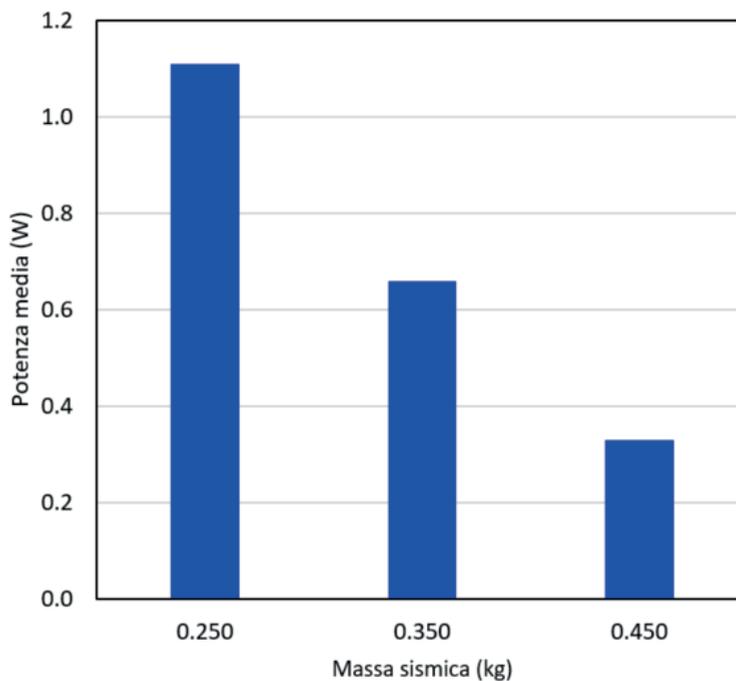


Figure 12. Istogramma della potenza RMS erogata per una massa sismica pari a 0.250 kg, 0.350 kg e 0.450 kg

- [20] Ulrich, K., and Eppinger, S., eds., 2015. *Product Design and Development*, 5th ed. . McGraw-Hill Education.
- [21] Callegari, M., Fanghella, P., and Pellicano, F., eds., 2017. *Meccanica applicata alle macchine*, 2nd ed. . Città Studi Editore.
- [22] <https://www.supermagnete.it>.
- [23] <http://www.dataphysics.com/products-and-solutions/shakers-and-accessories-signalforce-vibration-test-equipment.html>.
- [24] <http://www.pcb.com/>.

SOMMARI

DRIVELINE INSTABILITY OF RACING MOTORCYCLES IN STRAIGHT BRAKING MANOEUVRE

Stefano Cattabriga¹, Luca Leonelli¹, Silvio Sorrentino¹

¹*Dipartimento di Ingegneria Enzo Ferrari, Università di Modena e Reggio Emilia*

E-mail: stefano.cattabriga@unimore.it, luca.leonelli@unimore.it, silvio.sorrentino@unimore.it

Keywords: *Motorcycle dynamics, Stability, Chatter, Driveline.*

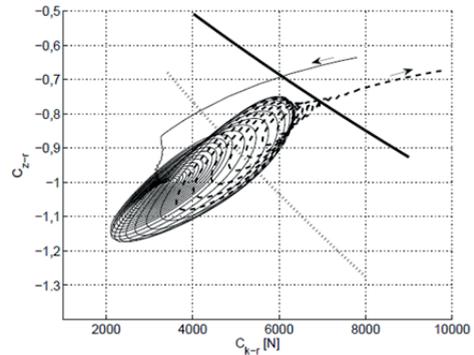
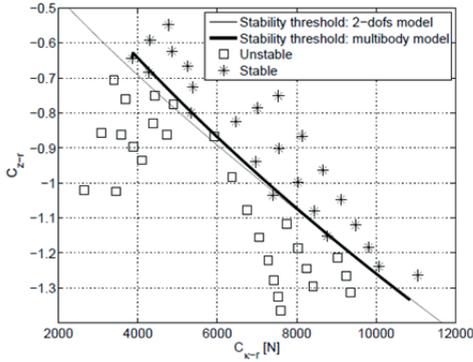
EXTENDED ABSTRACT

Experimental evidence shows that a self-excited vibration, usually referred to as chatter, can appear during braking manoeuvres performed by road-racing motorcycles. It involves vertical oscillation of front and rear wheel axles as well as angular oscillation of the driveline in a frequency range between 17 and 22 Hz. As a consequence, severe oscillations of the tyre-ground vertical loads can be observed, weakening the vehicle overall performance.

Several contributions on this topic can be accounted for in the literature, however, a comprehensive description of the phenomenon has not been given yet. In fact, a number of authors considered the problem as planar and focused on the interaction between driveline and rear tyre during braking manoeuvres, while others analyzed the stability of a three-dimensional motorcycle model during steady-state cornering tests. More precisely, Tezuka *et al.* [1] showed how an out-of-plane mode related to lateral and radial deformability of tyres may become unstable when increasing the cornering effort in steering pad manoeuvres. Sharp [2] demonstrated that the frame lateral and torsional flexibilities may give rise to an out-of-plane unstable mode in a frequency range close to the chatter one. On the other hand, Cossalter *et al.* [3] using a planar multibody model found that the driveline mode can become unstable during a straight running braking manoeuvre.

In this study the analysis of a possible driving mechanism for motorcycle chatter is presented with the aid of both a minimal model and a motorcycle planar multibody model.

The minimal model consists of a 2 degrees of freedom wheel-swingarm rear suspension with chain transmission, connected to a frame translating at imposed constant speed. Its stability has been studied in equilibrium configurations via eigenvalue analysis, by means of analytically determined maps. It has been found that the key role in the switching mechanism to instability is played by the nonlinear characteristic slip function of the tyre, and more precisely by its partial derivative with respect to the stationary component of the vertical ground force. It can increase the phase-lag between the non-stationary components of the slip and longitudinal ground force up to a critical value, giving rise to a non-conservative restoring force and to an asymmetric stiffness matrix [4].



The stability of the 10 degrees of freedom planar motorcycle model [5] has been studied first during transient, straight running, braking manoeuvres (via time domain simulations), and then in constant speed braking configurations (time-invariant, via eigenvalue analysis). Time domain integration of the equations of motion has shown an unstable oscillation onset at a frequency of about 22 Hz during transient braking manoeuvres, identified with the driveline mode via frozen-time eigenvalue analysis. Due to well known limitations of this technique in the prediction of stability [6], a procedure to simulate time-invariant straight running braking manoeuvres has been introduced, consisting of applications of external fictitious actions (namely, longitudinal accelerations and load transfers). This strategy has opened the possibility of drawing stability maps for the driveline vibration mode by means of standard eigenvalue analysis (as displayed in the figure below, where the trajectory on the right represents a non-stationary braking manoeuvre). An efficient recursive procedure has been developed for computing stability thresholds when the eigenproblem dimension would make cumbersome a direct derivation from Routh-Hurwitz criterion [7].

Comparison of the results with those of the minimal 2-dofs model has shown full consistency, confirming that the key role in the switching mechanism to driveline instability is played by the nonlinear characteristic slip function of the tyre, and that all the relevant features and parameters controlling the onset and development of driveline chatter instability are those included in the minimal model.

REFERENCES

- [1] Tezuka, Y., Kokubu, S., Shiomi Y., *et al.*, 2004. "Vibration characteristics analysis in vehicle body vertical plane of motorcycle during turning". Honda R&D Technical Review 16, 219-224.
- [2] Sharp, D. and Watanabe, Y., 2013. "Chatter vibrations of high-performance motorcycles". Vehicle System Dynamics, 51, 393-404.
- [3] Cossalter, V., Lot, R. and Massaro, M., 2008. "The chattering of racing motorcycles". Vehicle System Dynamics 46, pp. 339-353.
- [4] Sorrentino, S., Leonelli, L., 2017. "A study on the stability of a motorcycle wheel-swingarm suspension with chain transmission". Vehicle System Dynamics. Available from: <http://dx.doi.org/10.1080/00423114.2017.1319962>.
- [5] Leonelli, L. and Mancinelli, N., 2015. "A multibody motorcycle model with rigid-ring tyres: formulation and validation". Vehicle System Dynamics, 53, 775-797.
- [6] Rosenbrock, H., 1963. "The Stability of Linear Time-dependent Control Systems". International Journal of Electronics, 15, 73-80.
- [7] Leonelli, L., Cattabriga, S. and Sorrentino, S., 2017. "Driveline instability of racing motorcycles in straight braking manoeuvre". Submitted to Journal of Mechanical Engineering Science.

DYNAMIC BEHAVIOUR OF CONTINUOUS ROTATING SHAFTS UNDER COMBINED AXIAL AND TORSIONAL LOADS

Alessandro De Felice¹, Silvio Sorrentino¹

¹*Dipartimento di Ingegneria Enzo Ferrari, Università di Modena e Reggio Emilia*
E-mail: alessandro.defelice@unimore.it, silvio.sorrentino@unimore.it

Keywords: *Rotor, Shaft, Timoshenko beam, Gyroscopic moment.*

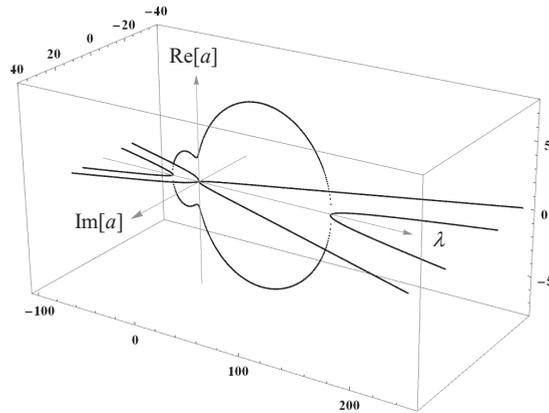
EXTENDED ABSTRACT

The general increasing trend towards high speed rotating equipment in conjunction with higher power density encourages further insights into the understanding of the dynamic behaviour of torque-transmitting flexible rotors. In this research field the use of finite element models is nowadays widespread, however distributed parameter formulations still remain of some interest, at least for analytical investigations and validation purposes.

Continuous models of rotating shafts have been studied highlighting the effects of transverse shear, rotatory inertia, gyroscopic moments and considering the additional contribution of axial end thrust and twisting moment. The equations of motion for symmetric and asymmetric rotors, without the contribution of axial loads, were derived by Dimentberg [1] adopting the Newtonian formulation. Early investigations about the effects of axial end thrust and twisting moment of constant magnitude acting simultaneously on a uniform shaft can be found in the work of Greenhill [2]. More recently, the effects of an axial end twisting moment alone on the flexural behaviour of a rotating slender shaft was studied according to the Timoshenko beam model by Eshleman and Eubanks [3]. The equations of motion of a rotating Timoshenko beam subjected to axial end thrust were derived with Lagrangian formulation by Choi *et al.* [4]. An analysis of the effects of combined external axial end thrust and twisting moment was proposed by Willems and Holzer [5] and later by Dubigeon and Michon [6], who adopted the Timoshenko beam model, casting doubts on some results obtained in [3].

In this study further insights are proposed in the analysis of a distributed parameter model of a high-speed, power transmitting flexible rotor. A fast and easy to implement method has been developed for the calculation of natural frequencies, modal shapes and critical speeds of a continuous rotating shaft, consisting of a homogeneous uniform Timoshenko straight beam, rotating at constant angular speed about its longitudinal axis and simultaneously subjected to axial end thrust and twisting moment [7].

More in detail, the equations of motion have been derived under the small strain assumption in both Newtonian and Lagrangian formulations for clarifying some discrepancies found among references [3,4] and [6]. Modal analysis of the rotating shaft under



combined loads (missing in the literature) has then been developed for both complex and real displacement variables, highlighting the structure of the algebraic and differential operators involved and the bi-orthogonality properties of the eigenfunctions.

The effects of varying the model main governing parameters, identified in slenderness ratio, angular speed, axial end thrust and twisting moment, have been studied on natural frequencies, modal shapes and critical speeds of the rotating shaft, the whole analysis carried out working with nondimensional parameters and variables. Some further insights have been provided on particular aspects, such as the analysis of the cut-off Timoshenko beam frequencies [8] including the effects of gyroscopic moments and external loads [7], as displayed in the figure above (showing the complex exponents a of modal shapes as functions of the eigenfrequencies λ , and the switch or cut-off frequencies in which real values of the exponents a become imaginary).

The results of this study constitute the basis for further developments, including comparison with finite element models and rotor stability analysis under combined loads.

REFERENCES

- [1] Dimentberg, F.M., 1961. *Flexural vibrations of rotating shafts*, Butterworth, London.
- [2] Greenhill, A.G., 1883. "On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 6, 182–209.
- [3] Eshleman, R.L. and Eubanks, R.A., 1969. "On the critical speeds of a continuous rotor". *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for Industry* 91, 1180–1188.
- [4] Choi, S.H., Pierre, C. and Ulsoy, A.G., 1992. "Consistent modeling of rotating Timoshenko shafts subject to axial loads". *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 114, 249–259.
- [5] Willems, N. and Holzer, S., 1967. "Critical speeds of rotating shafts subjected to axial loading and tangential torsion", *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry* 89, 259–264.
- [6] Dubigeon, S. and Michon, J.C., 1975. "Gyroscopic behaviour of stressed rotating shafts", *Journal of Sound and Vibration* 42, 281–293.
- [7] De Felice, A. and Sorrentino, S., 2017. "Insights into the gyroscopic behaviour of axially and torsionally loaded rotating shafts". *Proceedings of the 24th International Conference on Sound and Vibration (ICSV24)*, London, 23– 27 July 2017.
- [8] Stephen, N.G., 2006. "The second spectrum of Timoshenko beam theory—further assessment". *Journal of Sound and Vibration* 297, 1082–1087.

RILEVAZIONI SPERIMENTALI E MODELLAZIONE NUMERICA DEI FENOMENI DINAMICI DOVUTI ALLA CAVITAZIONE IN POMPE AD INGRANAGGI ESTERNI

A. Bertazzini¹, M. Battarra¹, E. Mucchi¹, G. Dalpiaz¹

¹Engineering Department, Università degli Studi di Ferrara, Italy

E-mail: anna.bertazzini@unife.it, mattia.battarra@unife.it, emiliano.mucchi@unife.it, giorgio.dalpiaz@unife.it

Keywords: *cavitazione, modellazione*

SOMMARIO ESTESO

Negli ultimi anni, sono sempre più numerose le applicazioni nel campo dell'automotive in cui le pompe ad ingranaggi esterni vengono direttamente collegate all'albero motore, invece che ad un motore elettrico, operando di conseguenza ad alte velocità e alte portate. Il raggiungimento di tali condizioni di lavoro, unito alla presenza di zone di bassa pressione, comporta talvolta lo svilupparsi di fenomeni di cavitazione che provocano rumore, perdita di prestazioni e usura delle superfici interne. Ne consegue l'importanza di conoscere la dinamica di questi fenomeni per eliminare, o quantomeno ridurre, gli effetti che ne derivano.

L'articolo presenta un'analisi sperimentale e numerica dei fenomeni cavitativi in pompe ad ingranaggi esterni utilizzate nel campo dell'automotive.

Le rilevazioni sperimentali condotte hanno consentito di valutare l'andamento del rendimento volumetrico della pompa e le pressioni acustiche registrate da un idrofono. In generale, a seguito del verificarsi dei fenomeni di cavitazione, i valori RMS di pressione acustica aumentano considerevolmente e l'andamento del rendimento volumetrico crolla, a causa principalmente della diminuzione della portata volumetrica in uscita: la presenza di aria libera in olio determina un decremento di portata a parità di volume di fluido elaborato.

Da queste considerazioni nasce la necessità di realizzare un modello dinamico che consenta di descrivere i fenomeni di cavitazione e di prevedere numericamente il loro sviluppo nelle condizioni operative delle pompe. In particolare, è stato modificato e migliorato un modello già esistente [1] per la stima della distribuzione della pressione in pompe ad ingranaggi, nel quale si sono introdotti i fenomeni di cavitazione. In particolare il modello di cavitazione [2] permette di calcolare la presenza di aria all'interno dell'olio e di valutarne l'influenza sulle principali grandezze caratteristiche della pompa, come la distribuzione di pressione, la portata in uscita, le forze variabili sulle ruote, la densità e il modulo di bulk dell'olio.

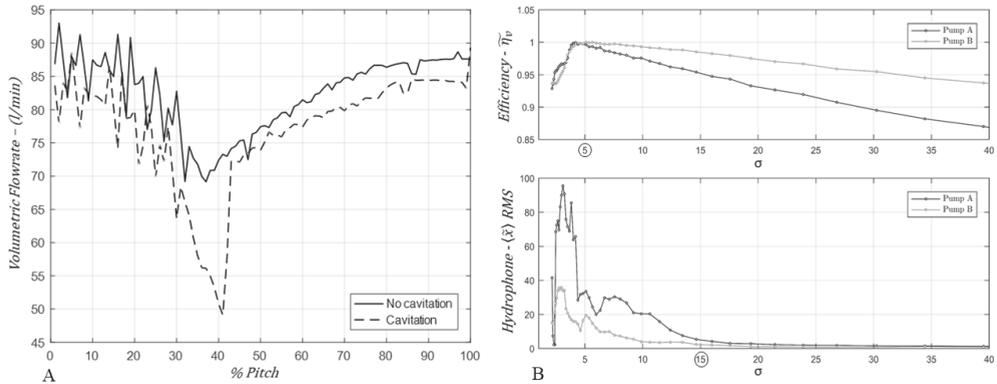


Figura 1. A) Portata volumetrica in uscita (modello numerico); B) Rilevazioni sperimentali

L'Eq. (1) rappresenta la formulazione di riferimento del modello di cavitazione, definendo la frazione in massa di aria libera nel tempo che si sviluppa all'interno dell'olio.

$$\frac{df_g}{dt} = \left(\frac{df_g}{dt} \right)_{IT} + \frac{1}{V} (\sum Q_{in} f_g^{in} - \sum Q_{out} f_g^{out}) - \frac{f_g}{V} \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

Si tratta di un'equazione differenziale valida per un volume aperto soggetto a variazioni di pressione, scambi di portata con l'esterno e variazioni di volume, rispettivamente rappresentati dai tre termini che la costituiscono. La pompa monostadio in esame è stata schematizzata attraverso un modello a parametri concentrati in cui i volumi di controllo sono i volumi che si creano negli spazi tra due denti consecutivi di ciascuna ruota; l'equazione viene risolta per ogni volume e viene trovata relazione con le altre grandezze caratteristiche per valutare l'influenza della cavitazione sulla dinamica della pompa.

La Figura 1A) mostra il confronto tra gli andamenti della portata volumetrica in uscita dalla pompa nel caso del modello di partenza e del modello che include la cavitazione: si nota che la presenza di aria libera produce una diminuzione di portata di uscita con un picco verso il basso particolarmente consistente in corrispondenza della posizione angolare in cui avviene il massimo rilascio di aria. La Figura 1B) mostra invece gli andamenti del rendimento volumetrico η_v e dell'RMS della pressione acustica in funzione del *cavitation number* σ ($\sigma = (p_{in} - p_v)/(0.5\rho V^2)$), legato all'inverso del quadrato della velocità, e dimostra che le misurazioni eseguite con l'idrofono hanno una maggiore sensibilità alla rilevazione dei fenomeni cavitativi rispetto alle misure del rendimento volumetrico: a pari aumento di velocità, l'aumento dell'RMS avviene prima ($\sigma=14$) rispetto alla caduta di η_v ($\sigma=5$), provando che le rilevazioni con idrofono misurano anche la cavitazione incipiente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Battarra M., Mucchi E., 2015. "A method for variable pressure load estimation in spur and helical gear pumps". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 76-77, 265–282.
- [2] Zhou J., A. Vacca, P. Casoli, 2014. "A novel approach for predicting the operation of external gear pumps under cavitating conditions". *Simulation Modelling Practice and Theory*, 45, 35-49.

DEFINIZIONE DELLA MATRICE DI RIFERIMENTO PER TEST MULTIASSIALI CONTROLLATI AD ECCITAZIONE STOCASTICA

Giacomo D'Elia¹, Umberto Musella², Emiliano Mucchi¹, Giorgio Dalpiaz¹

¹*Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara, Italia*
E-mail: dlegcm@unife.it, emiliano.mucchi@unife.it, giorgio.dalpiaz@unife.it

²*Siemens Industry Software NV, Belgium*
E-mail: umberto.musella.ext@siemens.com

Keywords: *Test Multiassiali Controllati, Matrice di Riferimento, Controllo MIMO Random*

SOMMARIO ESTESO

I test di vibrazione controllati sono utilizzati per verificare che un componente sia in grado di resistere alle condizioni operative per il quale è progettato. L'utilizzo di test multiassiali (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO), permette di replicare fedelmente in laboratorio tali condizioni operative.

Nei test controllati, l'algoritmo di controllo è in grado di regolare i voltaggi che alimentano gli shakers in modo che la risposta accelerometrica in determinati punti della struttura sia tale da restituire il target definito dall'utente. Nei test di qualifica ad eccitazione stocastica, le specifiche da replicare sono fornite in frequenza in termini di Power Spectral Density (PSD). Nel caso specifico di test MIMO, tali specifiche non possono limitarsi alle sole PSD ma vanno incluse ulteriori informazioni derivanti dalla cross-correlazione tra i vari canali di controllo, definite in termini di Cross Spectral Density (CSD). In questo caso il target per l'algoritmo di controllo si trasforma in una matrice, la cosiddetta Matrice di Riferimento, in cui gli elementi della diagonale sono le PSD e gli elementi fuori dalla diagonale le CSD. Tale matrice per poter essere replicata, deve necessariamente essere una matrice semi-definita positiva. Spesso però le informazioni derivanti dalle CSD non sono note. Un esempio è rappresentato dal caso in cui il test di qualifica venga eseguito seguendo una normativa tecnica. Le normative infatti, essendo definite per test monoassiali, forniscono solamente i profili PSD da replicare in determinati punti della struttura e spetta dunque al test engineer completare l'intera Matrice di Riferimento definendo le CSD in termini di fasi e coerenze tra i vari canali di controllo. Non tutte le combinazioni di fasi e coerenze generano matrici semi-definite positive e dunque controllabili dall'algoritmo.

Ad oggi, sebbene diversi autori abbiano trattato il problema [1, 2], non esiste una procedura di generazione del target che sia solida ed affidabile. L'obiettivo di questa ricerca è quello di definire un metodo che permetta, partendo dalle specifiche fornite sotto forma di PSD e da alcune scelte iniziali fatte dall'utente, di completare l'intera Matrice di Riferimento in modo tale che questa sia semi-definita positiva e dunque utilizzabile per eseguire il test.

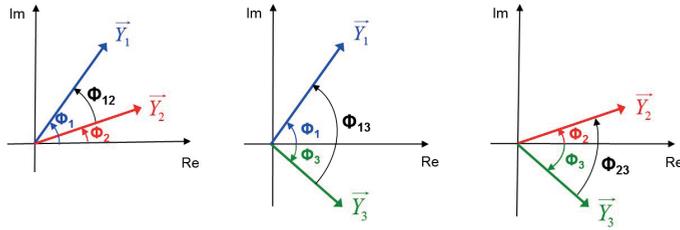


Figure 1. Principio del *Phase Pivoting*

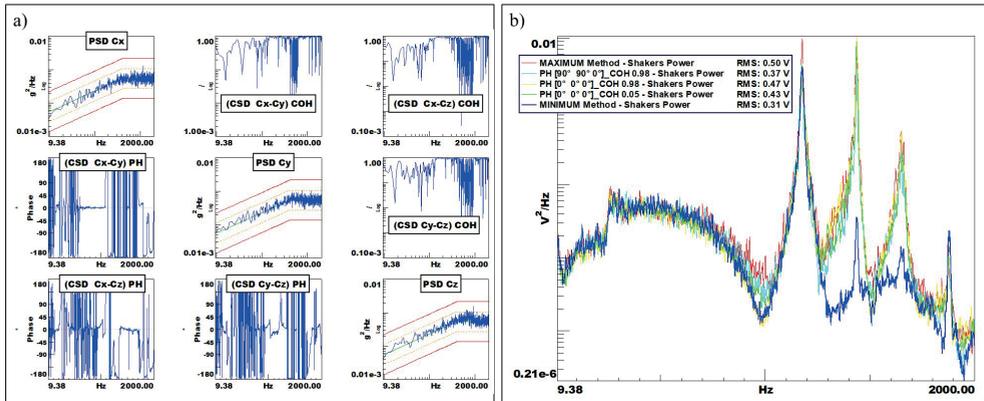


Figure 2. a) Matrice di Riferimento per tre canali di controllo utilizzando il metodo della potenza minima; b) Potenza totale richiesta dagli shakers per eseguire il test.

L'idea alla base del metodo risiede nel fornire una relazione fisica tra tutti i possibili profili di fasi nel caso di elevata coerenza tra i canali di controllo. In Fig.1 è rappresentato il caso di tre canali di controllo. In questo caso, definito lo sfasamento tra due coppie di canali di controllo (ϕ_{12} ed ϕ_{13}), la terza fase risulta automaticamente fissata ($\phi_{23} = \phi_{13} - \phi_{12}$).

In Fig.2 sono mostrati i risultati ottenuti controllando lo shaker 3D (Dongling 3ES-10-HF-500) dell'Università di Ferrara. In questo caso, partendo dalle specifiche del test (PSD standard da 1 gRMS), sono stati definiti dei profili di fase e coerenza che restituiscono una Matrice di Riferimento (Fig.2 a) che oltre ad essere semi-definita positiva, sia anche in grado di minimizzare la potenza totale richiesta dagli shakers per eseguire il test (Fig.2 b, si confronta il metodo della potenza minima rappresentato dalla linea blu, rispetto ad altri metodi). Tale metodo di generazione del target permette di ritardare il limite massimo raggiungibile dagli shakers (DACs Overload) ed ottenere dunque migliori performance pur mantenendo fissate le specifiche del test.

BIBLIOGRAFIA

[1] MIL-STD, 2014. "Multi-exciter tests". *United States Military Standard 810G Method 527.1*.
 [2] Underwood, M., Keller, T., and Ayres, R., 2011. "Filling in the mimo matrix performing random tests using field data". *Sound and Vibration*, pp. 8–14.

ALGORITMI DI *MISSION SYNTHESIS* PER TEST DI QUALIFICA A VIBRAZIONE

Marco Troncosi

Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Bologna

E-mail: marco.troncosi@unibo.it

Keywords: *Test accelerati qualifica a vibrazione; Test Tailoring; Mission Synthesis; Controllo del kurtosis; Sine-on-Random.*

SOMMARIO ESTESO

In ambito automotive, aerospaziale e manifatturiero la sempre più diffusa tendenza a personalizzare i test di qualifica a vibrazione in funzione dell'applicazione e/o dei componenti da analizzare (*Test Tailoring*), anziché ricorrere a Normative che propongono generiche procedure (e.g. MIL-STD810, GAM.EG 13), richiede la definizione appropriata di profili vibratorii di test (*Mission Synthesis*) da utilizzare come eccitazione del componente soggetto a qualifica in termini di moto imposto dalle tavole vibranti.

Nella ricerca condotta dall'autore, ci si propone di migliorare le procedure di Mission Synthesis attualmente disponibili, le quali si basano su ipotesi piuttosto semplificative e su algoritmi di calcolo relativamente poco sofisticati. Si ambisce alla definizione di algoritmi avanzati per la sintesi di segnali di eccitazione vibratoria che possano rendere maggiormente affidabili i risultati derivanti dalle prove di qualifica eseguite in laboratorio, generando profili di test maggiormente realistici (cioè aventi le caratteristiche delle vibrazioni che sollecitano i componenti da analizzare nelle applicazioni reali).

Fra le prove di qualifica a vibrazione assumono un ruolo particolarmente importante i test volti a valutare il comportamento a fatica dei componenti in esame sollecitati dai carichi dinamici dovuti alle vibrazioni cui sono soggetti nelle applicazioni reali. Per ovvie ragioni di fattibilità, si rende spesso necessario prevedere prove accelerate di fatica per poter condurre test di laboratorio che abbiano una durata ragionevole (qualche decina di ore) a fronte della vita attesa reale del prodotto (che può essere di centinaia o migliaia di ore). Nella sintesi dei profili di test si parte da segnali vibratorii misurati sul campo in applicazioni reali e si cerca di riprodurre in laboratorio le caratteristiche principali, in particolare il contenuto spettrale in frequenza (in termini di PSD) e il potenziale di danno a fatica associato all'eccitazione stessa. Per la stima di quest'ultimo si utilizza generalmente la funzione spettrale denominata Fatigue Damage Spectrum, FDS [1]. Il profilo di test che si vuole sintetizzare per il test accelerato deve riproporre, per una durata limitata, lo stesso potenziale di danno della vibrazione di riferimento applicata per la durata reale prevista per il componente. Le attuali procedure di Mission Synthesis producono come profilo di test

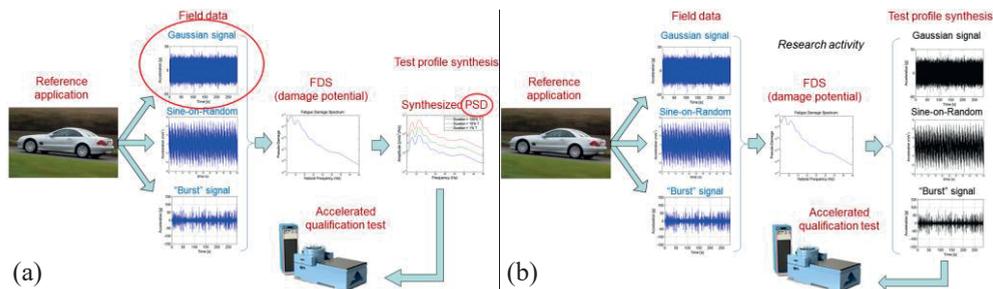


Figura 1. Procedure di Mission Synthesis: (a) approccio attuale; (b) approccio innovativo.

un'eccitazione definita nel dominio delle Frequenze in termini di PSD. La trasformata inversa di Fourier di una PSD equivale nel dominio del Tempo ad un segnale random stazionario con distribuzione Gaussiana dei valori. Un tale tipo di segnale potrebbe essere poco realistico nel rappresentare il segnale di riferimento misurato sul campo qualora quest'ultimo non sia Gaussiano; conseguentemente, l'affidabilità dei test di qualifica potrebbe essere compromessa dal momento che nelle prove di laboratorio non viene conservata la "natura" del segnale di riferimento. Esempi comuni di segnali stazionari non Gaussiani sono i cosiddetti segnali Sine-on-Random, tipici dei sistemi che presentano organi rotanti, e segnali Leptocurtici (in cui la presenza di elevati picchi di ampiezza, per esempio dovuti a micro-urti, comporta una distribuzione probabilistica dei valori fortemente non Gaussiana [2]). Il parametro denominato *kurtosis*, momento statistico normalizzato del quarto ordine, viene spesso impiegato come metrica per rappresentare la numerosità e l'ampiezza dei picchi del segnale. Per segnali Gaussiani il *kurtosis* vale 3.0, mentre assume valori maggiori per segnali Leptocurtici e valori inferiori per segnali Sine-on-Random. La sfida intrapresa in questo ambito di ricerca consiste quindi nel cercare formulazioni invertibili per la funzione FDS anche per segnali non Gaussiani, in modo tale da poterla sfruttare negli algoritmi di sintesi per la generazione di profili che conservino anche le caratteristiche del segnale di partenza (Fig. 1). Un approccio che sembra promettere buoni risultati in tal senso, e che è stato adottato in alcuni studi già condotti dall'autore [3-5], è l'adozione di modelli stocastici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Lalanne C., *Mechanical Vibration and Shock Analysis – Volume 5: Specification Development*. 2nd ed., 2009, John Wiley & Sons, Inc – ISTE, London
- [2] Steinwolf A., "Random Vibration Testing Beyond PSD Limitations", *Sound and Vibration*, 2006, **40**(9):12-21
- [3] Cornelis B., Steinwolf A., Troncossi M., Rivola A., "Shaker testing simulation of non-Gaussian random excitations with the fatigue damage spectrum as a criterion of mission signal synthesis", *Procs. of ICoEV*, September 7-10, 2015, Ljubljana (Slovenia), pp. 763 – 772
- [4] Angeli A., Cornelis B., Troncossi M., "Fatigue Damage Spectrum calculations in a Mission Synthesis procedure for Sine-on-Random excitations", *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, **744**(012089):1-11
- [5] Troncossi M., Rivola A., "Experimental Accelerated Fatigue Life Tests using Vibration Sine-on-Random Synthesized Profiles", *Vibroengineering Procedia*, 2017, **11**:34-39

THE EFFECT OF VOXEL SIZE AND SIGNAL-TO-NOISE RATIO ON THE MEASUREMENT UNCERTAINTIES OF A GLOBAL DIGITAL VOLUME CORRELATION APPROACH

M. Palanca¹, A.J. Bodey², M. Giorgi³, M. Viceconti⁴, D. Lacroix⁴, L. Cristofolini¹, E. Dall'Ara³

¹*Dept. of Industrial Engineering, Alma Mater Studiorum - University of Bologna, Bologna, Italy*
E-mail: marco.palanca2@unibo.it, luca.cristofolini@unibo.it

²*Diamond Light Source, Oxford, UK*
E-mail: andrew.bodey@diamond.ac.uk

³*Dept. of Oncology and Metabolism and INSIGNEO – University of Sheffield, Sheffield, UK*
E-mail: m.giorgi@sheffield.ac.uk, e.dallara@sheffield.ac.uk

⁴*Dept. of Mech. Eng. and INSIGNEO - University of Sheffield, Sheffield, UK*
E-mail: m.viceconti@sheffield.ac.uk, d.lacroix@sheffield.ac.uk

Keywords: *Digital Volume Correlation, Strain Uncertainties, Synchrotron, microCT*

INTRODUCTION

Digital Volume Correlation (DVC) is a measurement technique used to evaluate displacement/strain maps inside heterogeneous specimens, through the comparison of 3D images acquired before and after the loading. A series of works measured the reliability of this approach in zero-strain condition [1]. The results showed that the larger the measurement spatial resolution the better the precision. For μ CT images of bone, DVC is able to identify yielding, but for exploring physiological range (1000-2000 μ strain) a measurement spatial resolution of 0.5-1.5 mm is needed to reduce the measurement uncertainties under 200 μ strains that could be considered acceptable [2].

Synchrotron radiation μ CT (SR- μ CT) imaging can be used to acquire images with better signal-to-noise ratio and voxel size, which improve image resolution. Therefore, while DVC applied to SR- μ CT images has the potential of providing more precise strain measurements it is currently not known to what extent the precision would improve for applications on two different bone microstructures.

We aimed to evaluate the measurement uncertainties of a global DVC based on μ CT and SR- μ CT images acquired for cortical bone and trabecular bone.

MATERIALS AND METHODS

Specimens of cortical and trabecular bone were extracted from a bovine femur and embedded in acrylic resin. Both samples were scanned twice without any repositioning using:

- μ CT (SkyScan 1172, Bruker, Belgium): voxel size of 9.96 μ m; one specimen per group was scanned [3];
- SR- μ CT at beamline 113-2 of Diamond Light Source: voxel size of 1.6 μ m; three trabecular and four cortical specimens were scanned;

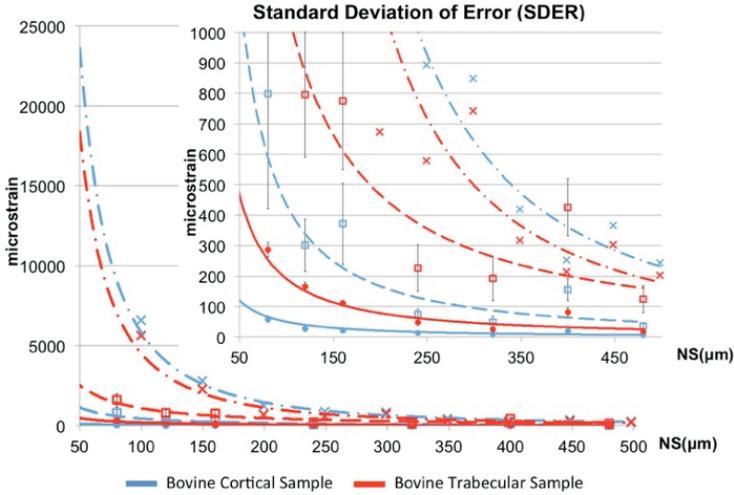


Figure 1: The SDER in function of the measurement spatial resolution (NS). The dots are for the SR- μ CT, the squares for the SR- μ CT downsample, the crosses for the μ CT.

- SR- μ CT images downsampled to 8 μ m of voxel size, to evaluate the effect of the voxel size.

The images were fed to a global DVC (ShIRT-FE). The uncertainties of the DVC were evaluated for a range of measurement spatial resolution (NS) from 50 to 500 μ m. The measurement uncertainty was evaluated as the standard deviation of the error (SDER) [4].

RESULTS

For all the kinds of images and both the samples, increasing the measurement spatial resolution decreased the strain measurement uncertainties. Max spatial resolution in order to obtain SDER (Fig. 1) lower than 200 μ strains:

- 480 (trabecular) and 550 (cortical) μ m for the μ CT;
- 80 (trabecular) and 41 (cortical) μ m for the SR- μ CT;
- 320 (trabecular) and 240 (cortical) μ m for the SR- μ CT downsampled.

DISCUSSION

This study showed that using high-quality tomograms obtained by SR- μ CT the measurement uncertainties of a global DVC approach decreases with respect to those obtained with laboratory source μ CT. DVC could therefore be used with SR- μ CT data to evaluate displacement and strain in the physiological range with remarkable spatial resolution.

REFERENCES

1. Roberts B.C et al(2014) *JBiom* **47**: 923-934.
2. Palanca M et al(2015) *JBiomEng* **137**: 071001-14.
3. Dall'Ara E. et al(2014) *JBiom* **47**: 2956-2963.
4. Liu et al(2007) *JBiom* **40**: 3516-3520.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to acknowledge Diamond Light Source for time on the Beamline I13-2 (proposal 10315) and the EPSRC MultiSim project (EP/K03877X/1) for funding. MP acknowledges the Marco Polo travel grant.

BIOMECHANICAL TEST OF RECONSTRUCTION TECHNIQUES FOR HUMERAL FRACTURES

Kavin Morellato¹, Enrico Guerra², Renzo Soffiatti³, Luca Cristofolini¹

¹ Department of Industrial Engineering, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
E-mail: kavin.morellato@unibo.it, luca.cristofolini@unibo.it

² Shoulder and Elbow Surgery, Istituto Ortopedico Rizzoli, Bologna, Italy
E-mail: enrico.guerra@ior.it

³ Tecres SpA, Sommacampagna, Verona, Italy
E-mail: renzo.soffiatti@tecres.it

Keywords: biomechanics, shoulder, fracture, cement, fixation, reconstruction.

INTRODUCTION

Now-a-days, the standard treatment of proximal humerus fractures includes pre-shaped metal plates with a series of holes for cortical and spongy fixation screws. Frequent failures and mal-unions are reported, especially in case of poor bone quality. The scope of this study was to compare two different techniques for the reconstruction of a specific type of fracture (four-fragment fracture) of the proximal humerus.

MATERIALS AND METHODS

To allow cyclic testing, composite bones must be used. We used a version with a close-cell low-density polyurethane foam simulating the spongy bone (3404, 10pcf, Sawbones). The humeri underwent a simulated fracture (Fig. 1), and surgical reconstruction:

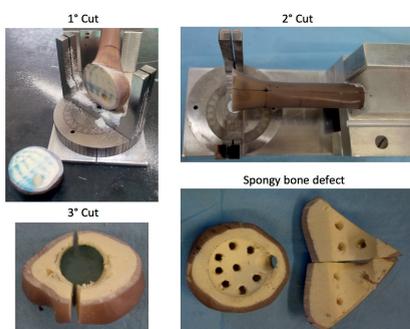


Figure 1: Procedure to simulate the fracture and bone defect.

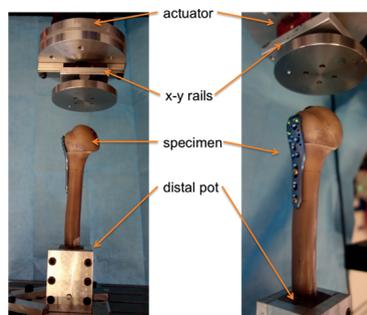


Figure 2: in vitro setup showing the bearings to avoid undesirable load components.

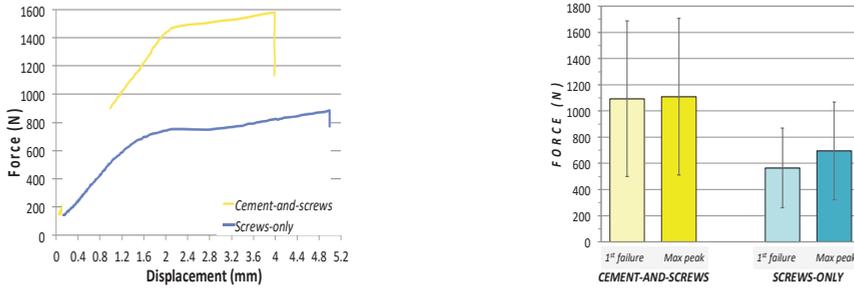


Figure 3: Left: typical plot for Cement-and-screws and Screws-only showing different trends. Right: different failure loads were found for the two reconstructions.

- N=4 *cement-and-screws* humeri were repaired with a standard fixation plate, 2 cortical and 3 trabecular screws (Philos, DePuy Synthes), and with injection of an acrylic-based calcium-additivated bone cement (Cal-Cemex, Tecres, Italy);
- For comparison, N=4 *screws-only* humeri were prepared with standard fixation plate, 2 cortical and 6 trabecular screws.

A mechanical test was performed on the reconstructed humeri (Fig. 2). An axial force was cyclically applied: the pre-load was 80 N; the amplitude started at 60 N and increased by 1% at each cycle. Failure was defined as fragment motion exceeding 4mm.

RESULTS

As expected, the displacement increased monotonically as the amplitude of the cycle increased (Fig. 3). In most of the *cement-and-screws* specimens, failure occurred as a single catastrophic event associated with the highest force peak. Conversely, the *screws-only* specimens had a progressive failure, which initiated at a force that was significantly lower than the final peak. Overall, the *cement-and-screws* specimens were significantly stronger than the *screws-only* (two-tailed unpaired t-test, $p < 0.005$), but slightly more scattered.

CONCLUSIONS

This study has shown the feasibility of simulating an *in vitro* failure of reconstructed humerus. The innovative repair technique based on a lower number of screws and cement injection seems very promising. To provide a more reliable pre-clinical indication, similar tests will be carried out on cadaveric bone specimens.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study was funded by Tecres SpA, Italy.

REFERENCES

- [1] Cristofolini L. (2015) “Chapter 184: Anatomical reference frames for long bones”, Handbook of Anthropometry: Physical Measures of Human Form in Health and Disease, Springer.
- [2] Westerhoff P. (2009) “In vivo measurement of shoulder joint loads during activities of daily living”, Journal of Biomechanics, 42, 1840–1849, Elsevier.

PERSONALIZED KNEE PROSTHESES BASED ON ARTICULAR MODELS TO REPLICATE THE JOINT FUNCTIONALITY OF A PATIENT

Nicola Sancisi¹, Michele Conconi¹, Alessandro Fortunato¹, Erica Liverani¹,
Vincenzo Parenti Castelli¹

¹*Department of Industrial Engineering, University of Bologna, Italy*
E-mail: nicola.sancisi@unibo.it, michele.conconi@unibo.it,
alessandro.fortunato@unibo.it, erica.liverani2@unibo.it, vincenzo.parenti@unibo.it

Keywords: *Articular models, selective laser melting, patient-specific, knee prostheses*

EXTENDED ABSTRACT

The main objective of articular prostheses is to recover the joint mobility and stability after substitution of the patient articular surfaces. Thus, prosthetic surfaces must fulfil different tasks: restoring the natural joint behaviour, compensating the function of articular structures removed during the implant, respecting the residual structures. In general, prosthetic components have default shape and position that often do not allow fulfilment of these tasks. The scope of this study is to propose an approach for the prosthesis design based on the combination of medical images, personalized articular models and 3D printing, to obtain morphological and kinematical information of a patient for the development of personalized prostheses.

The procedure was tested on a cadaveric knee (Fig. 1). A stereophotogrammetric system was used to digitalize articular surfaces and ligament insertions, and to record the femur-tibia relative motion. This information was used to define a personalized kinematic joint model that includes contacts and ligaments [1]. The model was used to design personalized prosthetic components [2]: the final surfaces guide the subject natural motion, ensuring articular contact and ligament isometry. Prosthetic components were built in cobalt-chrome alloy through 3D printing with selective-laser-melting technology (SISMA-MYSINT100, Piovene Rocchette-IT) [3]. Matching between designed and printed surfaces was determined by a stereophotogrammetric system. The prosthesis capability to reproduce the original subject motion was determined by implanting the components on a simulator constituted by a 3D FDM printed replica of the original knee including ligaments. The simulator was then passively flexed and the motion was compared with that of the original joint.

The used 3D printing technology proved to be appropriate for the application: the built surfaces reproduce the designed ones with a good accuracy. From a kinematical point of view, simulator results showed that the developed surfaces and their accurate positioning allow replication of the subject natural motion (Fig. 2). Moreover, the articular motion respects the joint constraints: stretching or laxities of ligaments were not observed and articular contact was maintained between surfaces over the full flexion arc.

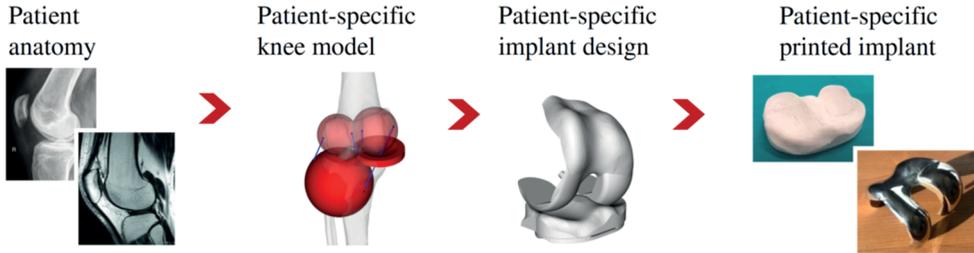


Figure 1. Procedure for the development of the patient-specific prosthesis based on articular models.

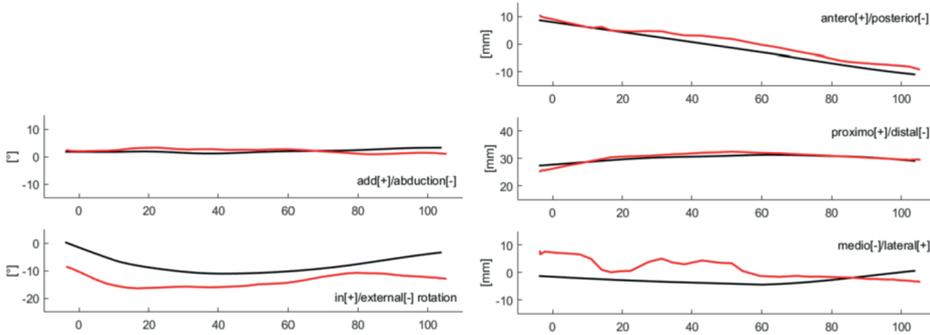


Figure 2. Natural (red) vs prosthesis (black) motion components over the full flexion arc.

The combined use of measurements on the patient and personalized articular models proved promising to develop prosthetic components able to reproduce the natural joint motion of the patient, respecting the anatomical structures. The model indeed proved to be a useful tool both to identify the joint constraints to be considered in the design, and to determine the effect on the articular motion of the constraints added by the prosthesis, thus allowing optimization of the prosthesis shape and position. The approach is based on articular models previously presented and validated [1], but it can be generalized with different articular models. This approach is particularly efficient if the prosthetic component geometry (shape and position) is completely personalized on the patient. From this point of view, the 3D printing technology with cobalt-chrome alloy used here not only proved useful for this study, but also revealed great potentialities for future industrial applications.

REFERENCES

- [1] Sancisi N., Zannoli D., Parenti-Castelli V., Belvedere C., and Leardini A., 2011. “A one-degree-of-freedom spherical mechanism for human knee joint modelling”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine, 225(8), 725-735.
- [2] Parenti-Castelli V., Catani F., Sancisi N., and Leardini A., 2010. “Improved orthopaedic device”. PCT Patent WO2010/128485.
- [3] Liverani E., Fortunato A., Leardini A., Belvedere C., Siegler S., Ceschini L., and Ascari A., 2016. “Fabrication of Co–Cr–Mo endoprosthetic ankle devices by means of Selective Laser Melting (SLM)”. Materials and Design, 106, 60-68.

OPTIMAL DESIGN OF HOLLOW TETRAHEDRAL TRUSS CORES FOR SANDWICH CONSTRUCTIONS

Eugenio Dragoni¹

¹*Department of Engineering Sciences and Methods, University of Modena and Reggio Emilia, Italy*

E-mail: eugenio.dragoni@unimore.it

Keywords: *Sandwich constructions; Core material; Tetrahedral lattice; Mechanical properties; Optimization.*

EXTENDED ABSTRACT

Many engineering applications benefit from compact, lightweight structures that support loads in an efficient and cost-effective way. Recent progress in the design and fabrication of sandwich structures with open-cell truss cores represent a valuable alternative to honeycomb core designs [1]. In a truss core sandwich, the faces of the panel are connected by a single- or multi-layered lattice of straight beams, arranged as a periodic repetition of unit cells (tetrahedral, pyramidal or other regular 3D shapes). The relative density can be very low while retaining significant strength and stiffness because the elemental beams work in tension-compression. These new engineered materials have mechanical properties that compare favourably to honeycomb cores and, thanks to the inner open space, they add multifunctional possibilities to the system (e.g., cross flow heat exchange, fluid storage, wiring and piping passages, etc.). Open-cell truss cores have collateral advantages in terms of corrosion resistance, damage tolerance and are more easily formed into complex curved shapes than conventional honeycombs. Kagome truss-core geometries are also ideally suited for internal actuation thus contributing to the manufacture of adaptive or morphing integral structures. The vibroacoustic performance of flat or curved panels with truss-like cores has attracted the attention of researchers since long because of the possibility to tailor the material to specific design needs.

Traditional approaches to fabricating truss core sandwich structures from engineering metals include investment casting, electrodischarge or laser ablation, perforated metal sheet forming, wire or tube lay-up and weaving techniques. All but the labour-intensive casting and ablating technologies require assembly and bonding steps to create the cellular structure and for later attaching it to face sheets. The bonding spots where the parts are joined together are weaker than the base material and undermine the mechanical efficiency of the global construction. This is especially true when the struts of the core are made from advanced composite materials which can exploit only a fraction of their strength due to the weakness of the nodes. Ongoing improvements in high-volume manufacturing processes and the remarkable development additive technologies [2] allow large-scale monolithic truss core structures to be built from high-performance metals without the nuisances of assembled

constructions. These new techniques can also manage the fabrication of truss core architectures with hollow struts in the interest of reduced weight.

Starting from the geometry of the unit cell, the mechanical analysis of the entire lattice truss is rather straightforward and can be resolved into macroscopic strengths and elastic moduli of an equivalent homogeneous core material. Generally speaking, periodic truss cores are stretch dominated and their mechanical properties scale linearly with the relative density and with the corresponding properties of the parent metal. Many cell topologies have been examined in the technical literature and closed-form equations have been disclosed for the mechanical properties of many truss core geometries. Despite the wealth of theoretical results available, very little has been published so far on the synthesis of the optimal truss core geometry that meets the design requirements. All the papers available suffer from some or all of the following restrictions: a) the material is the same for faces and core; b) only strength constraints are considered, with no concern for stiffness requirements; c) the optimization algorithms need custom numerical implementation.

The present paper aims at overcoming these limitations for the single-layered, low-density, tetrahedral truss core architecture with either solid or hollow round struts. After recognizing that the design of the entire sandwich can be decoupled in face design and core design, the optimization process concentrates on the weight minimization of the core. The tetrahedral cell is defined by four geometric parameters: inner and outer diameters of the cross-section of the beams, the length of the beams and their slope with respect to the faces of the sandwich panel. Using the established equations of the technical literature [3], the optimal problem is formally defined as the search for the lightest core topology satisfying all the design constraints on core thickness, allowable normal and shear strengths, minimum Young's and shear moduli. It is found that, although squat tetrahedrons (low slope angles) are to be avoided, no single configuration exists, which can optimize the core performance from all the mechanical points of view. The lightest design (defined by diameter to length ratio and slope angle of the beams) strictly depends on the problem constraints (45° orientations are most likely to occur but they are by no means the absolute optimum). A closed-form algorithm is presented which leads, in a finite number of steps, to the optimal truss configuration for each particular case. The engineering value of the optimizing algorithm is highlighted by means of a numerical example, showing that optimized aluminium tetrahedral cores perform better than high-profile polymer foams and compete favourably with aluminium honeycombs of equal density. With straightforward adaptations, the approach applied here to the tetrahedral geometry can be extended to other periodic truss core geometries (e.g. pyramidal) or to classical architectures (e.g. corrugated cores).

REFERENCES

- [1] Wadley, H.N.G., 2006. "*Multifunctional periodic cellular metals*". *Phil Trans R Soc A*, 364, 31–68.
- [2] Gibson, I., Rosen, D.W., and Stucker, B., 2009. *Additive manufacturing technologies*, Springer.
- [3] Dragoni E., 2013. "*Optimal mechanical design of tetrahedral truss cores for sandwich constructions*". *J. Sandwich Structures and Materials*, 15, 464–484.

UN PARADOSSO NELLE TRAVI CURVE

Marcello Botti, Antonio Strozzi, Enrico Bertocchi, Sara Mantovani

Dipartimento di Ingegneria Enzo Ferrari, Università di Modena e Reggio Emilia, , Italia
E-mail: antonio.strozzi @unimore.it

Keywords: *travi curve, paradosso, diminuzione tensioni flessionali diminuendo l'area.*

SOMMARIO ESTESO

E' noto che è a volte possibile diminuire le tensioni in un componente rimuovendo materiale, dove le gole schermo costituiscono l'esempio più comune. Nel campo delle travi rettilinee, si conoscono soltanto alcune situazioni nelle quali, rimuovendo materiale dalle zone della sezione trasversale più lontane dall'asse neutro, si ottiene una riduzione delle tensioni flessionali. In travi diritte, non si riesce invece ad ottenere una diminuzione delle tensioni flessionali rimuovendo materiale dalle zone della sezione vicine all'asse neutro. La Figura 1 mostra tre esempi documentati di tale comportamento paradossale. Le Figure (a), (c), (e) rappresentano le sezioni iniziali, mentre le Figure (b), (d), (f) descrivono la rimozione del materiale quantificata dalla profondità di rimozione t .

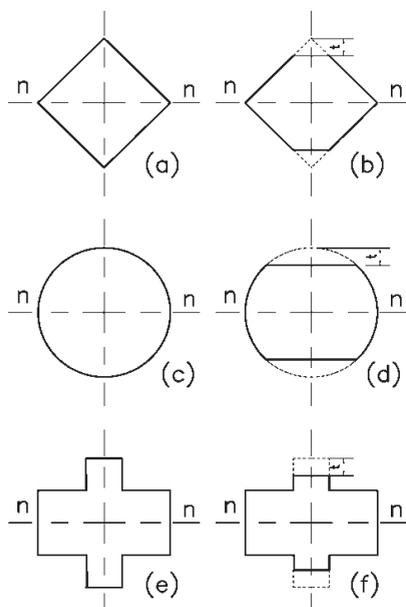


Figura 1. Paradossi in trave diritta.

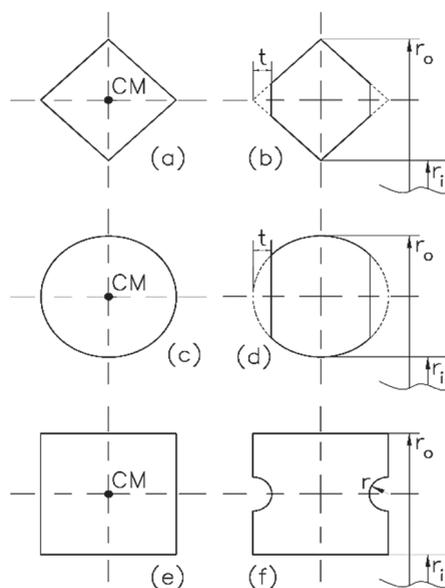


Figura 2. Paradossi in trave curva.

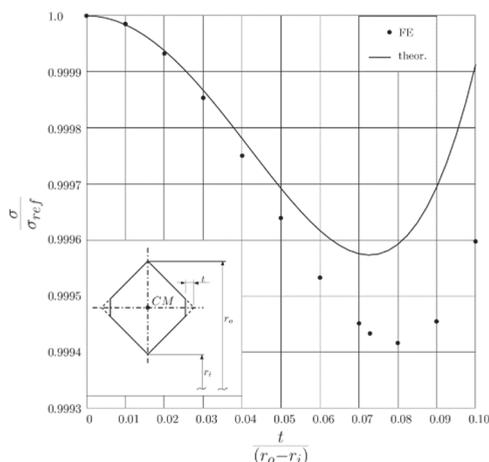


Figura 3. Diminuzione tensione flessionale accoppiata a diminuzione area.

Si abbandona nel seguito la trave rettilinea per considerare una trave curva. Si presentano in Figura 2 alcuni esempi nei quali si consegue una diminuzione della tensione flessionale togliendo materiale dalle zone della sezione vicine all'asse neutro. Le sezioni iniziali sono quelle delle Figure (a), (c), (e), mentre le Figure (b), (d), (f) descrivono la rimozione laterale di materiale. Tale comportamento paradossale non sembra essere stato notato in precedenza.

La Figura 3 quantifica la diminuzione della tensione flessionale massima, normalizzata rispetto a quella presente in un rombo non modificato, all'aumentare dello spessore della zona asportata t . Il rapporto tra raggio esterno ed interno della trave curva è 2. Nel grafico viene riportata la tensione flessionale massima analitica ed agli Elementi Finiti. I risultati analitici ed agli Elementi Finiti risultano abbastanza discordanti, ma entrambi testimoniano la possibilità di ridurre le tensioni in una trave curva, rimuovendo lateralmente materiale.

L'esempio riportato in Figura 2 consegue diminuzioni molto piccole di sezione, le quali non sono praticamente significative. Tuttavia è possibile presentare esempi nei quali la diminuzione di area è importante. Si pensi ad una sezione quadrata, dalla quale si rimuove una striscia orizzontale centrale simmetrica rispetto al baricentro. La sezione risulta così formata da due parti disgiunte. Per $r_o=2r_i$, se si impone la condizione che la tensione all'intradosso non vari, la massima diminuzione dell'area è del 35 per cento secondo la teoria della trave curva. Questa sezione non possiede una pratica utilità, ma comunque mostra che si possono ottenere diminuzioni apprezzabili nella pratica ingegneristica.

BIBLIOGRAFIA

[1] Navier CLMH, 1864 "De la résistance des corps solides. 3 ed. avec des notes et des appendices par M. Barre de Saint-Venant". Dunod, Paris.

ANALISI E PREVISIONE DI DIFETTI NEI PROFILI ESTRUSI

Barbara Reggiani¹, Lorenzo Donati¹, Luca Tomesani¹

¹*Department of Mechanical Engineering, University of Bologna, Italy*

E-mail: barbara.reggiani4@unibo.it, l.donati@unibo.it; luca.tomesani@unibo.it

Parole chiave: *saldature trasversali, estrusione, modellazione analitica, metodo agli elementi finiti*

STATO DELL'ARTE

Le saldature trasversali, unitamente a quelle longitudinali, sono difetti generati durante il processo di estrusione continua di materiali metallici. Se da una parte entrambi i difetti sono ineliminabili conseguenze del processo, diversamente dalle saldature longitudinali quelle trasversali sono caratterizzate da proprietà meccaniche inferiori rispetto al materiale base [1,2]. Infatti, al termine di ciascuna corsa, la parte terminale del materiale della vecchia billetta, contenuta all'interno della matrice, comincia ad interagire con la superficie frontale della nuova billetta normalmente contaminata da ossidi, lubrificante e impurità generando una zona di transizione di una certa lunghezza che deve essere scartata. Mentre l'indagine sperimentale delle saldature trasversali risulta essere un'attività lunga e complessa, l'impiego di modelli numerici e analitici permette una significativa riduzione delle tempistiche predittive [3]. Ad oggi, due formule sono state proposte in letteratura per l'analisi dell'estensione delle saldature trasversali. La prima formulazione suggerisce di computare l'estensione della saldatura come rapporto del volume delle alimentazioni e delle camere di saldatura sull'area della sezione trasversale del profilo moltiplicato per il numero di luci nella matrice [4]. Una seconda formulazione prevede una modifica della precedente introducendo un fattore moltiplicativo 1.5 che tiene conto sia della presenza di zone morte nella matrice sia dell'effetto dell'attrito che rende il flusso del materiale all'interno della matrice non uniforme [5].

In considerazione di questa limitata letteratura analitica, e in considerazione del fatto che i codici FEM non rappresentano ancora uno standard industriale, la determinazione della lunghezza di profilo da scartare per contaminazione da saldature trasversali avviene ancora sulla base dell'esperienza, di analogie e di regole pratiche. Tra queste, è comune pratica scartare da 1 a 3 mt di profilo in funzione dello specifico rapporto di estrusione. In questo contesto, scopo del lavoro è confrontare i risultati delle indagini sperimentali e numeriche condotte dagli autori su alcuni profili con le formulazioni analitiche ad oggi presenti in letteratura con l'obiettivo di verificarne l'applicabilità a livello industriale. Di seguito viene riportato come esempio uno dei casi industriali presi in considerazione.

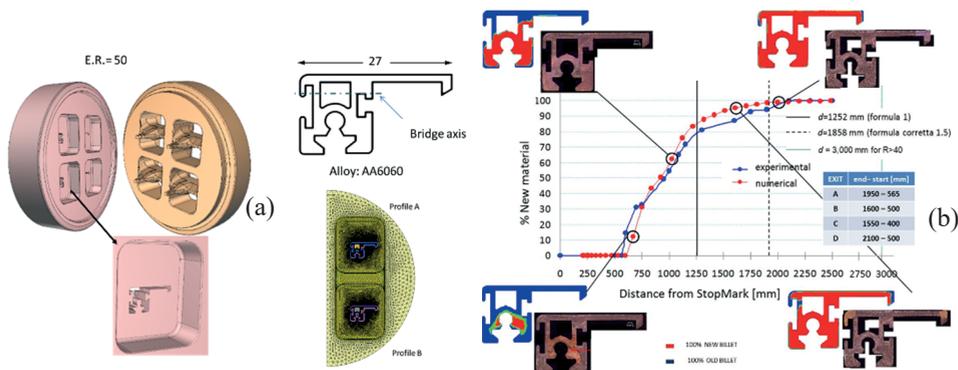


Figura 1 (a) progetto della matrice e del profilo analizzati, (b) confronto sperimentale, numerico, analitico [3]

CASI DI STUDIO

Il caso analizzato è un profilo estruso prodotto mediante una matrice a 4 luci (Fig. 2a) [3]. Le saldature trasversali generate nelle 4 luci sono state analizzate sperimentalmente mediante sezionamento e attacco chimico, e numericamente per le due luci simmetriche. Per uno dei 4 profili l'estensione della saldatura è stata inoltre calcolata analiticamente in accordo con le formulazioni presenti in letteratura. In Fig. 2b l'estensione è riportata come percentuale di sostituzione del materiale della vecchia billetta con la nuova in funzione dello "stop mark", segno sul profilo che definisce il fermo pressa per caricamento di una nuova billetta.

Come si può vedere in Fig. 2b, se da una parte si è ottenuto un ottimo accordo numerico (FEM)-sperimentale per la luce analizzata, soltanto la formulazione analitica corretta con il fattore 1.5 restituisce una stima, comunque media approssimata, dell'evoluzione. La formulazione non corretta e la regola empirica basata sul rapporto di estrusione sottostimano e sovrastimano invece rispettivamente il dato sperimentale.

CONCLUSIONI

Il caso presentato, unitamente agli altri investigati, mostra come strumenti numerici siano in grado di predire con una buona accuratezza la lunghezza di profilo estruso contaminata che deve essere scartata. Le formulazioni analitiche ed empiriche ad oggi presenti in letteratura, al contrario, o sovrastimano o sottostimano significativamente l'estensione oppure forniscono solo stime medie dell'evoluzione suggerendo la necessità di una nuova formulazione basata su parametri di complessità geometrica della matrice.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Donati L, Tomesani L, Minak G. 2007. "Characterization of seam weld quality in AA6082 extruded profiles" Journal of Material Processing Technology 191, 127–131
- [2] Akeret R, 1992. "Extrusion welds—quality aspects are now centre stage". Proc. 5th ET II, 319–336.
- [3] Reggiani B, Donati L, Tomesani L. "Prediction of charge welds in hollow profiles extrusion by FEM simulations and experimental validation". Int. J. Adv. Man. Techn. 69 (5), (2013), pp. 1855-1872.
- [4] Saha PK, 2000. *Aluminum extrusion technology*. ASM International, Materials Park, Ohio, 44073–0002
- [5] Jowett C., Adams J., Daughette C., Lea G., Huff O.A., Fossil, N 2008. "Scrap Allocation". Proc.9th ET II, 13–16.

REST-TO-REST TRAJECTORY PLANNING FOR PLANAR UNDERACTUATED CABLE-DRIVEN PARALLEL ROBOTS

Edoardo Idà¹, Alessandro Berti¹, Marco Carricato¹, Tobias Bruckmann²

¹*Department of Industrial Engineering (DIN), University of Bologna, Italy*

E-mail: edoardo.ida2@unibo.it, alessandro.berti10@unibo.it, marco.carricato@unibo.it

²*Chair of Mechatronics, University of Duisburg-Essen, Germany*

E-mail: tobias.bruckmann@uni-due.de

Keywords: *Cable-robots, Trajectory planning, Underactuated mechanisms*

EXTENDED ABSTRACT

Cable-Driven Parallel Robots (CDPRs) employ cables in place of rigid-body extensible legs in order to control the end-effector pose. A CDPR is *fully constrained* if the end effector pose can be completely determined when actuators are locked and, thus, all cable length are assigned. Conversely, a CDPR is *underconstrained* if the end-effector preserves some freedoms once actuators are locked. This occurs either when the end-effector is controlled by a number of cables smaller than the number of degrees of freedom (DoF) that it possesses with respect to the base or when some cables become slack in a fully constrained robot [1]. In addition, if the number of actuators is less than the number of generalized coordinates needed to completely describe the manipulator, the robot is *underactuated* and thus inherently underconstrained as well. While a rich literature exists for fully-constrained CDPRs, little research has been conducted on underconstrained ones [2].

A major challenge in the analysis of these systems is the trajectory planning of the platform for point-to-point motions. In the case of full or redundant actuation the system can be shown to be "flat" [3] and the trajectory planning problem is completely algebraic. When the platform is both underconstrained and the system underactuated, the flatness property does not necessarily hold and different techniques must be employed. This fact leads, for example, to the impossibility of bringing the platform to rest once the transition from the starting point to the ending point is completed.

In [4] a serial planar cable-driven mechanism was proposed whose mechanical architecture is such that the dynamic equations can be decoupled and the burden of trajectory planning is reduced. A planar 3 DoF CDPR suspended by 2 cables was proposed in [5], and the authors were able to generate point-to-point motions for the platform, even outside the static workspace, exploiting harmonic motion laws for the cable lengths; however, they were not able to impose constraints on the path to follow or on the transition time. An input-shaping filtering technique was then proposed in [6] for a planar CDPR. Generic trajectories

were proposed for which the platform oscillations were significantly reduced, but not eliminated, even in a simulation environment, mainly because of the approximation of the robot natural frequency used in the input shaper. In addition, the nature of the input shaping filter does not allow precise tracking of geometrical paths in point-to-point motions, since the nominal path is modified by the filter.

In this work, an underactuated and underconstrained 2-cables planar CDPR, whose mechanical model is identical to the one described in [5] and [6], is proposed. Our objective is to develop a trajectory-planning method suitable for a stationary setpoint transition when the transition path is assigned. A stationary setpoint transition refers to a point-to-point motion of the platform that is performed in a finite, precomputed time, between two static equilibrium poses. First, the dynamic model is developed. Then, a robust trajectory planning method is proposed which is based on the solution of a *Boundary Value Problem* (BVP) arising from the dynamics of the platform. In order for the BVP to be solvable, a specific parametrization of the geometric path has to be employed, in which some parameters are fixed by the path and others are free. The solution of the BVP subject to the free parameters allows for the determination of the parameters value and the time evolution of the system.

The technique was tested with a Matlab code and then validated with the commercial software Adams. In the end, the proposed trajectory was tested on a prototype. In order to prove the effectiveness of the method, an open loop control scheme was employed, so that only the computed lengths of the cables are fed to the actuators. The experimentation showed a remarkable reduction of oscillations in each stationary point, even without a feedback control loop on the platform pose.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Carricato, M., Merlet, J. P. (2013). Stability analysis of underconstrained cable-driven parallel robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 29(1), 288-296.
- [2] Heyden, T., Woernle, C. (2006). Dynamics and flatness-based control of a kinematically undetermined cable suspension manipulator. *Multibody System Dynamics*, 16(2), 155-177.
- [3] Fliess, M., Lvine, J., Martin, P., Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International journal of control*, 61(6), 1327-1361.
- [4] Zanutto, D., Rosati, G., Agrawal, S. K. (2011, May). Modeling and control of a 3-DOF pendulum-like manipulator. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on* (pp. 3964-3969). IEEE.
- [5] Zoso, N., Gosselin, C. (2012, May). Point-to-point motion planning of a parallel 3-dof underactuated cable-suspended robot. In *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on* (pp. 2325-2330). IEEE.
- [6] Park, J., Kwon, O., Park, J. H. (2013). Anti-sway trajectory generation of incompletely restrained wire-suspended system. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(10), 3171-3176.

DYNAMICALLY FEASIBLE PERIODIC TRAJECTORIES FOR SPATIAL 3-DOF CABLE-SUSPENDED PARALLEL ROBOTS: PRELIMINARY RESULTS

Giovanni Mottola, Marco Carricato

Department of Industrial Engineering, University of Bologna, Italy

E-mail: giovanni.mottola3@unibo.it, marco.carricato@unibo.it

Keywords: *Cable-robot dynamics, cable-suspended robots, fully-actuated robots, periodic trajectories*

EXTENDED ABSTRACT

Cable-driven parallel robots (CDPRs) move the end-effector by flexible cables that are coiled and uncoiled on cable winches. This strengthens the classical advantages of parallel robots versus serial ones, such as high dynamic performances, a large payload-to-robot-weight ratio and reduced masses and inertias; CDPRs also provide specific advantages, such as potentially very large workspaces and reduced costs.

Cable actuation, however, also introduces a fundamental drawback: it can only work under tensile forces, as cables can pull, but cannot push. The condition $\tau_i \geq 0$ (with τ_i being the tension in the i -th cable) defines the *Static Equilibrium Workspace* (SEW) of the robot, that is, the set of end-effector poses where the robot can safely be brought to rest [1]. Recently, authors have begun to study the possibility of expanding the workspace by properly using inertia forces [2]; this opens new potential applications for CDPRs, as the robots can move beyond their SEW (with nonzero velocity or acceleration).

One possibility is to define dynamic motions that guarantee positive cable tensions, thus merging tension analysis with trajectory planning. This approach was first outlined in [3], where the authors define periodic trajectories, along circles or line segments, whose feasibility can be checked *a priori*, without solving the inverse dynamic problem. Reference [3] shows that such trajectories are feasible if the frequency ω with which they are followed falls within a given range; furthermore, a special frequency ω_n is found, which always falls within said range (this ω_n is akin to the natural frequency of a pendulum).

In later works, this general idea was extended to 3-DOF robots, either spatial [4] or planar [5]; later, the authors considered point-to-point motions [6-7].

In this work, we consider dynamic periodic spatial trajectories applied to a spatial *Cable-Suspended Parallel Robot* (CSPR); this is a type of CDPR where the end-effector is always below the cable exit points and gravity contributes to keeping cables in tension, by pulling the end-effector downwards. In particular, we consider a point-mass robot with three cables.

We generalize and expand the results of Refs. [4, 7, 8-9], by defining the range $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ of admissible frequencies that guarantee feasibility, together with a special frequency ω_n that allows arbitrarily large periodic motions to be realized, for the most general robot architecture and a general tridimensional sinusoidal motion.

Next, we analyze transition motions that allow one to:

- bring the robot to a dynamic trajectory from a state of rest;
- slow down the robot to a state of rest, starting from a dynamic condition;
- connect two elliptical trajectories with the same shape, center and orientation, but different sizes.

Finally, we compare our theoretical findings (obtained under the assumption of perfectly stiff and massless cables) with simulations that include cable elasticity in the model, in order to test the robustness of the obtained results.

The proposed method only requires algebraic conditions to be verified and seems compatible with real-time applications, for example to recover the robot after a cable failure [10].

The content of this contribution will be presented, with more details, in [11].

REFERENCES

- [1] Riechel, A. T., Ebert-Uphoff, I., 2004. "Force-feasible workspace analysis for underconstrained point-mass cable robots". In: Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., pp. 4956–4962.
- [2] Barrette, G., Gosselin, C., 2005. "Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms". *ASME J. Mech. Des.*, **127**(2), pp. 242-248.
- [3] Gosselin, C., Ren, P., Foucault, S., 2012. "Dynamic trajectory planning of a two-dof cable-suspended parallel robot". In: Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., pp. 1476–1481.
- [4] Gosselin, C., 2012. "Global planning of dynamically feasible trajectories for three-dof spatial cable-suspended parallel robots". In: Proc. 1st Int. Conf. Cable-Driven Parallel Robots, pp. 3–22.
- [5] Jiang, X., Gosselin, C., 2014. "Dynamically feasible trajectories for three-DOF planar cable-suspended parallel robots". In: Proc. ASME IDETC.
- [6] Gosselin, C., and Foucault, S., 2014. "Dynamic point-to-point trajectory planning of a two-DOF cable-suspended parallel robot". In: *IEEE Trans. Robot.*, **30**(3), pp. 728-736.
- [7] Jiang, X., and Gosselin, C., 2016. "Dynamic Point-to-Point Trajectory Planning of a Three-DOF Cable-Suspended Parallel Robot". In: *IEEE Trans. Robot.*, **32**(6), pp. 1550-1557.
- [8] Zhang, N. and Shang, W., 2016. "Dynamic trajectory planning of a 3-DOF under-constrained cable-driven parallel robot. In: *Mech. Mach. Theory*, **98**, pp. 21-35.
- [9] Zhang, N., Shang, W., and Cong, S., 2016. "Geometry-Based Trajectory Planning of a 3-3 Cable Suspended Parallel Robot". In: *IEEE Trans. Robot.*, **33** (2), pp. 484 – 491.
- [10] Berti, A., Gouttefarde, M., and Carricato, M., 2016. "Dynamic recovery of cable-suspended parallel robots after a cable failure". In: Proc. ARK, pp. 337-344.
- [11] G. Mottola, Gosselin, C., and Carricato, M., 2017. "Dynamically Feasible Elliptical Trajectories for Fully Constrained 3-DOF Cable-Suspended Parallel Robots". In: Proc. 3rd Int. Conf. Cable-Driven Parallel Robots, pp. 219-230.

STUDY, DESIGN AND REALIZATION OF A REAL-TIME INTERFACING SYSTEM BETWEEN PROGRAMMABLE CONTROLLERS

Jacopo Cavalaglio Camargo Molano¹, Marco Cocconcelli², Riccardo Rubini³

¹*University of Modena and Reggio Emilia, Italy,
E-mail: jacopo.cavalagliocamargomolano@unimore.it*

²*University of Modena and Reggio Emilia, Italy,
E-mail: marco.cocconcelli@unimore.it*

³*University of Modena and Reggio Emilia, Italy,
E-mail: riccardo.rubini@unimore.it*

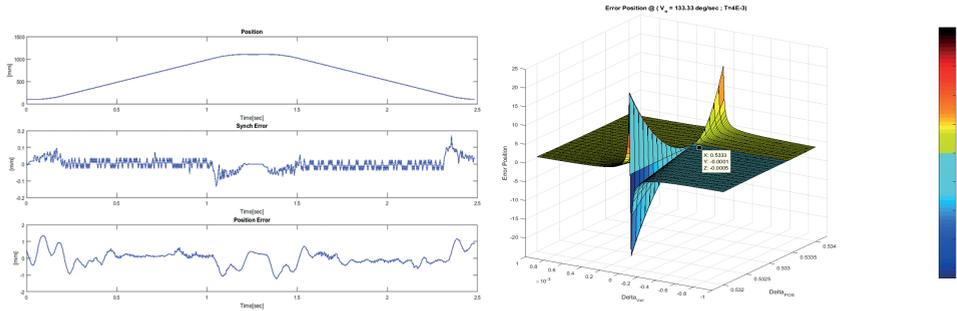
Keywords: *Synchronization, trajectory planning, motion control, PLC, IEEE 1588.*

EXTENDED ABSTRACT

Distributed solutions for Real-Time system architecture are more and more used because they improve the dependability, compensability, scalability and extensibility of the products [1]. The computational cluster of these systems consists of a set of different nodes interconnected by Real-Time communication system. Industrial Ethernet, which is a field bus technology, is commonly used for the communication of data among nodes of distributed Real-Time systems for its security and reliability. It is acknowledged that integration among industrial programmable controllers of different producers can be very useful in order to extend the possible architectures of distributed systems. In some applications communication among different PLCs or IPCs is already used [2] but only for the exchange of information and not for the motion control of motors. This is due to the fact that different vendors use different methods for the control of the dynamics of motors and to the fact that motion control is a hard Real-Time task, which requires a high level of accuracy and reliability.

This work is focused on the study, design and realization of a general Real-Time interface between different programmable controllers for the motion control of motors through the use of Industrial Ethernet communication and the IEEE 1588 V2 Time Synchronization protocol. The hardware architecture, the used communication network and the algorithms realized are a global solution for the motion control between industrial programmable controllers of different vendors. For this reason it is possible to use this solution for all types of distributed Real-Time systems that can include both PLC and iPC devices.

Different vendors use different methods for the motion of axes. Some of them can directly move an axis point by point with the definition of its position, velocity and acceleration at



each Motion Task. Other vendors cannot control a motor point by point, but they use motion instructions in order to impose the desired trajectory. This case is the most interesting because it is necessary to impose the desired trajectory using a predefined motion profile. In order to develop a global method for the synchronization of motion between two different controllers the Motion Instruction used to move the axes of the Slave Motion CPU is a Jog. The jog instruction allows to carry out a trapezoidal velocity profile with the definition of the velocity that the axis has to achieve and the acceleration with which it has to reach the desire velocity

The main idea for the synchronization of the two systems is to determine the time difference between the time instant in which the Master Motion CPU imposes the Command values to its axes and the time instant in which the Slave Motion CPU will impose the Command values to its axes. Then with the computation of this delay and thanks to the kinematic data of the Master CPU it is possible to extrapolate the Future Command Position, Future Command Velocity, Future Command Acceleration that the Master axes will achieve after a time T.

In order to synchronize the Slave Motion CPU with the Master Motion CPU, the Slave Motion has to impose a trajectory on its axes congruent to their actual kinematic values to achieve, at the same time instant, the same positions and velocities as the Master Motion CPU reaches.

Two algorithms the Discrete approximation and the Linear approximation were realized in order to compute the input velocity and the input acceleration necessary to the jog instruction to synchronize the axes. They have been tested with different motion profile at different velocities in order to evaluate and optimize them.

The results show that the two Synchronization algorithm have good performances with a synchronization error two or three time lower than the typical position error of a motor. The tests also show that the performances of the algorithm increase with the reduction of the motion task time of the system.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Kopetz H., 2002. *“Real time systems, Design Principles for Distributed Embedded Application”*. Kluwer Academic Publication
- [2] Li H., Zhang F., Zhang J., Zhang N., Wang L., Yang X., 2016. *“Research and Realization of a Spinning Machine Control and Monitoring System by Industrial Ethernet Communication between IPC and OMRON PLC”*. Proceedings of the IEEE International Conference on Information and Automation, Ningbo, China.

IL PROGETTO AREUS – ROBOTICA INDUSTRIALE ECO-EFFICIENTE E SOSTENIBILE

Angelo Oreste Andrisano¹, Giovanni Berselli², Michele Gadaleta¹, Marcello Pellicciari¹, Margherita Peruzzini¹

¹*Department of Engineering “Enzo Ferrari”, University of Modena and Reggio Emilia, Italy*

E-mail: angelooreste.andrisano@unimore.it, michele.gadaleta@unimore.it, marcello.pellicciari@unimore.it, margherita.peruzzini@unimore.it

²*Department of Mechanics, Energetics, Management and Transportation, University of Genova, Genova, Italy*

E-mail: giovanni.berselli@unige.it

Keywords: *Energy-Efficient Industrial Robotics, Integrated Simulation, Sustainable Manufacturing Engineering Methods, DC-Smartgrid, LCA*

SOMMARIO ESTESO

L'impiego esteso di robot industriali nei processi di manifattura permette di ottenere la superiore qualità e produttività richiesta dai mercati; i paradigmi dell'Industria 4.0 prevedono inoltre un notevole ulteriore incremento del numero di robot, che purtroppo rischia di compromettere la sostenibilità delle fabbriche del futuro in termini sia finanziari che ambientali. Infatti, i sistemi di produzione meccatronici e robotizzati sono intrinsecamente energivori e impattano pesantemente sulla potenza installata ed i consumi energetici aziendali. Allo stato dell'arte si è lavorato soprattutto per migliorare l'efficienza dei singoli robot, ma è mancato un reale approccio di sistema, necessario per ottimizzare il consumo energetico totale di celle ed impianti robotizzati. Recentemente, sono stati introdotti sul mercato tool di simulazione proprietari capaci di predire il consumo energetico dei singoli robot [1] ma non dell'applicazione (i.e.: robot, utensili, macchinari, etc.), e pertanto risultano solo parzialmente utili per dimensionare empiricamente la cabina elettrica.

Il progetto europeo FP7 AREUS – Automation and Robotics for EUropean Sustainable manufacturing [2], coordinato da UNIMORE, ha come obiettivo la riduzione dei consumi energetici e del LifeCycle Cost (LCC) di impianti robotizzati mediante quattro innovazioni modulari e scalabili. Una nuova architettura industriale di smartgrid a corrente continua (DC) permette la rigenerazione ed il recupero energetico tra diversi robot e macchinari, mentre un set di tool di simulazione e controllo basati sul concetto di Energy Signature [3] abilitano l'ottimizzazione dei consumi energetici dell'intero impianto mantenendo la stessa produttività e qualità di lavorazione, sfruttando il coordinamento ed il recupero di energia.

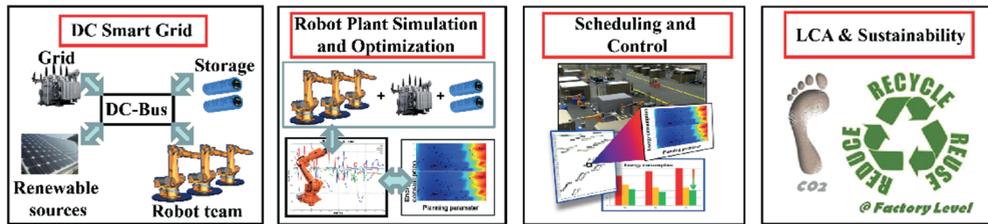


Figura 1. Le principali innovazioni del progetto AREUS.

Infine, un innovativo approccio al LifeCycle Assesment (LCA) ha permesso di sviluppare tools specifici per impianti robotizzati, ideali per calcolare con superiore precisione l'impatto ambientale e finanziario di ogni soluzione di produzione robotizzata.

In questa presentazione, si mostreranno i principali avanzamenti, rispetto allo stato dell'arte, introdotti dal progetto AREUS e, in particolare, i risultati di ricerca e sviluppo ottenuti nei seguenti WorkPackages (WP), correlati alle suddette innovazioni e schematizzati in Fig. 1

- **WP 1:** Nuove architetture hardware (e.g. [4]) per la riduzione del consumo energetico, basate su un innovativo sistema di distribuzione dell'energia elettrica con migliori possibilità di distribuire, recuperare ed immagazzinare energia a livello di fabbrica;
- **WP2:** Un innovativo ambiente integrato di simulazione e design (e.g. [5,6]), specificamente concepito per il progetto e la programmazione eco-efficiente di grandi impianti robotizzati;
- **WP3:** Nuovi metodi di ottimizzazione, interamente connessi ai *tools* di simulazione di cui al punto 2), specificamente concepiti per la determinazione di *scheduling* dell'operazioni esplicitamente mirati alla riduzione dei consumi energetici (sia in termini globali che in termini di potenze massime assorbite istaneamente [7,8]);
- **WP4:** Nuovi metodi di LCA concepiti per predire/ottimizzare sia l'impatto economico che ambientale della fabbrica automatizzata [9].

BIBLIOGRAFIA

- [1] <https://www.realistic-robot-simulation.org/>
- [2] M. Pellicciari, et al., 2015, "AREUS - Innovative hardware and software for sustainable industrial robotics", IEEE CASE, Int. Conf. on Automation Science and Engineering, pp. 1325–1332.
- [3] M. Pellicciari, G. Berselli, F. Leali, A. Vergnano, 2013, "A method for reducing the energy consumption of pick-and-place industrial robots" Mechatronics, 23 (3), 326-334.
- [4] D. Meike, A. Senfelds, and L. Ribickis, 2013, "Power converter for dc bus sharing to increase the energy efficiency in drive systems. Industrial Electronics Society, IEEE IECON 2013 - 39th Annual Conference, 7199–7204.
- [5] D. Meike, M Pellicciari, G Berselli, 2014, "Energy efficient use of multirobot production lines in the automotive industry: Detailed system modeling and optimization", IEEE Transactions on Automation Science and Engineering 11 (3), 798-809.
- [6] M. Gadaleta, G. Berselli, M. Pellicciari, 2017, "Energy-optimal layout design of robotic work cells: Potential assessment on an industrial case study", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 47, 102-111.
- [7] O. Wigstrom, B. Lennartson, A. Vergnano, and C. Breitholtz. High level scheduling of energy optimal trajectories. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 10(1):57–64, 2013.
- [8] B. Lennartson, et al., 2010, "Sequence planning for integrated product, process and automation design. Automation Science and Engineering, IEEE Transactions on, 7(4):791–802.
- [9] N. Bey, Hauschild M.Z., McAlone T.C., 2013, "Drivers and barriers for implementation of environmental strategies in manufacturing companies. CIRP Ann - Manuf. Technol., 62(1):43–46.

INDICE DEGLI AUTORI

Andrisano Angelo Oreste	105
Battarra Mattia.....	81
Bellelli Alberto	39
Berselli Giovanni	105
Bertazzini Anna	81
Berti Alessandro	99
Bertocchi Enrico.....	95
Bodey Andrew J.	87
Botti Marcello.....	95
Bruckmann Tobias.....	99
Carricato Marco.....	99, 101
Castagnetti Davide.....	61
Catania Giuseppe	3
Cattabriga Stefano	77
Cavalaglio Camargo Molano Jacopo.....	103
Cocconcelli Marco.....	61, 103
Conconi Michele.....	91
Cristofolini Luca.....	35, 87, 89
D'Elia Giacomo	83
Dall'Ara Enrico	87
Dalpiaz Giorgio	81, 83
Damien Lacroix	87
De Felice Alessandro.....	79
Donati Lorenzo	97
Dragoni Eugenio.....	93
Faldini Cesare	35
Fortunato Alessandro.....	91
Gadaleta Michele	105
Giorgi Mario	87
Golinelli Nicola	39
Guerra Enrico	89
Idà Edoardo.....	99
Leonelli Luca	77
Liverani Erica	91
Mantovani Sara.....	95
Morellato Kavin.....	89
Mottola Giovanni.....	101
Mucchi Emiliano	81, 83
Munari Alessandro.....	61
Musella Umberto	83
Palanca Marco	35, 87
Parenti Castelli Vincenzo	91
Pellicciari Marcello.....	105
Peruzzini Margherita	105
Reggiani Barbara	97

Rivola Alessandro.....	53
Rubini Riccardo.....	61, 103
Ruspi Maria Luisa.....	35
Sancisi Nicola.....	91
Soffiatti Renzo.....	89
Sorrentino Silvio.....	77, 79
Spaggiari Andrea.....	39
Strozzi Antonio.....	95
Tomesani Luca.....	97
Troncosi Marco.....	85
Viceconti Marco.....	87
Zanarini Alessandro.....	3, 19

In questo volume sono raccolte le memorie presentate in occasione della “Undicesima Giornata di Studio Ettore Funaioli”, che si è svolta il 21 luglio 2017 presso la Scuola di Ingegneria e Architettura dell’Alma Mater Studiorum – Università di Bologna. La Giornata è stata organizzata dagli ex allievi del Prof. Ettore Funaioli con la collaborazione del DIN – Dipartimento di Ingegneria Industriale e della Scuola di Ingegneria e Architettura dell’Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, e con il patrocinio dell’Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna e del GMA – Gruppo di Meccanica Applicata.

Questo volume è stato stampato con il contributo di G.D S.p.A.

AlmaDL è la Biblioteca Digitale dell’Alma Mater Studiorum Università di Bologna. AlmaDL ospita al suo interno gli archivi Open Access che rendono pubblicamente disponibili i contributi derivanti dalle attività di ricerca, didattiche e culturali dell’Ateneo bolognese. AlmaDL attua così i principi del movimento internazionale a sostegno dell’accesso aperto alla letteratura scientifica, sottoscritti dall’Università di Bologna assieme a molte altre istituzioni accademiche, di ricerca e di cultura, italiane e straniere.

<http://almadl.unibo.it>

