

Sul calcolo per via analitica approssimata della portata della vite di Archimede

Gian Luigi Agnoli¹, Pier Gabriele Molari²

¹ Già Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

² Già Alma Mater Studiorum - Università di Bologna, piergabriele.molari@unibo.it

Preprint

11 giugno 2024

Salvo eventuali più ampie autorizzazioni dell'autore, il contributo può essere liberamente consultato e può essere effettuato il salvataggio e la stampa di una copia per fini strettamente personali di studio, di ricerca e di insegnamento, con espresso divieto di qualunque utilizzo direttamente o indirettamente commerciale. Ogni altro diritto sul materiale è riservato.

DOI: <https://doi.org/10.6092/unibo/amsacta/7744>

Sul calcolo per via analitica approssimata della portata della vite di Archimede

Gian Luigi Agnoli, Pier Gabriele Molari

già Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Riassunto

Ripercorrendo la storia dello studio della macchina di Archimede, ci si imbatte in vari tentativi, spesso infruttuosi, del calcolo, anche approssimato, del volume della *tasca*¹. In questo lavoro si vogliono ricordare questi studi, soprattutto quello pionieristico di Guido Ubaldo Del Monte, proponendo qui una approssimazione polinomiale del contorno delle sezioni fra il cilindro che contiene l'elica generica e la tasca stessa. Si confrontano i risultati con quelli ottenuti per via grafica da Weisbach.

La ricerca di una approssimazione semplice per il calcolo del volume della *tasca*

Inclinando un'elica retta si ottengono avvallamenti che, nel caso di superfici elicoidali, formano *tasche* con le pareti dei cilindri che le contengono. Se riempite in qualche modo queste *tasche*, la quantità del materiale separato dipende dal raggio esterno, da quello interno, dal passo, dal numero dei principi e dalla inclinazione dell'asse. Il funzionamento usuale di questa macchina volumetrica, detta *coclea*, con liquidi o granulati consiste quindi nel separare in tasche Fig. 1 una quantità di materiale e trasportarla di un passo per ogni giro dell'elica. Il funzionamento della macchina è così noto, anche se non sempre viene considerato nei dettagli, come il tener conto della incidenza dell'aria intrappolata nel caso di coclea chiusa. La genialità consiste nel trasformare, senza necessità di impiegare valvole, il moto rotatorio continuo dell'albero in un moto traslatorio del materiale che, essendo separato, non è soggetto neppure a pressione idrostatica². Non ci si sofferma sulla descrizione della macchina, essendo stata ampiamente trattata in numerosi lavori e si rimanda all'ampia bibliografia [1].

¹ Detto in letteratura anglosassone *bucket*, cioè *secchio*.

² A meno di considerare la pressione dovuta alla colonna d'aria.

Il problema di determinare per via geometrica il volume della *tasca* che si riempie di liquido in una pompa ad elica cilindrica è stato lungamente dibattuto. Si tratta di un particolare volume racchiuso fra una superficie elicoidale inclinata, due superfici cilindriche e il piano del pelo libero del liquido. Solo recentemente si è calcolato questo volume con metodi numerici, oggi vari modellatori solidi permettono di calcolarlo con buona approssimazione. Sembra utile, tuttavia, fornire al progettista un metodo analitico, anche approssimato, senza ricorrere a descrizioni parametriche con vincoli non sempre semplici da posizionare. Anche il ricorso a nomogrammi, grafici e ad abachi sembra oggi anacronistico e, tra l'altro, queste tabelle, oltre a non essere facilmente reperibili non sempre sono attendibili e dotate di una sufficiente approssimazione [2]. Nasce quindi spontaneo riprendere il problema anche per conoscere meglio la sua evoluzione storica e cercare di fornire un metodo analitico semplificato per calcolare il volume della tasca che la macchina fa traslare. Si tratta di un omaggio a Guido Ubaldo Del Monte che spese tante energie per cercare di rispondere a questo quesito e che, nel quarto libro della sua *De cochlea* [3, 4], ci ha lasciato traccia di un tentativo, sempre di non semplice comprensione quando viene separato dallo sviluppo del calcolo³. In questo tentativo il matematico di Mombaroccio giunge a pensare di avvolgere una circonferenza su di una superficie cilindrica per individuare i punti di contatto con l'elica a seconda del quadrante interessato.



Fig. 1 La macchina in azione dove è ben visibile la tasca piena di acqua [5]

³ Si ricorda che il libro fu pubblicato postumo dal figlio che raccolse con difficoltà parte degli appunti del padre.

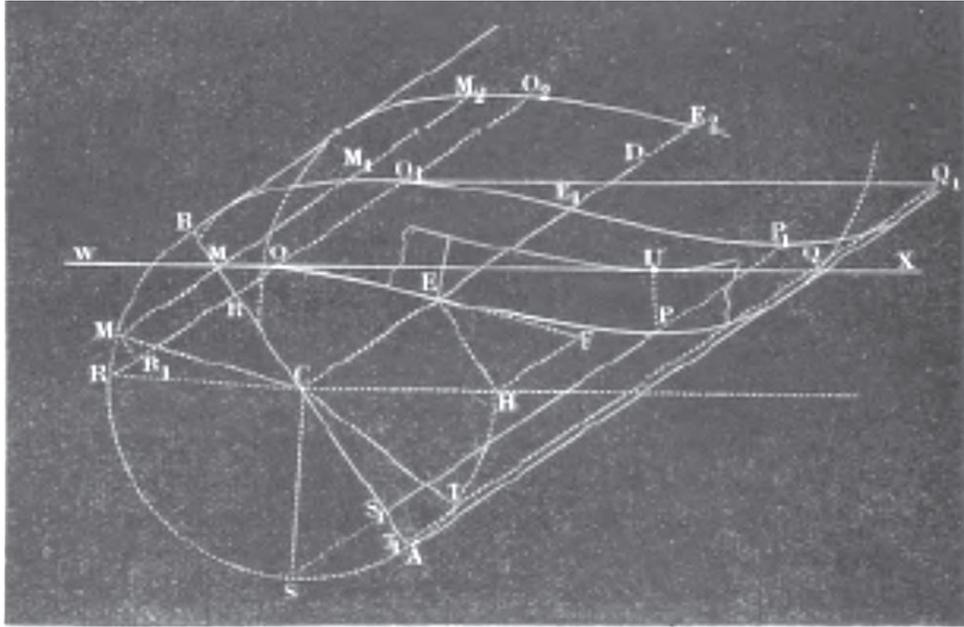


Fig. 2 L'elica su di un cilindro inclinato mostra chiaramente un massimo in O ed un minimo in Q. O determina la quota del pelo libero wx del liquido da sollevare [6].

Ripercorrendo gli studi che nel tempo si sono succeduti, la prima cosa che viene determinata è il cosiddetto *arco idroforo*.

Si scrivono le equazioni della elica appoggiata al cilindro interno- che è l'elica a maggiore pendenza e che quindi determina il pelo libero del liquido intrappolato -, operando una rotazione attorno ad un asse orizzontale e si determinano i massimi e i minimi di questa curva.

$$X = \begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \\ z = \frac{h}{2\pi} \varphi \end{cases}$$

dove r e φ sono il raggio e l'angolo generico, h è il passo dell'elica. Ruotando attorno all'asse x dell'angolo ϑ_V rispetto alla verticale con la matrice di trasformazione T

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta_V) & -\sin(\vartheta_V) \\ 0 & \sin(\vartheta_V) & \cos(\vartheta_V) \end{vmatrix}$$

si ottiene:

$$X_R = T \cdot X = \begin{cases} xr = r \cos(\vartheta_V) \\ yr = r \sin(\varphi) \cos(\vartheta_V) - \frac{h}{2\pi} \varphi \sin(\vartheta_V) \\ zr = r \sin(\varphi) \sin(\vartheta_V) + \frac{h}{2\pi} \varphi \cos(\vartheta_V) \end{cases}$$

uguagliando a zero la derivata prima della coordinata verticale z , si cercano gli estremanti al variare dell'angolo φ :

$$\frac{d z r}{d \varphi} = r \cos(\varphi) \sin(\vartheta_V) + \frac{h}{2\pi} \cos(\vartheta_V) = 0 \text{ da cui}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{-h}{2\pi r \tan(\vartheta_V)}$$

$$\varphi = \text{acos}\left(\frac{-h}{2\pi r \tan(\vartheta_V)}\right) + \pi n$$

l'angolo per il quale si ha il primo massimo della curva è:

$$\varphi_{MAX} = \text{acos}\left(\frac{-h}{2\pi r \tan(\vartheta_V)}\right)$$

Per $r = R_i$ e $n = 0$ si ha l'angolo per il quale l'elica presenta il massimo essendo la derivata seconda < 0

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d z r}{d \varphi} \right) = -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta_V)$$

è così tangente al piano individuato dal pelo libero della tasca

$$z r_{max} = R_i \sin(\varphi_{MAX}) \sin(\vartheta_V) + \frac{h}{2\pi} \varphi_{MAX} \cos(\vartheta_V)$$

Il livello minimo si ha per $n=1$ $\varphi_{MIN} = \text{acos}\left(\frac{-h}{2\pi r \tan(\vartheta_V)}\right) + \pi$

$$z r_{min} = R_i \sin(\varphi_{MIN}) \sin(\vartheta_V) + \frac{h}{2\pi} (\varphi_{MIN}) \cos(\vartheta_V)$$

La differenza fra queste due quote fornisce la distanza verticale fra il massimo ed il minimo della tasca.

Il punto estremo dell'arco è determinato l'intersezione del piano che passa per il punto di massimo con la curva stessa. In fig.3 si riportano le curve a vari diametri della coclea in funzione dell'angolo. In essa si può chiaramente individuare come la curva dell'elica avente diametro inferiore determina l'altezza del pelo libero dell'acqua intrappolata e come essa sia tangente al piano stesso.

Dopo vari tentativi, questa curva può essere utilmente interpolata mediante un polinomio del terzo ordine, i coefficienti del quale si possono determinare imponendo il passaggio per i due punti estremi e per il punto di

profondità massima dove la derivata sarà nulla. Nel caso dell'elica sul cilindro interno sarà anche nulla la derivata sul punto iniziale dato che il pelo libero sarà tangente all'elica.

$$z = p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4$$

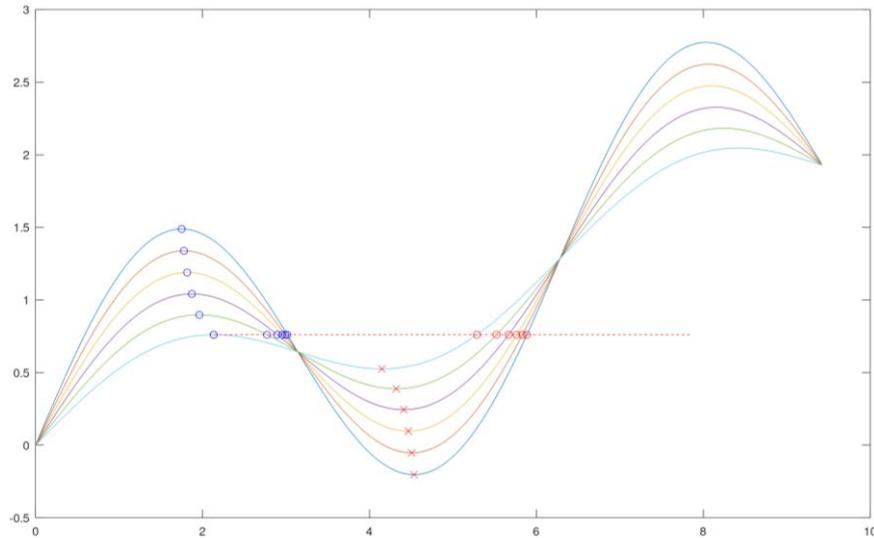


Fig.3 L'altezza delle eliche inclinate in funzione della coordinata angolare. Sono visibili i massimi e i minimi e il pelo libero del liquido che riempie la tasca

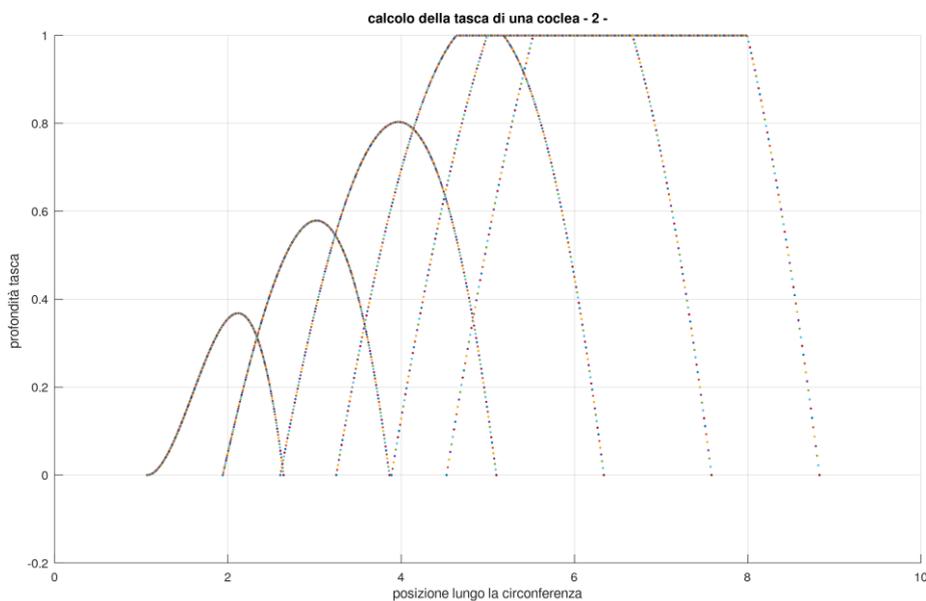


Fig. 4 Rappresentazione delle sezioni della tasca con interpolanti polinomiali. Si può notare la tangente al pelo libero sulla sezione presa in corrispondenza del cilindro interno e come, nelle ultime tre sezioni, l'altezza della tasca sia limitata dall'elica superiore (elica a due principi)

Noti i punti notevoli dell'arco idrovoro, si possono riportare sullo sviluppo della superficie laterale del cilindro che contiene l'elica, ottenendo il grafico di fig. 4 dove si possono vedere sulla retta dell'elica sviluppata i punti estremi dell'arco e si può riportare per ogni sezione dell'elica il corrispondente pelo libero dell'acqua della tasca considerata sulla superficie laterale del cilindro che la contiene. Per tenere conto della altezza della sezione della tasca con il pelo libero, occorre proiettare l'altezza della tasca, considerata sull'asse z, sulla superficie del cilindro che la contiene dividendo quindi questa distanza per il seno dell'angolo di inclinazione della macchina.

Segue il calcolo dell'area della sezione della tasca che può essere ottenuto per via analitica integrando l'espressione del polinomio fra i due estremi:

$$\int_{\text{inizio arco}}^{\text{fine arco}} (p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4) dx = \left[\frac{p_1 x^4}{4} + \frac{p_2 x^3}{3} + \frac{p_3 x^2}{2} + p_4 x \right]_{\text{inizio arco}}^{\text{fine arco}}$$

Il volume della tasca può così essere ottenuto sommando i contributi dei singoli volumi ottenuti moltiplicando l'area media, agli estremi di ogni singolo intervallo nel quale si è divisa la distanza fra il cilindro interno e quello esterno, per la distanza fra una sezione e l'altra.

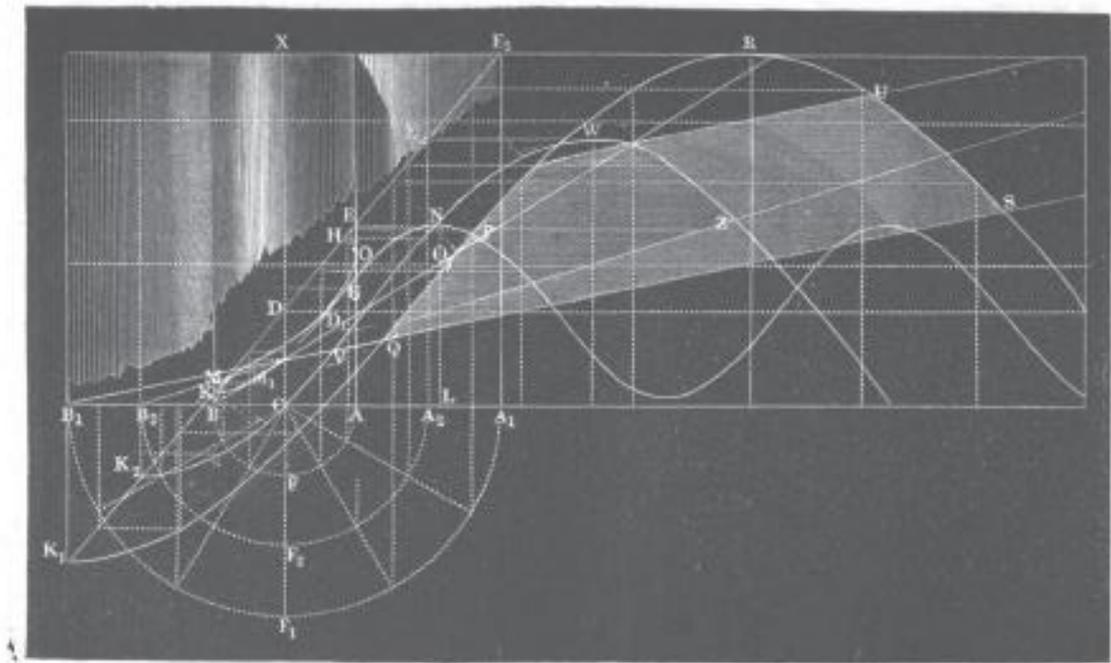


Fig. 5 La soluzione grafica di Weisbach [6]

Fa così piacere ritrovare con buona approssimazione, utilizzando il software Octave [7], i valori che Weisbach determinò per via grafica per una macchina avente i dati riportati in Tab 1. Nelle tabelle successive 2, 3 vengono riportati i risultati ottenuti.

Tab. 1 I dati della macchina ripresi da Weisbach [5]

Raggio esterno R_e	1.5
Raggio interno R_i	0.5
Angolo con l'orizzontale ϑ_V	40°
Passo	2
Num. Principi	2
n. giri/min	30

Tab. 2 Confronti delle aree delle 6 sezioni della singola tasca ripresi da Weisbach [5]

Weisbach	0,293	3,410	3,410	3,410	3,410	1,634
present	0.326	0.730	1.323	2.114	3.102	4.288

Tab. 3 Volume della tasca e portate della macchina

	Weisbach [5]	present	$\Delta\%$
Volume tasca con 5 sudd.	1.706	1.915	10.9%
Volume tasca con 10 sudd.		1.903	
Portata al minuto	102,36	114.2	10,4%

La differenza fra i volumi che è circa il 10%. Questa differenza è dovuta al modo nel quale Weisbach ha condotto l'integrazione, dato che nelle sei sezioni considerate, la superficie bagnata al raggio intermedio è stata valutata quattro volte rispetto a quelle che si hanno in corrispondenza dei raggi estremi. In Fig. 4 si vede come la tasca viene confinata dall'elica successiva dalla terza suddivisione (3 su 5). Il volume calcolato è pari a 1,915 con uno scarto del 10,9 % rispetto a quanto valutato da Weisbach. Raffinando il calcolo facendo intervenire più sezioni (10) lo scarto non varia molto, fissandosi al 10,4%.

Conclusioni

Il lavoro vuole essere un omaggio alle tante menti lucide che hanno studiato la macchina detta di Archimede. Viene qui proposta una nuova procedura approssimata per il calcolo analitico della portata della macchina,

riprendendo, per così dire passo dopo passo, la soluzione tentata nel quarto libro del *de Cochlea* da Guido Ubaldo Del Monte e quella ottenuta per via grafica da Weisbach. La soluzione proposta approssima con un polinomio del terzo ordine il contorno della tasca elicoidale sviluppato sulla superficie cilindrica che la contiene. I risultati vengono confrontati con quelli che ottenne per via grafica Weisbach per il calcolo delle aree (sezioni sviluppate della tasca a raggio costante), e per il calcolo del volume della tasca.

Bibliografia

- [1] Agnoli Gian Luigi, Molari Pier Gabriele, *La coclea per il sollevamento dell'acqua*, Scuola Officina, Museo del Patrimonio Industriale, 2018, Bologna, n. 2, anno XXXVII, luglio-dicembre, pagg. 28-33
- [2] Nagel Gerhard, *Archimedean Screw Pump Handbook*, Ritz Pumpenfabrik, 1968, Schwäbisch, Germania
- [3] Del Monte Guido Ubaldo, *De Cochlea liber quattuor* (1615) Venezia
- [4] Del Monte Guido Ubaldo, *Sulla Coclea Libri Quattro*, Tradotti e curati da Elena Magnini e Pier Gabriele Molari, 2013, Arnaldo Forni Editore, Sala Bolognese
- [5] Magnini Elena, Molari Pier Gabriele, *Archimedes' Screw in the Four Books "De Cochlea" by Guido Ubaldo Del Monte [Santa Maria]—Venice—1615: The Engineering and the Language*, in: F. Sorge, G. Genchi (eds.), *Essays on the History of Mechanical Engineering, History of Mechanism and Machine Science 31*, Springer Int. Publ. Switzerland, 2016, pp.255 -271
- [6] Julius Weisbach, *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik in drei Theilen. Dritter Theil: die Zwischen- und Arbeitsmaschinen enthaltend. Zweite Abtheilung: Die Arbeitsmaschinen*, Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn, 1851-1860, pp.811-828.
<https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.32044081576910;view=1up;seq=809>
- [7] Octave 9.1.0 GNU <https://octave.org/download>