Crescita e distribuzione: un'interpretazione unitaria dei recenti contributi

Davide Fiaschi[1]
Dipartimento di Scienze Economiche
Università degli studi di Pisa
Via Ridolfi, 10. 56124 Pisa
E-mail dfiaschi@ec.unipi.it

29 settembre 1998

[1] Questo articolo si basa sul primo capitolo della mia tesi di dottorato. L'autore intende ringraziare Vincenzo Denicolò per gli utili suggerimenti, Raimondello Orsini per i commenti alla prima stesura del lavoro e un referee per aver messo in luce alcune imprecisioni dell'esposizione. Gli errori rimangono naturalmente a carico dello scrivente.

Sommario

Questo articolo analizza in una prospettiva unitaria i recenti contributi sul rapporto fra crescita e distribuzione. Lo scopo è di mostrare come l'attuale letteratura faccia sostanzialmene riferimento a due meccanismi di base: il primo di natura politico-economico e il secondo riconducibile all'incompletezza del mercato dei capitali. Le conclusioni dei due approcci sono valutate alla luce delle recenti analisi empiriche.

1 Una visione generale

Questo articolo intende fornire un visione unitaria dei recenti contributi sul rapporto fra crescita e distribuzione, mettendo in luce come come l'attuale letteratura faccia riferimento essenzialmente a due meccanismi di base: il primo di natura politico-economico e il secondo riconducibile all'incompletezza del mercato dei capitali.

La teoria neoclassica della crescita ha trascurato per lungo tempo l'aspetto distributivo poichè questo non influenzava l'equilibrio di lungo periodo dell'economia. Nell'articolo pionieristico di Stiglitz (1969) e soprattutto in Loury (1981) viene, infatti, mostrato che nei modelli di crescita neoclassici, sotto l'ipotesi di completezza dei mercati, la dinamica della distribuzione è ergodica[1] e l'equilibrio di lungo periodo è indipendente dalla distribuzione iniziale delle risorse[2].

Recenti analisi empiriche, tuttavia, hanno evidenziato una correlazione negativa fra crescita e ineguaglianza; inoltre, sempre in questo ambito, alcuni autori (vedi Atkinson (1997)), sulla base del comportamento di alcuni paesi appartenenti all'area OECD, hanno messo in discussione la validità della ben conosciuta legge di Kuznets (1955) che lega il grado di sviluppo economico e il livello di diseguaglianza.

Il tutto ha stimolato la formulazione di nuovi modelli teorici che, prendendo spunto dalla nuova teoria della crescita endogena e abbandonando l'ipotesi di agente rappresentativo, hanno individuato vari canali attraverso cui distribuzione e crescita potessero interagire. Sommariamente potremo dividere i contributi proposti in due classi: quelli che fanno riferimento a fattori politico-istituzionali e quelli che fanno riferimento all'incompletezza dei mercati (vedi Bénabou (1996c)). In alcuni lavori sono presenti entrambi i fattori, così che questa distinzione deve essere intesa come un'approssimazione fatta a scopo espositivo.

Al primo gruppo appartengono i contributi che collegano distribuzione e crescita tramite un canale di tipo politico. L'intuizione è che se le decisioni di politica economica sono il risultato di una votazione a maggioranza tra i componenti dell'economia, allora a maggior ineguaglianza corrisponderà una più forte politica redistributiva e questa, a sua volta, provocherà una diminuzione della crescita. Riguardo a questo filone di letteratura i contributi

[1] L'ergodicità della dinamica distributiva può essere intuitivamente descritta come la proprietà che assicura che ogni individuo, indipendentemente dalla sua ricchezza iniziale, possa occupare nel tempo con probabilità positiva uno qualunque dei valori della distribuzione (vedi Piketty (1997)).

[2] In questo contesto è da ricordare Bourguignon (1981), in cui si mostra che nel caso di funzioni di risparmio convesse la distribuzione della ricchezza di lungo periodo è diseguale.

più importanti sono quelli di Alesina and Rodrik (1994), Bénabou (1996c), Bertola (1993) e Persson and Tabellini (1994). Vale la pena di ricordare, inoltre, i lavori che identificano nella conflittualità sociale la causa della relazione negativa fra crescita e ineguaglianza. Intuitivamente, a una maggiore diseguaglianza corrisponde una più alta conflittualità sociale; quest'ultima rende il profitto atteso dell'investimento meno certo e questo scoraggia i potenziali investitori dall'intraprenderlo. Benhabib and Rustichini (1996) e Alesina and Perotti (1993) sono i lavori di riferimento.

Al secondo gruppo appartengono quei contributi che analizzano le decisioni individuali di investimento, sia in capitale umano che in capitale fisico, in presenza di mercati dei capitali incompleti.

Il lavoro di Galor and Zeira (1993) rappresenta l'articolo pionieristico per quel che riguarda l'investimento in istruzione in presenza di mercati incompleti. Il punto cruciale è l'esistenza concomitante di mercati di capitali imperfetti e di un'indivisibilità nella funzione di accumulazione di capitale umano; questo comporta che le famiglie inizialmente più povere risultino permanentemente incapaci di investire in istruzione e quindi di aumentare il proprio reddito di lungo periodo. La dinamica della distribuzione del reddito non è così più ergodica e ad ogni distribuzione iniziale del reddito corrisponderà un diverso equilibrio di lungo periodo, in termini sia di distribuzione del reddito che di livello aggregato di produzione. Alcuni autori introducono la possibilità di votare per decidere l'introduzione di scuole pubbliche (si veda Bénabou (1996d), Bertocchi and Spagat (1996), Fernandez and Rogerson (1996), Glomm and Ravikumar (1992), Checchi, Ichino, and Rustichini (1996) e Saint-Paul and Verdier (1993)) o di politiche redistributive (si veda Perotti (1993), Fernandez and Rogerson (1995)), mettendo in evidenza l'interazione complessa che può generarsi fra il fattore politico e quello legato all'istruzione.

Per quanto riguarda invece l'investimento in capitale fisico, Banerjee and Newman (1993) e Piketty (1997) rappresentano i più importanti contributi. Il primo analizza un'economia in cui gli individui, date le proprie risorse iniziali, devono scegliere se prestare lavoro, svolgere un'attività di autoimpiego o intraprendere un'attività imprenditoriale. Sia la seconda che la terza scelta richiedono una quota fissa di risorse da investire. In presenza di imperfezioni nei mercati dei capitali gli individui più poveri non possono effettuare l'investimento in capitale; questo, a sua volta, determina una minore crescita del loro reddito e una persistente disuguaglianza distributiva. Il secondo lavoro introduce nel modello di Solow la possibilità di azione sleale (moral hazard). Questo è sufficiente a generare equilibri multipli, che differiscono fra loro sia in termini di produzione che di distribuzione del reddito, anche se la dinamica di quest'ultima è sempre ergodica.

Una variante rispetto al filone precedente analizza più approfonditamente il rapporto fra mobilità sociale e distribuzione. In Bénabou (1996b), Bénabou (1996a), Bertola and Pirani (1996) e Durlauf (1996) gli effetti di ricaduta dell'accumulazione di capitale umano sono in qualche maniera limitati. Bénabou (1996b) presenta un modello in cui il sistema scolastico è finanziato a livello locale. Nell'equilibrio del modello gli individui più dotati di risorse si concentrano in una particolare zona; la società si stratifica permanentemente in gruppi distinti a seconda del reddito, da cui una diminuzione della mobilità sociale e dell'efficienza nell'allocazione delle risorse. In Galor and Tsiddon (1996b) si considera un'economia a generazioni sovrapposte con diversi settori produttivi; si suppone che la conoscenza necessaria per operare in un settore sia specifica e che gli individui abbiano un'abilità nell'accumulare conoscenza specifica, dipendente sia da un fattore casuale sia dal settore in cui lavorava il genitore. Se l'economia è poco dinamica, ossia se si creano pochi nuovi settori, vi sarà una bassa mobilità e questo, a sua volta, determinarà una minore crescita.

Nel seguito passeremo in rassegna i due pricipali filoni di letteratura, ossia quello politico-istituzionale e quello dei mercati incompleti, sia dal punto di vista teorico che empirico. I risultati sono espressi in termini di Proposizioni, le cui dimostrazioni sono raccolte in Appendice.

2 Crescita, distribuzione e fattore politico-istituzionale

In questa sezione analizzeremo i contributi che individuano nel fattore politico-istituzionale il canale di interazione fra crescita e distribuzione. Alcuni dei lavori più importanti sull'argomento sono Alesina and Rodrik (1994), Bénabou (1996c), Bertola (1993) e Persson and Tabellini (1994). Per mostrare il meccanismo sottostante a questo filone di letteratura faremo uso di un semplice modello a generazioni sovrapposte in cui gli individui hanno dotazioni eterogenee di due fattori, uno accumulabile e l'altro no. La remunerazione di questi ultimi è assunta pari alla loro produttività marginale a meno di un parametro. Quest'ultimo può essere interpretato sia come una tassa a fini redistributivi (vedi ad esempio Alesina and Rodrik (1994) e Persson and Tabellini (1994)), sia come un indicatore dei rapporti di forza fra coloro che sono dotati più di un fattore e meno dell'altro (Bertola (1993) può essere interpretato in tale maniera). Gli individui sono altruisti e quindi interessati a lasciare un'eredità al proprio discendente. Mostreremo come sia la crescita che la distribuzione della ricchezza dipendano dal valore del parametro e, definito l'equilibrio politico come la situazione in cui il parametro è determinato mediante votazioni a maggioranza, ne studieremo le proprietà. Vedremo che il valore del parametro di equilibrio politico sarà quello preferito dall'individuo mediano nella distribuzione relativa[3] dei diritti di proprietà sui fattori, da cui concluderemo che più iniqua è la distribuzione della ricchezza minore sarà la crescita. In una prospettiva storica (come in Bertola (1993) e Persson and Tabellini (1994)), potremo interpretare il parametro come un'indice dei rapporti di forza fra le classi sociali; in quest'ottica la concentrazione nella distribuzione dei fattori non accumulabili (tipicamente terra) e una struttura istituzionale favorevole alla remunerazione di quest'ultimi (votazioni per censo) determinerebbe un basso tasso di crescita. Questo potrebbe spiegare la relazione empirica negativa fra estensione del latifondo e crescita e il fenomeno di bassa crescita di lungo periodo, denominato come "trappola della povertà", sperimentato da alcuni paesi in via di sviluppo.

2.1 Il modello

Introduciamo ora il modello che utilizzeremo per mostrare in maniera più rigorosa quanto appena detto.

L'economia è composta da un continuum di individui, contrassegnati dall'indice i definito nell'intervallo $[0; N]$. L'individuo, nato al tempo t, riceve un'eredita b_t^i dal proprio genitore. Questa è ripartita tra risparmio s_t^i e consumo c_t^i, ossia

$$b_t^i = s_t^i + c_t^i: \tag{1}$$

Indichiamo con $\hat{r}_{t+1}$ e con $\hat{w}_{t+1}$, rispettivamente, le remunerazioni unitarie al tempo $t+1$, del risarmio e del fattore non accumulabile; inoltre indichiamo con l_t^i la dotazione di fattore non accumulabile della dinastia i e con con $L = \int_0^N l_i di$ lo stock aggregato. Il fattore non accumulabile può essere interpretato sia come dotazione di tempo lavorativo sia come terra. Vedremo più avanti come l'adozione di una o dell'altra interpretazione possa portare a previsioni molto diverse circa il comportamento di un'economia e come queste siano coerenti o meno con le analisi empiriche.

Nel secondo periodo l'individuo deve ripartire il reddito totale fra il consumo del periodo c_{t+1}^i e l'eredità b_{t+1}^i, ossia:

$$\hat{r}_{t+1} \cdot s_t^i + \hat{w}_{t+1} \cdot l_t^i = c_{t+1}^i + b_{t+1}^i: \tag{2}$$

[3] Il termine distribuzione relativa è da intendersi nel senso che se esiste più di un fattore (ad esempio capitale e lavoro), quello che rileva per le preferenze di un individuo non sono le quantità assolute dei fattori da lui possedute, ma bensì il loro rapporto.

Per semplicità assumiamo che l'utilità abbia forma log-lineare e che l'eredità entri nella funzione di utilità in termini assoluti, indipendentemente dall'utilità che ne ricavano i propri discendenti[4], ossia[5]

$$U^i = \log\left(c_t^i\right) + \beta\cdot\left[\log\left(c_{t+1}^i\right) + \rho\cdot\log\left(b_{t+1}^i\right)\right]. \tag{3}$$

Notiamo che nel caso l_t^i fosse interpretato come tempo lavorativo, allora la funzione di offerta di lavoro sarebbe inelastica.

Dalle condizioni del primo ordine relative alla massimizzazione di U^i rispetto a b_{t+1}^i e s_t^i otteniamo che

$$\begin{aligned} b_{t+1}^i &= \frac{\phi\cdot\rho\cdot\left(\hat{r}_{t+1}\cdot b_t^i + \hat{w}_{t+1}\cdot l_t^i\right)}{(1+\phi)\cdot(1+\rho)} \quad \text{e} \\ s_t^i &= \frac{\phi\cdot\hat{r}_{t+1}\cdot b_t^i - \hat{w}_{t+1}\cdot l_t^i}{\hat{r}_{t+1}\cdot(1+\phi)}, \end{aligned} \tag{4}$$

dove $\phi = \beta\cdot(1+\rho)$. Sostituendo la (4) nella funzione di utilità (3) abbiamo che

$$U^i = (1+\phi)\cdot\log\left(\hat{r}_{t+1}\cdot b_t^i + \hat{w}_{t+1}\cdot l_t^i\right) - \log(1 - \hat{r}_{t+1}) + D, \tag{5}$$

dove D è una costante funzione dei parametri del modello.

La (5) rappresenta l'utilità massima raggiungibile data la struttura di remunerazione dei fattori.

2.2 La determinazione delle remunerazioni dei fattori

Il lato della produzione è modellato seguendo Romer (1986), ossia supponiamo che esista un elevato numero di imprese che operano secondo una tecnologia a rendimenti costanti nei fattori a livello di singolo imprenditore, ma che esista anche un'esternalità rispetto al livello aggregato del fattore accumulabile, ossia

$$y_t^j = A\cdot K_t^{\beta}\cdot\left(l_t^j\right)^{\alpha}\cdot\left(k_t^j\right)^{1-\alpha}, \tag{6}$$

dove A è un parametro dimensionale, l^j la quantità del fattore non accumulabile impiegato dall'impresa j, k^j la quantità del fattore accumulabile impiegato dall'impresa j e K lo stock aggregato del fattore accumulabile. Con una tale funzione di produzione sappiamo che condizione necessaria per

[4] In letteratura questa ipotesi è chiamata "warm glow" (vedi Andreoni (1989)).

[5] Notiamo come la forma logaritmica della funzione di utilità ci permette di ignorare il possibile vincolo $b_i^{t+1} \geq 0$.

avere crescita di lungo periodo è che $\beta \geq \alpha$. Poichè il rendimento dell'investimento in ogni impresa deve essere uguale, nell'ipotesi di remunerazione dei fattori al margine avremo che la produzione a livello aggregato sarà pari a:

$$Y_t = A \cdot K_t^{1+\beta-\alpha} \cdot L^{\alpha} \tag{7}$$

e le remunerazioni dei fattori a

$$\begin{aligned} r_t &= (1-\alpha) \cdot A \cdot K_t^{\beta-\alpha} L^{\alpha} \text{ e} \\ w_t &= \alpha \cdot A \cdot K_t^{1+\beta-\alpha} L^{\alpha-1}: \end{aligned} \tag{8}$$

Per comodità analitica, ovvero per avere un tasso di interesse costante, supponiamo che $\alpha = \beta$. Un modo molto semplice di modellare sia una politica redistributiva che un conflitto distributivo è quello di introdurre un parametro τ che modifichi le remunerazioni dei fattori, sotto il vincolo che il prodotto totale sia interamente distribuito. Le remunerazioni nette saranno quindi

$$\begin{aligned} \hat{r}_t &= (1-\tau_t) \cdot (1-\alpha) \cdot A \cdot L^{\alpha} \text{ e} \\ \hat{w}_t &= (\alpha + \tau_t \cdot (1-\alpha)) \cdot A \cdot K_t \cdot L^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Come si nota maggiore è τ, minore è la remunerazione del fattore accumulabile, da cui è evidente l'influenza di τ nella determinazione della distribuzione del prodotto totale fra i due fattori (conflitto distributivo). Inoltre, τ può essere visto come una tassa applicata al rendimento del capitale che finanzia in pareggio di bilancio un trasferimento ai possessori del fattore non accumulabile, quest'ultimo proporzionale alla dotazione del fattore stesso (politica redistributiva). Ad esempio, nel caso il fattore non accumulabile fosse il lavoro si potrebbe assumere che questo sia equidistribuito fra i diversi individui e quindi il trasferimento sarebbe uguale per tutti. In questo modo rappresentiamo in un'unica struttura, anche se sostanzialmente semplificata, i modelli di conflitto distributivo di Alesina and Rodrik (1994) e Bertola (1993) e i modelli con politiche redistributive di Persson and Tabellini (1994) e Bénabou (1996c). Poichè le remunerazioni dei fattori devono sempre essere non negative assumiamo che $\tau \in \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}; 1\right]$.

2.3 Il tasso di crescita dell'economia

Data la struttura di remunerazione dei fattori, possiamo calcolare il livello aggregato di risparmio al tempo t che sarà il livello del capitale al tempo t+1. Sostituendo la (9) nella (4) e aggregando otteniamo:

$$S_t = \frac{\phi \cdot (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha) \cdot B_t}{1+\phi \cdot (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha)} = K_{t+1}; \tag{10}$$

dove $S_t = \int_0^N s_t^i di$ e $B_t = \int_0^N b_t^i di$. Sostituendo la (10) nella (9) avremo

$$\hat{r}_{t+1} = r(\tau_{t+1}) \text{ e} \qquad \hat{w}_{t+1} = w\left(\tau_{t+1}; \bar{B}_t\right); \tag{11}$$

dove $r(\tau_{t+1}) = (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha) \cdot A \cdot L^{\alpha}$, $w\left(\tau_{t+1}; \bar{B}_t\right) = \frac{\phi \cdot (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha) \cdot (\alpha + \tau_{t+1} \cdot (1-\alpha)) \cdot A \cdot L^{\alpha} \cdot \bar{B}_t}{1+\phi \cdot (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha)}$ e $\bar{B}_t = \frac{B_t}{L}$ indica il livello medio di ricchezza.

A questo punto siamo in grado di mostrare come τ influenzi le dinamiche di accumulazione dell'economia. Dalle (4) e (11) otteniamo che l'eredità lasciata al proprio discendente è pari a

$$b_{t+1}^i = \frac{g(\tau_{t+1})}{(1+\phi)} \cdot \left[(1+\phi) \cdot b_t^i + \phi \cdot (\alpha + \tau_{t+1} \cdot (1-\alpha)) \cdot \left(l_t^i \cdot \bar{B}_t - b_t^i\right)\right] \tag{12}$$

dove $g(\tau_{t+1}) = \frac{\rho \cdot \phi \cdot (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha) \cdot A \cdot L^{\alpha}}{(1+\rho) \cdot [1+\phi \cdot (1-\tau_{t+1}) \cdot (1-\alpha)]}$ risulterà il tasso di crescita aggregato dell'economia.

Notiamo come una variazione di τ abbia sostanzialmente due effetti. Il primo è un effetto sul tasso di crescita della ricchezza individuale, rappresentato da $g(\tau_{t+1})$, che risulta sempre essere negativamente correlato a τ_{t+1} ($g' < 0$). Una diminuzione del rendimento del risparmio disincentiva l'accumulazione e quindi determina un minor reddito nel secondo periodo; l'individuo lascerà quindi meno eredità. Tuttavia, esiste anche un effetto dovuto alla redistribuzione delle risorse rappresentato dal secondo membro della (12). Questo sarà positivo per $\tau_{t+1} > 0$ per tutti gli individui per cui vale $l_t^i \cdot \bar{B}_t - b_t^i > 0$, ossia per quelli che hanno una dotazione relativa del fattore accumulabile sotto la media.

L'effetto redistributivo complessivo di un τ positivo è evidente: osserviamo, infatti, che coloro i quali hanno dotazioni relative sopra la media vengono penalizzati sia in termini di crescita (primo effetto) che di livello (secondo effetto).

In aggregato avremo che:

$$B_{t+1} = g(\tau_{t+1}) \cdot B_t. \tag{13}$$

Come già detto $g' < 0$, così che l'effetto della tassazione sul livello aggregato di risparmio, e quindi sul tasso di crescita dell'economia, è sempre negativo. Il tutto è riassunto nella seguente Proposizione:

Proposizione 1 *Il tasso di crescita dell'economia misurato in termini di accumulazione di ricchezza risulterà sempre decrescente rispetto al livello di τ. Sotto l'ipotesi che $A \cdot L^{\alpha} > \frac{(1+\rho) \cdot (1+\phi)}{\phi \cdot \rho}$, l'economia sperimenterà crescita, ossia $\frac{B_{t+1}}{B_t} > 1$, se e solo se $\tau_{t+1} < \tau_{t+1}^G$, dove $\tau_{t+1}^G = 1 - \frac{(1+\rho)}{\phi \cdot (1-\alpha) \cdot [\rho \cdot A \cdot L^{\alpha} - (1+\rho)]}$.*

Questo effetto negativo delle politiche redistributive sul tasso di crescita concorda con i risultati di Alesina and Rodrik (1994), Bertola (1993), Perotti (1993) e Persson and Tabellini (1994). In altre parole, più le politiche redistributive sono favorevoli al fattore accumulabile, più è alto il tasso di crescita dell'economia. Se si interpretasse il fattore accumulabile come capitale e quello non accumulabile come lavoro, ossia nel caso in cui fosse la distribuzione del fattore accumulabile a creare la disuguaglianza, questo risultato sarebbe tuttavia rigettato dai dati (vedi Perotti (1996)). Infatti, ciò implicherebbe che crescita e politiche redistributive a favore del lavoro siano correlate negativamente, mentre l'analisi empirica sembra affermare il contrario.

Notiamo, inoltre, che questa monotonicità di $g(\cdot)$ rispetto a τ dipende crucialmente dall'ipotesi di inelasticità dell'offerta del fattore non accumulabile (lavoro). Se introducessimo, ad esempio, il tempo libero nella funzione di utilità, g' avrebbe un andamento a U rovesciata, cosi' che il massimo tasso di crescita potrebbe richiedere un τ maggiore della soglia minima $-\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Nel caso invece la disuguaglianza fosse imputabile alla distribuzione del fattore non accumulabile, più in particolare se questo rappresentasse la terra, allora l'analisi empirica e i risultati del modello sarebbero coerenti. Tuttavia, quest'ultima interpretazione sembra applicabile solo ad alcuni paesi, tipicamente quelli in via di sviluppo (Bénabou (1996c)).

2.4 Dinamiche distributive

Adesso mostreremo che la dinamica della distribuzione della ricchezza dipende dal valore di τ. L'intuizione è semplice: le variazioni di τ modificano le remunerazioni dei fattori e quindi, data l'eterogeneità delle dotazioni, il reddito disponibile degli individui. Dalla (12) e dalla (13) possiamo ricavare che:

$$\hat{B}_{t+1} - \hat{b}^i_{t+1} = g(\tau_{t+1}) \cdot \psi(\tau_{t+1}) \cdot \left(\hat{B}_t - \hat{b}^i_t\right); \tag{14}$$

dove $\psi(\tau_{t+1}) = \left[\frac{1+\phi\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\tau_{t+1})}{1+\phi}\right]$ e $\hat{b}^i_t = \frac{b^i_t}{l^i_t}$ rappresenta la dotazione relativa del fattore accumulabile.

Notiamo come la (14) ammetta come unico punto fisso $\hat{B}_t = \hat{b}^i_t$. La dinamica può essere convergente od esplosiva a seconda del valore assunto da τ_{t+1}. In particolare se $g(\tau_{t+1}) \cdot \psi(\tau_{t+1}) < 1$ vi sarà una diminuzione della disuguaglianza distributiva poichè la distribuzione tenderà a collassare intorno al valore medio, punto fisso stabile della (14). Viceversa, nel caso in cui $g(\tau_{t+1}) \cdot \psi(\tau_{t+1}) > 1$ la distribuzione diventerà sempre più disuguale. Riassumiamo il tutto nella seguente Proposizione:

Proposizione 2 *La disuguaglianza nelle ricchezza individuali tende uniformemente a diminuire se $\tau_{t+1} > \tau^C$, dove $\tau^C = 1 - \frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\rho\cdot\phi\cdot(1-\alpha)\cdot A\cdot L^\alpha}$. Nel caso in cui $\tau_{t+1} = \tau^C$ la distribuzione non cambia nel tempo, mentre nel caso di $\tau_{t+1} < \tau^C$ si ha un aumento della disuguaglianza.*

Quindi rispetto a Alesina and Rodrik (1994) e Bertola (1993) il nostro modello permette variazioni nelle dotazioni relative individuali al variare della politica adottata, come in Perotti (1993) e Persson and Tabellini (1994).

Considerando insieme le Proposizioni 1 e 2, si possono individuare, in funzione del valore di τ, vari regimi relativi al tasso di crescita e alla dinamica della distribuzione del ricchezza. Determinante a questo riguardo è la relazione fra τ^G e τ^C: dalle Proposizioni 1 e 2 abbiamo che

$$\tau^G > \tau^C \iff A\cdot L^\alpha > \frac{(1+\phi)\cdot(1+\rho)}{\phi\cdot\rho}. \tag{15}$$

Se τ^G fosse maggiore di τ^C, esiste la possibilità di diminuire la disuguaglianza in un'economia in crescita; nel caso contrario, solo in un'economia non in crescita si può sperimentare una diminuzione della disuguaglianza. Notiamo come la condizione di disuguaglianza non stabilisca che una soglia minima al valore che assume il saggio lordo di remunerazione del fattore accumulabile a meno del fattore α.

La seguente Proposizione stabilisce i regimi possibili:

Proposizione 3 *I regimi possibili in termini di tasso di crescita e andamento della distribuzione della ricchezza sono due:*
i) se $A\cdot L^\alpha > \frac{(1+\phi)\cdot(1+\rho)}{\phi\cdot\rho}$, allora per $\tau \in \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}, \tau^C\right]$ il tasso di crescita sarà positivo e la disuguaglianza in aumento, per $\tau \in [\tau^C, \tau^G]$ il tasso di crescita sarà positivo e la disuguaglianza in diminuzione e per $\tau \in [\tau^G, 1]$ il tasso di crescita sarà negativo e la disuguaglianza in diminuzione;
ii) se $A\cdot L^\alpha \le \frac{(1+\phi)\cdot(1+\rho)}{\phi\cdot\rho}$, allora per $\tau \in \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}, 1\right]$ il tasso di crescita sarà negativo e la disuguaglianza in diminuzione.

Il regime i) è particolarmente interessante poichè permette di generare una dinamica non monotona della distribuzione rispetto al livello del reddito. Infatti il crescere di quest'ultimo è compatibile sia con un aumento che con una diminuzione della disuguaglianza. Questo è ciò che trova Kuznets (1955) nella sua analisi sulla relazione fra livello di sviluppo e distribuzione del reddito (per analisi più recenti limitate ai paesi in via di sviluppo vedi Fields and Jakubson (1994) e Ram (1988)). Quello che rimane da determinare è in base a quale criterio venga deciso il valore di τ. L'approccio politico-istituzionale considera un processo di decisione mediante votazioni a maggioranza su τ, che nel nostro modello, essendo soddisfatte le condizioni del teorema dell'elettore mediano, implica che siano decisive le preferenze dell'individuo mediano. Il paragrafo seguente analizza l'equilibrio politico del modello.

2.5 L'aliquota ottima individuale e l'equilibrio politico

Sostituendo la (9) nella (5) otteniamo la massima utilità raggiungibile parametrizzata al valore di τ_{t+1}, ossia:

$$U^i\left(\tau; \bar{B}_t, \bar{b}^i_t\right) = (1+\phi)\cdot\log\left(\frac{(1+\phi)\cdot\bar{b}^i_t + \phi\cdot[\alpha + \tau_{t+1}\cdot(1-\alpha)]\cdot(\bar{B}_t - \bar{b}^i_t)}{1+\phi\cdot(1-\tau_{t+1})\cdot(1-\alpha)}\right) + \phi\cdot\log(1-\tau_{t+1}) + D. \tag{16}$$

Notiamo i due effetti di τ: il primo correlato alla differenza fra la ricchezza media e la ricchezza individuale, ossia $\bar{B}_t - \bar{b}^i_t$, il secondo relativo al tasso di crescita (che è direttamente proporzionale a $1-\tau_{t+1}$). Osserviamo che nel caso $\bar{B}_t - \bar{b}^i_t = 0$ il τ ottimale è pari a $-\frac{\alpha}{1-\alpha}$, ossia all'aliquota che assegna tutto il prodotto al fattore accumulabile e quindi ne massimizza il rendimento[6]: per questi individui il massimo tasso di crescita dell'economia coincide con la massima utilità, poichè l'aspetto redistributivo può portare solo disutilità.

La seguente Proposizione stabilisce la soluzione al problema dell'aliquota ottima dal punto di vista individuale al variare delle dotazioni relative:

Proposizione 4 L'aliquota ottima per l'individuo i-mo è rappresentata da:

$$\hat{\tau}^i_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{1+\phi\cdot(1-\alpha)}{\phi\cdot(1-\alpha)} + \dfrac{(1+\phi)\cdot\left(1-\sqrt{1+4\cdot\phi\cdot\mu^i_t}\right)}{2\cdot\phi^2\cdot(1-\alpha)\cdot\mu^i_t} & \text{se } 1 \geq \mu^i_t > 0 \\ -\dfrac{\alpha}{1-\alpha} & \text{se } \mu^i_t \leq 0 \end{cases}$$

dove $\mu^i_t = \frac{\bar{B}_t - \bar{b}^i_t}{\bar{B}_t}$.

La concavità di U^i rispetto a τ ci permette di applicare il teorema dell'elettore mediano che stabilisce che l'aliquota preferita dall'elettore mediano rispetto alla distribuzione dei μ^i non può essere battuta da ogni altra alternativa ammissibile in una votazione a maggioranza fra gli individui. Chiameremo equilibrio politico del modello la situazione in cui tutti i mercati sono in equilibrio, gli individui massimizzano le proprie utilità date le scelte altrui e τ è deciso mediante votazioni a maggioranza fra gli individui (vedi Persson and Tabellini (1994)). Il tutto è riassunto nella seguente Proposizione:

[6] Questo risultato dipende in modo cruciale dall'ipotesi di inelasticità dell'offerta di lavoro.

Proposizione 5 *Nell'equilibrio politico del modello $\tau_{t+1} = \hat{\tau}^m_{t+1}$, dove $\hat{\tau}^m_{t+1}$ è l'aliquota preferita dall'individuo mediano nella distribuzione dei μ^i_t.*

A questo punto, considerando congiuntamente le Proposizioni 1 e 5 e assumendo che la posizione dell'individuo mediano nella distribuzione sia un indice di disuguaglianza, otteniamo il meccanismo che lega crescita e distribuzione in questo tipo di modelli: maggiore disuguaglianza distributiva determina nell'equilibrio politico un più alto τ, da cui una minor crescita (vedi Alesina and Rodrik (1994), Bénabou (1996d), Bertola (1993) e Persson and Tabellini (1994)). In alcuni articoli è svolta anche un'analisi empirica che tende a confermare la relazione fra disuguaglianza e tasso di crescita dell'economia (vedi Alesina and Rodrik (1994) e Persson and Tabellini (1994)). Tuttavia in Perotti (1996), il lavoro probabilmente più aggiornato riguardo all'analisi dei dati, si mostra come l'evidenza empirica cotraddica in parte il meccanismo politico-economico. Infatti, pur trovando conferma del legame fra crescita e distribuzione, si mosta l'esistenza di una correlazione positiva fra il livello di alcune aliquote fiscali con il tasso di crescita (il che è contrasta con la Proposizione 1). Inoltre si evidenzia che anche il legame tra livello della tassazione e distribuzione non concorda con quanto affermato dalla teoria. Sembra infatti esistere una correlazione positiva e significativa fra il livello medio della tassa sul reddito personale e una minore disugualianza distributiva. Questo potrebbe non essere in contraddizione con la Proposizione 5, poichè non è possibile distinguere se questa tassazione abbia o no effetti redistributivi; ma il fatto che altre variabili redistributive, come le spese per la sicurezza sociale e per la salute, sembrano non essere correlate alla disuguaglianza rappresenta effettivamente un'evidenza contraria al meccanismo politico-economico (vedi Perotti (1996) e Bénabou (1996c)).

Un aspetto importante da sottolineare è che l'indice di disuguaglianza considerato è quello di inizio periodo e non c'è alcun controllo sugli effetti nel tempo dell'applicazione delle varie politiche così che, come nel nostro modello, la politica di redistribuzione potrebbe modificare la distribuzione delle risorse e quindi la posizione dell'elettore mediano. Questo non confuterebbe la contraddizione relativa alla correlazione positiva fra crescita e livello della tassazione, ma potrebbe spiegare in qualche modo l'assenza di correlazione fra politiche redistributive e ineguaglianza. Nel prossimo paragrafo analizzeremo la dinamica congiunta del tasso di crescita e della distribuzione nell'equilibrio politico.

2.6 Dinamiche distributive ed equilibrio politico

In questo paragrafo studieremo le dinamiche dell'aliquota di equilibrio politico e i conseguenti effetti sull'ineguaglianza. Dalla Proposizione 3 sappiamo che possono esistere solo due regimi a seconda del valore assunto dai parametri del modello. Tuttavia, il regime ii) appare poco interessante poichè prevede solo una continua diminuzione della ricchezza, indipendentemente dalla politica adottata. Assumiamo quindi che la condizione $A\cdot L^{\alpha} > \frac{(1+\phi)\cdot(1+\rho)}{\phi\cdot\rho}$ sia soddisfatta e consideriamo quindi il solo regime i). Dalla (13) e dalla (14) possiamo ricavare la dinamica della distribuzione delle dotazioni relative, ossia:

$$\mu^i_{t+1} = \eta(\tau_{t+1})\cdot\mu^i_t; \tag{17}$$

dove $\eta(\tau_{t+1}) = \left[1 - \frac{\phi\cdot[\alpha+\tau_{t+1}\cdot(1-\alpha)]}{1+\phi}\right]$ e $\eta' < 0$.

Restringendo i valori ammissibili di τ solo a quelli ottimi dal punto di vista individuale (ossia gli ottimi paretiani dell'economia[7]) dalla Proposizione 4 avremo che:

$$\tau \in \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}; 1+\frac{1}{(1-\alpha)\cdot\phi} + \frac{(1+\phi)\cdot\left[1-\sqrt{1+4\cdot\phi}\right]}{2\cdot\phi^2\cdot(1-\alpha)}\right];$$

ricordando che $\mu^i \in [-1;1]$.

Avremo quindi che $\eta(\tau_{t+1}) \in \left[\frac{\sqrt{1+4\cdot\phi}-1}{2\cdot\phi};1\right]$ e quindi l'equazione differenziale (17) avrà come possibili punti fissi l'intera bisettrice nel caso di $\eta(\tau_{t+1}) = 1$ e $\mu^i = 0$ il tutti gli altri casi. Notiamo che $\eta(\tau_{t+1}) = 1$, $\tau_{t+1} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$, ossia nel caso si massimizzasse il tasso la crescita dell'economia allora si avrebbe anche una costanza nella distribuzione relativa delle ricchezze.

A questo punto possiamo stabilire l'equilibrio politico di lungo periodo dell'economia:

Proposizione 6 Nell'equilibrio politico di lungo periodo dell'economia $\tau = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$. La distribuzione asintotica dei μ^i è costante e dipende dalla distribuzione iniziale; ad eccezione del caso di equidistribuzione iniziale delle risorse, questa comporterà $\mu^i \neq \mu^j\ \forall i \neq j$.

---

[7] Notiamo che in questa economia, in assenza di strumenti di redistribuzione lump-sum, l'allocazione efficiente delle risorse, ossia quella che determina la massima crescita, è solo uno dei tanti ottimi paretiani. Questi ultimi, per la concavità della funzione di utilità rispetto a τ, sono rappresentati dall'intervallo con estremi, rispettivamente, i valori di τ preferiti dagli individui con il minimo e il massimo valore di μ.

L'intuizione di questo risultato si ha considerando il caso in cui inizialmente l'elettore mediano avesse avuto interesse ad una redistribuzione. L'attuazione di quest'ultima gli permette di avvicinarsi alla dotazione relativa media dell'economia; tuttavia, quando avrà raggiunto quest'ultimo livello di risorse perderà l'incentivo alla redistribuzione. Questo è l'equilibrio di lungo periodo dell'economia. Gli individui che sono al momento sotto la media non riusciranno più a recuperare rispetto agli altri e questo determinerà una distribuzione asintotica non uniforme. Notiamo come esistano equilibri multipli in relazione alla distribuzione iniziale delle risorse e come l'equilibrio comporti una stazionarietà della varianza della distribuzione relativa (ossia la curva di Lorenz associata alla distribuzione di equilibrio di lungo periodo è costante). L'interesse sarebbe quindi di verificare empiricamente la convergenza della distribuzione relativa piuttosto che della distribuzione assoluta (questo è quello che fa ad esempio Bénabou (1996c) quando analizza il secondo momento della distribuzione).

Le dinamiche di transizione all'equilibrio di lungo periodo possono comprendere o meno periodi di crescita negativa a seconda della posizione iniziale dell'elettore mediano. Se infatti questi avesse un ¹^m tale per cui ¿^{m} > ¿^{G}, avremmo un periodo di crescita negativa indotta dalla forte redistribuzione con una disuguaglianza in termini assoluti in diminuzione; a questo farebbe seguito un periodo di crescita positiva e di sempre minore disuguaglianza quando ¹^m fosse abbastanza aumentato che ¿^{m} < ¿^{G}; infine quando l'elettore mediano mostrerà un ¹^m tale per cui ¿^{m} < ¿^{C}, la disuguaglianza si stabilizzerà. In effetti questa dinamica temporale non concorda con quanto sostenuto da Kuznets (1955).

Una dinamica à la Kuznets si potrebbe invece ottenere se si supponesse che alle votazioni potessero partecipare solo gli individui la cui ricchezza è sopra un certa soglia (votazioni per censo, vedi Persson and Tabellini (1994)). Ciò comporta che inizialmente l'elettore mediano abbia un ¹^m più basso dell'elettore mediano dei periodi successivi. A un basso ¹^m può corrispondere un ¿^{m} < ¿^{C} e quindi l'economia sperimenterà una crescita positiva ed un aumento dell'ineguaglianza. Tuttavia, all'aumentare del reddito medio, sempre più elettori acquistano il diritto di votare, così che la distribuzione dei ¹ degli individui votanti si sposta verso il limite superiore. Questo potrebbe essere sufficiente affinché ¿^{m} > ¿^{C}, ossia per determinare un periodo in cui la disuguaglianza diminuisce (vedi Bertocchi and Spagat (1996)), per poi stabilizzarsi nel lungo periodo. La curva di Kuznets sarebbe quindi determinata dalla soglia di reddito imposta per la partecipazione al voto (per altri modelli che generano curve di Kuznets, si veda Aghion and Bolton (1997), Galor and Tsiddon (1996a) e Perotti (1993)). Questa interpretazione politico-economica sembra ben riprodurre le effettive vicende storiche di alcuni paesi, in cui il voto era (ed è) limitato dal censo o da altri fattori (ad esempio istruzione) (vedi Bénabou (1996c)).

3 Il modello con mercati dei capitali incompleti

Come già detto, eisistono una seri di contributi che mettono in evidenza l'importanza dei mercati incompleti nello spiegare il legame fra crescita e distribuzione. Per illustrare il meccanismo alla base di questi lavori modifichiamo il modello precedente aggiungendo un'altra possivile attività di investimento, caratterizzata da una più alta redditività e da una soglia minima di investimento, interpretabile sia come capitale umano che come investimento imprenditoriale. La presenza di mercati incompleti e di una indivisibilità nell'investimento non permette agli individui più poveri di investire nel settore ad alta remunerazione, da cui una minor crescita. La distribuzione della ricchezza determinerà quanto questo effetto sia forte.

3.1 Estensione del modello

La funzione di utilità è assunta essere sempre della forma:

$$U^i = \log\left(c_t^i\right) + \beta\left[\log\left(c_{t+1}^i\right) + \gamma \log\left(b_{t+1}^i\right)\right]; \tag{18}$$

dove c_t^i è il livello di consumo del periodo t, b_{t+1}^i è l'eredità lasciata al discendente[8] e β e γ sono due parametri di preferenza.

Ogni agente è sempre dotato di una quantità di risorse b_t^i lasciatagli in eredità dal genitore da allocare fra consumo ed investimento. L'investimento può essere di due tipi: uno che fornisce un rendimento costante r per ogni unità investita ed uno che remunera secondo la funzione h. Inoltre, nel secondo periodo l'individuo è dotato di un'unità di tempo che deve decidere come allocare fra lavoro non qualificato, che viene remunerato al saggio costante w e l'attività remunerata secondo la funzione h. L'ipotesi di remunerazione costante dei fattori rende analiticamente meno complicata l'analisi, ma non modifica dal punto di vista qualitativo le conclusioni.

Assumiamo che non esista un mercato del credito in cui non sia possibile prendere a prestito, così che l'investimento s_t^i è vincolato ad essere non negativo (un'ipotesi equivalente è quella che esistano assimmetrie informative che

[8] Nel caso di investimento imprenditoriale, l'assumere che questo venga effettuato da individui avversi al rischio può apparire restrittivo; tuttavia, il rilassare questa assunzione non comporterebbe cambiamenti significativi nei risultati, ma farebbe perderebbe la visione unitaria dell'approccio.

limitino la capacità degli agenti di prendere a prestito), ossia:

$$s_t^i \geq 0 \quad \forall i. \tag{19}$$

Il consumo del primo periodo sarà quindi:

$$c_t^i = b_t^i - s_t^i - e_t^i, \tag{20}$$

dove e_t^i è l'investimento remunerato secondo la funzione h, mentre quello del secondo:

$$c_{t+1}^i = r \cdot s_t^i + w \cdot l_t^i + \left(1 - l_t^i\right) \cdot h\left(e_t^i\right) - b_{t+1}^i. \tag{21}$$

Il livello di eredità lasciato al figlio sarà pari a

$$b_{t+1}^i = \frac{\rho \cdot [r \cdot s_t^i + w \cdot l_t^i + (1 - l_t^i) \cdot h(e_t^i)]}{1 + \rho}, \tag{22}$$

che, sostituito nella funzione di utilità, porta a

$$U^i = \log\left(b_t^i - e_t^i - s_t^i\right) + \phi \cdot \log\left(r \cdot s_t^i + w \cdot l_t^i + (1 - l_t^i) \cdot h(e_t^i)\right) + D; \tag{23}$$

dove D è una costante funzione dei parametri del modello e $\phi = \beta \cdot (1 + \rho)$.

La specificazione della funzione h è il punto centrale del modello. Assumiamo, infatti, che l'investimento in e_t^i fornisca una remunerazione più elevata rispetto all'investimento in s_t^i, ma solo oltre una certa soglia di investimento che chiameremo $\underline{e}$, mentre per livelli inferiori non determina nessuna remunerazione. Inoltre è logico pensare che il livello minimo di remunerazione che si ottiene impiegando tempo nell'investimento in e_t^i sia superiore a quella ottenuta nell'attività lavorativa non qualificata. Una formulazione semplice per la funzione h è la seguente:

$$h\left(e_t^i\right) = \begin{cases} 0 & \forall e_t^i < \underline{e} \\ \delta \cdot e_t^i & \forall e_t^i \geq \underline{e} \end{cases} \tag{24}$$

Il differenziale nei rendimenti si ottiene assumendo che

$$\delta > r; \tag{25}$$

mentre la maggiore remunerazione del tempo impiegato nell'investimento in e_t^i è esprimibile come

$$\delta \cdot \underline{e} > w. \tag{26}$$

Il modello intende rappresentare la possibilità per un'individuo di ricavare reddito:

1. o prestando il proprio tempo come lavoratore non qualificato;

2. o investendo in attività a bassa remunerazione ma che non comportino la necessità di spendere tempo su esse[9];

3. o investendo in attività di tipo imprenditoriale o di accumulazione di capitale umano, che richiede sia un livello minimo di investimento, sia tempo.

Il modello incorpora quindi sia la scelta tra occupazioni alternative di Banerjee and Newman (1993), sia la scelta di investimento in capitale umano di Galor and Zeira (1993). L'attività a basso tasso di remunerazione si può identificare con l'investimento in un settore a basso contenuto tecnologico e a bassa innovazione, in cui non sono necessarie elevate risorse per intraprendere l'investimento, ma che allo stesso tempo non permettono un elevato tasso di rendimento e di crescita. Il settore agricolo, sfruttato in maniera primitiva, potrebbe essere un esempio di tale tipo di attività.

La struttura di remunerazione dell'investimento ad alta redditività cerca di cogliere gli aspetti cruciali che caraterizzano i settori ad alta tecnologia o ad accumulazione di capitale umano. Si può infatti sosstenere che nei primi esista una soglia minima di investimento sotto la quale l'investimento non è profittevole e che l'accumulazione di capitale umano, tralasciando la normale istruzione di base, determinerà un'effettivo incremento salariale solo se le risorse impiegate sono superiori ad una certa soglia.

3.2 Soluzione del modello

L'individuo si trova quindi ad affrontare il seguente problema di massimo:

$$\max_{e_t^i;s_t^i;l_t^i} U^i = \log\left(b_t^i - e_t^i - s_t^i\right) + \phi \cdot \log\left(r \cdot s_t^i + w \cdot l_t^i + (1 - l_t^i) \cdot h(e_t^i)\right)$$

$$\text{s.a} \quad \begin{cases} h(e_t^i) = \begin{Bmatrix} 0 & \forall e_t^i < \underline{e} \\ \delta \cdot e_t^i & \forall e_t^i \geq \underline{e} \end{Bmatrix} \\ s_t^i \geq 0 \\ l_t^i \leq 1 \end{cases}$$

La procedura di soluzione appare particolarmente tediosa, così che qui ne descriveremo i passi in modo sommario e releghiamo in Appendice i dettagli analitici. Si può dimostrare che se l'individuo investe in e non investe in s

[9] Questa è ipotesi semplificatrice; infatti nulla cambierebbe nel caso anche l'attività a bassa remunerazione richiedesse tempo.

e non alloca tempo al lavoro non qualificato. In particolare, nel caso non investissimo in e avremo che la scelta ottima sarà:

$$\left(\left(l_t^i\right)^*, \left(s_t^i\right)^*, \left(e_t^i\right)^*\right) = \left(1, \max\left[0, \frac{\phi\cdot r\cdot b_t^i - w}{r\cdot(1+\phi)}\right], 0\right); \tag{27}$$

mentre nel caso di investimento in e:

$$\left(\left(l_t^i\right)^*, \left(s_t^i\right)^*, \left(e_t^i\right)^*\right) = \left(0, 0, \max\left[\underline{e}, \frac{\phi\cdot b_t^i}{(1+\phi)}\right]\right) \quad \text{per } b_t^i > \underline{e}. \tag{28}$$

La decisione di investire o meno in e a causa della discontinuità nella funzione h non può essere determinata attraverso lo studio della derivata, ma è necessario un confronto in termini assoluti delle utilità derivanti dall'impiegare una regola di decisione o l'altra (ossia o (27) o (28)). Definendo $U^e(b_t^i) - U^s(b_t^i)$ come la differenza nelle utilità nel caso si adottasse rispettivamente la (28) o la (27) avremo che si investirà in e se $b_t^i \geq b^*$, dove b^* è definito implicitamente dall'uguaglianza $U^s(b^*) = U^e(b^*)$.

In Appendice si mostra come b^* dipenda negativamente dal livello di $\underline{e}$, come era intuitivamente da attendersi e positivamente r, dato il suo effetto positivo su $U^s(b_t)$.

3.3 Dinamiche di accumulazione

Le dinamiche di accumulazione all'interno di una dinastia sono date dalla (22). Abbiamo visto che per valori di $b_t^i < b^*$ la scelta di investimento è espressa dalla (27), mentre per valori superiori dalla (28), così che la funzione di accumulazione sarà:

$$b_{t+1}^i = \begin{cases} \max\left[\frac{\rho\cdot w}{1+\rho}, \frac{\phi\cdot\rho}{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}\cdot(b_t^i\cdot r + w)\right] & b_t^i < b^* \\ \max\left[\frac{\rho\cdot\delta\cdot\underline{e}}{(1+\rho)}, \frac{\phi\cdot\rho\cdot\delta}{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}\cdot b_t^i\right] & b_t^i \geq b^* \end{cases} \tag{29}$$

Nello spirito dell'esposizione assumiamo che l'accumulazione nel settore a bassa tecnologia non permetta una crescita di lungo periodo, ossia

$$r < \frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\phi\cdot\rho}; \tag{30}$$

mentre valga l'inverso per l'accumulazione nel settore ad alta tecnologia, ossia

$$\delta > \frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\phi\cdot\rho}. \tag{31}$$

L'idea è quella di rappresentare la possibilità che una famiglia (o un paese), non investendo nell'attività ad alta remunerazione (o in settori ad alta tecnologia), possa rimanere in una cosiddetta "trappola della povertà" dovuta in questo caso alla soglia minima di investimento (allo stesso modo che in Galor and Zeira (1993), Banerjee and Newman (1993), Aghion and Bolton (1997) e Perotti (1993)).

In primis analizzeremo le due componenti della funzione di accumulazione, indipendentemente dal loro ambito di definizione; successivamente, la loro analisi congiunta ci fornirà la dinamica complessiva.

Accumulazione per un basso livello di eredità ($b_t^i < b^*$) Nel caso un individuo avesse una ricchezza iniziale minore di b^* egli si trova ad accumulare secondo

$$b_{t+1}^i = \max\left\{\frac{\rho\cdot w}{1+\rho};\frac{\varphi\cdot\rho}{(1+\rho)\cdot(1+\varphi)}\left(b_t^i\cdot r+w\right)\right\}. \qquad (32)$$

Poichè non conosciamo il valore di b^*, analizziamo l'andamento della curva nell'intero intervallo ammissibile $[0;\infty)$, restringendo successivamente l'attenzione ai soli valori di interesse. In generale esisterà sempre un punto fisso, dipendente però dal valore di r. Infatti è possibile dimostrare che:

$$\begin{aligned}
&\forall r\in\left[0;\frac{1+\rho}{\rho\cdot\varphi}\right) \Rightarrow && b^{R,F}=\frac{\rho\cdot w}{1+\rho}\\
&\forall r\in\left[\frac{1+\rho}{\rho\cdot\varphi};\frac{(1+\rho)\cdot(1+\varphi)}{\rho\cdot\varphi}\right) && b^{NR,F}=\frac{\varphi\cdot\rho\cdot w}{(1+\rho)\cdot(1+\varphi)-\varphi\cdot\rho\cdot r}
\end{aligned} \qquad (33)$$

In $b^{R,F}$ l'individuo è razionato nelle sue scelte di investimento e quindi lascerà un'eredità indipendente dal tasso di interesse. In $b^{NR,F}$ invece il tasso di interesse gioca un ruolo positivo poichè aumenta il reddito disponibile e quindi esclude la possibilità di razionamento. In entrambi i casi tuttavia non vi sarà crescita di lungo periodo perchè i punti fissi sono attrattori e quindi equilibri di lungo periodo. Osserviamo, tuttavia, che ciò che determina se vi sia o no differenziazione nelle dinamiche dei redditi delle diverse dinastie è il rapporto fra il punto fisso e b^*.

Accumulazione per un alto livello di eredità ($b_t^i \geq b^*$) Nel caso un individuo avesse una ricchezza iniziale minore di b^*, egli si trova ad accumulare secondo

$$b_{t+1}^i = \max\left\{\frac{\rho\cdot\delta\cdot\underline{e}}{(1+\rho)};\frac{\varphi\cdot\rho\cdot\delta}{(1+\rho)\cdot(1+\varphi)}\cdot b_t^i\right\}. \qquad (34)$$

Per l'ipotesi (31) su δ, questa funzione di accumulazione non presenterà mai un punto fisso e la ricchezza crescerà ad un tasso costante pari a

$$g = \frac{\psi \cdot \rho \cdot \delta}{(1+\rho) \cdot (1+\psi)}: \tag{35}$$

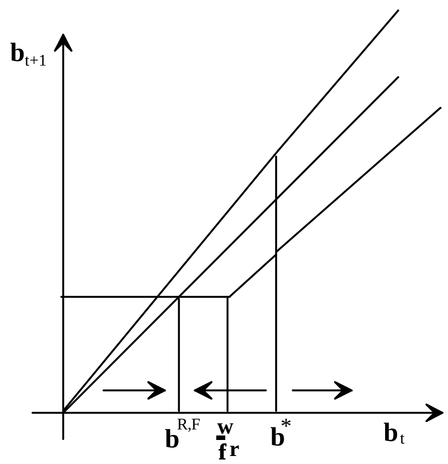
Quindi, le dinastie che seguono questo sentiero di accumulazione presenteranno una crescita asintotica positiva a tasso costante pari a g.

3.3.1 La dinamica complessiva

La (33) suggerisce di dividere l'analisi della dinamica del reddito in due casi distinti a seconda del valore di r.

Punto fisso con razionamento Consideriamo per primo il caso di $r \in \left(0; \frac{1+\rho}{\rho \cdot \psi}\right)$ in cui il punto fisso è dato da $b^{R,F} = \frac{\rho \cdot w}{1+\rho}$ (vedi (33)). Il rapporto fra $b^{R,F}$ e b^* stabilisce la dinamica qualitativa dell'accumulazione.

Se, infatti, $b^{R,F} < b^*$ avremo che le dinamiche delle ricchezze delle varie dinastie avranno un andamento differenziato a seconda del loro valore iniziale. In termini grafici possiamo rappresentare la situazione nel seguente modo:



Equilibrio con razionamento e segmentazione

dove la linea più marcata rappresenta la curva (spezzata) di accumulazione. Si osservi che le dinastie con una ricchezza iniziale minore di b^* mostreranno una ricchezza convergente a $b^{R,F}$; viceversa, quelle con una ricchezza superiore sperimenteranno una crescita asintotica pari a g. Si determina, quindi, una segmentazione nell'insieme delle dinastie, dove alcune, a differenza delle altre, non sperimentano alcun un tasso di crescita della propria ricchezza. In questo caso la dinamica della distribuzione della ricchezza sarà non ergodica, ossia non esiste alcuna probabilità che un individuo povero possa diventare ricco e viceversa (vedi Piketty (1997))[10].

Nel caso invece di $b^{R,F} \geq b^*$ ogni dinastia sperimenterà un tasso di crescita asintotico della propria ricchezza pari a g.

La seguente Proposizione fornisce delle condizioni sufficienti[11] affinchè si abbiama segmentazione nella dinamica delle ricchezze delle varie dinastie.

Proposizione 7 Si assuma che $r \in \left[0; \frac{1+\rho}{\rho\Delta\phi}\right)$. $\underline{e} > \frac{w}{\phi\Delta}$ è condizione sufficiente affinchè ogni dinastia i che presenti un $b_t^i < b^*$ sperimenterà un tasso di crescita della propria ricchezza pari a 0, mentre quelle per cui $b_t^i \geq b^*$ avranno un saggio di accumulazione costante pari a g. Inoltre se vale[12] $\frac{w}{\phi\Delta} < \underline{e} \cdot \frac{w\Delta\phi}{\left[(1+\phi)\Delta\cdot\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\phi}{1+\phi}} - 1\right]}$ avremo che $b^* = \frac{w}{\left[r\cdot\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\phi}{1+\phi}} - 1\right]}$.

Intuitivamente si comprende che poichè $\underline{e}$ è maggiore di $\frac{w}{\phi\Delta}$, il punto fisso dell'equazione risulterà sempre minore del valore dell'eredità b_t per cui è conveniente investire nell'attività ad alta remunerazione e quindi intraprendere l'accumulazione di lungo periodo. In realtà, si può dimostrare che il valore di $\underline{e}$ tale per cui si genera questo risultato è più basso di quello da noi specificato, ma per i nostri scopi espositivi questo è di poco interesse.

Si osservi che in equilibrio gli individui si divideranno in due gruppi distinti: uno in cui ognuno presta il proprio tempo come lavoratore non qualificato e uno in cui ognuno investe nel settore ad alta remunerazione.

Notiamo che al crescere di w la condizione sufficiente potrebbe non essere più sodisfatta ed, infatti, si può dimostrare che oltre un certo valore di w la segmentazione sparisce. Intuitivamente questo è dovuto all'aumento del reddito a disposizione delle dinastie più povere che permette loro un'accumulazione sufficiente a superare la soglia minima di necessaria all'investimento in e.

La Proposizione 7 individua anche, limitatamente ad un'intervallo di valori di $\underline{e}$, una soluzione esplicita per b^*. Il punto interessante (che in qualche

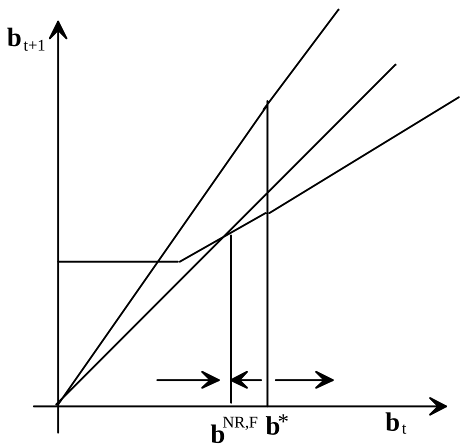
[10] Questo rimanebe vero anche nel caso in cui la funzione di remunerazione del capitale umano abbia una componente addittiva stocastica, il cui supporto sia abbastanza piccolo.

[11] L'interesse in questo caso è solo quello di mostrare che esiste una configurazione dei parametri per cui esiste una dinamica non ergodica. La generalizzazione del risultato comporterebbe un'inutile appesantimento della trattazione senza nulla aggiungere alla comprensione del meccanismo alla base dei risultati.

[12] In Appendice si mostra che questo richiede che $\delta < r\left(\frac{1+\phi+\phi^2}{1+\phi}\right)^{\frac{1+\phi}{\phi}}$.

modo controintuitivo) è che per un certo intervallo di valori, un aumento di w comporta un aumento del numero di dinastie che non accumuleranno nel lungo periodo: questo si spiega considerando che un aumento di w diminuisce la convenienza a passare all'investire all'investimento ad alta remunerazione, che da più rendimento in futuro ma penalizza maggiormente il reddito attuale (ricordiamo che w può essere anche visto come il costo opportunità dell'impiegare il tempo nell'attività ad alta remunerazione).

Punto fisso senza razionamento Consideriamo il caso in cui $r \in \left(\frac{1+\rho}{\rho \cdot \theta} ; \frac{(1+\rho)\cdot(1+\theta)}{\rho \cdot \theta} \right)$, a cui corrisponde il punto fisso $b^{NR,F} = \frac{\theta \cdot \rho \cdot w}{(1+\rho)\cdot(1+\theta) - \theta \cdot \rho \cdot r}$. Analogamente al caso precedente se $b^{NR,F} < b^*$ avremo che le dinamiche delle ricchezze delle varie dinastie presenteranno un andamento differenziato a seconda dei loro valori iniziali. In termini grafici possiamo rappresentare la situazione nel seguente modo:



Equilibrio senza razionamento ma segmentazione

dove la linea più marcata rappresentano la curva (spezzata) di accumulazione. Le dinastie la cui ricchezza iniziale è minore di b^* mostreranno una ricchezza convergente a $b^{NR,F}$, mentre quella la cui ricchezza è superiore una crescita asintotica pari a g. Si crea quindi, come nel caso precedente, una segmentazione nell'insieme delle dinastie, dove alcune, a differenza di altre, non mostreranno una ricchezza in crescita.

Nel caso, invece, di $b^{R,F} \geq b^*$ ogni dinastia sperimenterà un tasso di crescita asintotico della propria ricchezza pari a g.

La seguente Proposizione individua delle condizioni sufficienti[13] affinchè la segmentazione abbia luogo.

[13] I motivi per cui anche in questo caso limitiamo l'analisi sono alle condizioni di sufficienza coincidono con quelli esposti nella nota precedente.

Proposizione 8 Si assuma che $r \in \left(\frac{1+\rho}{\rho\cdot\phi};\frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\rho\cdot\phi}\right)$. Se $\frac{w}{\phi\cdot} < \underline{e} \le \left[\frac{w\cdot\phi}{(1+\phi)\cdot\cdot\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\phi}{1+\phi}}-1}\right]$ e $\delta < r^{-\frac{1}{\phi}}\left[\frac{(1+\rho)(1+\phi)}{\rho\phi}\right]^{\frac{1+\phi}{\phi}}$ ogni dinastia la cui ricchezza è inferiore a $b^{*} = \left[\frac{w}{r\cdot\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\phi}{1+\phi}}-1}\right]$ sperimenterà un tasso di crescita di lungo periodo pari a 0, mentre quelle la cui ricchezza è maggiore di b^{*} sperimenteranno un tasso di crescita pari a g.

Intuitivamente, la condizione su $\underline{e}$ ci assicura che il passaggio da un tipo di investimento all'altro avvenga in mancanza di vincoli sulla quantità da investire per entrambi i tipi di investimento, mentre la condizione su δ assicura che il punto fisso $b^{NR;F}$ sia minore b^{*}. La Proposizione è facilmente estendibile al caso $\underline{e} > \left[\frac{w\cdot\phi}{(1+\phi)\cdot\cdot\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\phi}{1+\phi}}-1}\right]$, che non è riportato perchè non aggiunge nulla di rilevante e non ammette una soluzione esplicita per b^{*}.

Un punto interessante da sottolineare è che in questo caso può esistere una dinamica di transizione in cui anche il reddito delle dinastie che non accumulano nel lungo periodo cresce. Vedremo come questo può generare interessanti dinamiche distributive.

3.4 Interpretazione dei risultati in termini dei lavori già presenti in letteratura

Il modello appena analizzato permette di cogliere intuitivamente molti dei risultati presenti in letteratura.

Interpretando l'investimento ad alta remunerazione come accumulazione di capitale umano, si riproducono i risultati di Galor and Zeira (1993); interpretando invece l'indivisibilità dell'investimento come costi fissi di monitoraggio per l'attività imprenditoriale si riproducono i risultati di Banerjee and Newman (1993).

L'esistenza di equilibri multipli correlati ad una diversa distribuzione delle risorse è una caratteristica comune a questo tipo di modelli, così come l'interazione fra la distribuzione del reddito e il tasso di crescita dell'economia. In termini del nostro modello questo si ha nel caso di segmentazione (vedi sia la Proposizione 7 che la 8). In tale situazione la distribuzione diventerà sempre più iniqua e il tasso di crescita aggregato, rispetto ad una situazione con maggiore equità, sarà più basso. Per convincersi di questo supponiamo che siano soddisfatte le condizioni della Proposizione 7 e di essere nell'equilibrio di lungo periodo. L'insieme degli individui sarà partizionato in due gruppi distinti, chi presta lavoro non qualificato e riceve un reddito w e chi investe nel settore ad alta remunerazione e consegue $\frac{\phi\cdot\epsilon}{1+\phi}\cdot b_t$. Ordiniamo in maniera decrescente gli individui secondo il valore del proprio b e definiamo con $\imath$ l'individuo tale per cui $b_t^{\imath} = b^*$. Il prodotto totale dell'economia sarà quindi pari a $Y_t = (N - \imath)\cdot w + \frac{\phi\cdot\epsilon}{1+\phi}\cdot\int_0^{\imath} b_t^i\, di$. Osserviamo che la quota di reddito degli individui che non accumulano rimane costante, da cui si può concludere che sia la crescita che il livello di produzione dell'economia sono correlati positivamente al numero di individui che non riescono ad investire nel settore ad alta remunerazione, ossia ad una maggiore equità distributiva.

Osserviamo poi come sia possibile riprodurre in parte l'andamento della curva di Kuznets (1955), come nei lavori di Aghion and Bolton (1997) e Galor and Tsiddon (1996a). Infatti notiamo che nel caso avessimo un equilibrio senza razionamento (quello relativo alla Proposizione 8) e una crescita positiva per tutte le famiglie (ossia non valga la condizione su δ), alcune di queste sperimenteranno per un certo lasso di tempo una crescita minore rispetto alle altre poichè seguiranno la curva di accumulazione relativa all'investimento a basso rendimento[14]; questo avverrà fino a quando non avranno accumulato abbastanza da passare a quello ad alto rendimento. A questo punto la disuguaglianza smette di aumentare e si stabilizza. Analiticamente abbiamo, infatti, che la differenza fra i tassi di accumulazione tra un individuo j, il cui $b_t^j > \frac{1+\phi}{\phi}\cdot b^*$ (vedi (32)) e un'individuo i, il cui $\frac{w}{\phi\cdot r} < b_t^i < b^*$ (vedi (34)) è dato da:

$$\frac{b_{t+1}^j}{b_t^j} - \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i} = \frac{\rho\cdot\phi}{(1+\phi)\cdot(1+\rho)}\left(\delta - r - \frac{w}{b_t^i}\right);$$

che risulta maggiore di 0 per $b_t^i > \frac{w}{\delta - r}$. Se $\delta > (1+\phi)\cdot r$ allora $b_t^i > \frac{w}{\delta-r}$ $\forall b_t^i \in \left[\frac{w}{\phi\cdot r}; b^*\right)$ e quando b_t^i diventerà maggiore di b^* la differenza fra i due tassi di accumulazione scomparirà.

Un altro punto importante da evidenziare è come una distribuzione troppo uniforme delle ricchezze possa impedire l'avvio dello sviluppo di un paese. Nel nostro modello ciò si realizza quando la struttura dell'economia comporta una segmentazione delle ricchezze e tutte le ricchezze sono sotto la soglia che permette l'investimento ad alta remunerazione (ossia $b_t^i < b^*\ \forall i$). La concentrazione iniziale della ricchezza, specialmente in economia povere, diventa quindi una condizione necessaria affinchè si metta in moto il processo

[14] Questa era proprio la spiegazione di Kuznets all'andamento non monotono della distribuzione rispetto al livello del reddito, ossia il progressivo spostamento di individui dai settori più arretrati e meno remunerativi a quelli più avanzati e a maggior tasso di crescita.

di sviluppo (vedi a questo proposito Murphy, Shleifer, and Vishny (1989a) e Murphy, Shleifer, and Vishny (1989b)).

Alcuni autori analizzano il rapporto fra distribuzione della ricchezza ed esternalità locali (vedi Bénabou (1996b), Bénabou (1996a) e Galor and Tsiddon (1996b)). Per esternalità locali intendiamo il caso in cui alcune variabili, ad esempio il livello di capitale umano, di individui fra loro "vicini" si influenzino l'uno con l'altra. Pensiamo al caso in cui vi sia una concentrazione spaziale di imprese. Potrebbe, ad esempio, supporre che gli individui che risiedano dove la concentrazione ha luogo sostengano un minor costo fisso nell'intraprendere la propria attività imprenditoriale (ossia un $\underline{e}$ minore) grazie a possibili economie esterne (da cui un vincolo sul credito essere meno stringente). In Bénabou (1996b) il meccanismo delle esternalità locali opera attraverso il livello di istruzione. Egli suppone, infatti, che il sistema scolastico sia finanziato a livello locale e quindi più alto è il reddito del gruppo locale, maggiore è il suo finanziamento e quindi la sua efficienza. Questo comporta un più alto livello di capitale umano e un suo più rapido accumulo nei luoghi a più alto reddito. Inoltre alla famiglie a più basso reddito è preclusa ogni possibilità di andare ad abitare nelle zone ad alto reddito per l'alto costo degli affitti dei terreni. Questo, a sua volta, determina una stratificazione per classi della società e possibili fonti di inefficienza a livello aggregato. Nel nostro modello possiamo riprodurre questo ipotizzando che una singola dinastia rappresenti un gruppo. Infatti, le risorse per l'investimento in istruzione sono reperite totalmente all'interno di questa, così come gli effetti dell'investimento stesso.

Un ultimo punto riguarda la divisioni in classi della società. Il lavoro di Banerjee and Newman (1993) evidenzia come la struttura della società dipenda dalla distribuzione iniziale delle risorse e dalla crescita che sperimenta un'economia. Notiamo come nel nostro modello il caso di equilibrio con individui razionati e segmentazione è interpretabile in termini di divisione della società in due classi; la prima classe deriva tutto il suo reddito dal prestare il proprio tempo come lavoratore non qualificato, la seconda dall'investimento ad alto tasso di rendimento. Le differenze iniziali tendono ad aumentare a causa del fatto che il salario non risente della crescita dell'economia, ma il punto centrale in quest'ottica è la diversità netta nelle scelte occupazionali indotta dalla distribuzione iniziale del reddito.

3.5 Le politiche di intervento

Tassare e redistribuire in questo modello significa modificare le remunerazioni dei fattori e quindi influenzare il valore di r, ± e w.

Il vincolo di pareggio determina un trade-off fra gli effetti del finanziamento (ossia la tassazione) e quelli dell'intervento (ossia redistributivi). In questo ambito non affrontiamo problemi normativi (ossia la possibile avversione alla diseguaglianza della società), ma solo problemi di efficienza.

In generale l'analisi delle possibili politiche redistributive è complicata dalla molteplicità dei casi possibili. Noi limiteremo a considerare una caso che appare particolarmente interessante al fine di illustrare i problemi connessi alle politiche di intervento.

Supponiamo che nell'economia si abbia un trasferimento lump-sum ai giovani finanziato in pareggio di bilancio con una tassazione sul reddito degli individui. Definiamo quindi con E_t e S_t l'ammontare, rispettivamente, di risorse investite in e ed in s ed indichiamo con $\tau \in [0;1]$ l'aliquota di imposta proporzionale sul reddito. Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni della Proposizione 8 e indichiamo con $\imath$ il numero di individui che investono in e.

Le modifiche rispetto all'analisi precedente riguardano la diversa remunerazione dei fattori in ragione di τ e le variazioni nelle risorse totali a disposizione del discendente dell'individuo pari ora a $\hat{b}_{t+1}^i = b_{t+1}^i + \tau \cdot \bar{Y}_t$, dove

$$\bar{Y}_t = \frac{\delta \cdot E_t + r \cdot S_t + (N - \imath_t) \cdot w}{N} \tag{36}$$

è il reddito medio prodotto nell'economia.

Per comodità di analisi definiamo la funzione di utilità in termini del livello del reddito. Così l'utilità dell'individuo i il cui figlio investe q è pari a (vedi (18)):

$$U^i = \log\left(\hat{b}_t^i - q_t^i\right) + \beta\left[\log\left((1-\tau)\cdot y\left(q_t^i\right) - b_{t+1}^i\right) + \rho \cdot \log\left(b_{t+1}^i\right)\right]; \tag{37}$$

dove $y(q_t^i)$ è il livello del reddito corrispondente all'investimento q_t^i. La funzione $y(.)$ è definita nel seguente modo:

$$y\left(q_t^i\right) = \begin{cases} r \cdot q_t^i + w & \text{se } q_t^i = s_t^i \\ \delta \cdot q_t^i & \text{se } q_t^i = e_t^i \end{cases} \tag{38}$$

Massimizzando la (37) rispetto a b_{t+1}^i otteniamo il livello ottimo di eredità:

$$b_{t+1}^i = \frac{(1-\tau)\cdot\rho}{1+\rho} \cdot y\left(q_t^i\right); \tag{39}$$

mentre il livello complessivo di risorse che riceve il discendente sarà pari a

$$\hat{b}_{t+1}^i = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\rho \cdot (1-\tau)\cdot y\left(q_t^i\right) + (1+\rho)\cdot\tau\cdot\bar{Y}_t\right]. \tag{40}$$

Osserviamo che il livello di risorse a disposizione dell'individuo può essere interpretato come una media ponderata fra il reddito del proprio genitore e il reddito medio aggregato. In questo senso si comprende l'effetto redistributivo della tassa che penalizza i più ricchi (ossia sopra la media) in maniera direttamente proporzionale al livello dell'aliquota.

Sostituendo la (39) nella (37) abbiamo:

$$U^i = \log\left(\hat{b}^i_t - q^i_t\right) + \phi \cdot \log\left[(1-\tau)\cdot y\left(q^i_t\right)\right] + D; \tag{41}$$

dove D è una costante.

Nel caso di investimento in e la scelta ottima sarà:

$$e^i_t = \left(\frac{\phi}{1+\phi}\right) \cdot \hat{b}^i_t; \tag{42}$$

mentre nel caso di investimento in s:

$$s^i_t = \frac{\phi \cdot r \cdot \hat{b}^i_t - w}{(1+\phi)\cdot r}. \tag{43}$$

La tassazione non modifica le scelte di investimento poichè l'utilità logaritmica comporta che l'effetto reddito sia nullo, così che il valore di b, b^*, per cui si passa dall'investire in s all'investire in e rimane invariato.

Aggregando quindi i due tipi di investimento avremo:

$$E_t = \left(\frac{\phi}{1+\phi}\right) \cdot \hat{B}^e_t \tag{44}$$

e

$$S_t = \frac{\phi \cdot r \cdot \hat{B}^s_t - (N - \imath_t)\cdot w}{(1+\phi)\cdot r}; \tag{45}$$

dove $\hat{B}^e_t$ e $\hat{B}^s_t$ indicano, rispettivamente, la quantità totale di ricchezza in possesso degli individui che investono in e e di quelli che investono in s. Dalla (36), (44) e (45) possiamo risolvere per $\bar{Y}_t$, ossia:

$$\bar{Y}_t = \frac{\phi \cdot \left[(1-\tau)\cdot \delta \cdot \hat{B}^e_t + r \cdot \hat{B}^s_t + (N - \imath_t)\cdot w\right]}{N \cdot (1 + \phi - \tau \cdot \phi)}. \tag{46}$$

Il reddito medio dipende dalla distribuzione di b. Osserviamo che a parità di risorse complessive, una redistribuzione potrebbe non aumentare il reddito aggregato. Se ad esempio $\frac{\hat{B}_t}{L} < b^*$, allora una redistribuzione uniforme determinerebbe una variazione del reddito pari a $\frac{\phi}{1+\phi} \cdot \left[\imath \cdot w - (\delta - r) \cdot \left(\hat{B}_t - \hat{B}^s_t \right) \right]$, che è negativa se, come è probabile, le perdite derivanti dall'investimento non più effettuato in e siano maggiori dei guadagni ottenuti dai salari. Una certa disuguaglianza iniziale, almeno per le economie più povere, sembra necessaria affinchè l'economia sperimenti crescita (vedi Murphy, Shleifer, and Vishny (1989b)).

3.5.1 Dinamiche di accumulazione con redistribuzione

Analizziamo più approfonditamente le dinamiche di accumulazione, sia individuali che aggregate.

Le dinamiche di accumulazione degli individui dipenderanno dalla quantità di ricchezza che possiedono ad inizio periodo. Dalla (40), (42) e (43) possiamo ricavare la seguente equazione di accumulazione:

$$\hat{b}^i_{t+1} = \frac{(1-\tau) \cdot \rho \cdot \phi}{(1+\rho) \cdot (1+\phi)} \cdot y \left(\hat{b}^i_t + \tau \cdot \bar{Y}_t \right). \tag{47}$$

Rispetto al caso senza tassazione avremo che la curva di accumulazione risulterà in ogni luogo meno inclinata (del fattore $(1-\tau)$) e traslata verso l'alto di $\tau \cdot \bar{Y}_t$.

Osserviamo che per avere una crescita continua nel lungo periodo è necessario che:

$$\frac{\rho \cdot \phi \cdot (1-\tau) \cdot \delta}{(1+\rho) \cdot (1+\phi)} > 1 \Rightarrow \tau < 1 - \frac{(1+\rho) \cdot (1+\phi)}{\rho \cdot \phi \cdot \delta} \tag{48}$$

altrimenti ogni individuo (e quindi l'economia) vedrebbe convergere la propria ricchezza ad un valore costante.

Per non avere più segmentazione della società è necessario (almeno per un certo periodo di tempo) che $b^* < \hat{b}^F_t$, dove quest'ultimo è il punto fisso nel caso si investisse esclusivamente in s. Questo dovrebbe permettere ad ogni individuo di investire nel settore ad alta remunerazione e così eliminare la segmentazione.

Dalla (47) e (43) abbiamo che:

$$\hat{b}^F_t = \frac{(1+\rho) \cdot (1+\phi)}{(1+\rho) \cdot (1+\phi) - (1-\tau) \cdot \rho \cdot \phi \cdot r} \cdot \left[\frac{(1-\tau) \cdot \phi \cdot \rho \cdot w}{(1+\rho) \cdot (1+\phi)} + \tau \cdot \bar{Y}_t \right]. \tag{49}$$

Si osservi come il livello di $\hat{b}^F_t$ dipenda positivamente da $\bar{Y}_t$ e questo rende l'idea che in economie avanzate la redistribuzione richieda un livello di τ inferiore e quindi penalizzi in misura minore la crescita. A questo proposito notiamo come potrebbe essere ottimo per lo Stato indebitarsi nel breve periodo per finanziare la redistribuzione e cominciare a tassare solo dopo che tutti gli individui possano investire nel settore ad alta remunerazione senza bisogno del trasferimento. In questo modo si eviterebbe l'effetto negativo iniziale sulla crescita e la futura tassazione sarebbe meno pesante dato che il reddito aggregato crescerà ad un tasso maggiore. In sostanza lo Stato farebbe le funzioni del mercato dei capitali mancante.

3.6 Le analisi empiriche

Il rapporto fra razionamento del credito e crescita è stato oggetto di molte analisi empiriche. Bernanke and Gertler (1989) presentano un'analisi sul rapporto fra razionamento del credito e scelte di investimento delle piccole imprese. Anche se essi non considerano esplicitamente la distribuzione della ricchezza, è utile a mettere in evidenza come il razionamento abbia un effetto negativo sul livello di investimento e come questo, in un modello à la Banerjee and Newman (1993), provochi un effetto negativo sulla crescita. Perotti (1993), considerando come indicatore del razionamento del credito il rapporto fra il mutuo concesso e il valore della casa da acquistare, trova una correlazione positiva fra questo e il livello degli investimenti; inoltre l'effetto è rinforzato se si considera anche un indice della distribuzione (nel suo caso la dimensione dei due quintili inferiori). Occorre ricordare, tuttavia, che le analisi sul rapporto fra razionamento del credito e crescita non è univoco. Jappelli and Pagano (1994), ad esempio, trovano una relazione positiva fra queste due variabili, anche se il loro interesse è concentrato sulle scelte di consumo. Inoltre, De Gregorio (1996) presenta un modello dove il razionamento del credito ha sia effetti positivi (maggior saggio di risparmio) sia effetti negativi (vincoli all'investimento) e sostiene, sulla base di un'analisi empirica, che l'effetto negativo è superiore a quelli positivo. Perotti (1996) trova una correlazione positiva tra crescita e politiche redistributive, così come fra crescita ed investimento pubblico in istruzione. In termini del nostro modello si potrebbe pensare che le distorsioni derivanti dalla redistribuzione siano più che compensate dall'aumento del tasso di crescita indotto dal maggior numero di individui che riescono a investire nel settore ad alta remunerazione. Forse in questa luce si potrebbero interpretare la correlazione positiva trovata da Perotti (1996) e Easterly and Rebelo (1993) fra tasso di crescita e livello di tassazione.

Riferimenti bibliografici

Aghion, P., and P. Bolton (1997): "A Theory of Trickle-Down Growth and Development," Review of Economic Studies, 64(2), 151–172.

Alesina, A., and R. Perotti (1993): "Income distribution, political instability and investment," NBER Working Paper, 4486.

Alesina, A., and D. Rodrik (1994): "Distributive Politics and Economic Growth," Quarterly Journal of Economics, 109(2), 493–490.

Andreoni, J. (1989): "Giving with Impure Altruism: Applications to Charity and Ricardian Equivalence," Journal of Polical Economy, 97, 1447–1458.

Atkinson, A. (1997): "Bringing Inequality from the Cold," Economic Journal.

Banerjee, A. V., and A. F. Newman (1993): "Occupational Choice and the Process of Development," Journal of Political Economy, 101(2).

Bénabou, R. (1996a): "Equity and Efficiency in Human Capital Investment: The Local Connection," Review of Economic Studies, 62(2), 237–264.

——— (1996b): "Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomics Implications of Community Structure and School Finance," American Economic Review, 86(3), 584–609.

——— (1996c): "Inequality and Growth," CEPR Discussion Paper, 1450.

——— (1996d): "Unequal Societies," NBER Working Paper Series, 5583.

Benhabib, J., and A. Rustichini (1996): "Social Conflict and Growth," Journal of Economic Growth, 1, 125–142.

Bernanke, B., and M. Gertler (1989): "Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations," American Economic Review, 79, 14–31.

Bertocchi, G., and M. Spagat (1996): "The Evolution of Modern Educational Systems," Mimeo.

Bertola, G. (1993): "Factor Shares and Savings in Endogenous Growth," American Economic Review, 81, 1184–1198.

Bertola, G., and D. C. Pirani (1996): "Market Failures, Education and Macroeconomics," Fondazione Enrico Mattei, Working Papers Series, Nota di Lavoro 25.96.

Bourguignon, F. (1981): "Pareto Superiority of Unegalitarian Equilibria in Stiglitz' Model of Wealth Distribution with Convex Saving Function," Econometrica, 49 (6), 1469–75.

Checchi, D., A. Ichino, and A. Rustichini (1996): "More Equal But Less Mobile? Education Financing and Intergenerational Mobility in Italy and in the United States," CEPR Discussion Paper, 1496.

DeGregorio, J. (1996): "Borrowing Constraints, Human Capital Accumulation, and Growth," Journal of Monetary Economics, 32, 79–104.

Durlauf, S. (1996): "A Theory of Persistent Income Inequality," Journal of Economic Growth, 1(1), 75–94.

Easterly, W., and S. Rebelo (1993): "Fiscal Policy and Growth," Journal of Monetary Economics, 32, 417–458.

Fernandez, R., and R. Rogerson (1995): "On the Political Economy of Education Subsidies," Review of Economic Studies, 62(185), 249–262.

——— (1996): "Income Distribution, Communities and the Quality of Public Education," Quarterly Journal of Economics, 111, 135–164.

Fields, G., and G. Jakubson (1994): "New Evidence on the Kuznets Curve," Cornell University mimeo.

Galor, O., and D. Tsiddon (1996a): "Income Distribution and Growth: The Kuznets Hypothesis Revisited," Economica, 63, S103–S117.

——— (1996b): "Technological Progress, Mobility and Economic Growth," CEPR Discussion Paper, 1431.

Galor, O., and J. Zeira (1993): "Income Distribution and Macroeconomics," Review of Economic Studies, 60, 35–52.

Glomm, G., and B. Ravikumar (1992): "Public Versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality," Journal of Political Economy, 100, 818–834.

Jappelli, T., and M. Pagano (1994): "Saving, Growth, and Liquidity Constraints," Quarterly Journal of Economics, pp. 83–109.

Kuznets, S. (1955): "Economic Growth and Income Inequality," American Economic Review, 45, 1–28.

Loury, G. (1981): "Intergenerational Transfers and the Distribution of Earnings," Econometrica, 49 (4), 843–866.

Murphy, K., A. Shleifer, and R. Vishny (1989a): "Income Distribution, Market Size and Industrialization," Quarterly Journal of Economics, 104, 537–564.

——— (1989b): "Industrialization and the Big Push," Journal of Political Economy, 97, 1003–1026.

Perotti, R. (1993): "Political Equilibrium, Income Distribution and Growth," Review of Economic Studies, 60, 755–776.

Perotti, R. (1996): "Growth, Income Distribution, and Democracy: What the Data Say," Journal of Economic Growth, 1(2), 149–187.

Persson, T., and G. Tabellini (1994): "Is Inequality Harmful for Growth?," American Economic Review, 84, 600–621.

Piketty, T. (1997): "The Dynamics of the Wealth Distribution and the Interest Rate with Credit Rationing," Review of Economic Studies, 64(2), 173–189.

Ram, R. (1988): "Economic Development and Income Inequality: Further Evidence on the U-Curve Hypothesis," World Development, 16, 1371–1375.

Romer, P. M. (1986): "Increasing Returns and Long Run Growth," Journal of Political Economy, 94, 1002–1037.

Saint-Paul, G., and T. Verdier (1993): "Education, Democracy, and Growth," Journal of Development Economics, 42, 399–407.

Stiglitz, J. (1969): "Distribution of Income and Wealth Among Individuals," Econometrica, 37(3), 382–397.

Dimostrazione Proposizioni

Dimostrazione Proposizione 1

Dall'equazione (13) abbiamo che:

$$\frac{B_{t+1}}{B_t} > 1 \Leftrightarrow (1-\tau_{t+1})\cdot[\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)] > \frac{1+\rho}{\phi\cdot(1-\alpha)}$$

Nel caso in cui $\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)>0$ avremo che

$$\tau < 1-\frac{1+\rho}{\phi\cdot(1-\alpha)\cdot[\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)]}$$

mentre nel caso che $\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)<0$ avremo che

$$\tau > 1-\frac{1+\rho}{\phi\cdot[\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)]} > 1$$

In quest'ultimo caso è evidente che l'economia non sperimenterà mai un tasso di crescita positivo poichè $\tau\in\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha};1\right]$. Se $A\cdot L^{\alpha} > \frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\phi\cdot\rho}$ avremo sempre che $\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)>0$ e quindi fissando $\tau^{G}_{t+1}=1-\frac{(1+\rho)}{\phi\cdot(1-\alpha)\cdot[\rho\cdot A\cdot L^{\alpha}-(1+\rho)]}$ abbiamo quanto affermato nel testo. La soglia per $A\cdot L^{\alpha}$ non è $\frac{(1+\rho)}{\rho}$ poichè $\tau \geq -\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Dimostrazione Proposizione 2

La dinamica distributiva è data dall'equazione (14). Si può osservare per

$$g(\tau_{t+1})\cdot\left[\frac{1+\phi\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\tau_{t+1})}{1+\phi}\right] < 1$$

ogni ricchezza individuale tende a convergere verso la media della distribuzione e quindi si assiste ad una diminuzione della disuguaglianza. Considerando che:

$$g(\tau_{t+1})\cdot\left[\frac{1+\phi\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\tau_{t+1})}{1+\phi}\right] < 1 \Leftrightarrow \tau_{t+1} > 1-\frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\rho\cdot\phi\cdot(1-\alpha)\cdot A\cdot L^{\alpha}}$$

fissando $\tau^{C}=1-\frac{(1+\rho)\cdot(1+\phi)}{\rho\cdot\phi\cdot(1-\alpha)\cdot A\cdot L^{\alpha}}$ si ha la prova della Proposizione.

Dimostrazione Proposizione 3

La prova della Proposizione segue dalla relazione (15) e dal considerare congiuntamente le Proposizioni 1 e 2.

Dimostrazione Proposizione 4

Dalla condizione di primo ordine della massimizzazione di (16) rispetto a τ abbiamo che:

$$\tau^i = \frac{1+\phi\cdot(1-\alpha)}{\phi\cdot(1-\alpha)} + \frac{(1+\phi)\cdot\left(1 \pm \sqrt{1+4\cdot\phi\cdot\mu^i_t}\right)}{2\cdot\phi^2\cdot(1-\alpha)\cdot\mu^i_t} \tag{50}$$

dove $\mu^i_t = \frac{\hat{B}_t - \hat{b}^i_t}{\hat{B}_t}$.

Una soluzione, quella con il $+\sqrt{\cdot}$, può essere scartata perchè determina sempre valori fuori dall'intervallo di definizione di τ. Inoltre, poichè $\frac{d\tau^i}{d\mu^i_t}\cdot\frac{d\mu^i}{d\hat{b}^i_t} < 0$ e per $\mu^i_t = 0$ $\tau^i = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$, possiamo concludere che $\forall\, \mu^i_t < 0$ abbiamo una soluzione d'angolo e, in particolare, la soluzione coincide che il limite inferiore dell'intervallo ammissibile di τ. Nel caso di $\mu^i_t \to 1$ $\tau^i = 1 - \frac{\sqrt{(1+4\cdot\phi)\cdot(1+\phi)^2} - 1 - 3\cdot\phi}{2\cdot\phi^2\cdot(1-\alpha)} < 1$. Questo concludere la dimostrazione della Preposizione.

Dimostrazione Proposizione 5

Dalla (16) si può verificare che le preferenze degli individui risultano concave rispetto a τ nell'intervallo di interesse e quindi che le condizioni del teorema dell'elettore mediano risultano soddisfatte. L'applicazione di questo prova la Proposizione considerando che la funzione di utilità è riesprimibile in termini di $\mu^i_t = \frac{\hat{B}_t - \hat{b}^i_t}{\hat{B}_t}$.

Dimostrazione Proposizione 6

La dimostrazione della Proposizione si basa sul considerare l'equazione alle differenze (17) e le Proposizioni 4 e 5. La dinamica può essere di due tipi, entrambi tuttavia convergenti allo stesso equilibrio di lungo periodo in termini della la tassa τ. Definendo con μ^m_t le dotazioni relative dell'elettore mediano abbiamo che

1. se $\mu^m_t \leq 0$ allora si fisserà $\tau_t = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Dalla (17) abbiamo che $\mu^i_t = \mu^i$ $\forall t$ e quindi questo sarà un'equilibrio di lungo periodo dove vi sarà una crescita continua al massimo tasso possibile. La distribuzione della ricchezza, se non uniforme, tenderà in valore assoluto a disperdersi (vale la condizione $\tau < \tau^G$), mentre in valore relativo a rimanere costante (i μ_t non cambiano).

2. se $\mu^m_t > 0$ allora esisterà un periodo di transizione in cui $\tau_t > -\frac{\alpha}{1-\alpha}$, ma dalla (17) abbiamo che μ^m_t tenderà a 0. Quando raggiungerà questo punto allora vale il ragionamento del punto precedente. Anche in questo caso avremo un'equilibrio di lungo periodo dove vi sarà una crescita continua al massimo tasso possibile. La distribuzione della ricchezza,

che non poteva essere uniforme al momento iniziale ($\mu_t^m > 0$), tenderà in valore assoluto a disperdersi (vale la condizione $\tau < \tau^G$), mentre in valore relativo a rimanere costante (i μ_t non cambiano).

Derivazione delle regole ottime di scelta nel caso di mercati incompleti

Definiamo il Lagrangiano del problema:

$$L = \log\left[b_t^i - e_t^i - s_t^i\right] + \phi \cdot \log\left[r \cdot s_t^i + w \cdot \left(l_t^i + (1 - l_t^i) \cdot h(e_t^i)\right)\right] + \lambda \cdot s_t^i + \gamma \cdot (1 - l_t^i)$$

Le condizioni di primo ordine saranno le seguenti:

$$\frac{\partial L}{\partial l_t^i} = \begin{cases} \dfrac{\phi \cdot (w - \delta \cdot e_t^i)}{r \cdot s_t^i + (1 - l_t^i) \cdot \delta \cdot e_t^i + l_t^i \cdot w} - \gamma & \forall e_t^i \geq \underline{e} \\ \dfrac{\phi \cdot w}{r \cdot s_t^i + l_t^i \cdot w} - \gamma & \forall e_t^i < \underline{e} \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_t^i} = \begin{cases} \dfrac{-1}{b_t^i - s_t^i - e_t^i} + \dfrac{\phi \cdot r}{r \cdot s_t^i + (1 - l_t^i) \cdot \delta \cdot e_t^i + l_t^i \cdot w} + \lambda & \forall e_t^i \geq \underline{e} \\ \dfrac{-1}{b_t^i - s_t^i - e_t^i} + \dfrac{\phi \cdot r}{r \cdot s_t^i + l_t^i \cdot w} + \lambda & \forall e_t^i < \underline{e} \end{cases} \tag{51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_t^i} = \begin{cases} \dfrac{-1}{b_t^i - s_t^i - e_t^i} + \dfrac{\phi \cdot (1 - l_t^i) \cdot \delta}{r \cdot s_t^i + (1 - l_t^i) \cdot \delta \cdot e_t^i + l_t^i \cdot w} & \forall e_t^i > \underline{e} \\ \text{indefinita} & e_t^i = \underline{e} \\ \dfrac{-1}{b_t^i - s_t^i - e_t^i} & \forall e_t^i < \underline{e} \end{cases}$$

$$s_t^i \cdot \lambda = 0, \quad \lambda \geq 0$$

$$(1 - l_t^i) \cdot \gamma = 0, \quad \gamma \geq 0$$

La ricerca della soluzione è complicata dalla discontinuità della funzione $h(\cdot)$, che non permette il calcolo della derivata in ogni punto. Procederemo quindi in tre passi.

Primo passo $\left[(e_t^i)^* < \underline{e}\right]$

Se la soluzione richiedesse un $(e_t^i)^* < \underline{e}$ avremo che la soluzione ottima comporterebbe un $(l_t^i)^* = 1$ (vedi la prima condizione della (51)), un $(e_t^i)^* = 0$ (vedi la terza condizione della (51)) e la scelta ottima di s_t^i sarebbe data da:

$$\frac{\partial L}{\partial s_t^i} = \frac{-1}{b_t^i - s_t^i} + \frac{\phi \cdot r}{r \cdot s_t^i + w} + \lambda \tag{52}$$

$$s_t^i \cdot \lambda = 0; \lambda \geq 0$$

Posto $\frac{\partial L}{\partial s_t^i} = 0$ otteniamo

$$\left(s_t^i\right)^* = \max\left[0; \frac{\phi \cdot r \cdot b_t^i - w}{r \cdot (1+\phi)}\right],$$

ossia per un valore di $b_t^i < \frac{w}{\phi \cdot r}$ abbiamo che l'individuo risulta razionato nelle scelte di investimento. Riassumendo avremo che:

$$\left(\left(l_t^i\right)^*; \left(s_t^i\right)^*; \left(e_t^i\right)^*\right) = \left(1; \max\left[0; \frac{\phi \cdot r \cdot b_t^i - w}{r \cdot (1+\phi)}\right]; 0\right)$$

che è quello affermato nel testo.

Secondo passo $\left(\left(e_t^i\right)^* \geq \underline{e}\right)$

Condizione necessaria perchè si abbia una soluzione ottima positiva per e_t^i è che $b_t^i > \underline{e}$. Se la soluzione richiedesse un $(e_t^i)^* \geq \underline{e}$ avremo che la soluzione ottima comporterebbe un $(l_t^i)^* = 0$ (vedi la prima condizione della (51)), un $s_t^i = 0$ (risolvi per la seconda e la terza condizione della (51) e dato che $\delta > r$ per ipotesi abbiamo $\lambda = 0$, da cui $s_t^i = 0$) e la scelta ottima di e_t^i sarebbe data da:

$$\frac{\partial L}{\partial e_t^i} = \frac{-1}{b_t^i - e_t^i} + \frac{\phi}{e_t^i}$$

Posto $\frac{\partial L}{\partial s_t^i} = 0$ otteniamo

$$\left(e_t^i\right)^* = \max\left[\underline{e}; \frac{\phi \cdot b_t^i}{(1+\phi)}\right] \quad \text{per } b_t^i > \underline{e}$$

Notiamo che per un valore di $\underline{e} < b_t^i < \frac{\underline{e} \cdot (1+\phi)}{\phi}$ abbiamo un investimento minimo obbligato pari a $\underline{e}$. Riassumendo avremo che:

$$\left(\left(l_t^i\right)^*; \left(s_t^i\right)^*; \left(e_t^i\right)^*\right) = \left(0; 0; \max\left[\underline{e}; \frac{\phi \cdot b_t^i}{(1+\phi)}\right]\right) \quad \text{per } b_t^i > \underline{e}$$

Terzo passo

L'analisi svolta fino ad ora ha permesso di evidenziare che le scelte dell'individuo sono di tipo dicotomico, ossia quando un'individuo investe in s_t^i non investe in e_t^i e viceversa. Da determinare rimane per quale valore di b_t^i l'individuo sceglie un tipologia di investimento anzichè l'altra. E' chiaro che questo valore dovrà essere maggiore di $\underline{e}$, ma la discontinuità della funzione non permette di procedere con lo studio usuale del segno della derivata.

E' necessario procedere al confronto assoluto del valore dell'utilità nei due casi e, poichè, come si dimostrerà, le differenze sono monotone, il punto di uguaglianza determinerà il valore di b_t^-, che chiameremo b^*, tale per cui si passa da un investimento ad un altro. Il livello di b^* sarà chiaramente uguale per ogni individuo.

L'utilità dell'investimento nel caso si investisse secondo la regola (27) è pari a:

$$U^s(b_t) = \log\left(b_t - \max\left[0, \frac{\phi \cdot r \cdot b_t - w}{r \cdot (1+\phi)}\right]\right) + \phi \cdot \log\left(r \cdot \max\left[0, \frac{\phi \cdot r \cdot b_t - w}{r \cdot (1+\phi)}\right] + w\right); \tag{53}$$

mentre se si investisse secondo la regola (28)

$$U^e(b_t) = \log\left(b_t - \max\left[\underline{e}, \frac{\phi \cdot b_t}{(1+\phi)}\right]\right) + \phi \cdot \log\left(\delta \cdot \max\left[\underline{e}, \frac{\phi \cdot b_t}{(1+\phi)}\right]\right): \tag{54}$$

b^* è implicitamente definito dalla seguente uguaglianza:

$$U^s(b^*) = U^e(b^*)$$

Data le forme di U^e e U^s non esiste una soluzione esplicita di b^* (o almeno una soluzione di facile comprensione). Possiamo però notare che la differenza $U^e - U^s$ è crescente in b_t^- (si noti infatti che $\frac{\partial U^e}{\partial b_t} > \frac{\partial U^s}{\partial b_t}$ $\forall b_t > \underline{e}$) e questo ci assicura l'unicità di b^*. Inoltre è facile verificare che b^* dipende negativamente dal livello di $\underline{e}$ come era da attendersi. Infine b^* dipenderà positivamente sia da r che da w, poichè risultano ambedue avere un effetto positivo su $U^s(b_t)$.

Dimostrazione Proposizione 7

In primis osserviamo che poichè abbiamo assunto che $\underline{e} > \frac{w}{\phi \cdot}$ allora b^* sarà sempre maggiore del punto fisso $b^{R,F} \leq \frac{w}{\phi \cdot}$ e quindi avremo sempre segmentazione. Cosi' tutte le dinastie la cui eredità è minore della soglia b^* tenderanno al punto fisso $b^{R,F}$, mentre le altre accumuleranno ad un tasso g (si veda l'equazione di accumulazione (29)). Questo prova la prima parte della Proposizione.

Il valore soglia di ricchezza b^* dipenderà dal valore assunto da $\underline{e}$. Infatti per $b^* \geq \frac{1+\phi}{\phi}\underline{e}$ avremo che questo è definito dalla seguente uguaglianza:

$$(1+\phi)\log[r \cdot b + w] + \log\left[\frac{\phi^\phi}{r \cdot (1+\phi)^{1+\phi}}\right] = (1+\phi)\log[b] + \log\left[\frac{\phi^\phi \cdot \delta^\phi}{(1+\phi)^{1+\phi}}\right]$$

ossia il valore dell'eredità che uguaglia le utilità nel caso si investisse rispettivamente solo in s o solo in e, da cui

$$b^* = \frac{w}{r\left(\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} - 1\right)}$$

Dalla condizione $b^* \geq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\underline{e}$ avremo quindi che:

$$\frac{w}{\gamma \cdot r} < \underline{e} \cdot \frac{w \cdot \gamma}{(1+\gamma) \cdot r \cdot \left[\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} - 1\right]}$$

che prova la Proposizione. Notiamo come condizione necessaria affinchè la precedente relazione sia verificata è che

$$\delta < r\left(\frac{1+\gamma+\gamma^2}{1+\gamma}\right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}$$

ossia si pone un limite superiore alla differenza fra i rendimenti delle due attività.

Nel caso in cui invece $b^* < \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\underline{e}$ avremo che b^* è individuato implicitamente dalla seguente uguaglianza:

$$b^* = \underline{e} + \frac{\gamma^{\gamma} \cdot (r \cdot b^* + w)^{1+\gamma}}{\underline{e}^{\gamma} \cdot \delta \cdot r \cdot (1+\gamma)^{1+\gamma}}$$

Questo completa la dimostrazione.

Dimostrazione Proposizione 8

Poichè $\frac{w}{\gamma \cdot r} < \underline{e} \cdot \frac{w \cdot \gamma}{(1+\gamma) \cdot r \cdot \left[\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} - 1\right]}$ sappiamo dalla precedente dimostrazione che $b^* = \frac{w}{r\left[\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} - 1\right]}$. Quello che resta da analizzare è sotto quali condizioni $b^* > b^{NR;F}$, ossia:

$$\frac{w}{r\left(\left(\frac{\delta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} - 1\right)} > \frac{\gamma \cdot \rho \cdot w}{(1+\rho) \cdot (1+\gamma) - \gamma \cdot \rho \cdot r}$$

Mediante semplice algebra è possibile arrivare alla seguente condizione

$$\delta < r^{-\frac{1}{\gamma}}\left[\frac{(1+\rho)(1+\gamma)}{\rho\gamma}\right]^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}$$

Questo completa la dimostrazione.