Claudia Scarani*
Università degli Studi di Bologna

Confronto fra stime di minimi quadrati e regolarizzate applicate a un modello macroeconomico dei consumi.

Quaderni – Working Papers DSE

JEL Classification: C22, C63, C82.

Keywords : Time Series, Least Squares with Quadratic Inequality Constraint, Regularization.

Abstract: Il metodo dei minimi quadrati viene spesso utilizzato come criterio di approssimazione per scegliere una particolare soluzione di problemi molto diversi fra loro.

Spesso ciò che interessa non è un insieme di numeri che risolva il problema, ma una soluzione che presenti caratteristiche che soddisfano alcuni vincoli addizionali rispetto ai dati assegnati.

In questo lavoro si propone, come esempio, un problema di stima di un modello economico dei consumi italiani e americani. I dati trimestrali sono relativi al periodo storico 1976.1-1999.2. Le variabili esplicative utilizzate sono: consumi del periodo precedente, reddito disponibile e indice di borsa.

Sono stati effettuati confronti fra le stime di minimi quadrati e stime mediante due metodi di regolarizzazione. Quest'ultimo approccio sembra fornire risultati che meglio si adeguano alla realtà economica. Una attenzione particolare è stata rivolta agli aspetti numerici del problema della regolarizzazione e alla implementazione di due algoritmi per la valutazione tradizionale e approssimata del parametro regolarizzante.

*Claudia Scarani, Università di Bologna, viale Filopanti 5, 40126 Bologna, Italy. E-mail scarani@spbo.unibo.it.

Il Prof. Stefano Alliney ha proposto di esaminare il metodo di regolarizzazione approssimato ed ha suggerito all'autrice di riprendere e approfondire un interessante tema di ricerca già affrontato in passato.

1. Introduzione.

Il metodo dei minimi quadrati viene spesso utilizzato come criterio di approssimazione per scegliere una particolare soluzione di problemi molto diversi fra loro.

Spesso ciò che interessa non è un insieme di numeri che risolva il problema, ma una soluzione che presenti caratteristiche che soddisfano alcuni vincoli addizionali rispetto ai dati assegnati.

Quando si giunge a una formulazione algoritmica per la soluzione, il problema dei minimi quadrati lineari ordinari (LSE) è formulato così: assegnato il sistema lineare $Ax = b \quad A \in Mat(R, m * n), \quad x \in R^n, \quad b \in R^m \quad m > n$ con rango(A)= *n*, determinare il vettore $\hat{x}$ che rende minimo il quadrato della norma euclidea del vettore dei residui $\|\hat{r}\|^2 = \|A\hat{x} - b\|^2$.

Se le colonne di A sono quasi linearmente dipendenti il sistema risulta malcondizionato e le stime dei minimi quadrati possono subire ampie modifiche anche per piccole variazioni dei termini noti.

Risultati più stabili si ottengono impiegando tecniche di regolarizzazione (di smoothing): “ridge regression”, il metodo di regolarizzazione di Tikhonov, ecc.

In questo lavoro si propone di valutare un vettore *x* incognito che rende minimo il funzionale convesso $J(x) = \|Ax - b\|^2 + \alpha^2 \|x\|^2$ per un certo valore del parametro α reale. Il valore del parametro α può essere ottenuto imponendo il vincolo $\|Ax - b\|^2 \le \delta^2$ con δ prefissato. Il parametro α stabilisce il peso fra la parte relativa al modello del funzionale: $\|Ax - b\|^2$ e la parte regolarizzante: $\|x\|^2$.

Tale approccio può risultare opportuno in molte circostanze, ad esempio nel caso in cui si giudichi la soluzione di minimi quadrati troppo sensibile ai disturbi di misura sui dati o qualora si desideri una soluzione con un andamento liscio, smooth. In generale la richiesta di stabilizzare la soluzione di un processo è assai diffusa in molti campi applicativi. Per indicarne solo alcuni si ricorda la derivazione numerica di dati affetti da rumore, la ricostruzione di immagini, l'identificazione dei parametri in sistemi dinamici. Tradizionalmente tali metodi sono stati affrontati in spazi funzionali per problemi a dimensione infinita, tuttavia vengono implementati in pratica utilizzando gli strumenti dell'algebra lineare ed in questo ambito sarà presentato questo contributo.

In questo lavoro viene proposto, come esempio, un problema di stima di un modello economico dei consumi italiani e americani. I dati trimestrali sono relativi al periodo storico 1976.1-1999.2. Le variabili esplicative utilizzate sono: consumi del periodo precedente, reddito disponibile e indice di borsa.

Sono mostrati confronti fra le stime di minimi quadrati e stime mediante due metodi di regolarizzazione. Quest'ultimo approccio sembra fornire risultati che meglio si adeguano alla realtà economica. Una attenzione particolare è rivolta agli aspetti numerici del problema della regolarizzazione e alla implementazione di due algoritmi per la valutazione tradizionale e approssimata del parametro regolarizzante. Il metodo approssimato consente una valutazione diretta del parametro, mentre col classico metodo di regolarizzazione, (Tikhonov, 1963) la valutazione del parametro richiede la soluzione di una equazione secolare.

2. Breve rassegna sul problema di regolarizzazione.

2.1 Smoothing.

Nel caso in cui il rango di A sia inferiore alla dimensione del vettore x esistono infinite soluzioni e per ottenerne una sola è necessario assegnare condizioni aggiuntive. Se il sistema è malcondizionato, da un punto di vista numerico, la situazione è analoga e usualmente si richiede che la soluzione presenti un profilo regolare, liscio.

Questa condizione qualitativa può essere formalizzata ponendo *x=Sw* dove *S* è la matrice di smoothing che contiene le informazioni aggiuntive e *w* un vettore con norma accettabile. E' possibile, in assenza di informazioni precise, costruire *S* utilizzando solo la matrice *A* e in tal caso risulta $S = \begin{cases} (A'A)^{p/2} & se \quad p \quad è \quad pari \\ (A'A)^{(p-1)/2} A' & se \quad p \quad è \quad dispari \end{cases}$

dove *p* è l'ordine di derivazione ipotizzato. Nel sistema lineare *Ax=b*, se *A* corrisponde ad un opportuno operatore integrale, risulta $x = A^p w = Sw$, posto che *w* sia continuo, limitato e si supponga $w = \nabla^{p+1} b = \nabla^p x$.

2.2 Valutazione dell'errore.

Quando il sistema è malcondizionato, è opportuno utilizzare al posto dell'inversa di *A* (o di *A'A*) una matrice C_α ($\alpha>0$) tale che $C_\alpha A$ converga alla matrice identità quando α tende a zero; la scelta di C_α non è univoca.

Per problemi ben condizionati la soluzione di minimi quadrati è $\hat{x} = (A'A)^{-1} A'b$.

Se al posto di *A'A* si utilizza $(A'A + \alpha^2 I)$ con α piccolo la soluzione sarà $\hat{x} = (A'A + \alpha^2 I)^{-1} A'b = C_\alpha b$. La scelta $C_\alpha = (A'A + \alpha^2 I)^{-1} A'$ fornisce una soluzione regolarizzata secondo il metodo di Tikhonov.

Usualmente per determinare il parametro viene assegnato il vincolo $\|Ax - b\|^2 \le \delta^2$, ma può essere fatta una scelta migliore di α notando che α dipende sia da δ^2 sia da $\|w\|$ e più precisamente dal loro rapporto.

Spesso è possibile ottenere la seguente valutazione dell'errore per valori di *p* (ordine di differenziazione del vettore *w*) e delle costanti Δ, γ_1, γ_2 scelte opportunamente:

$$\|x - C_\alpha b\| \le \left(\gamma_1 \frac{\Delta}{\alpha} + \gamma_2 \alpha^p \right) \|w\|$$

Ponendo $\Delta=\delta^2/\|w\|$ e scegliendo il valore di α, (α*) che minimizza il termine destro della disuguaglianza precedente si ottiene

$$\alpha^* = \left(\frac{\gamma_1 \Delta}{\gamma_2 p} \right)^{\frac{1}{p+1}} = O(\Delta^{\frac{1}{p+1}}) \text{ e } \|x - C_{\alpha^*} b\| \le \gamma_2 (p+1)(\alpha^*)^p = O(\Delta^{\frac{p}{p+1}})$$

dove O indica il simbolo di Landau.

Nei sistemi ben condizionati il metodo dei minimi quadrati fornisce stime con errore dell' ordine di Δ, viceversa nei sistemi malcondizionati l'esponente inferiore all'unità indica una perdita di accuratezza del risultato rispetto a quella dei dati.

La regolarizzazione con il metodo di Tikhonov fornisce una soluzione del problema con un errore non inferiore a $O(\Delta^{2/3})$ essendo il valore delle costanti $\gamma_1 = 0.5$ e $\gamma_2 = 0.5, 1$, rispettivamente per *p=1, 2*; mentre $\gamma_2 = \infty$ per *p>2*.

2.3 Analisi stocastica.

Se si vuole risolvere il problema $b=Ax+\varepsilon$ $(x=Sw)$ con informazioni stocastiche e specifiche sulle componenti ε e *w*, supponendo in particolare che $\varepsilon \sim NID(0,\sigma^2)$ e $w \sim NID(0,\tau^2)$ non siano correlate fra loro, una buona misura del livello di errore relativo è $\Delta=\sigma/\tau$.

Quando Δ è noto, il valore atteso di $\left\| x - C\, b \right\|^2$ è minimo per la scelta della matrice $C^* = (SS'A'A + \Delta^2 I)^{-1} SS'A'$, in tal caso la stima ottima di x sarà $x^* = C^* b$ e il valore atteso di $\left\| x - x^* \right\|^2$ risulta $E(\left\| x - x^* \right\|^2) = \tau^2 traccia(SS' - \hat{C}ASS')$.

Nel caso in cui $S=I$ si ritrova la formulazione di Tikonov che risulta ottima con la sola condizione che $x=w$ sia limitato. Tuttavia in questo caso l'ordine di derivazione p non è positivo e le considerazione fatte precedentemente (smoothing) non garantiscono l'ottimalità dello stimatore x^*.

Per ulteriori dettagli e dimostrazioni dei risultati principali vedi Neumaier(1998).

Uno studio su un metodo numericamente efficiente per la scomposizione di serie storiche economiche (rilevazione del trend e stagionalità), mediante una metodologia bayesiana con tecniche di regolarizzazione, è stato affrontato anche in Scarani e Sermasi (1984), Corradi e Scarani (1984), Corradi e Scarani (1987).

3. Soluzioni regolarizzate.

Sostituendo la soluzione di minimi quadrati $\hat{x} = (A'A)^{-1} A'b$ con la soluzione $x = (A'A + \alpha^2 I)^{-1} A'b = C_\alpha b$, dove $C_\alpha = (A'A + \alpha^2 I)^{-1} A'$, si otterrà un vettore soluzione con componenti meno sensibili a variazioni sui dati rispetto alla soluzione di minimi quadrati e una norma dei residui più grande.

Assegnato il vincolo $\left\| Ax - b \right\|^2 \le \delta_1^2$, la valutazione del parametro α si può ottenere risolvendo un problema di minimo vincolato: LSQI, ovvero Least Squares with Quadratic Inequality Constraint, (Bjorck A, 1996, pag.205).

La quantità δ_1^2 assume valori positivi compresi fra $\|\hat{r}\|^2$, corrispondente alla soluzione di minimi quadrati, e $\|b\|^2$, corrispondente alla soluzione nulla.

Si costruisce quindi il funzionale lagrangiano e da esso con semplici passaggi il funzionale convesso equivalente

$$J(x) = \|Ax-b\|^2 + \alpha^2\|x\|^2 \qquad s.v. \quad \|Ax-b\|^2 = \delta_1^2 \quad \alpha > 0 \qquad (1)$$

In questo lavoro viene proposto un confronto fra la soluzione x^*, relativa alla valutazione esatta di α^* (valore ottimo del parametro) e una soluzione approssimata $\tilde{x}$ relativa a $\tilde{\alpha}$ (valore approssimato del parametro).

Si suppone ora che il parametro α sia noto e si determina x che minimizza il funzionale assegnato $J(x)$. Per $\alpha=0$ si ottiene la soluzione di minimi quadrati $\hat{x} = (A'A)^{-1}A'b$ e il corrispondente vettore dei residui $\hat{r} = A\hat{x} - b$.

Per $\alpha>0$ la soluzione sarà $x = C_\alpha b$ e la condizione imposta dal vincolo δ_1^2 permetterà la valutazione del parametro α^* e quindi della soluzione x^*. Infatti

$$\delta_1^2 = \|Ax-b\|^2 = \|(AC_\alpha - I)b\|^2 \qquad (2)$$

La differenza fra le soluzioni x^* e $\tilde{x}$ scaturisce da due diverse scelte della matrice C_α: la prima è $C_\alpha = (A'A+\alpha^2 I)^{-1}A'$, la seconda è: $C_\alpha = (I-\alpha^2(A'A)^{-1})(A'A)^{-1}A'$.

4. Algoritmo di soluzione.

Il problema di minimizzazione soggetta a vincolo quadratico, usualmente chiamato LSQI, può essere risolto numericamente applicando una trasformazione ortogonale sinistra *Q* al sistema lineare *Ax=b* tale che $Q(A, b) \rightarrow (R, \hat{b})$, dove *R* è una matrice triangolare superiore di rango n. La soluzione di minimi quadrati potrà essere scritta nella seguente forma $\hat{x} = R^{-1}\hat{b}$ e la norma dei residui corrispondenti $\|\hat{r}\|^2 = \|A\hat{x} - b\|^2$.

Applicare tale trasformazione iniziale risulta conveniente quando il numero delle righe di *A* supera di almeno 5/3 il numero delle colonne. Vedi Golub, Van Loan, 1989, pag.238.

Scegliendo, come variabile indipendente, il vettore degli scarti *r*, fra la soluzione cercata *x* e la soluzione di minimi quadrati $\hat{x}$, si può minimizzare un funzionale *f(r)* soggetto a vincolo, $\min_r \; f(r) = \|Rr\|^2 + \alpha^2 \|r + \hat{x}\|^2 \quad s.v. \quad \|Rr\|^2 = \delta^2$ dove $\delta^2 = \delta_1^2 - \|\hat{r}\|^2$. Si annulla poi il gradiente di *f(r)* e si calcola la scomposizione in valori singolari (SVD) della matrice quadrata *R*, dove *R=UDV'*, *U* e *V'* sono matrici ortogonali e *D* è una matrice diagonale in cui compaiono gli autovalori di *R* in ordine decrescente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n > 0$. Ponendo *y=V'r* e $\hat{x}_0 = V'\hat{x}$ si ottiene, dopo alcuni passaggi, il sistema $\lfloor D^2 + \alpha^2 I \rfloor y = -\alpha^2 \hat{x}_0$ da cui è possibile ottenere *y*, *r*, e quindi la soluzione *x*. La relazione che unisce il parametro α al vincolo δ è: $\delta^2 = \alpha^4 \|D(D^2 + \alpha^2 I)^{-1} \hat{x}_0\|^2$. Il valore del parametro α^* che soddisfa l' equazione non lineare è l'unica radice reale positiva dell' equazione secolare (Bjorck A, 1996, pag.205).

Utilizzando la notazione per componenti, si otterrà l'espressione della soluzione ottima regolarizzata

$$x_i^* = \hat{x}_i - \alpha^{*2} \sum_{j=1}^{n} V_{i,j} \frac{\hat{x}_{0,j}}{\sigma_j^2 + \alpha^{*2}} \qquad \text{per} \quad i=1,2,..n . \tag{3}$$

dove α* è soluzione dell' equazione

$$\delta_1^2 = \alpha *^4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2 \hat{x}_{0,j}^2}{\left(\sigma_j^2 + \alpha *^2\right)^2} + \|\hat{r}\|^2 . \qquad (4)$$

L' algoritmo proposto, che prevede la valutazione della matrice *R* e il calcolo delle matrici *D*(diagonale) e *V*(ortogonale destra), ha un costo non inferiore a $2mn^2+11n^3$ (vedi Golub G., Van Loan C. 1989, pag.239).

Ulteriori dettagli sul problema LSQI si trovano in A.Bjorck, 1996, pag.205-.211 e in Conn A.R. et al., pag 363 e seguenti, 1997.

Nel caso alcuni autovalori siano nulli, almeno da un punto di vista computazionale, si può utilizzare la scomposizione in valori singolari troncata (TSVD). Questo metodo non sarà approfondito in questa sede; vedi per dettagli: Fierro R.D., Golub G.H.,ecc ,1997.

Si nota poi, che per α positivo e sufficientemente piccolo, vale l' approssimazione del primo ordine:

$$(R'R + \alpha^2 I)^{-1} \cong [I - \alpha^2 (R'R)^{-1}](R'R)^{-1} \qquad (5)$$

e la soluzione corrispondente è

$$x = C_\alpha b = [I - \alpha^2 (A'A)^{-1}](A'A)^{-1} A'b$$

E' ora possibile, seguendo la traccia precedente, riscrivere le formule corrispondenti alla (3), (4) e ricavare un'espressione diretta del valore del parametro approssimato e di conseguenza della soluzione approssimata.

Infatti dalla (5), ricordando che $R\hat{x} = \hat{b}$, l'espressione finale di δ_1^2, dopo alcuni passaggi, risulta

$$\delta_1^2 \cong \alpha^4 \left\|(R')^{-1} \hat{x}\right\|^2 + \|\hat{r}\|^2 \qquad (6)$$

e da essa si ottiene il valore del parametro approssimato

$$\tilde{\alpha}^4 = (\delta_1^2 - \|\hat{r}\|^2)/(\|D^{-1}\hat{x}_0\|^2) \qquad (7)$$

e la relativa soluzione $\tilde{x} = \left[I - \tilde{\alpha}^2 V D^{-2}\right]\hat{x}_0$. Le componenti della soluzione approssimata sono

$$\tilde{x}_i = \hat{x}_i - \tilde{\alpha}^2 \sum_{j=1}^{n} V_{i,j} \frac{\hat{x}_{0,j}}{\sigma_j^2} \qquad \text{per} \quad i=1,2,\ldots n \qquad (8)$$

Confrontando la (3) e la (8) si nota che la soluzione esatta x^* e quella approssimata $\tilde{x}$, sono prossime fra loro quando $\tilde{\alpha}^2$ è trascurabile rispetto agli autovalori della matrice $R'R$, ovvero al più piccolo di essi: σ_n^2. Il parametro viene calcolato come funzione del vincolo e, per tenere conto dell' ulteriore restrizione appena esposta $\tilde{\alpha}^2$ non deve superare un opportuno valore $k\sigma_n^2$, con $k<1$. Pertanto l'approssimazione sarà accettabile quando il vincolo risulterà inferiore a $k^2\sigma_n^4 \sum_{k=1}^{n} (\hat{x}_{0,k}^2 / \sigma_k^2) + \|\hat{r}\|^2$.

5. Una applicazione di tipo economico.

Per confrontare i diversi tipi di soluzione in un problema concreto, si è considerato un modello dei consumi nazionali di Italia e USA stimati utilizzando il reddito disponibile e l'indice di borsa. In nota vengono riportate alcune specifiche dei dati utilizzati[1]. Il campione utilizzato è costituito di 93 osservazioni.

---

[1] [1] I dati originali sono dati trimestrali non stazionari, dei quali è stato calcolato il logaritmo del rapporto fra il valore corrente e il valore dell'anno precedente. La stessa trasformazione è stato applicata ai dati di Italia e USA. Le serie italiane di consumi(C), reddito(YD) e indice di borsa(IB) hanno codice 161023NS, 161037NS, 166301K rispettivamente, mentre le corrispondenti serie

Si è ipotizzato che i consumi siano una funzione degli stessi consumi ritardati di un trimestre, del reddito disponibile e dell'indice di borsa e di una costante. Il semplice modello adottato ha lo scopo di mettere in evidenza le peculiarità delle diverse stime. I coefficienti delle stime sono positivi come ci si può ragionevolmente attendere.

Nel calcolo sono state utilizzate alcune routines della libreria matematica- statistica IMSL: RSTAT per le stime di minimi quadrati, LSVRR per la scomposizione in valori singolari (SVD) della matrice *R*.

Nella tabella 1, relativa ai consumi italiani, vengono riportate le stime di minimi quadrati (CLSE), le stime regolarizzate(CE) calcolate per α*=.104 e le stime regolarizzate con approssimazione(CA) calcolate per $\tilde{\alpha}$ =.086. Al vincolo è stato assegnato il più grande valore compatibile con l'approssimazione proposta. Nelle ultime due colonne sono riportate le norme delle soluzioni e la norma al quadrato dei residui.

Nella tabella 2 sono riportate le stime dei consumi USA. In essa il parametro assume i seguenti valori: α*=.077 e $\tilde{\alpha}$ =.061.

USA hanno codice 421023NS, 421037NS, 426301K. Tutti i dati sono di fonte OCSE, main economic indicators.
Si è poi considerato il modello $C=f(C_{-1},YD, IB)$, in cui è prevista la stima anche del coefficiente costante, e sono state poi calcolate le stime di minimi quadrati(CLSE), le stime regolarizzate(CE) e le stime regolarizzate approssimate(CA).
Si ringraziano il prof. R.Golinelli e il prof. U. Cherubini per gli utili consigli. Il prof. R. Golinelli ha fornito le serie economiche utilizzate nel lavoro.

Italia	Costante	C_{-1}	YD	IB	||*soluzione*||	||*Ax-b*||
CLSE	.00013 (.00111)	.73651 (.04542)	.26965 (.04509)	.00134 (.00208)	.62516	.05797
CE	.00413 (.00126)	.54241 (.05176)	.31079 (.05139)	.00188 (.00237)	.62516	.06607
CA	.00351 (.00126)	.51534 (.05176)	.36793 (.05139)	.00208 (.00237)	.63322	.06607
Dati trimestrali dal 1976.1 al 1999.2 (93 osservazioni). Sotto i coefficienti, tra parentesi, sono riportati i valori degli errori standard.						

Tabella 1. Stime dei consumi italiani.

USA	Costante	C_{-1}	YD	IB	||*soluzione*||	||*Ax-b*||
CLSE	.00287 (.00173)	.59192 (.07901)	.26078 (.06405)	.01801 (.00668)	.64707	.07093
CE	.00589 (.00177)	.43990 (.08129)	.31626 (.06590)	.01812 (.00687)	.54212	.07298
CA	.00554 (.00177)	.41857 (.08129)	.35233 (.06590)	.01777 (.00687)	.54744	.07298
Dati trimestrali dal 1976.1 al 1999.2 (93 osservazioni). Sotto i coefficienti, tra parentesi, sono riportati i valori degli errori standard.						

Tabella 2. Stime dei consumi USA.

Pur notando che l'indice di borsa ha un impatto sui consumi molto inferiore al reddito in entrambe le prove, nelle stime sui dati USA questo impatto è superiore a quello rilevato sui dati italiani.

Inoltre si osserva che il modello indica un'elasticità di lungo periodo del consumo rispetto al reddito che sfiora l'unità per i minimi quadrati ordinari nel caso italiano e si abbassa a 0.7 nelle corrispondenti stime regolarizzate. Quest'ultimo valore sembra meglio adeguarsi alla realtà economica.

I grafici 1 e 2 mostrano le serie dei consumi associate alle stime indicate nelle tabelle 1 e 2. Il tracciato delle serie regolarizzate con i due metodi proposti risulta praticamente indistinguibile.

Italia: confronto delle stime

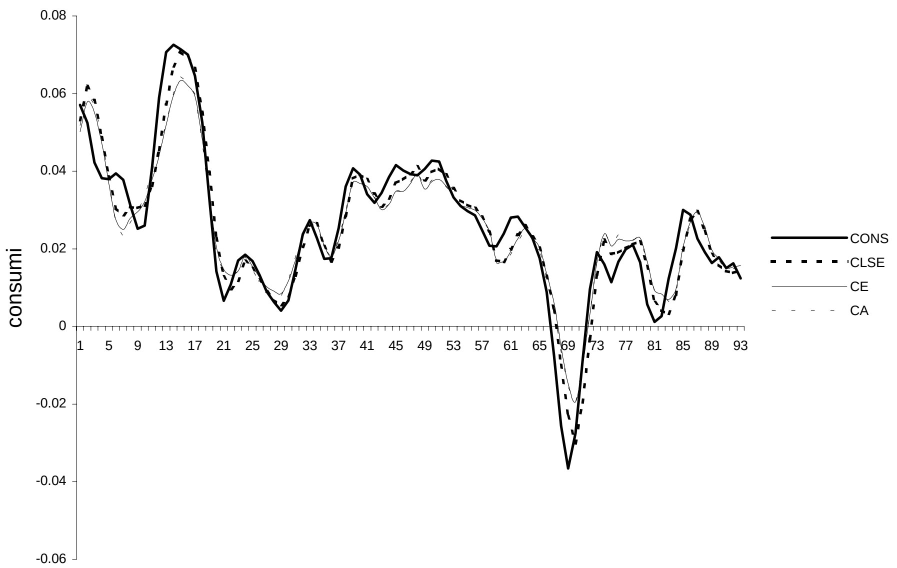

Grafico 1. Periodo dal 1976.1 al 1999.2

USA: confronto delle stime

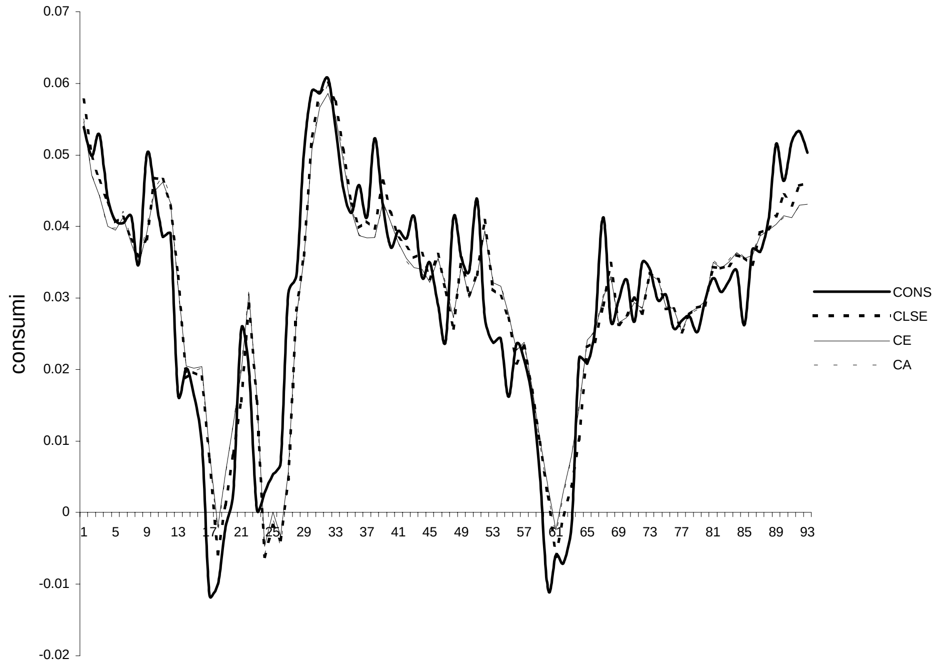

Grafico 2. Periodo dal 1976.1 al 1999.2

6. Conclusioni.

In questo lavoro è stato presentato un problema di stima applicato ad un modello economico dei consumi italiani e americani. Sono stati effettuati confronti fra le stime di minimi quadrati e stime mediante metodi di regolarizzazione. Quest'ultimo approccio sembra fornire risultati che meglio si adeguano alla realtà economica. Una attenzione particolare è stata rivolta agli aspetti numerici del problema della regolarizzazione e alla sua implementazione per il caso studiato. Il metodo approssimato consente una valutazione diretta del parametro di regolarizzazione, mentre col metodo di Tikhonov il parametro deve essere calcolato mediante la risoluzione di una equazione secolare.

Bibliografia

A. Bjorck, "Numerical Methods for Least Squares Problems", SIAM, 1996.

A.R. Conn, N.L.M. Gould, P.L. Toint, "Methods for Nonlinear Constraints in Optimization Calculations", in The state of the art in numerical analysis, L.S. Duff, G.A.Watson ed., Clarendon Press, Oxford 1997.

C.Corradi, C. Scarani, "Improving the computational efficiency of the Bayesian Decomposition of a time series: a comment", J. Time Series Anal. 5, pp. 205-212, 1984.

C.Corradi, C. Scarani, "A note on the computation of the Bayesian decomposition of a time series", J. Time Series Anal. 8, pp. 131-133, 1987.

R.D. Fierro, G.H. Golub, P.C. Hansen e D.P. O'Leary, "Regularization by truncated total least squares", SIAM J. Sci. Comput., vol.18, N° 4, pp. 1223-1241, July 1997.

G.H. Golub, C. F. Van Loan, "Matrix Computations", The Johns HopKins University Press, London 1989 (seconda ed.).

A. Neumaier, "Solving ill-conditioned and singular linear systems: a tutorial on regularization", SIAM Rev., vol.40, N° 3, 1998.

C.Scarani, D.Sermasi, "SEAGIV: un algoritmo per la decomposizione bayesiana di una serie storica univariata", Progetto DESEC, Centro di specializzazione e ricerche economico-agrarie per il Mezzogiorno, Portici, Univ. di Napoli, RS 24/1984.

A.N. Tikhonov, "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method", Soviet Math. Dokl, 4, pp.1035-1038, 1963.